Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

10. November 2004

Numerik von Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 6

Termin: Donnerstag, 2. Dezember 2004

1. Man bestimme für das 2-Schritt-Verfahren

$$\eta_{j+2} - \eta_j = \frac{h}{3}\big(f(x_{j+2}, \eta_{j+2}) + 4f(x_{j+1}, \eta_{j+1}) + f(x_j, \eta_j)\big)$$

   und die Mittelpunktsregel

$$\eta_{j+2} = \eta_j + 2hf(x_{j+1}, \eta_{j+1})$$

   möglichst große reelle Zahlen α und β, so dass die Mengen

$$A := \{z \in \mathbb{C} : -\alpha \leq \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}, \qquad B := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0,\ |\operatorname{Im} z| \leq \beta\}$$

   noch im Stabilitätsbereich des Verfahrens liegen.

2. Das Stabilitätsgebiet eines r-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens ist

$$S := \{\mu \in \mathbb{C} : |g(\mu)| \leq 1\},$$

   dabei ist

$$g(\mu) := 1 + \mu b^T (I - \mu A)^{-1} e$$

   die Funktion aus Aufgabe 1 von Blatt 3 und $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^r$. Man bestimme für die modifizierte Trapezregel und das klassische Runge-Kutta-Verfahren eine möglichst große reelle Zahl α, so dass

$$\{z \in \mathbb{C} : -\alpha \leq \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\} \subset S$$

   gilt.

bitte wenden

3. Bei der Ortsdiskretisierung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x), \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0,$$

entsteht das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0$$

mit

$$A := \frac{1}{(\Delta x)^2}\mathrm{tridiag}(1,-2,1) \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \Delta x := \frac{1}{N+1},$$
$$x_i := i\Delta x, \quad 1 \le i \le N.$$

Schreiben Sie ein Programm, dass das obige Differentialgleichungssystem mit Hilfe der rückwärtigen Differentiationsformeln

$$\eta_{j+2} - \frac{4}{3}\eta_{j+1} + \frac{1}{3}\eta_j = \frac{2}{3}hf(t_{j+2}, \eta_{j+2})$$

und

$$\eta_{j+3} - \frac{18}{11}\eta_{j+2} + \frac{9}{11}\eta_{j+1} - \frac{2}{11}\eta_j = \frac{6}{11}hf(t_{j+3}, \eta_{j+3})$$

zu einer festen Schrittweite Δt löst.

Für den Parameter N wählen wir die Werte 10 und 20. Als Schrittweite Δt benutzen wir 0.1, 0.01 und 0.001. Den Anfangswertevektor y_0 greifen wir von

$$u_0(x) = \sin(\pi x) + 100\sin(2\pi x)$$

ab. Die notwendigen Werte für η_1 bzw. η_1 und η_2 werden mit der modifizierten Trapezregel ermittelt.

Bestimmen Sie den jeweiligen Lösungsvektor $\eta(T)$ für $T = 1/2$ und $T = 1$ sowie den maximalen Fehler

$$\max_{1\le i\le N} |\eta(x_i, T) - u(x_i, T)|,$$

wobei

$$u(t,x) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + 100e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$$

die Lösung der obigen Wärmeleitungsgleichung ist.