

Numerik von Differentialgleichungen Aufgabenblatt 12

Termin: Donnerstag, 3. Februar 2005

1. Sei Ω das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(7,0)$ und $(0,7)$. Skizzieren Sie das Gitter Ω_h zur Schrittweite $h = 1$. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Fünf-Punkt-Diskretisierung von

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = xy \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega$$

auf. Verwenden Sie dazu $g_h(x,y) = xy$ als diskrete Randbedingung. Lösen Sie das Gleichungssystem.

2. Schreiben Sie ein Programm zur Lösung der Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \quad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega. \quad (1)$$

mit Hilfe der Fünf-Punkte-Diskretisierung.

Sei f so gewählt, dass $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ die Lösung von (1) ist. Berechnen Sie für $h = 2^{-\ell}$, $\ell = 2, \dots, 6$, jeweils die diskrete Lösung u_h . Bestimmen Sie für jedes h die betragsmäßig größte Abweichung zwischen der Lösung u von (1) und der diskreten Näherung u_h . Überprüfen Sie numerisch die Voraussagen über die Konvergenzordnung.