Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

19. April 2006

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 3

Abgabe: Donnerstag, 4. Mai 2006

1. (4 Punkte)
   Seien $f \in C^4([a,b],\mathbb{R})$ und $a \le x_{l-1} < x_l < x_{l+1} \le b$. Zeigen Sie durch Taylor-Entwicklung (bis zum Term vierter Ordnung) von f in x_l, dass

$$\begin{aligned}\frac{f(x_{l+1})-f(x_l)}{h_l} - \frac{f(x_l)-f(x_{l-1})}{h_{l-1}} = & f''(x_l)\frac{h_l+h_{l-1}}{2} + f'''(x_l)\frac{h_l^2-h_{l-1}^2}{6} \\ & + f^{(4)}\big(x_l+\vartheta_1 h_l\big)\frac{h_l^3}{24} + f^{(4)}\big(x_l-\vartheta_2 h_{l-1}\big)\frac{h_{l-1}^3}{24}\end{aligned}$$

   gilt, wobei $h_{l-1} = x_l - x_{l-1}$, $h_l = x_{l+1} - x_l$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0,1]$ sind.

2. (4 Punkte)
   Seien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$, $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und

$$Q_{[a,b]}(f) := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{2}\Big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big) + \frac{h_i^2}{12}\Big(f'(x_{i-1}) - f'(x_i)\Big)\right)$$

   eine Quadraturformel mit $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$.

   a) (1,5 Punkte) Man zeige, dass die Quadraturformel für alle Splines $s \in S_n^3$ exakt ist.
   b) (1 Punkt) Wie vereinfacht sich die Formel für äquidistante Knoten?
   c) (1,5 Punkte) Für das Integral

$$I := \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$$

   berechne man mit dieser Quadraturformel die Näherungswerte für $n = 1,2,4,8$ zu den äquidistanten Knoten $x_i = i/n$, $i = 0,\ldots,n$.

bitte wenden

3. (4 Punkte)
Man zeige, dass die folgenden Quadraturformeln die angegebene Ordnung haben.

a) (2 Punkte) Ordnung $r = 5$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[f(-\sqrt{3/2}) + 4f(0) + f(\sqrt{3/2})\right]$$

Hinweis: Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

b) (2 Punkte) Ordnung $r = 3$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

4. (4 Punkte)
Bestimmen Sie in der Quadraturformel der Form $Q(f) = a\, f(x_0)$ für das gewichtete Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\sqrt{x}\, dx$$

die Werte von a und x_0 so, dass die Ordnung maximal wird. Berechnen Sie $Q(x^2)$ und vergleichen Sie mit $I(x^2)$.