Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

19. Juni 2006

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 10

Abgabe: Donnerstag, 29. Juni 2006

1. (3 Punkte)
   Die Matrix A habe mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert. Zeigen Sie, dass die Richardson-Relaxation für alle Parameter $\omega \in \mathbb{C}$ divergiert.

2. (3 Punkte)
   Das Spektrum $\sigma(A)$ einer Matrix A liege in einem abgeschlossenen Kreis um $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit den Radius $r < |\mu|$. Zeigen Sie, dass die Richardson-Relaxation für den Parameter $\omega = \mu$ konvergiert.

3. (4 Punkte)
   Sei $n \geq 2$ eine beliebige, aber feste natürliche Zahl. Wir betrachten die Tridiagonalmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
   $$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = j, \\ -1, & |i-j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Weiterhin ist $\vartheta := \pi/(n+1)$. Zeigen Sie für $j = 1,\ldots,n$, dass der Vektor
   $$x_j := \big(\sin(j\vartheta), \sin(2j\vartheta), \ldots, \sin(nj\vartheta)\big)^T \in \mathbb{R}^n$$
   der Eigenvektor von A zum Eigenwert
   $$\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\vartheta)$$
   ist. Welche Bedingung muss α erfüllen, damit A positiv definit ist?

4. (6 Punkte)
   Schreiben Sie ein kommentiertes Programm in einer gängigen Programmiersprache zur iterativen Lösung der linearen Gleichungssystems mit Hilfe der Richardson-Relaxation.

   Führen Sie 20 Iterationsschritte der Richardson-Relaxation mit dem optimalen Parameter ω_{opt} zur näherungsweisen Lösung von $Ax = b$ aus, wobei A die Matrix aus Aufgabe 3 für $n = 15$ und $\alpha = 3$ ist. Weiterhin sei $b = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/15)^T$. Starten Sie mit $x_0 = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

   Wie groß ist der optimale Parameter ω_{opt}? Geben Sie die Lösung x^* von $Ax = b$, die Iterierte x_{20} und den Fehler von x_{20} zu x^* in der Maximumsnorm an?