

Numerik von Differentialgleichungen Aufgabenblatt 7

Termin: Donnerstag, 9. Dezember 2004

1. Wir betrachten das Randwertproblem

$$y''(x) = g(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

mit $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

a) Man zeige, dass y in der Form

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) g(s) ds \quad \text{mit} \quad G(x, s) := \begin{cases} s(x-1) & 0 \leq s \leq x \leq 1, \\ x(s-1) & 0 \leq x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Lösung des obigen Randwertproblems ist.

b) Seien y_1, y_2 die jeweiligen Lösungen des obigen Randwertproblems für die rechten Seiten $g_1, g_2 \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass aus

$$|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

die Abschätzung

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} x(1-x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

folgt.

2. Wir betrachten für $\varepsilon > 0$ die Familie von Randwertproblemen

$$-\varepsilon z''(x) + z'(x) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0.$$

Bestimmen Sie die Lösung z in Abhängigkeit vom Parameter ε und skizzieren Sie die Lösungskurven für $\varepsilon = 1/4, 1/8, 1/16$ und den Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$.

bitte wenden

3. Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$\frac{1}{100}z''(x) - z'(x) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0$$

mittels des Differenzenverfahrens und der Schrittweite $h = 1/4$. Benutzen Sie zur Diskretisierung der ersten Ableitung

- a) den symmetrischen Differenzenquotienten

$$z'(x_i) \approx \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h},$$

- b) den rechtsseitigen Differenzenquotienten

$$z'(x_i) \approx \frac{z_{i+1} - z_i}{h},$$

- c) den linksseitigen Differenzenquotienten

$$z'(x_i) \approx \frac{z_i - z_{i-1}}{h}.$$

Berechnen Sie jeweils den maximalen Fehler zur tatsächlichen Lösung.