Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

7. Oktober 2004

Numerik von Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 1

Termin: Donnerstag, 21. Oktober 2004

1. Gegeben seien zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems

   $$y'(x) = \frac{g(x)}{f\big(y(x)\big)}, \qquad y(x_0) = y_0,$$

   durch

   $$y(x) = F^{-1}\big(G(x)\big)$$

   gegeben ist, wobei F und G Stammfunktionen von f bzw. g sind, die $F(y_0) = G(x_0)$ erfüllen. Mit F^{-1} sei die Umkehrfunktion von F bezeichnet.

2. Gegeben sei das Anfangswertproblem

   $$y'(x) = x\big(1 + y^2(x)\big), \qquad y(0) = 0.$$

   Bestimmen Sie die Lösung und machen Sie eine Probe.

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei einmal stetig differenzierbar mit

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \le K < 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   Mit $y(x;s)$ bezeichnen wir die Lösung des Anfangswertproblems

   $$\frac{d}{dx} y(x;s) = f\big(x, y(x;s)\big), \qquad y(x_0;s) = s.$$

   Zeigen Sie, dass für alle $x \ge x_0$ die Abschätzung

   $$\big|y(x;s) - y(x;t)\big| \le |s - t| e^{K(x-x_0)}$$

   gilt.
   Hinweis: Integrieren Sie die Dgl auf, wenden Sie auf den Integranden den Mittelwertsatz und anschliessend die Beschränktheit der partiellen Ableitung an. Dann kann das Lemma von Gronwall verwendet werden.