

## Einführung in die Numerik Aufgabenblatt 2

Abgabe: Donnerstag, 27. April 2006

1. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für  $X := C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $V := P_3$  und

$$\ell_1(f) = f(-1), \quad \ell_2(f) = f'(-1), \quad \ell_3(f) = f'(1), \quad \ell_4(f) = f(2)$$

das Interpolationproblem

Finde zu  $f \in X$  ein  $p \in V$  mit  $\ell_i(f) = \ell_i(p)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

nicht wohlgestellt ist.

2. (4 Punkte)

Sei  $f(x) = \cos(x)$  gegeben. Wir betrachten die rationale Approximation

$$r(x) = \frac{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4}{1 + b_2x^2},$$

die Padé-Approximation genannt wird. Unter Verwendung der Reihenentwicklung

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

bestimme man die Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  und  $b_2$  von  $r$  so, dass

$$f(x) - r(x) = \gamma_8 x^8 + \gamma_{10} x^{10} + \dots$$

gilt.

3. (4 Punkte)

Für die Funktion  $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist das Interpolationspolynom  $H_n f \in P_n$  durch die Bedingungen

$$(H_n f)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, n,$$

bestimmt. Zeigen Sie, dass

$$(H_n f)(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

gilt. Das gesuchte Interpolationspolynom ist also das Taylor-Polynom.

bitte wenden

4. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

und den interpolierenden, natürlichen, kubischen Spline  $s$  zu  $f$  und den Knoten  $-2, -1, 0, 1$  und  $2$ . Geben Sie den Spline auf dem Intervall  $[-1, 0]$  an und berechnen Sie damit  $s(-1/2)$ .