

Numerik von Differentialgleichungen Aufgabenblatt 2

Termin: Donnerstag, 28. Oktober 2004

1. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1.$$

- Bestimmen Sie die Lösung y des Anfangswertproblems. Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?
 - Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren auf das obige AWP an und ermitteln Sie die explizite Darstellung der jeweiligen Näherungslösung η_n .
 - Wie muss für die einzelnen Verfahren die Schrittweite h gewählt werden, damit η_n für $n \rightarrow \infty$ das gleiche asymptotische Verhalten wie die Lösung y hat.
2. Die Gesamtenergie E eines Federpendels der Masse m und der Federkonstanten D ist durch

$$E(t) := \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + \frac{D}{2} x^2(t)$$

gegeben. Dabei ist $x(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage zum Zeitpunkt t und $\dot{x} = dx/dt$. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

mit $\omega^2 = D/m$.

- Mit Hilfe der neuen Variablen $y_1 := \dot{x} + i\omega x$ und $y_2 := \dot{x} - i\omega x$ schreibe man die obige Dgl als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.
 - Lösen Sie das so entstandene System erster Ordnung mit dem expliziten Euler-Verfahren, dem impliziten Euler-Verfahren und dem Crank-Nicolson-Verfahren unter den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.
 - Berechnen Sie für ein festes $t = nh$ die Gesamtenergie der gefundenen Näherungslösung. Gilt der Energieerhaltungssatz?
3. Man zeige, dass das Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x, y; h) := f(x, y) + \frac{h}{2} g(x + h/3, y + h/3 \cdot f(x, y))$$

und $g(x, y) := f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)$ die Ordnung 3 hat.