

Einführung in die Numerik Aufgabenblatt 3

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 8. Mai 2008

1. (4 Punkte)

Seien $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$ und $a \leq x_{l-1} < x_l < x_{l+1} \leq b$. Zeigen Sie durch Taylor-Entwicklung (bis zum Term vierter Ordnung) von f in x_l , dass

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{l+1}) - f(x_l)}{h_l} - \frac{f(x_l) - f(x_{l-1}))}{h_{l-1}} &= f''(x_l) \frac{h_l + h_{l-1}}{2} + f'''(x_l) \frac{h_l^2 - h_{l-1}^2}{6} \\ &\quad + f^{(4)}(x_l + \vartheta_1 h_l) \frac{h_l^3}{24} + f^{(4)}(x_l - \vartheta_2 h_{l-1}) \frac{h_{l-1}^3}{24} \end{aligned}$$

gilt, wobei $h_{l-1} = x_l - x_{l-1}$, $h_l = x_{l+1} - x_l$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 1]$ sind.

2. (4 Punkte)

Seien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$, $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ und

$$Q_{[a,b]}(f) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) + \frac{h_i^2}{12} (f'(x_{i-1}) - f'(x_i)) \right)$$

eine Quadraturformel mit $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.

- a) (1,5 Punkte) Man zeige, dass die Quadraturformel für alle Splines $s \in S_n^3$ exakt ist.
- b) (1 Punkt) Wie vereinfacht sich die Formel für äquidistante Knoten?
- c) (1,5 Punkte) Für das Integral

$$I := \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

berechne man mit dieser Quadraturformel die Näherungswerte für $n = 1, 2, 4, 8$ zu den äquidistanten Knoten $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$.

3. (4 Punkte)

Man zeige, dass die folgenden Quadraturformeln die angegebene Ordnung haben.

a) (2 Punkte) Ordnung $r = 5$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left[f(-\sqrt{3/2}) + 4f(0) + f(\sqrt{3/2}) \right]$$

Hinweis: Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

b) (2 Punkte) Ordnung $r = 3$

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx \approx \frac{2 + \sqrt{2}}{4} f(2 - \sqrt{2}) + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} f(2 + \sqrt{2})$$

4. (4 Punkte)

Bestimmen Sie in der Quadraturformel der Form $Q(f) = a f(x_0)$ für das gewichtete Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(x) \sqrt{x} dx$$

die Werte von a und x_0 so, dass die Ordnung maximal wird. Berechnen Sie $Q(x^2)$ und vergleichen Sie mit $I(x^2)$.