Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

27. Juni 2006

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 11

Abgabe: Donnerstag, 6. Juli 2006

1. (8 Punkte)
   Wir betrachten die Matrix-Familie
   $$A(\alpha,\gamma)=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ \alpha & 1 & \gamma\\ 0 & \gamma & 1\end{pmatrix}$$
   mit reellen Parametern α und γ.
   a) (2 Punkte) Unter welchen Bedingungen an α und γ ist $A(\alpha,\gamma)$ positiv definit?
   b) (2 Punkte) Für welche Parameter konvergiert das Jacobi-Verfahren?
   c) (2 Punkte) Für welche Parameter konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren?
   d) (2 Punkte) Im Falle der Konvergenz beider Verfahren bestimme man das Verfahren, dass die bessere Konvergenz sichert.

2. (8 Punkte)
   Für $n \geq 2$ betrachten wir die Tridiagonalmatrix $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit
   $$a_{ij}=\begin{cases}2, & i=j,\\ -1, & |i-j|=1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$
   Nach Aufgabe 3 von Blatt 10 sind die Eigenwerte von A durch
   $$\lambda_j = 2-2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad j=1,\ldots,n,$$
   gegeben.
   a) (3 Punkte) Wie groß ist, in Abhängigkeit von n, der Spektralradius der Iterationsmatrix für die Richardson-Relaxation mit optimalem Parameter?
   b) (2 Punkte) Geben Sie das asymptotische Verhalten des ermittelten Spektralradius für große n in der Form $1-C\cdot n^{\alpha}$ an.
   c) (3 Punkte) Sei nun $n=100$. Wieviele Iterationsschritte sind im Mittel durchzuführen, damit sich das Residuum um den Faktor 0.01 reduziert?