Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

3. Januar 2005

Numerik von Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 10

Termin: Donnerstag, 13. Januar 2005

1. Gegeben ist das Randwertproblem

$$-\triangle u = 0 \qquad \text{in } (-1,1)^2 \setminus (-1,0)^2$$

   mit den Randbedingungen

$$u(x,y) = \begin{cases} 1-6x^2+x^4 & |y|=1, \\ 1-6y^2+y^4 & |x|=1, \\ x^4 & y=0, \\ y^4 & x=0. \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, dass die Lösung des obigen RWP spiegelsymmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$ ist.
   b) Diskretisieren Sie das Problem mit dem Fünf-Punkte-Stern und der Schrittweite $h = 1/2$. Lösen Sie das entstehende lineare Gleichungssystem. Untersuchen Sie, ob die errechnete diskrete Lösung auch an der Gerade $y = x$ spiegelsymmetrisch ist.

2. Wir betrachten die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f$$

   in einem beschränkten und zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Transformation $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ besitze in jedem Punkt $x \in \Omega$ eine reguläre Funktionalmatrix $S(x) := D\Psi(x)$. Wir setzen $\Omega' := \Psi(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die transformierte Differentialgleichung auf Ω' den gleichen Typ wie die ursprüngliche Differentialgleichung auf Ω hat.
   Hinweis: Matrizen, die durch Basistransformationen auseinander hervorgegangen sind, haben die gleiche Anzahl von positiven und negativen Eigenwerten. (Trägheitssatz von Sylvester)