Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

11. Mai 2006

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 6

Abgabe: **DIENSTAG**, 23. Mai 2006

1. (4 Punkte)
Die Fibonacci-Folge (y_n) ist rekursiv durch
$$y_0 := 1, \quad y_1 := 1, \qquad y_n := y_{n-1} + y_{n-2}, \quad n \geq 2,$$
definiert. Die Folge (x_n) ist durch
$$x_n := \frac{y_{n+1}}{y_n}$$
gegeben. Untersuchen Sie die Folge (x_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

2. (4 Punkte)
Man zeige, dass die Iteration
$$x_{k+1} := \cos(x_k), \qquad k \geq 0,$$
für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt ξ mit $\xi = \cos(\xi)$ konvergiert.

3. (4 Punkte)
Seien $I := [-1, +1] \subset \mathbb{R}$ und $f \in C(I, \mathbb{R})$ mit $f(I) \subset I$. Zeigen Sie, dass die Funktion f mindestens einen Fixpunkt $x^* \in I$ besitzt.

4. (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 1$.

   a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Folge
   $$x_{i+1} := \frac{n-1}{n} x_i + \frac{a}{n x_i^{n-1}}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$
   für jedes $x_0 \geq 1$ gegen $\sqrt[n]{a}$ konvergiert.

   b) (2 Punkte) Sei nun speziell $n = 2$ und $a = 2$. Berechnen Sie unter Ausnutzung der a posteriori Abschätzung aus dem Banachschen Fixpunktsatzes mit obiger Rekursion eine Näherung y für $\sqrt{2}$ mit $|y - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$. Vergleichen Sie die Anzahl der benötigten Iterationen mit der Anzahl, die man nach der a priori Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes erwarten würde.