Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

23. Mai 2006

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 8-9

Abgabe: Donnerstag, 22. Juni 2006

1. (6 Punkte)
   Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ definieren wir die Matrix A_n durch

$$A_n := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (A_n)_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{falls } i = j, \\ -1, & \text{falls } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   a) (2 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_4\, x = b$ mit
   $$b^T = (1,2,3,4)$$
   mit Hilfe des Thomas-Algorithmus.

   b) (2 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_5\, x = b$ mit
   $$b^T = (-1,-1,-1,-1,17)/18$$
   mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

   c) (2 Punkte) Wir betrachten nun den Fall eines beliebigen $n \geq 2$. Die Matrix $A_n^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$ entstehe aus A_n durch die Anwendung von $k-1$ Schritten des Gaußschen Algorithmus. Wie sehen die Elemente $a_{kk}^{(k)}$ und $a_{k,k+1}^{(k)}$ für $1 \leq k \leq n$ aus? Man beweise die Vermutung durch vollständige Induktion.

2. (6 Punkte)
   Sei A eine Matrix mit der Bandbreite m, d. h.
   $$a_{ij} = 0, \quad \text{falls } |i-j| > m.$$

   a) (2 Punkte) Man zeige: Falls eine *LR*-Zerlegung ohne Pivotisierung durchführbar ist, dann haben die Matrizen L und R auch eine Bandbreite von m.

   b) (2 Punkte) Man zeige: Bei Spaltenpivotisierung hat R maximal die Bandbreite $2m$, und L hat höchstens $m+1$ von 0 verschiedene Elemente pro Spalte.

   c) (2 Punkte) Man berechne die Anzahl der benötigten Additionen, Multiplikationen und Divisionen zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (wobei A die Bandbreite m hat) mittels *LR*-Zerlegung ohne Pivotisierung (aufgeteilt in Eliminations- und Rücklöseschritt).

3. (4 Punkte)
   Für $x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ definieren wir die Normen
   $$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,d} |x_i|.$$

bitte wenden

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die Ungleichungen

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{d}\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le d\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{d}\|x\|_2$$

gelten.

4. (6 Punkte)
Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ die üblichen Normen auf dem $\mathbb{R}^d$.

   a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die zu $\|\cdot\|_1$ gehörige Matrixnorm die Spaltensummennorm ist, d.h., es gilt

   $$\|A\|_1 = \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|.$$

   b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Kondition der Matrix

   $$A := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   bezüglich $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.

5. (5 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \\ 17 \\ 25 \end{pmatrix}$$

mittels der Cholesky-Zerlegung.

6. (5 Punkte)
Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Als Frobenius-Norm (oder Schur-Norm) von A definieren wir

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   a) (1 Punkt) $\|\cdot\|_F$ ist eine Norm auf dem Raum der $n \times n$-Matrizen.

   b) (1 Punkt) $\|AB\|_F \le \|A\|_F \, \|B\|_F$ für alle $n \times n$-Matrizen A, B.

   c) (1 Punkt) $\|\cdot\|_F$ ist nicht zu einer Vektornorm zugehörig.

   d) (1 Punkt) $\|A\|_F = sp(A^T A)^{1/2}$, wobei

   $$sp(M) := \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

   die Spur der Matrix M ist.

   e) (1 Punkt) $\|A\|_F = \|QAQ^T\|_F$ für alle orthogonalen $n \times n$-Matrizen Q.