Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

10. Januar 2005

# Numerik von Differentialgleichungen
# Aufgabenblatt 11

Termin: Donnerstag, 20. Januar 2005

1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$-\triangle u = f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Für die natürliche Zahl $n$ sei die Schrittweite $h := 1/(n+1)$. Wir betrachten die Fünf-Punkt-Diskretiserung $L_h u = f$ mit

$$(L_h u)(x,y) := \frac{1}{h^2}\Big(4u(x,y) - u(x-h,y) - u(x+h,y) - u(x,y-h) - u(x,y+h)\Big)$$

mit $(x,y) \in \Omega_h := \{(ih, jh), 1 \le i, j \le n\}$.

a) Zeigen Sie, dass für $i, j = 1\ldots,n$ durch

$$\lambda^{ij} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2\left(\frac{i\pi h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2}\right)\right)$$

ein Eigenwert von $L_h$ mit dem zugehörigen Eigenvektor

$$u^{ij}(x,y) = \sin(i\pi x)\sin(j\pi y)$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix $L_h$ symmetrisch und positiv definit ist.

c) Zeigen Sie, dass die Abschätzungen

$$\|L_h\|_\infty \le \frac{8}{h^2}, \qquad \|L_h\|_2 \le \frac{8}{h^2}\cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) < \frac{8}{h^2},$$

$$\|L_h^{-1}\|_2 \le \frac{h^2}{8\sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)} \le \frac{1}{\pi^2}$$

gelten.

bitte wenden

2. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, offenes und zusammenhängendes Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die Vorwärts- und Rückwärts-Differenzenquotienten der Zusammenhang
$$T := \partial^+_{h,k}\left(\partial^-_{h,k} u\right) = \partial^-_{h,k}\left(\partial^+_{h,k} u\right), \qquad 1 \le k \le n,$$
besteht. Weisen Sie weiterhin nach, dass
$$T = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^4}\big(x + \vartheta h e_k\big), \qquad \vartheta \in (-1,1),$$
für $u \in C^4(\Omega, \mathbb{R})$ gilt.

3. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und zusammenhängendes Gebiet und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass
$$\partial^-_{h,k}(f \partial^+_{h,k} g)(x) = \frac{1}{h}\big[f(x)\partial^+_{h,k} g(x)\big] - \frac{1}{h}\big[f(x - he_k)\partial^-_{h,k} g(x)\big]$$
gilt.

4. Auf dem Raum $X_h$ definieren wir durch
$$(u,v)_h := h^n \sum_{x \in \Omega_h} u(x)v(x), \qquad u,v \in X_h$$
ein diskretes $L^2$-Skalarprodukt, wobei $n$ die Raumdimension bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in X_h$ die folgenden Formel der diskreten partiellen Integration
$$\left(\partial^-_{h,k} u, v\right)_h = -\left(u, \partial^+_{h,k} v\right)_h$$
gilt.