Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

5. Juni 2008

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 8

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 19. Juni 2008

1. (6 Punkte)
   Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ definieren wir die Matrix A_n durch

$$A_n := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A_n)_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{falls } i = j, \\ -1, & \text{falls } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   a) (2 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_4\, x = b$ mit

$$b^T = (1, 2, 3, 4)$$

   mit Hilfe des Thomas-Algorithmus.

   b) (2 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_5\, x = b$ mit

$$b^T = (-1, -1, -1, -1, 17)/18$$

   mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

   c) (2 Punkte) Wir betrachten nun den Fall eines beliebigen $n \geq 2$. Die Matrix $A_n^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$ entstehe aus A_n durch die Anwendung von $k-1$ Schritten des Gaußschen Algorithmus. Wie sehen die Elemente $a_{kk}^{(k)}$ und $a_{k,k+1}^{(k)}$ für $1 \leq k \leq n$ aus? Man beweise die Vermutung durch vollständige Induktion.

2. (6 Punkte)
   Sei A eine Matrix mit der Bandbreite m, d. h.

$$a_{ij} = 0, \quad \text{falls } |i-j| > m.$$

   a) (2 Punkte) Man zeige: Falls eine LR-Zerlegung ohne Pivotisierung durchführbar ist, dann haben die Matrizen L und R auch eine Bandbreite von m.

   b) (2 Punkte) Man zeige: Bei Spaltenpivotisierung hat R maximal die Bandbreite $2m$, und L hat höchstens $m+1$ von 0 verschiedene Elemente pro Spalte.

   c) (2 Punkte) Man berechne die Anzahl der benötigten Additionen, Multiplikationen und Divisionen zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ (wobei A die Bandbreite m hat) mittels LR-Zerlegung ohne Pivotisierung (aufgeteilt in Eliminations- und Rücklöseschritt).

bitte wenden

3. (4 Punkte)
Für $x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ definieren wir die Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,d} |x_i|.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die Ungleichungen

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\|_2$$

gelten.