Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

9. Dezember 2004

Numerik von Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 9

Termin: Donnerstag, 6. Januar 2005

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängendes und beschränktes Gebiet. Weiterhin setzen wir voraus, dass $u \in C^6(\overline{\Omega})$ erfüllt ist. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_{kl} \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\sum_{k=-2}^{2} a_{k0}\, u(x+kh,y) + \sum_{l=-2}^{2} a_{0l}\, u(x,y+lh) = \triangle u(x,y) + \mathscr{O}(h^4)$$

gilt. Dabei nehmen wir natürlich an, dass alle auftretenden Punkte in $\overline{\Omega}$ liegen.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und zusammenhängend. Zeigen Sie, dass für $u \in C^8(\overline{\Omega})$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6h^2}\Big(20\,u(x,y) - 4\big[u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)\big] \\
&\qquad - \big[u(x+h,y+h)+u(x+h,y-h)+u(x-h,y+h)-u(x-h,y-h)\big]\Big) \\
&= -\triangle u(x,y) - \frac{h^2}{12}\triangle^2 u(x,y) - \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\triangle u(u,y) + \mathscr{O}(h^6)
\end{aligned}$$

gilt.