

## Numerische Mathematik für Umwelttechniker und Maschinenbauer Wiederholungsblatt

Die nachfolgenden Aufgaben werden in der Übung  
am **8. Februar 2008** vorgerechnet.

1. Mit dem Gauß-Algorithmus ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -7 \\ -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

2. Lösen Sie mit der LR-Zerlegung das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -32 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrizen L und R an. Bestimmen Sie mit der LR-Zerlegung die Determinante der Matrix A.

3. Um welchen Faktor vergrößert sich der Aufwand des Gaußschen Verfahrens, wenn die Zahl der Gleichungen und Unbekannten verdoppelt wird? Was misst die Kondition einer Matrix? Welche Konsequenzen hat eine große Kondition? Wie berechnet man die Kondition einer symmetrischen Matrix?
4. Geben Sie die Iterationsvorschrift für das Sekantenverfahren an. Führen Sie drei Iterationen des Sekantenverfahrens für  $f(x) = x^2 - 2$  mit den Startwerten  $x_0 = 1$  und  $x_1 = 2$  zur näherungsweisen Berechnung von  $\sqrt{2}$  aus.
5. Bestimmen Sie näherungsweise einen Schnittpunkt der Kurven

$$2x = y^2 \quad \text{und} \quad y^2 - x^2 = 1,$$

indem Sie zwei Iterationen des Newton-Verfahrens mit dem Startwert  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  durchführen. Geben Sie mindestens einen Punkt  $(x, y)$  an, für den das Newton-Verfahren nicht durchführbar ist.

6. Nennen Sie einige Vor- und Nachteile des Newton-Verfahrens. Was bedeutet die Aussage „Das Newton-Verfahren konvergiert quadratisch“? Was ist Dämpfung und warum wird sie verwendet?
7. Die Funktion

$$p(n) = \sum_{k=0}^n k^2$$

ist ein Polynom dritten Grades in  $n$ . Bestimmen Sie dieses Polynom, indem Sie  $p$  in den Punkten  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$  und  $n = 3$  interpolieren.

8. Bestimmen Sie das Hermitesche Interpolationspolynom von  $f(x) = \sin(\pi x)$  zu den Knoten 0 und  $1/2$ . Geben Sie das Schema der dividierten Differenzen an.
9. Was passiert, wenn bei der Lagrange-Interpolation die Zahl der Knoten gegen Unendlich strebt? Wie kann man dieses Phänomen vermeiden? Was ist ein kubischer Spline?

10. Für das Integral

$$\int_0^1 4x^3 dx$$

soll mit Hilfe des Romberg-Verfahrens die Näherung  $T_{2,0}$  berechnet werden. Was fällt Ihnen auf?

11. Konstruieren Sie eine Quadraturformel für das Integral

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx,$$

indem Sie die Funktion  $f$  in den Knoten 0, 1 und 10 interpolieren und das Interpolationspolynom exakt integrieren. Wenden Sie die so gewonnene Quadraturformel auf  $f(x) = x^3$  an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

12. Was versteht man unter der Ordnung einer Quadraturformel? Was sind Newton-Cotes- bzw. Gauß-Quadraturformeln? Was passiert, wenn man bei Newton-Cotes-Formeln die Zahl der Knoten gegen Unendlich streben lasst? Wie kann man dieses Phänomen vermeiden?

13. Führen Sie für das AWP

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils zwei Schritte des expliziten und des impliziten Euler-Verfahrens mit der Schrittweite  $h = 0.1$  aus. Welches Ergebnis ist wohl genauer? Geben Sie eine Begründung.

14. Führen Sie für das AWP

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1$$

zwei Schritte des Crank-Nicolson-Verfahrens mit der Schrittweite  $h = 0.5$  aus.

15. Erläutern Sie einige Vor- und Nachteile expliziter und impliziter Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen. Wann sollte man auf jeden Fall implizite Verfahren benutzen? Geben Sie hierfür ein einfaches Beispiel an. Erläutern Sie den Unterschied zwischen Ein- und Mehrschrittverfahren. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Schrittweitenkontrolle.