Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

30. November 2004

Numerik von Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 8

Termin: Donnerstag, 16. Dezember 2004

1. Sei $n \geq 2$ eine beliebige, aber feste natürliche Zahl. Wir betrachten die Tridiagonalmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = j, \\ -1, & |i-j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Weiterhin ist $\vartheta := \pi/(n+1)$. Zeigen Sie für $j = 1, \ldots, n$, dass der Vektor
$$x_j := \big(\sin(j\vartheta), \sin(2j\vartheta), \ldots, \sin(nj\vartheta)\big)^T \in \mathbb{R}^n$$
der Eigenvektor von A zum Eigenwert
$$\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\vartheta)$$
ist. Welche Bedingung muss α erfüllen, damit A positiv definit ist?

2. Die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei beliebig oft stetig differenzierbar. Berechnen Sie durch eine Taylor-Entwicklung im Punkt t für folgenden Differenzenformeln jeweils, welche Ableitung in t approximiert wird, sowie die Ordnung des ersten Terms der Fehlerentwicklung.

   a) $\dfrac{-u(t+2h)+4u(t+h)-3u(t)}{2h}$

   b) $\dfrac{3u(t)-4u(t-h)+u(t-2h)}{2h}$

   c) $\dfrac{2u(t+3h)-9u(t+2h)+18u(t+h)-11u(t)}{6h}$

   d) $\dfrac{u(t+h)-2u(t)+u(t-h)}{h^2}$

3. Ermitteln Sie mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung die Werte von α, β und γ in Abhängigkeit von h und k so, dass der Ausdruck $\alpha u(x-k) + \beta u(x) + \gamma u(x+h)$ eine Approximation der zweiten Ableitung $u''(x)$ ist. Dabei seien $h, k > 0$ und u hinreichend glatt.