

**Studierendenkonferenz
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
an der Ruhr-Universität Bochum**

1. und 2. Oktober 2009



Wir möchten uns ganz herzlich bei allen Gutachtern bedanken.

Auf der Konferenz werden Preise für besonders gute Abschlussarbeiten vergeben. Die Buch-Preise werden vom *Springer-Verlag* gestiftet. Die Gastaufenthalte werden ermöglicht durch

- Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik, Kaiserslautern,
- Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn,
- Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach,
- Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn,
- Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig,
- RWTH Aachen,
- Zuse-Institut Berlin.

Die Preise für die besten Staatsexamensarbeiten wurden von der Konferenz der mathematischen Fachbereiche (KMathF) gespendet. Vor Ort unterstützt uns finanziell der Verein zur Förderung der Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum.

Inhalt

Programm	Seite 2–4
Zusammenfassungen (in alphabetischer Reihenfolge der Nachnamen)	Seite 5–34
Lageplan der RUB	Seite 35
Hinweise zur Mensa und zum Abendessen	Seite 36

Programm

Das Vortragsprogramm für den 1. Oktober:

- 13 : 00 – 13 : 20 Begrüßung im Hörsaal NA 01/99
- 13 : 30 – 14 : 00 vier parallele Sektionsvorträge
- 14 : 00 – 14 : 30 vier parallele Sektionsvorträge
- 14 : 30 – 15 : 00 vier parallele Sektionsvorträge
- Pause
- 15 : 30 – 16 : 00 vier parallele Sektionsvorträge
- 16 : 00 – 16 : 30 vier parallele Sektionsvorträge
- 16 : 30 – 17 : 00 vier parallele Sektionsvorträge
- 17 : 15 – 18 : 15 Vortrag im Hörsaal NA 01/99
von Herrn Prof. Dr. Uwe Schmock, TU Wien:
*Numerisch stabile Verallgemeinerung der Panjer-Rekursion
und Anwendung auf abhängige Kreditrisiken*
- ab 19 : 00 gemeinsames Abendessen im Tapas

Das Vortragsprogramm für den 2. Oktober:

- 09 : 30 – 10 : 00 vier parallele Sektionsvorträge
- 10 : 00 – 10 : 30 vier parallele Sektionsvorträge
- 10 : 30 – 11 : 00 vier parallele Sektionsvorträge
- Pause
- 11 : 30 – 12 : 00 drei parallele Sektionsvorträge
- 12 : 00 – 12 : 30 drei parallele Sektionsvorträge
- 12 : 30 – 13 : 00 drei parallele Sektionsvorträge
- wer mag: gemeinsames Mittagessen
- ab 14 : 15 Preisverleihung im Hörsaal NA 01/99.

Der Hörsaal NA 01/99 befindet sich im Gebäude NA, siehe auch den Lageplan der RUB, auf der Ebene des großen Platzes und des Audimax. Die Seminarräume befinden sich in der dritten und vierten Etage im Norden des Gebäudes NA.

Donnerstag, 1. Oktober

13 : 00 – 13 : 20 **Begrüßung im Hörsaal NA 01/99**

Algebra und verwandte Gebiete: im Raum NA 4/24

- 13 : 30 – 14 : 00 Marten Bornmann: *Ganzzahlige affine Hecke Algebren*
 14 : 00 – 14 : 30 Felix Dietlein: *Konstruktion und Analyse der zu Höchstgewichtskategorien von Stromalgebren assoziierten Köcher*
 14 : 30 – 15 : 00 Alexandra Hänig: *Concept Analysis of Implicative Algebras – Starting from Hilbert Algebras*
- Pause
- 15 : 30 – 16 : 00 Annette Maier: *Additive Polynomials for finite groups of Lie type*
 16 : 00 – 16 : 30 Matthias Meng: *Nakajima-Monome und Wegemodell*
 16 : 30 – 17 : 00 Benjamin Sambale: *Konjugationsklassen und Charaktere in endlichen p -Gruppen*

Analysis und Numerik: im Raum 4/64

- 13 : 30 – 14 : 00 Lukas Krämer: *Direct and Iterative Methods for the Product Eigenvalue Problem*
 14 : 00 – 14 : 30 Julia Vogt: *Primal-Dual Path-Following Methods for Linear Optimization*
 14 : 30 – 15 : 00 Gerd Wachsmuth: *Optimalsteuerungsaufgaben mit Sparsity-Funktional*
- Pause
- 15 : 30 – 16 : 00 Svend Ebert: *Wavelets on the Three-Dimensional Sphere S^3*
 16 : 00 – 16 : 30 André Schlichting: *Solvability, approximation and estimates for a class of singular phase field models*
 16 : 30 – 17 : 00 Fabian Schwarzenberger: *Polynomiell wachsende Gruppen: Geometrie, Spektren und Rückkehrwahrscheinlichkeiten*

Topologie und verwandte Gebiete: im Raum 3/24

- 13 : 30 – 14 : 00 Stephan Ehlen: *Getwistete Borchersprodukte auf Hilbertschen Modulflächen*
 14 : 00 – 14 : 30 Karsten Fritzsche: *Towards the Hodge Theory of Manifolds Fibred over a Graph*
 14 : 30 – 15 : 00 Philip Herrmann: *Ein Modell für die motivische Homotopiekategorie*
- Pause
- 15 : 30 – 16 : 00 Johannes Schmidt: *Rigid G_2 -Representations and Motifs of Type G_2*
 16 : 00 – 16 : 30 Florian Strunk: *Ein Model für motivische Kohomologie*
 16 : 30 – 17 : 00 Tino Schulz: *Kinematische Geometrie einer Sonderverzahnung*

Graphentheorie und diskrete Mathematik: im Raum 3/64

- 13 : 30 – 14 : 00 Andreas Frost: *Nichtparametrische Regression in der Sensorik*
 14 : 00 – 14 : 30 Elke Just: *Nash-Gleichgewichte des Pagerankspiels*
 14 : 30 – 15 : 00 Roman Glebov: *Extremal Graphs for Clique Paths*
- Pause
- 15 : 30 – 16 : 00 Ambros M. Gleixner: *Solving Large-scale Open Pit Mining Production Scheduling Problems by Integer Programming*
 16 : 00 – 16 : 30 Tobias Kellner: *Applications of adaptive observers and tracking*
 16 : 30 – 17 : 00 Konrad Sperfeld: *Vollständige Untergraphen in multipartiten Graphen*

Für alle:

- 17 : 15 – 18 : 15 Vortrag im Hörsaal NA 01/99
 von Herrn Prof. Dr. Uwe Schmock, TU Wien:
Numerisch stabile Verallgemeinerung der Panjer-Rekursion und Anwendung auf abhängige Kreditrisiken
- ab 19 : 00 gemeinsames Abendessen

Freitag, 2. Oktober

Algebra und verwandte Gebiete: im Raum 4/24

- 09 : 30 – 10 : 00 Torsten Schoeneberg: *p-adische Galoisdarstellungen und (φ, Γ) -Moduln*
 10 : 00 – 10 : 30 Martin Raum: *Die Spin-L-Funktion für Siegelsche Modulformen von Grad 2*
 10 : 30 – 11 : 00 Mirko Klukas: *Engelstrukturen*
 Pause
 11 : 30 – 12 : 00 Dominic Gehre: *Darstellungen von Modulformen zweiten Grades durch Theta-Konstanten*
 12 : 00 – 12 : 30 Myriam Finster: *Stabilisatorgruppen in $\text{Aut}(F_z)$ und Veechgruppen von Überlagerungen*
 12 : 30 – 13 : 00 Vincenz Busch: *Effektive Berechnungen von Néron-Tate-Höhen mittels Arakelov-Schnittzahlen*

Analysis: im Raum 4/64

- 09 : 30 – 10 : 00 David Bauer: *Circle Packing in View of Differentiable Manifolds*
 10 : 00 – 10 : 30 Tillmann Berg: *Inverse Spectral Results on Even Dimensional Tori*
 10 : 30 – 11 : 00 Cedric Effenberger: *Rational Krylov Subspace Methods for Hamiltonian Eigenproblems*
 Pause
 11 : 30 – 12 : 00 Paul Felix Riechwald: *The Largest Possible Class of Data for Very Weak Solutions to the Instationary Navier–Stokes Equations*
 12 : 00 – 12 : 30 Tobias Strauß: *Alternative Konvergenzmaße für die Beschreibung des Verhaltens von Echo - State - Netzen*
 12 : 30 – 13 : 00 Sebastian Haeseler: *Abstrakte Versionen klassischer Ungleichungen und Anwendung auf Quantengraphen*

Stochastik und Staatsexamen: im Raum 3/24

- 09 : 30 – 10 : 00 Martin Huesmann: *Donsker's Invariance Principle for Enhanced Brownian Motion*
 10 : 00 – 10 : 30 Matthias Guhlich: *Zufällige Blockmatrizen als Verallg. des Jacobi-Ensembles*
 10 : 30 – 11 : 00 Gloria Becker: *Knoteninvarianten – Impulse für den Mathematikunterricht*
 Pause
 11 : 30 – 12 : 00 Julia Cramer: *Wissenskonstruktion am Beispiel unendlicher Mengen: Eine empirische Analyse*
 12 : 00 – 12 : 30 Ruth Dietl: *Penrose-Muster: Unterteilung und Projektionsmethode*
 12 : 30 – 13 : 00 Marcel Gruner: *Tangenten an Kegelschnitte und eine didaktische Aufbereitung für die Sekundarstufe II*

Graphentheorie und diskrete Mathematik: im Raum 3/64

- 09 : 30 – 10 : 00 Timo de Wolff: *Polytope mit speziellen Simplizes*
 10 : 00 – 10 : 30 Steffen Hitzemann: *Über die Kombinatorik der Galoiszahlen*
 10 : 30 – 11 : 00 Lisa Schreiber: *Mathematische Untersuchung des Deduktionsspiels Beams*
 Pause
 11 : 30 – 12 : 00 drei parallele Sektionsvorträge, s.o.
 12 : 00 – 12 : 30 drei parallele Sektionsvorträge, s.o.
 12 : 30 – 13 : 00 drei parallele Sektionsvorträge, s.o.

Für alle:

Wer mag kann in der Pause gemeinsam in der Mensa Mittagessen.
 Ab 14 : 15 findet die Preisverleihung im Hörsaal NA 01/99 statt.

Zusammenfassungen

– in alphabetischer Reihenfolge der Nachnamen

Circle Packing in View of Differentiable Manifolds (David Bauer)

In den vergangenen 20 Jahren wurde eine Theorie der diskreten analytischen Funktionen entwickelt, welche auf eine Idee von William Thurston zurückgeht. Basierend auf der Beobachtung, dass eine analytische Funktion infinitesimale Kreise wieder auf infinitesimale Kreise abbildet, verwendet man Approximationen durch Kreiskonfigurationen, deren Elemente sich nach einem vorgegebenen Muster tangieren, - sogenannte Kreispackungen. Diese haben einen nichtlinearen Charakter, aufgrund dessen ein Teil der diskreten Theorie bisher nur einen empirischen Zugang fand.

Das Muster, nach dem sich die Kreise berühren, ist in einer kombinatorischen Struktur verschlüsselt, welche jeder Packung zugrundeliegt. In meiner Arbeit habe ich gezeigt, dass man für eine fest vorgegebene Kombinatorik die Menge der Kreispackungen als eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + 3$ interpretieren kann, wobei m die Anzahl der Randkreise der Packung bezeichnet. Ferner erhält man eine natürliche Parametrisierung des Tangentialraumes der Mannigfaltigkeit. Im zweiten Teil der Arbeit habe ich die Randabbildung untersucht, welche jeder Kreispackung die Mittelpunkte der Randkreise zuordnet, und gezeigt, dass diese eine glatte Einbettung ist. Die gewonnenen Ergebnisse sind nützlich zur Behandlung diskreter Analoga von Randwertproblemen der Funktionentheorie. So lassen sich beispielsweise diskrete Riemann-Hilbert-Probleme auf diese Weise betrachten.

Knoteninvarianten – Impulse für den Mathematikunterricht (Gloria Becker)

Die Arbeit *Knoteninvarianten – Impulse für den Mathematikunterricht* stellt Kriterien zur Unterscheidung von mathematischen Knoten allgemeinverständlich dar und bereichert den topologischen Aspekt mit fachdidaktischen Vorschlägen und innovativen Impulsen für den Mathematikunterricht. Wichtiges Ziel der Knotentheorie ist es, Knoten mittels charakteristischer Eigenschaften, so genannter Invarianten, zu klassifizieren. Die vorliegende Arbeit ermöglicht es, ohne Vorkenntnisse aktuelle Fragestellungen der topologischen Forschung zu *slice knots*, Knoten die sich in der vierten Dimension als Unknoten erweisen, zu verstehen. Ferner werden interdisziplinäre Anwendungen in der Molekulargenetik und internationale Projekte zu Knotentheorie mit Schülern, wie z. B. ein amerikanisches Sommer-Camp thematisiert.

Die ersten beiden Kapitel der Arbeit dienen als Einführung in die Knotentheorie und Nomenklatur. Dann werden die Reidemeister-Bewegungen behandelt, die die Grundlage für Isotopie-Untersuchungen bilden. Es folgen erste Beispiele für Invarianten – die Verschlingungszahl und die Dreifärbbarkeit. Polynomiale Invarianten werden im fünften Kapitel betrachtet, wobei für das mit der Fields-Medaille prämierte Jones-Polynom mit Hilfe des Kauffman-Klammer-Polynoms eine verständliche Herangehensweise gewählt wird, die sich bereits bei einem Schüler-Workshop der Ruhr-Universität Bochum bewährt hat. Mit Hilfe von Seifert-Flächen und der Einführung des Geschlechts werden weitere Invarianten von Knoten dargestellt. Die Perspektive von Knoten als Rand einer Fläche wird durch die Einbettung in die vierte Dimension erweitert.

Die Vorschläge zum Unterricht am Ende eines jeden Kapitels berücksichtigen besonders handlungsorientierte Ansätze, um eine schülergerechte Herangehensweise zu ermöglichen und schaffen Anknüpfungspunkte an den Mathematikunterricht verschiedener Jahrgangsstufen.

Inverse Spectral Results on Even Dimensional Tori (Tillmann Berg)

Let H be a differential operator acting on the smooth functions $C^\infty(M)$ of some manifold M . The inverse spectral problem is concerned with the question to what extent the operator or the manifold are determined by the spectrum of H , i. e. by the collection of eigenvalues.

Motivated by solid-state physics I study *Schrödinger operators* $H = \Delta + Q$ given by Laplacians Δ and smooth *potentials* $Q \in C^\infty(M)$ on *flat tori* M . However, the Laplacians are constructed from connections on a Hermitian line bundle and thus the Schrödinger operator acts on the sections of the bundle. Restricting to *translation-invariant* connections and line bundles with *nondegenerate* Chern class I give statements concerning the extent to which the spectrum of the Schrödinger operator of such a connection determines the torus, line bundle or potential. The nondegeneracy of the line bundles requires the dimension of the tori to be even.

I show that the potential is determined by the collection of spectra of translation-invariant connections. This collection is a canonical generalisation of the Bloch spectrum of the torus. For *weakly \mathbb{Z}_2 -invariant* connections one can recover the even part of the potential from the corresponding spectrum provided that the lattice has a *nondegenerate length spectrum*. Counterexamples show that this condition cannot be dropped and also that neither potentials, tori nor line bundles are spectral invariants.

Those results were obtained by Gordon, Guerini, Kappeler and Webb. However, I streamlined their work by constructing explicit *transplantations* for the counterexamples. Also, this thesis includes a classification of line bundles.

Ganzzahlige affine Hecke Algebren (Marten Bornmann)

Sei $(X, \check{X}, R, \check{R}, B)$ ein Wurzeldatum. Nachdem wir die grundlegende Theorie der Wurzeldaten studiert haben, betrachten wir die zugehörigen Weylgruppen, d.h. die endliche Weylgruppe W_0 , die affine Weylgruppe W_{aff} und die erweiterte affine Weylgruppe W . Wir werden sehen, dass (W_0, S_0) und (W_{aff}, S) Coxeter Systeme sind, wobei S_0 und S Mengen von (affinen) Spiegelungen sind. Darüber hinaus besitzt W_{aff} ein Komplement Ω in W .

Wir fixieren ein System von Unbekannten $(q_s)_{s \in S}$ mit $q_s = q_t$, falls s und t in W konjugiert sind. Dann betrachten wir die dazugehörigen affinen generischen Hecke Algebren H und $H[q_*^{-1/2}]$ über $\mathbb{Z}[q_*] := \mathbb{Z}[(q_s)_{s \in S}]$ bzw. $\mathbb{Z}[q_*^{\pm 1/2}] := \mathbb{Z}[(q_s^{\pm 1/2})_{s \in S}]$. Nach einem Resultat von Bernstein und Lusztig gibt es eine kommutative endlich erzeugte Unteralgebra $A \subset H[q_*^{-1/2}]$, so dass $H[q_*^{-1/2}]$ ein freier A -Modul vom endlichen Rang $\#W_0$ ist. Indem wir eine W_0 -Operation auf A benutzen, kann das Zentrum von $H[q_*^{-1/2}]$ als Menge A^{W_0} der W_0 -Invarianten beschrieben werden. Wir geben einen detaillierten Beweis für eine leichte Verallgemeinerung dieser Resultate an.

Jedoch ist es in der Darstellungstheorie von reductiven p -adischen Gruppen über p -adischen Körpern oder solchen in Charakteristik p unerlässlich, die Gewichte q_s nicht zu invertieren. Deshalb stellt sich die Frage, ob analoge Aussagen für H gelten. Auf den Resultaten für $H[q_*^{-1/2}]$ aufbauend präsentieren wir Vigneras Arbeit zum Zentrum von H . Wir definieren eine alternative Basis $(E_w)_{w \in W}$ von H , die es uns ermöglicht, zu zeigen, dass $A \cap H$ eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}[q_*]$ -Algebra ist, und dass das Zentrum von H mit $A^{W_0} \cap H$ übereinstimmt. Dieses ist ein freier $\mathbb{Z}[q_*]$ -Modul und endlich erzeugt als $\mathbb{Z}[q_*]$ -Algebra. Darüber hinaus ist $A \cap H$ endlich erzeugt als Modul über dem Zentrum von H .

Effektive Berechnungen von Néron-Tate-Höhen mittels Arakelov-Schnittzahlen (Vincenz Busch)

Sei E eine elliptische Kurve über einem Zahlkörper K . Um mehr über die Kurve zu erfahren betrachte man nicht die Kurve über K sondern das Weierstraßmodell über \mathcal{O}_K . Leider ist das Weierstraßmodell i.A. nicht regulär, so dass es keine sinnvolle algebraische Schnitttheorie für das Weierstraßmodell gibt. Diesen Defekt kann man mittels Aufblasungen beheben, mit denen man ein reguläres Modell \mathcal{E} erzeugt.

In meiner Diplomarbeit betrachtete ich die Kurve E/\mathbb{Q}

$$E : y^2 = x^3 + 5x + 10$$

mit dem zugehörigem regulärem Modell \mathcal{E}/\mathbb{Z} . Die für die Diplomarbeit interessanten Punkte auf E bezeichnen wir mit $S_0 = (1, 4)$, $S_1 = (6, 16)$, $S_3 = (-1, 4)$ und $S_6 = (6, -16)$. Die Kernaufgabe war die Berechnung der lokalen Schnittzahlen, d.h. die Länge des lokalen Ringes modulo lokaler Gleichungen, der Zariski-Abschlüsse D_j der Punkte S_j auf dem regulärem Modell.

Das erste Problem dabei war zu entscheiden, ob sich zwei Punkte auf den gleichen Punkt spezialisieren. Dieses Problem trat insbesondere bei den Divisoren D_0 und D_3 auf, da sich beide im Weierstraßmodell in den selben singulären Punkt spezialisieren. Für diesen speziellen Fall arbeitete ich in meiner Diplomarbeit eine Verfeinerung des 'Tate-Algorithmus' heraus. Dieser Algorithmus berechnet eine Partitionierung von $E(\mathbb{Q})$ in Mengen A_k , wobei P genau dann in A_k enthalten ist, wenn P in die k te Komponente spezialisiert. Damit war gezeigt, dass sich die Punkte S_0 und S_3 auf verschiedene Komponenten des regulären Modells spezialisieren und sich D_0 und D_3 damit nicht schneiden.

Das zweite Problem war die konkrete Berechnung der lokalen Schnittzahlen. Mit Hilfe des Lemmas von der Vertauschung von Quotientenbildung und Lokalisierung konnte ich die Moduln in eine einfache Form bringen und die Länge bestimmen.

Diese Ergebnisse verband ich mit den Ergebnissen aus der Diplomarbeit von Anna Posingies zu einem Beispiel für die Berechnung von Néron-Tate-Höhen mittels Arakelov-Schnittzahlen.

Wissenskonstruktion am Beispiel unendlicher Mengen: Eine empirische Analyse (Julia Cramer)

Diese Arbeit vergleicht zwei epistemische Modelle zur Beschreibung von Prozessen der mathematischen Wissenskonstruktion. Das RBC-Modell basiert auf der Theorie der kontextuellen Abstraktion und betrachtet Wissenskonstruktion aus der Perspektive der individuellen kognitiven Strukturen. Mit dem SVSt-Modell werden dagegen Prozesse der Wissenskonstruktion aus der Perspektive der sozialen Interaktion untersucht. Beide Modelle nutzen jeweils drei epistemische Handlungen, um Erkenntnisprozesse zu beschreiben und zu analysieren. Im RBC-Modell sind dies die epistemischen Tätigkeiten Recognising, Building-with und Constructing, im SVSt-Modell die Handlungen Sammeln, Verknüpfen und Struktursehen.

Im empirischen Teil dieser Arbeit wird eine Szene betrachtet, in der zwei 15-jährige, mathematisch interessierte Jungen der Frage nachgehen, wie unendliche Mengen der Größe nach verglichen werden können. Die beiden Schüler erarbeiten Kriterien zum Vergleich unendlicher Mengen und handeln so aus, was sie selbst unter der Größe einer unendlichen Menge verstehen. Diese Szene wird zunächst getrennt mit dem RBC-, bzw. dem SVSt-Modell analysiert. Erst in einem zweiten Schritt werden die Ergebnisse der beiden Analysen verglichen. Hierbei stellt sich heraus, dass die Basishandlungen der beiden Modelle, Recognising und Sammeln, in verschiedenen Bereichen auftreten. Recognising und Sammeln erweisen sich als Tätigkeiten von grundlegend verschiedener Qualität. Die jeweiligen anderen epistemischen Handlungen beschreiben den Erkenntnisprozess zwar aus verschiedenen Perspektiven, treten in der vorliegenden Szene aber annähernd parallel auf.

Diese Arbeit zeigt erste Ansätze zu einer Vernetzung der beiden Modelle auf und leistet damit einen vorbereitenden Beitrag zum Projekt „Effective knowledge construction in interest-dense situations“, das eine Vernetzung der beiden genannten Theorien zum Ziel hat. Das Forschungsprojekt wird von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern der Universität Bremen, des Jerusalem College of Technology und der Tel Aviv University zwischen 2009 und 2011 durchgeführt und von der German-Israeli-Foundation gefördert.

Penrose-Muster: Unterteilung und Projektionsmethode (Ruth Dietl)

In der vorliegenden Arbeit geht es um das von Roger Penrose im Jahre 1978 entdeckte Penrose-Muster. Dieses aperiodische Muster der Ebene lässt sich auf zwei verschiedene Weisen erzeugen: Durch eine elementargeometrische Konstruktion und durch die sogenannte Projektionsmethode.

Ausgangspunkt der elementargeometrischen Konstruktion sind zwei Sorten von Steinen. Diese sind die symmetrischen Ergänzungen der beiden gleichschenkligen Dreiecke die von zwei benachbarten Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks abgeschnitten werden. Die Parallele zu einer Fünfecksseite unterteilt diese beiden Dreiecke in kleinere Dreiecke, die wiederum ähnlich zu den beiden großen Dreiecken sind. Und auch die kleineren Dreiecke können auf die gleiche Art und Weise wieder eindeutig in noch kleinere ähnliche Dreiecke unterteilt werden. Durch eine immer feinere Unterteilung nach eben beschriebenem Prinzip und anschließender Vergrößerung (genannt „Inflation“) entsteht so das Penrose-Muster.

Ganz anders dagegen ist das Vorgehen der Projektionsmethode. Hier wird das fünfdimensionale ganzzahlige Gitter auf eine unter der zyklischen Permutation der fünf Koordinaten invariante Ebene E im \mathbb{R}^5 projiziert - allerdings nur die Punkte, die innerhalb des „Streifens“ $I^5 + E$ liegen, wobei $I = [0, 1]$ und $I^5 = I \times I \times I \times I \times I \subset \mathbb{R}^5$ den fünfdimensionalen Einheitswürfel bezeichnet. Die Unterteilung der Pflastersteine geschieht hier durch eine ganzzahlige (5×5) -Matrix S , die in Richtung von E kontrahiert und senkrecht zu E expandiert. Der Streifen $I^5 + E$ wird somit durch S auf den verbreiterten Streifen $S(I^5 + E) = SI^5 + E'$ abgebildet und enthält daher mehr Gitterpunkte als der Streifen $I^5 + E'$. Die projizierten Gitterpunkte des ausgeweiteten Streifens bilden die Unterteilungspunkte.

Die vorliegende Arbeit zeigt nun, dass die Unterteilung der Penrose-Steine im Falle der Projektionsmethode zum gleichen Ergebnis führt wie die der elementargeometrischen Konstruktion. Dazu werden die verschiedenen Eckentypen, die im Muster vorkommen können untersucht und in einem weiteren Schritt die Eckentypen der Nachbarecken. Davon ausgehend kann schließlich das gewünschte Resultat gezeigt werden.

Konstruktion und Analyse der zu Höchstgewichtskategorien von Stromalgebren assoziierten Köcher (Felix Dietlein)

Basierend auf den Ergebnissen einer Publikation von Chari und Greenstein aus dem Jahre 2007 zeigt die im Mai 2009 eingereichte Diplomarbeit Möglichkeiten auf, Darstellungskategorien von Stromalgebren der Form $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ durch kombinatorische Methoden der Köchertheorie zu analysieren, wobei \mathfrak{g} eine einfache Lie-Algebra sei. Derartige Übertragungen gestalten sich als technisch kompliziert, da Köchertheorie nur für die Darstellungstheorie von assoziativen Algebren zur Verfügung steht. Durch Konstruktion von Ersatzobjekten hat man daher die Struktur von Stromalgebren zunächst in assoziativen Algebren zu verschlüsseln. Zudem sind Einschränkungen der Darstellungskategorie auf darstellungsendliche Unterkategorien der Form $\mathcal{G}[\Gamma]$ notwendig, da sich nur solche durch endliche Köcher darstellen lassen. Die Diskussion einer geeigneten Wahl von Γ stellt sich im Laufe der Diplomarbeit als fundamental für das Verständnis von Stromdarstellungen heraus.

Ähnliche Konstruktionen sind prinzipiell für zahlreiche mathematische Objekte möglich. Der Übergang von allgemeinen abelschen Kategorien zu Darstellungskategorien von Ringen ist beispielsweise ein Standardtheorem der Homologischen Algebra. Dennoch stellt die explizite Konstruktion eines Köchers zu einer gegebenen Stromalgebra ein nicht triviales Problem dar, da dieser von zahlreichen weiteren Parametern abhängt, die in der Diplomarbeit identifiziert wurden. In der Arbeit war deshalb die Kombination von Resultaten verschiedener mathematischer Bereiche erforderlich. Sie kann deshalb als eine Querschnittsarbeit über Homologische Algebra, Köchertheorie, Lie-Theorie und Kombinatorik angesehen werden.

Im Verlauf der Forschungsarbeit wurden zunächst schwerwiegende Fehler in dem Gedankengang des Artikels von Chari und Greenstein identifiziert und nach selbstständiger Rücksprache mit den Autoren weitestgehend verbessert. Durch kombinatorische Zugänge konnten so explizite Strukturformeln hergeleitet werden, die im letzten Kapitel der Diplomarbeit präsentiert werden. Die Transformationsmöglichkeiten der erarbeiteten Thematik gingen weit über den Erwartungshorizont hinaus, da die Fundamentalität des bearbeiteten Themenkomplexes eine Anwendbarkeit in den unterschiedlichsten Bereichen der Lie-Theorie implizierte.

Stromalgebren stellen somit ein nicht zu unterschätzendes Bindeglied zwischen der Darstellungstheorie assoziativer Algebren und der Darstellungstheorie von Lie-Algebren dar. Da ihre Darstellungstheorie zahlreiche günstige Eigenschaften, wie z.B. eine leichte Parametrisierbarkeit einfacher Objekte mit sich bringt, die sich analog zu denen von basischen Algebren gestalten, ermöglichen sie in einem zweiten Schritt die Übertragung der Methoden zur Köcheranalyse nicht nur auf Stromalgebren, sondern auch auf Konstruktionen, deren explizite Realisierungen Strom- oder die verwandten Schleifenalgebren $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ verwenden. Die resultierenden Köcher unterscheiden sich allerdings fundamental von den Diagrammen der darstellungsendlichen assoziativen Algebren. Durch die Diplomarbeit ist zumindest eine weitgehende Klassifikation in Spezialfällen möglich geworden.

Wavelets on the Three-Dimensional Sphere S^3 (Svend Ebert)

Es gibt zahlreiche Anwendungen, in denen Wavelets auf Sphären höherer Dimension sowie auf der Rotationsgruppe $SO(3)$ benötigt werden. Die Konstruktion von Wavelets auf der dreidimensionalen Sphäre S^3 enthält einerseits die wesentlichen Schritte der Verallgemeinerung von S^2 zu S^n und auf der anderen Seite können wir einen zweifach überlagernden Isomorphismus von S^3 nach $SO(3)$ finden, der es uns ermöglicht auch Wavelets auf $SO(3)$ zu konstruieren.

Zu Wavelets auf S^2 gibt es Arbeiten von W. Freeden, J.-P. Antoine sowie P. Vandergheynst.

Um Wavelets auf der 3-Sphäre zu konstruieren können grundsätzlich zwei Zugänge genutzt werden. Der gruppentheoretische Zugang befasst sich hauptsächlich damit eine Darstellung $U : G \rightarrow \mathcal{L}(L^2(S^3))$ einer Gruppe G oder eines homogenen Raums G/H mit einem Schnitt $\sigma : G/H \rightarrow G$ im entsprechenden Principalbündel im Hilbertraum $L^2(S^3, d\mu)$ ($d\mu$ bezeichnet das Rotationsinvariante Maß und wird im Folgenden weggelassen) zu finden. Ist die Darstellung U unitär, irreduzibel so ist die Zulässigkeitsbedingung für $\Psi \in L^2(S^3)$

$$\int_{G/H} |\langle U(\sigma(x))[\Psi], f \rangle_{L^2(S^3)}|^2 d\nu(x) < \infty \quad \forall f \in L^2(S^3).$$

Dabei ist $d\nu$ das quasiinvariante Maß, welches wir vom Haarmaß erhalten. Existiert ein zulässiges Ψ , so ist U quadratisch integrierbar und wir können Ψ als Mother-Wavelet verwenden. Der Orbit $\{U(\sigma(x))[\Psi], x \in G/H\}$ bildet dann ein Frame in $L^2(S^3)$.

Im klassischen Sinne erhalten wir das Frame durch Dilatation und Translation des Mother-Wavelets.

Im Fall der Sphäre ist $G = SO(4, 1)$ und wir können U, H und σ so wählen, dass die Gruppenaktionen gerade durch stereographische Projektion der Dilatation und Translation aus dem Tangentialraum am Nordpol auf die Sphäre erhalten werden.

Der zweite Zugang beschäftigt sich mit approximierenden Einsen, die wir als singuläre Integrale mit geeigneten Kernen erhalten. Von einigen Autoren werden die so konstruierten Wavelets auch als Diffusion-Wavelets bezeichnet, da die Faltungskerne sich im wesentlichen als Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ergeben. Die Dilatation wird als Aktion dieser Integraloperatoren gewählt, sodass nur noch die Translation darzustellen ist, die wir als Aktion der Rotationsgruppe $SO(4)$ auf S^3 auffassen.

Obwohl beide Zugänge sehr unterschiedlich aussehen, so finden wir doch eine enge Beziehung zwischen den Zulässigkeitsbedingungen.

In meiner Arbeit habe ich beide Zugänge für die S^3 untersucht, verglichen und Wavelets auf S^3 durch den Zugang mit approximierenden Einsen konstruiert.

Rational Krylov Subspace Methods for Hamiltonian Eigenproblems

(Cedric Effenberger)

The problem of computing a few selected eigenvalues of a large and sparse matrix with Hamiltonian structure occurs in a wide range of applications, e. g., passivity-preserving model order reduction [4] or the solution of certain quadratic eigenvalue problems [5]. Specialized Krylov subspace methods capable of exploiting the Hamiltonian structure, such as the Hamiltonian Lanczos algorithm [1] and SHIRA [2], have been developed to address this kind of task. Typically, shift-and-invert techniques are used to accelerate the convergence of these algorithms towards eigenvalues in the vicinity of a target shift. However, often several consecutive target shifts are necessary for the acceleration to be effective. In the case of unstructured matrices, the Rational Krylov Method [3] provides a means of changing the shift in the middle of the computation. In contrast, when using a Krylov subspace method for Hamiltonian matrices, the shift may only be chosen once in the beginning of the computation and cannot be altered unless the algorithm is rerun, which is undesirable as it discards almost all information gathered in the previous run. The present thesis investigates two approaches to make on-the-fly changes of shift available also to Hamiltonian Krylov subspace methods, one of which is found to be working and tested on two benchmark examples from the literature.

[1] Ferng, W.R. and Lin, W.-W. and Wang, C.-S. *The shift-inverted J-Lanczos algorithm for the numerical solutions of large sparse algebraic Riccati equations*, Comput. Math. Appl., 33:23–40, 1997

[2] Mehrmann, V. and Watkins, D. S. *Structure-preserving methods for computing eigenpairs of large sparse skew-Hamiltonian/Hamiltonian pencils*, SIAM J. Sci. Comput., 22(6):1905–1925, 2001

[3] Ruhe, A. *Rational Krylov, a practical algorithm for large sparse nonsymmetric matrix pencils*, SIAM J. Sci. Comput., 19:1535–1551, 1998

[4] Sorensen, D. C. *Passivity preserving model reduction via interpolation of spectral zeros*, Systems & Control Letters, 54:347–360, 2005

[5] Tisseur, F. and Meerbergen, K. *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM Rev., 43(2):235–286, 2001

Getwistete Borcherdsprodukte auf Hilbertschen Modulflächen (Stephan Ehlen)

Richard Borcherds hat in einer einflussreichen Arbeit [1] mittels eines regularisierten Thetalifts automorphe Formen zur orthogonalen Gruppe eines rationalen quadratischen Raumes der Signatur $(2, n)$ konstruiert, die eine unendliche Produktentwicklung besitzen und deren Divisor durch eine Linearkombination von Heegner-Divisoren gegeben ist. Automorphe Formen mit diesen Eigenschaften werden Borcherdsprodukte genannt.

Die Konstruktion basiert auf einer Regularisierung des Thetaintegrals und geht auf eine Idee der Physiker Harvey und Moore [4] zurück. In dem Spezialfall der Signatur $(2, 1)$ können automorphe Formen für die orthogonale Gruppe $O(2, 1)$ als Modulformen für Kongruenzuntergruppen von $SL_2(\mathbb{Z})$ aufgefasst werden und die Borcherds-Liftung ist eine Verallgemeinerung der Shimura-Korrespondenz. Im Falle $O(2, 2)$ erhält man Hilbertsche Modulformen. Diese Situation wird in der vorliegenden Diplomarbeit behandelt.

Bruinier und Yang [3] haben eine verwandte Liftung konstruiert, die auf eine Arbeit [5] von Zagier zurückgeht. Ihr Ansatz basiert auf nicht-holomorphen Poincaré-Reihen, ähnlich zu [2]. Diese Liftung bildet elliptische Modulfunktionen für die volle Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ auf Hilbertsche Modulfunktionen zu einem reell-quadratischen Zahlkörper F mit Primdiskriminante p ab, die analog zu den Borcherdsprodukten eine unendliche Produktentwicklung haben. Ihr Divisor ist durch eine Linearkombination sogenannter getwisteter Hirzebruch-Zagier-Divisoren gegeben. Der „Twist“ entsteht durch das Einfügen eines Geschlechtscharakters binärer quadratischer Formen, deren Diskriminante durch p teilbar ist.

In der vorliegenden Diplomarbeit werden diese „getwisteten Borcherdsprodukte“ analog zu Borcherds' Arbeit als eine regularisierte Thetaliftung realisiert, indem eine passend veränderte Thetareihe betrachtet wird. Auf diesem Wege ist es auch möglich, die Liftung allgemeiner für beliebige Diskriminanten zu realisieren.

[1] R. E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[2] J. H. Bruinier, *Borcherds products and Chern classes of Hirzebruch-Zagier divisors*, Invent. Math. **138** (1999), no. 1, 51–83.

[3] J. H. Bruinier and T. Yang, *Twisted Borcherds products on Hilbert modular surfaces and their CM values*, Amer. J. Math. **129** (2007), no. 3, 807–841.

[4] J. A. Harvey and G. Moore, *Algebras, BPS states, and strings*, Nuclear Phys. B **463** (1996), no. 2-3, 315–368.

[5] D. Zagier, *Traces of singular moduli*, In Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), volume **3** of Int. Press Lect. Ser., pages 211–244. Int. Press, Somerville, MA, 2002.

Stabilisatorgruppen in $\text{Aut}(F_z)$ und Veechgruppen von Überlagerungen (Myriam Finster)

Gegenstand der Diplomarbeit sind *Translationsflächen*, die als Überlagerung von so genannten *primitiven Translationsflächen* entstehen, sowie die *Veechgruppen* solcher Translationsflächen.

Die *Veechgruppe* einer Translationsfläche X besteht aus den Matrizen, die in affinen Automorphismen von X auftreten. Sie ist eine diskrete Untergruppe von $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ und genau dann ein Gitter in $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, wenn die Translationsfläche eine *Teichmüllerkurve* im Modulraum, dem Klassifizierungsraum für komplexe Strukturen auf Riemannschen Flächen, definiert. Für Überlagerungen $\pi : X \rightarrow Y$, bei denen Y *primitiv* ist, kann die Veechgruppe von X mit Hilfe der Veechgruppe von Y und einer *Stabilisatorgruppe* charakterisiert werden.

Der erste Teil meiner Diplomarbeit befasst sich mit der effizienten Berechnung des Stabilisators einer Untergruppe H von endlichem Index einer freien Gruppe F_z in z Erzeugern, unter der Automorphismengruppe der freien Gruppe.

$$\text{Stab}_{\text{Aut}(F_z)}(H) = \{\gamma \in \text{Aut}(F_z) \mid \gamma(H) = H\}$$

Diese Stabilisatorgruppen sind Untergruppen von $\text{Aut}(F_z)$ von endlichem Index.

Anschließend wird ein Beweis für die Charakterisierung der Veechgruppen in der eben beschriebenen Situation gegeben. Der Rest der Arbeit beschäftigt sich mit den Translationsflächen X_n , die durch Verkleben von zwei regulären n -Ecken entstehen. William Veech bewies bereits 1989, dass die zugehörigen Veechgruppen Gitter in $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sind. Nach einem Beweis dafür, dass die Flächen X_n zudem primitiv sind, folgt als Hauptergebnis der Diplomarbeit für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Serie von X_n -Überlagerungen, die alle die gleiche Veechgruppe haben.

Towards the Hodge Theory of Manifolds Fibred over a Graph (Karsten Fritzsche)

In this paper the adiabatic limit of the spaces of harmonic forms on a compact, Riemannian manifold (X, g) is being studied. That is, X is decomposed as

$$X = X_1 \cup X_2 \quad , \quad X_1 \cap X_2 = \partial X_1 = \partial X_2 = Y \quad ,$$

and a cylinder of length $2r$ with cross-section Y is inserted in between to create a *prolonged version* $X(r)$ of X . Then the behaviour of the spaces of harmonic forms on $X(r)$ as $r \rightarrow \infty$ is discussed.

In particular, it is shown that for long cylinders the eigenvalues of the Gauss-Bonnet operator $D = d + \delta$ either decrease linearly (or slower) or are zero-eigenvalues. Together with a Mayer-Vietoris argument this will be used to establish a one-to-one correspondence between harmonic forms on $X(r)$ and a certain subspace of extended square-integrable solutions of $Du = 0$ on the parts X_1 and X_2 with infinite cylinders attached.

Nichtparametrische Regression in der Sensorik (Andreas Frost)

Sensoren spielen in vielen praktischen Anwendungen eine wichtige Rolle. Sie setzen eine interessierende, aber oftmals nicht direkt beobachtbare physikalische Größe unter dem Einfluss von Störgrößen in eine meist mehrdimensionale elektrische Größe um. Ziel ist es, aus dem elektrischen Signal auf die zugrundeliegende Sensorgröße zurückzuschließen. Bisher wurde diese Zuordnung mit einer klassischen linearen Regression und einer anschließenden Kalibrierung des Sensors bei Inbetriebnahme erreicht. Da in Zukunft aus Kosten- und Aufwandsgründen auf eine Kalibrierung gänzlich verzichtet werden soll, müssen für die Verarbeitung der Sensorsignale neue Methoden untersucht werden.

In der vorliegenden Diplomarbeit wurde die Modellierung des funktionalen Zusammenhangs der elektrischen Größen und der interessierenden Messgröße für induktive Abstandssensoren unter gegebenen Genauigkeitsforderungen vorgenommen. Solche Signalgeber werden zum Beispiel als Türsensoren in Passagierflugzeugen der jüngsten Generation verbaut. Bei diesen Signalgebern schlägt sich eine Variation des Abstands vom Sensor zum ferromagnetischen Zielobjekt in einer Änderung der Impedanz der Spule nieder, die den aktiven Teil des Sensors bildet. Da der Signalgeber unter variablen Umweltbedingungen eingesetzt wird, muss auch beachtet werden, dass der komplexe Wechselstromwiderstand zudem von nichtbeobachtbaren Störgrößen (z.B. Temperatur am Sensor, Kabellänge der Zuleitung vom Sensor zur elektrischen Auswerteeinheit) beeinflusst wird. Der Einfluss des ohmschen Widerstands und der Induktivität, die bei gegebener Frequenz des an die Senserspule angelegten Wechselstroms die Impedanz beschreiben, auf den Abstand zum Zielobjekt wurde als Tensorprodukt-Polynom-Spline modelliert. Es zeigt sich, dass mit diesem variablen Ansatz eine Schätzung des Abstands mit hinreichender Genauigkeit ohne vorherige Kalibrierung ermöglicht werden kann.

Darstellungen von Modulformen zweiten Grades durch Theta-Konstanten (Dominic Gehre)

Diese Arbeit beschäftigt sich mit sogenannten Quaternionischen, Hermiteschen und Siegelschen Modulformen, jeweils mehrdimensionalen, holomorphen Funktionen auf gewissen Quaternionischen, Hermiteschen und dem sogenannten Siegelschen Halbraum, welche gewisse Transformationseigenschaften bzgl. spezieller Matrixgruppen aufweisen.

Von besonderem Interesse sind die Strukturen der hierdurch auftretenden Funktions-Vektorräume. Für diese, wie man festgestellt hat endlichen Vektorräume sind bereits oft Erzeugendensysteme oder gar Basen bekannt. Diese Funktionen sind jedoch häufig recht kompliziert definiert, insbesondere in Bezug auf ihre expliziten Darstellungen.

In dieser Arbeit werden nun sechs solcher Quaternionischer Modulformen genauer untersucht, sechs sogenannte Quaternionische Theta-Konstanten. Diese sind, im Gegensatz zu vielen anderen der betrachteten Modulformen, von einfacher Natur. Mithilfe dieser sechs Funktionen bzw. deren Einschränkungen auf kleinere Halbräume werden nun, soweit möglich, explizite und einfache Darstellungen wichtiger Modulformen, wie den oben erwähnten Erzeugern der Vektorräume, konstruiert. Auch Relationen unter diesen wichtigen Modulformen, die man bisher nicht wirklich verstand, werden anhand dieser Thetakonstanten ersichtlicher.

Dies gelingt in erste Linie mithilfe der Fourierentwicklungen, welche Modulformen besitzen, und Computeralgebra-Programmen wie SAGE, MAPLE und MAGMA, für welche entsprechende Programme zum Berechnen dieser Darstellungen geschrieben wurden.

Tatsächlich erhält man für die meisten wichtigen und interessanten Modulformen einfache und explizite Darstellungen, welche in dieser Form bisher nicht gegeben waren. Als Beispiel sei hier Igusas Siegelsche Modulform Δ_{35} genannt, welche die kleinste Modulform ungeraden Gewichts ist, jedoch bisher kaum eine brauchbare explizite Darstellung besaß.

Extremal Graphs for Clique Paths (Roman Glebov)

The classical problem in extremal graph theory asks: given a positive integer n and a forbidden graph H , how many edges can a graph on n vertices have without having a subgraph isomorphic to H ? And if an H -free graph has this extremal edge number, what is its structure?

Up to terms of lower order, these questions have been answered for all non-bipartite graphs H . But exact results are known only for very few graph classes.

In this thesis, the forbidden graph is a clique-path, that is a k -path, where each edge is blown up to an r -clique, $r \geq 3$. We determine both the extremal number and the extremal graph for sufficiently large n .

Solving Large-scale Open Pit Mining Production Scheduling Problems by Integer Programming (Ambros M. Gleixner)

For a central problem in mine planning, the open pit mining production scheduling problem, we present and analyse a novel mixed-integer programming formulation allowing for integrated optimisation of cutoff grades. The mining schedule, i.e. the order in which material is removed from the pit, may be modelled at a lower, more aggregate resolution than the processing decisions, i.e. the decisions about the ore grade above which immediate extraction of ore is worthwhile under a net present value objective. This helps rendering even realistically-sized, large-scale problem instances computationally tractable, while still allowing for high selectivity on the processing level.

In experiments conducted on a variety of real-world problem instances, we show that langrangean relaxation and bundle methods provide dual bounds provably as strong as the LP-relaxation between 5 (for the smaller instances) and 27 (for the larger instances) times faster than state-of-the-art LP-solvers. We propose start and improvement heuristics which prove effective in finding solutions within 0.05% of the optimal objective value on all test instances.

Tangenten an Kegelschnitte und eine didaktische Aufbereitung für die Sekundarstufe II (Marcel Gruner)

Früher gehörte die Kegelschnittlehre zum Standard im Mathematikunterricht, mittlerweile aber kennt kaum ein Schüler Kegelschnitte. Dabei bieten auch heute die Lehrpläne vielfältige Möglichkeiten, die Kegelschnitte im Unterricht zu behandeln.

In der Examensarbeit werden zunächst verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, Kegelschnitte zu definieren und zu konstruieren. Die wichtigsten werden vorgestellt sowie deren Äquivalenz gezeigt. Ein Untersuchungsobjekt bei Kegelschnitten können beispielsweise deren Tangenten sein. Auf deren Konstruktion, algebraische Beschreibung und einige Eigenschaften von Kegelschnitten und deren Tangenten wird in den folgenden Kapiteln eingegangen.

Doch es lassen sich nicht nur Tangenten an Kegelschnitte konstruieren, sondern auch umgekehrt aus Tangenten die zugehörigen Kegelschnitte. Werden Geraden mit bestimmten Eigenschaften konstruiert, bildet sich eine Hüllkurve aus. Diesen ist das vierte Kapitel gewidmet, in dem neben einer allgemeinen Einführung auch explizit auf die Konstruktion von Kegelschnitten als Hüllkurve eingegangen wird.

An den fachwissenschaftlichen Teil, zu dem auch ein Abriss der Geschichte der Kegelschnittlehre gehört, schließt sich eine fachdidaktische Untersuchung und Ausarbeitung an.

Zunächst wird eine Bestandsaufnahme gemacht: In welchem Umfang wurde früher die Kegelschnittlehre unterrichtet? Wann und in welcher Art hat sich daran etwas geändert? In welchem Umfang ist die Kegelschnittlehre heute im Unterricht vorgesehen? Diese Fragen werden durch Untersuchungen von Lehrplänen und Schulbüchern beantwortet.

In der anschließend vorgeschlagenen Unterrichtseinheit sollen die Schüler auf verschiedene Arten Hüllkurven konstruieren, eigenverantwortlich verschiedene Algorithmen zur Berechnung der Hüllkurven entwickeln und können somit die Hüllkurven als Kegelschnitte identifizieren.

Zufällige Blockmatrizen als Verallg. des Jacobi-Ensembles (Matthias Gühlich)

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit der asymptotischen Eigenwertverteilung von zufälligen Blocktridiagonalmatrizen, die die zum klassischen Jacobi-Ensemble und die zum klassischen Laguerre-Ensemble gehörenden tridiagonalen Matrizen verallgemeinern. Dazu zeigen wir, dass sich die Eigenwerte dieser zufälligen Matrizen durch Nullstellen von orthonormalen Matrixpolynomen approximieren lassen, um dann von der Nullstellenverteilung der orthonormalen Matrixpolynome auf die Eigenwertverteilung schließen zu können.

Zunächst geben wir eine Einführung in die Theorie der Matrixmaße und orthonormalen Matrixpolynome. Dabei ist wichtig, dass die orthonormalen Matrixpolynome analog zum skalaren Fall durch eine Drei-Schritt-Rekursion charakterisiert sind. Wir stellen die von Duran (1999) und Duran et al. (1999) eingeführten Matrix-Chebyshev-Polynome vor und geben schließlich einen von Dette und Reuther (2008) bewiesenen Satz über die asymptotische Nullstellenverteilung orthonormaler Matrixpolynome an. Im Anschluss führen wir dann Blockmatrizen ein, die die zum klassischen Jacobi-Ensemble gehörenden tridiagonalen Matrizen verallgemeinern. Wir betrachten geeignete orthonormale Matrixpolynome und zeigen, dass sich die Eigenwerte der zufälligen Blockmatrizen fast sicher durch Nullstellen dieser Matrixpolynome approximieren lassen. Dann können wir den von Dette und Reuther (2008) bewiesenen Satz anwenden und die asymptotische Eigenwertverteilung herleiten. Schließlich geben wir einige Beispiele, die die Struktur der Grenzverteilungen erläutern und vergleichen die asymptotischen Aussagen mit Simulationsergebnissen für große endlich dimensionale Blockmatrizen.

Abschließend leiten wir noch entsprechende Ergebnisse für zufällige Blockmatrizen, die die zum klassischen Laguerre-Ensemble gehörenden tridiagonalen Matrizen verallgemeinern, her.

Abstrakte Versionen klassischer Ungleichungen und Anwendung auf Quantengraphen (Sebastian Haeseler)

Der erste Teil dieser Arbeit hat Zusammenhänge a priori verschiedener Ungleichungen im Fokus. Es wird die Äquivalenz einiger Ungleichungen, darunter auch der Nash-Ungleichung, zur Sobolev-Ungleichung untersucht und gezeigt. Dabei wird in einem abstrakten Rahmen gearbeitet, der zum Beispiel Sobolev-Ungleichungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und auf diskreten Graphen umfasst. Die Vorgehensweise folgt im Wesentlichen der Arbeit „Sobolev inequalities in disguise“ von Bakry, Coulhon, Ledoux und Saloff-Coste (1994).

Im zweiten Teil werden Quantengraphen betrachtet, d.h. gewisse Differentialoperatoren auf metrischen Graphen. Es wird neben einem Sobolevschen Einbettungssatz auch eine Harnack-Ungleichung bewiesen. Beim Beweis der Sobolev-Ungleichung kann direkt die lokal eindimensionale Struktur genutzt werden. Zum Beweis der Harnack-Ungleichung wird zunächst eine Volume-Doubling Eigenschaft gezeigt und eine Poincaré-Ungleichung bewiesen. Diese beiden Hilfsmittel erlauben es dann anschließend die sogenannte Moser-Iteration durchzuführen. Diese Ergebnisse sind neu.

Concept Analysis of Implicative Algebras

Starting from Hilbert Algebras
(Alexandra Hänig)

Die Masterarbeit „Concept Analysis of Implicative Algebras“ wurde im Rahmen der Forschung über Begriffsanalyse und Algebra geschrieben. Das Anliegen ist es die Abhängigkeiten von 15 Axiomen, welche in Hilbert Algebren erfüllt sind so weit es geht vollständig zu klären. Unter einer Hilbert Algebra versteht man eine Algebra in der für alle $a, b, c \in S$ die Axiome (1) $a * (b * a) = 1$, (2) $(a * (b * c)) * ((a * b) * (a * c)) = 1$ und (3) aus $a * b = b * a = 1$ folgt $a = b$ gelten. Sie erfüllen auch die Axiome (4) $a * a = 1$, (5) $a * 1 = 1$ und (6) aus $a * b = b * c = 1$ folgt $a * c = 1$. Gelten die Eigenschaften (3) – (6) in einem Gruppoid $(S, *)$ so ist dies eine Implikative Algebra. Definiert man weiterhin eine Relation $a \leq b \iff a * b = 1$ so erhält man für eben jene Axiome mit (S, \leq) eine partiell geordnete Menge mit größten Element 1.

Mit Hilfe der formalen Begriffsanalyse werden die Abhängigkeiten der 15 Axiome innerhalb der Implikativen Algebren vollständig, innerhalb der partiell geordneten Mengen bis auf eine Implikation und im allgemeinen Fall bis auf 8 Implikationen analysiert und geklärt. Zu diesen offenen Implikationen konnten bisher weder Beweise noch Gegenbeispiele gefunden werden.

Ein weiterer Kernpunkt ist es die wichtigsten, den Hilbert Algebren am nächsten gelegenen Algebren definiert und ihre Kategorisierung ausführlich untersucht. Alle ihre Abhängigkeiten und Beziehungen sind vollständig dargestellt und bewiesen.

Weiterhin werden das entwickelte Computerprogramm beschrieben sowie die Angewandten Theorien definiert und erklärt. Auch die Programme Prover9-Mave4-v05 und Concept Explorer werden vorgestellt.

Insgesamt wurden 1034 Beispiele gefunden - 96 für die partiell geordneten Mengen und 59 für die Implikativen Algebren. Die Begriffsverbände zu allen drei Beispielmengen werden dargestellt, wobei der für die Implikativen Algebren komplett ist.

Ein Modell für die motivische Homotopiekategorie (Philip Herrmann)

Ziel dieser Diplomarbeit ist die Einführung eines Modells für motivische Homotopietheorie, also einer Modellstruktur auf einer geeigneten Kategorie von Räumen, die glatte Schemata über einem festen Körper k verallgemeinern. Die hier erarbeiteten Modellstrukturen sollen eine Alternative zur Modellstruktur von Morel und Voevodsky bieten. Tatsächlich existiert in der Literatur bereits eine beachtliche Anzahl alternativer Zugänge zur motivischen Homotopietheorie (vgl. [1], [2], [3], [4] u.a.), jedoch unterscheiden sich diese Modelle im Wesentlichen nur in der Wahl der (Ko-) Faserungen und basieren alle auf der gleichen unterliegenden Kategorie. Wie sich erfreulicherweise zeigen wird, liefert jede der genannten Modellstrukturen auch ein Modell der motivischen Homotopietheorie auf einer neuen unterliegenden Kategorie $\mathcal{S}Pre(\mathcal{S}m/k)$ von angereicherten Funktoren. Diese *simplizialen Funktoren* sind mit einer komplexeren kombinatorischen Struktur versehen als die gewöhnlichen simplizialen Prägarben und verwalten (höhere) Homotopien. Untersucht werden außerdem kategorielle Eigenschaften der Modellstrukturen, wie ihre Verträglichkeit mit Basiswechseln und der monoidal Struktur der zugrunde liegenden Kategorie. Versteht man erzeugende azyklische Kofaserungen als Relationen, denen ein Objekt einer kofasernd erzeugten Modellstruktur unterliegen muss, um fasernd zu sein, so stellt sich heraus, dass zur Charakterisierung fasernder Objekte in den neuen Modellstrukturen weniger Relationen erforderlich sind, als in den jeweiligen zugehörigen Modellstrukturen auf simplizialen Prägarben.

[1] Benjamin Blander (2001), *Local Projective Model Structures on Simplicial Presheaves*, *K-Theory*, Vol. 24, 283–301.

[2] Daniel Dugger (2001), *Universal homotopy theories*, *Adv. Math.*, Vol. 164, 144–176.

[3] Bjørn Ian Dundas and Oliver Röndigs and Paul Arne Østvær (2003), *Motivic Functors*, *Documenta Mathematica*, Vol. 8, 489–525.

[4] Daniel C. Isaksen (2005), *Flasque model structures for simplicial presheaves*, *K-Theory*, Vol. 36, 371–395.

Über die Kombinatorik der Galoiszahlen (Steffen Hitzemann)

Betrachtet man die Mächtigkeit $G_{n,q}$ des Verbandes der Unterräume eines n -dimensionalen Vektorraums über einem endlichen Körper mit q Elementen, so kommt man auf die Rekursionsformel der Galoiszahlen

$$G_{n,q} = 2G_{n-1,q} + (q^{n-1} - 1)G_{n-2,q}$$

für $n \geq 2$, wie 1969 von Goldman und Rota gezeigt. Ulrich Faigle hat die Frage gestellt, ob sich diese Rekursionsformel für $n \geq 3$ geometrisch interpretieren lässt, d.h. ob sich ein solcher Verband, der kurz mit $\mathcal{L}(n, GF(q))$ bezeichnet wird, disjunkt in zwei Teilverbände isomorph zu $\mathcal{L}(n-1, GF(q))$ und $q^{n-1} - 1$ Teilverbände isomorph zu $\mathcal{L}(n-2, GF(q))$ zerlegen lässt. Daraus ergibt sich ein kombinatorisches Problem, das sogenannte Intervallzerlegungsproblem.

In dieser Diplomarbeit werden zunächst verschiedene Themen behandelt, die für die Untersuchung des Intervallzerlegungsproblems benötigt werden, nämlich Körper- und Verbandstheorie, Gauß'sche Koeffizienten und Galoiszahlen sowie Graphen- und Matchingtheorie.

Anschließend werden einige allgemeine Aussagen zum Intervallzerlegungsproblem bewiesen, aus denen ein Algorithmus zur Konstruktion von Intervallzerlegungen höherer Dimension aus Intervallzerlegungen niedrigerer Dimension abgeleitet wird. Mit Hilfe dieses Algorithmus lässt sich zeigen, dass es für $n \geq 5$ keine Intervallzerlegung von $\mathcal{L}(n, GF(2))$ gibt, was 2002 schon von Winfried Hochstättler auf anderem Wege bewiesen wurde. Danach wird $\mathcal{L}(n, GF(3))$ unter Einsatz des Computers untersucht, wobei der Algorithmus 26 Intervallzerlegungen einer bestimmten Klasse (sogenannte strukturierte Intervallzerlegungen) von $\mathcal{L}(4, GF(3))$ sowie 52 strukturierte Intervallzerlegungen von $\mathcal{L}(5, GF(3))$ findet. Letzteres Resultat ist insofern überraschend, als dass es im deutlichen Gegensatz zum Ergebnis im Fall $\mathcal{L}(5, GF(2))$ steht.

Zuletzt folgt noch eine Laufzeitanalyse verschiedener Varianten des entwickelten Algorithmus.

Donsker's Invariance Principle for Enhanced Brownian Motion (Martin Huesmann)

The rough path theory developed by Terry Lyons et alii in the past 15 years combines the concepts of ordinary and stochastic differential equations. The idea is easy. If the driving signal x in the equation

$$dy_t = V(y_t)dx_t \tag{1}$$

is Lipschitz or smoother, we understand the solution very well. Let us denote the solution by $y = I_V(x)$. If we now find a metric d under which the mapping

$$x \mapsto I_V(x) = y$$

is uniformly continuous, then we can extend our notion of solutions to (1) to rougher signals by approximation of this rough signal in the topology defined by the metric d .

To get a well defined solution, it is necessary to consider enhanced paths, namely paths plus area and possibly plus similar higher dimensional objects. The level of enhancement is linked to the roughness of the driving signal. Such a rough signal is, for example, Brownian motion, which is almost surely $1/p$ Hölder continuous for $p > 2$. If we take a realization of Brownian motion with a $p \in (2, 3)$, enhanced Brownian motion will be something like

$$\mathbf{B}_t = B_t + A_t.$$

Brownian motion B_t plus Lévy area $A_t = \frac{1}{2} \int_0^t B_r \otimes dB_r - dB_r \otimes B_r$, meaning $A_t^{i,j} = \frac{1}{2} \int_0^t B_r^i dB_r^j - dB_r^i B_r^j$. Then, we can define the solution to an SDE driven by Brownian motion pathwise! As this solution is defined as a limit point of approximations of Brownian motion converging together with their area processes to enhanced Brownian motion, we are interested in approximations of Brownian motion.

A very famous approximation result is Donsker invariance principle. Let (X_k) be a sequence of centered iid random variables with variance 1. Then

$$B^a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=1}^{[at]} X_k + \frac{at - [at]}{\sqrt{a}} X_{[at]+1}$$

converges weakly to Brownian motion. Any path $B^a(t)$ is Lipschitz. Therefore, it has a canonically defined area process in terms of iterated integrals, which we will call $A^a(t)$. Then the object (B^a, A^a) is exactly the kind of object the rough path theory deals with. We already know that B^a converges weakly to Brownian motion. In this thesis, we will show that (B^a, A^a) converge weakly to enhanced Brownian.

Nash-Gleichgewichte des Pagerankspiels (Elke Just)

In der Arbeit wird das sogenannte Pagerankspiel betrachtet, ein Normalformspiel, welches als Auszahlung den von Larry Page und Sergey Brin entwickelten Pagerank verwendet. Dieser stellt eine Strategie dar, Webseiten nach ihrer Relevanz zu bewerten und bildete die Grundlage des Erfolges der bekannten Suchmaschine Google. Folglich enthalte das Pagerankspiel die Webseiten des World Wide Web als Spieler und eine Aktion einer Webseite sei identisch mit den von ihr gesetzten Links.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Existenz und der Struktur der Nash-Gleichgewichte, die in diesem Spiel vorkommen können. Mit Hilfe des Modells des „nachtragenden Websurfers“ werden notwendige und hinreichende Existenzbedingungen angegeben und hergeleitet. Dies geschieht zum Teil unter Zusatzvoraussetzungen. Insgesamt kann eine Vielzahl an Nash-Gleichgewichten nachgewiesen werden. Beispielklassen bei denen dies möglich ist werden vorgestellt. Desweiteren wird ein Algorithmus zur automatischen Überprüfung und zum Finden von Nash-Gleichgewichten eingeführt.

Applications of adaptive observers and tracking (Tobias Kellner)

Dynamische Eingangs-/Ausgangssysteme dienen oft der Beschreibung von technischen oder physikalischen Systemen. Oftmals ist es dabei nicht möglich auf alle internen Zustände eines solchen Systems zuzugreifen, so dass die Konstruktion von Algorithmen, die diese Zustände zumindest schätzen können, notwendig wird. Eines der wichtigsten Mittel dafür ist der Beobachterentwurf. Ein Beobachter ist ein dynamisches System, welches mit den Ein- und Ausgabesignalen des Originalsystems die inneren Zustände des Originalsystems schätzt.

Eine wichtige Frage beim Beobachterentwurf ist, wie sich der Fehler zum Originalsystem transient verhält. Das Hauptresultat des ersten Teils der vorliegenden Arbeit ist ein Beobachter, der zumindest das Ausgangssignal des Originalsystem innerhalb einer vorgeschriebenen Grenze schätzt.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit Systemen, die unbekannt Parameter enthalten. Unter anderem wird hier der Beobachterentwurf dazu ausgenutzt, eine Zustandsrückführung zu erstellen, welche das Ausgangsverhalten unseres System gegen ein vorgeschriebenes Ausgangssignal konvergieren lässt. Es wird ein lückenhafter Beweis von T. Marino und P. Tomei [1] aufgearbeitet und Möglichkeiten zur Ergänzung und Vereinfachung der von T. Marino und P. Tomei angegebenen dynamischen Zustandsrückführung aufgezeigt.

[1] Riccardo Marino and Patrizio Tomei (1995), *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice Hall, London New York Toronto Sydney Tokyo Singapore Madrid Mexico City Munich, 1. edition

Engelstrukturen (Mirko Klukas)

Eine Engelstruktur ist eine maximal nicht-integrierbare Ebenendistribution \mathcal{D} auf einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit, d.h. \mathcal{D} erfüllt die folgenden beiden Bedingungen

- (i) $\mathcal{E} = [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ ist eine Distribution vom Rang 3,
- (ii) $[\mathcal{E}, \mathcal{E}]$ ist eine Distribution vom Rang 4.

Neben Kontaktstrukturen und Geradenfeldern sind Engelstrukturen die einzigen stabilen Distributionen im Sinne der Singularitätstheorie, d.h. sie sind generisch und je zwei solcher Strukturen sind lokal diffeomorph.

Im ersten Teil der Arbeit betrachten wir Engelstrukturen auf S^1 -Bündeln, deren charakteristische Blätter tangential zu den Fasern verläuft. Jedes Blatt entspricht also einer S^1 -Faser des Bündels. Der Artikel *Engel structures with trivial characteristic foliations* von J. Adachi verfolgt das Ziel, solche Strukturen über die Rotationszahl und die induzierte Kontaktstruktur zu charakterisieren. Es wird dort als Modell einer solchen Engelstruktur die n -fache Verlängerung einer Kontaktmannigfaltigkeit definiert. Wir zeigen, dass diese im Allgemeinen nicht existiert und dieser Begriff nicht wohldefiniert ist. Dazu geben wir eine sinnvolle Definition einer n -fachen Verlängerung und charakterisieren diese Objekte dann über Elemente in $H^1(M; \mathbb{Z}_n)$.

Im zweiten Teil betrachten wir Engelstrukturen auf $M \times [0, 1]$ mit trivialer charakteristischer Blätterung und charakterisieren diese über gewisse Randbedingungen. Für die Konstruktion einer solchen Engelstruktur zu gegebenen Randbedingungen greifen wir den Konstruktionsansatz von J. Adachi auf und nehmen einen leicht modifizierten Standpunkt ein, der es uns gleichzeitig ermöglicht, einen Beweis für die Eindeutigkeit der Konstruktion zu geben.

Direct and Iterative Methods for the Product Eigenvalue Problem (Lukas Krämer)

Die Arbeit beschäftigt sich mit numerischen Verfahren zur Lösung des Produkteigenwertproblems. Das Produkteigenwertproblem beinhaltet die Berechnung von Eigenwerten, Eigenvektoren und invarianten Teilräumen eines Produktes quadratischer Matrizen. Das Produkt ist hierbei nur faktorweise verfügbar, da die explizite Berechnung numerisch nicht sinnvoll ist. Das betrachtete Eigenwertproblem kann auf ein Standard-Eigenwertproblem zurückgeführt werden. Es werden zwei numerische Verfahren diskutiert, die diesen Sachverhalt ausnutzen. Das erste basiert auf dem QR-Algorithmus und ist somit für moderat große, dicht besetzte Produkte geeignet. Das zweite vorgestellte Verfahren basiert auf dem Krylov-Schur-Algorithmus, einem Nachfolger des Arnoldi-Algorithmus, und ist daher für große, dünn besetzte Produkte geeignet.

Theorie und Störungsanalyse des Produkteigenwertproblems werden ebenfalls behandelt. Eine Softwareimplementierung aller vorgestellten Algorithmen vervollständigt die Arbeit.

Additive Polynomials for finite groups of Lie type (Annette Maier)

Eine zentrale Fragestellung in der Galoistheorie ist, welche endlichen Gruppen als Galoisgruppen über einem gegebenem Körper vorkommen. In der vorliegenden Arbeit werden Galoisgruppen über Funktionenkörpern über endlichen Körpern \mathbb{F}_q betrachtet. Anders als über \mathbb{Q} sind hier erst wenige Gruppen realisiert worden, besonders zu nennen sind dabei eine Reihe von Artikeln von Abhyankar.

In positiver Charakteristik kann jede Galoiserweiterung als Zerfällungskörper eines additiven Polynoms, d.h. einer Linearkombination von X^{q^i} , $i \geq 0$, dargestellt werden. Die Nullstellen eines additiven Polynoms bilden einen \mathbb{F}_q -Vektorraum, etwa der Dimension n , und da die Galoisgruppe auf den Nullstellen operiert, bekommt man eine kanonische Einbettung der Galoisgruppe in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Die Galoisgruppe eines sogenannten Frobeniusmoduls ist ebenfalls auf natürliche Weise eine Matrixgruppe und es hat sich als nützlich erwiesen, zuerst einen Frobeniusmodul mit der gegebenen Gruppe als Galoisgruppe zu konstruieren. In einem Artikel von 2003 gibt Matzat untere und obere Schranken zu der Galoisgruppe eines Frobeniusmoduls mit Hilfe derer schon die (exzeptionellen) Dicksongruppen $G_2(q)$ durch Malle und die klassischen Gruppen $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{Sp}_{2k}(q)$ und $\mathrm{SO}_n^+(q)$ durch Albert realisiert werden konnten.

In der vorliegenden Arbeit werden obere Schranken in getwisteten endlichenn Gruppen vom Lie-Typ gegeben und zusammen mit dem schon vorhandenen Kriterium für untere Schranken werden die folgenden Gruppen über $\mathbb{F}_q(t_1, \dots, t_k)$ realisiert: $\mathrm{SU}_{2k+1}(q)$, $\mathrm{SU}_{2k}(q)$, $\mathrm{SO}_{2k+2}^-(q)$ (diese nur für ungerade q), ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ und ${}^3D_4(q)$ (letztere unter einer gewissen Bedingung an \mathbb{F}_q). Außerdem werden für alle Erweiterungen additive Polynome konstruiert, welche in vielen Fällen von besonders allgemeiner Form und möglicherweise sogar generisch sind. Die Methode nutzt die Struktur der zu Grunde liegenden linearen algebraischen Gruppen, wobei in Anlehnung an die Diplomarbeit von Albert der sogenannte Steinbergschnitt verwendet wird. Dadurch können auch für die Gruppen $G_2(q)$ neue Frobeniusmoduln gefunden werden, die Polynome von deutlich einfacherer Form als die von Malle bestimmten liefern.

Nakajima-Monome und Wegemodell (Matthias Meng)

Sowohl der Menge der Nakajima-Monome als auch der Menge der Wege von Littelmanns Wegemodell kann man die Struktur eines Kristalls verleihen. Das Ziel dieser Arbeit ist in bestimmten Fällen eine Verbindung zwischen diesen Kristallen herzustellen. Konkret bedeutet das: Wir suchen eine Abbildung zwischen den Monomen und den Wegen, die einen Morphismus von Kristallen bildet. Dazu gehen wir von einer Lie-Algebra \mathfrak{g} vom Typ A_n aus. Wir benutzen dann die von Kashiwara und Nakaschima vorgestellte Realisierung Kristalliner Basen von $U_q(\mathfrak{g})$ -Moduln über Young-Diagramme.

Dann können wir jedem semi-standard Young-Tableau eindeutig einen Weg zuordnen und beweisen, dass man dadurch einen Morphismus der Kristallinen Basis $B(\lambda)$ in die Menge der Wege erhält. Das reduziert unser Problem darauf eine Verbindung zwischen Young-Tableaux und Monomen zu finden. Dazu betrachten wir die Nakajima-Monome $M = \prod_{i,n \in \mathbb{Z}} Y_i(n)^{y_i(n)}$, wobei $y_i(n)$ nur für endlich viele n

ungleich 0 sein soll. Dieser Menge verleihen wir ebenfalls eine Kristallstruktur.

Da wir ein Young-Tableau als Tensorprodukt seiner Spalten schreiben können, konstruieren wir zunächst eine Abbildung Φ die einem semi-standard Tableau mit einer Spalte und Einträgen aus der Menge $\{1, \dots, n+1\}$ ein Monom zuordnet. Wir beweisen dann, dass Φ ein Morphismus von Kristallen ist. Außerdem erweitern wir diesen mittels des Tensorprodukts auf die Menge der semi-standard Young-Tableaux. Hierbei werden wir zunächst das Tensorprodukt von Monomen durch deren Produkt darstellen, wobei wir allerdings eines der beiden „verschieben“ und zeigen, dass diese „Verschiebung“ ebenfalls die Kristallstrukturen erhält. Dann nutzen wir diese beiden Abbildungen um eine direkte Verbindung zwischen Monomen und Wegen anzugeben und zu beweisen, dass es sich dabei um ein Morphismus von Kristallen handelt.

Die Spin- L -Funktion für Siegelsche Modulformen von Grad 2 (Martin Raum)

Die Spin- L -Reihe zu einer Siegelschen Modulform f ist eine von mehreren möglichen Verallgemeinerungen der Hecke- L -Reihe, die zu elliptischen Modulformen und einem Dirichlet Charakter χ assoziiert werden kann. Wenn diese Verallgemeinerung geometrische und darstellungstheoretische Bedeutung hat, sollte sie einerseits eine meromorphe Fortsetzung auf die komplexe Ebene besitzen und andererseits sollte diese Fortsetzung, Spin- L -Funktion genannt, eine Funktionalgleichung erfüllen. Beide Eigenschaften wurden durch Arbeiten von Andrianov, Krieg, Sengupta, Skoruppa, Kohlen, Gritsenko und schließlich Kuß für eine große Zahl an Modulformen von Grad 2 und Stufe 1 gezeigt. Es verbleibt ein besonders schwieriger Fall, in dem die Funktionalgleichung der mit einem Dirichlet-Charakter gewisteten Spin- L -Funktion nicht bewiesen wurde. Dieser wird in der vorliegenden Arbeit behandelt. Hierzu wird die Rankin-Faltung von zwei Siegelchen Modulformen zu gewissen Untergruppen einer paramodularen Gruppe untersucht. Eine geeignete Wahl solcher zu f assoziierten Formen überführt diese Faltung in die betrachtete Spin- L -Funktion, so dass die gewünschten Eigenschaften aus denen der Faltung gefolgert werden können.

The Largest Possible Class of Data for Very Weak Solutions to the Instationary Navier–Stokes Equations (Paul Felix Riechwald)

In meiner Diplomarbeit *The Largest Possible Class of Data for Very Weak Solutions to the Instationary Navier–Stokes Equations* habe ich mich mit dem Konzept der *sehr schwachen Lösungen* für die Navier–Stokes-Gleichungen in beschränkten Gebieten Ω beschäftigt. Für solche Lösungen ist es gelungen, die größtmögliche Datenklasse zu bestimmen. Die Klasse ist so allgemein, dass jede Funktion im Lösungsraum $L^r(0, T; L^q_\sigma(\Omega))$ mit der *Serrin-Bedingung* $2 < r < \infty$, $n < q < \infty$, $2/r + n/q \leq 1$, eine Lösung zu passend gewählten Daten ist. Trotz der Allgemeinheit des Datenraums sind Lösungen (global) eindeutig und existieren zumindest für kleine Daten oder kurze Zeitintervalle.

Die Datenklasse ist kein Funktionenraum, sondern ein Raum von Funktionalen. Ein Datenfunktional enthält sowohl die äußeren Kräfte und die Anfangsbedingung als auch die (Tangentialkomponente) der Dirichlet-Randbedingung. Im Allgemeinen können die Daten sogar so beschaffen sein, dass sie keine Zerlegung in Ausdrücke mit äußerer Kraft und Anfangs- oder Randbedingung zulassen.

Für die spezielle Datenklasse, die in meiner Diplomarbeit betrachtet wird, gibt es schon Ergebnisse für die linearisierten Gleichungen, die Stokes-Gleichungen. In meiner Arbeit werden die Resultate mit Hilfe eines Fixpunktarguments auf den nichtlinearen Fall übertragen. Der nichtlineare Term muss dabei als Teil des Datenfunktionals aufgefasst werden, wofür man gewisse Einbettungen von Funktionenräumen braucht. Der Beweis benötigt sowohl die Theorie analytischer Halbgruppen und Interpolationstheorie von Banachräumen als auch tiefliegende Ergebnisse über maximale Regularität gewisser parabolischer Gleichungen.

Konjugationsklassen und Charaktere in endlichen p -Gruppen (Benjamin Sambale)

Sei G eine endliche p -Gruppe für eine Primzahl p und K eine Konjugationsklasse von G . Das Produkt KK^{-1} ist dann eine Vereinigung von Konjugationsklassen, und wir bezeichnen mit $\eta(K)$ die Anzahl der Konjugationsklassen in KK^{-1} . Wir beweisen in dieser Arbeit, dass in vielen Fällen $\eta(K)$ kongruent zu 1 modulo $p - 1$ ist. Gelegentlich benutzen wir dabei das Computeralgebrasystem GAP. Wir haben bisher kein Gegenbeispiel für diese Aussage gefunden.

Außerdem untersuchen wir ein duales Problem für komplexe Charaktere. Sei dazu χ ein beliebiger irreduzibler komplexer Charakter von G . Dann ist auch $\chi\bar{\chi}$ ein Charakter von G , und wir bezeichnen mit $\text{Irr}(\chi\bar{\chi})$ die Menge aller irreduziblen Bestandteile von $\chi\bar{\chi}$. Auch hier zeigen wir in vielen Fällen, dass die Anzahl $|\text{Irr}(\chi\bar{\chi})|$ der Elemente in $\text{Irr}(\chi\bar{\chi})$ kongruent zu 1 modulo $p - 1$ ist. Für diese Aussage ist ebenfalls kein Gegenbeispiel bekannt.

Solvability, approximation and estimates for a class of singular phase field models (André Schlichting)

In der Diplomarbeit wird ein Phasentübergangsmodell bearbeitet, welches erlaubt, Systeme mit zwei Komponenten zu behandeln. Dabei ist es möglich, Phasenwechsel erster Art – wie bei Übergängen von fest zu flüssig oder von flüssig zu gasförmig – und Phasenwechsel zweiter Art – wie sie bei ferromagnetischen Stoffen auftreten, welche oberhalb der Curie-Temperatur nicht magnetisch werden – zu beschreiben.

Das System wird durch die Temperatur und einen Phasenparameter beschrieben. In dieser schwachen Formulierung ist es möglich, Mischphasen zu betrachten. Die Evolution des Systems wird ausgehend von einer freien Energie und einem Pseudopotential der Dissipation hergeleitet. Das System besteht aus zwei gekoppelten, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, in denen Singularitäten in den Quelltermen erlaubt sind.

In der Arbeit wurde eine Zeitdiskretisierung dieses Systems durchgeführt. Für das zeitdiskrete System konnte die Existenz und Eindeutigkeit sowie die Beschränktheit des Phasenparameters gezeigt werden. Des Weiteren wurde die Konvergenz von Lösungen des zeitdiskreten Systems zu Lösungen des zeitkontinuierlichen Systems gezeigt. Darüber hinaus konnten die Ergebnisse, welche bereits für das kontinuierliche System bekannt waren, durch eine stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten erweitert werden.

Eines der dabei verwendeten Hilfsmittel umfasste die Theorie der monotonen Operatoren, wie zum Beispiel die Yosida-Approximation. Diese wurde verwendet, um die Singularitäten zu approximieren und somit Lösbarkeitsaussagen zu erhalten. Für die Temperatur auf dem Rand wurden inhomogene Randbedingungen zugelassen. Um diese Inhomogenitäten zu entfernen, wurde mit der harmonischen Fortsetzung gearbeitet. Ausgehend von Normabschätzungen konnte dann von schwachen Konvergenzen mit Hilfe von Einbettungssätzen auf Normkonvergenz geschlossen werden.

Die Arbeit entstand nach einem halbjährigen Auslandssemester an der Universität Pavia, Italien.

Rigid G_2 -Representations and Motifs of Type G_2 (Johannes Schmidt)

Die Kategorie der glatten R -Garben (für $R = \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell, \bar{\mathbb{Q}}_\ell, \dots$) auf einem zusammenhängendem Noetherschen Schema ist das Gegenstück in der étalen Topologie zur Kategorie der lokal konstanten Garben von freien R -Moduln auf einer komplexen Mannigfaltigkeit. Ebenso wie eine solche lokal konstante Garbe durch die assoziierte Monodromiedarstellung der topologischen Fundamentalgruppe gegeben ist, ist eine glatte Garbe bereits durch die Operation der étalen Fundamentalgruppe auf dem entsprechenden Halm der Garbe gegeben. Dettweiler und Reiter haben eine Klassifikation aller glatten $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Garben vom Rang 7 auf $\mathbb{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1 \setminus \{0, 1\}$ angegeben, auf deren Halmen die étale Fundamentalgruppe als Zariski dichte Untergruppe der einfachen algebraischen Gruppe $G_2(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ operiert. Weiter konstruierten Dettweiler, Reiter und Katz ausgehend von einem Isomorphietyp dieser Klassifikation eine Familie von Motiven für motivierte Zyklen mit motivischer Galoisgruppe $G_2(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Das Ziel meiner Diplomarbeit war es, unter der Annahme der Tate Vermutung, ausgehend von einem anderen Isomorphietyp der in Rede stehenden Klassifikation eine weitere Familie von reinen Motiven mit Galoisgruppe $G_2(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ zu konstruieren. Im Gegensatz zu dem von Dettweiler, Reiter und Katz benutzten Isomorphietyp, treten irrationale Eigenwerte in den Monodromiematrizen des hier betrachteten Typs auf. Somit reichen die in der Konstruktion von Dettweiler, Reiter und Katz benötigten Fortsetzungen der betrachteten Garben auf $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0, 1\}$ für einen möglichst "kleinen" Zahlkörper k nicht mehr aus. Stattdessen benutzen wir durch das Starheitskriterium gegebene Fortsetzungen der modulo ℓ reduzierten Garben auf $\mathbb{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}^1 \setminus \{0, 1\}$. Als Korollar erhalten wir dabei eine explizite Version des Hilbertschen Irreduzibilitäts Satzes im Falle der Gruppe $G_2(\mathbb{F}_\ell)$.

p -adische Galoisdarstellungen und (φ, Γ) -Modul (Torsten Schoeneberg)

Sei K ein vollständiger diskret bewerteter Körper, $\text{char}(K) = 0$, mit perfektem Restklassenkörper k , $\text{char}(k) = p > 0$, und fixiere einen algebraischen Abschluss \overline{K} . J. - M. Fontaine hat 1990 einen Beweis dafür skizziert, dass die Kategorie der Darstellungen von $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ auf endlichdimensionalen \mathbb{Q}_p -Vektorräumen äquivalent zur Kategorie der „etalen (φ, Γ) -Moduln“ über einem gewissen Körper $\mathcal{E}(K)$ ist.

Diese Diplomarbeit gibt einen vollständigen und detaillierten Beweis für (eine leicht verallgemeinerte Form von) Fontaines Theorem. Wir zeigen zuerst eine etwas elementarere Kategorienäquivalenz, wobei K durch einen Körper E der Charakteristik p ersetzt wird. Um dies für die vorliegende Situation zu nutzen, ordnen wir K einen solchen Körper $E(K)$ zu; dies geschieht mittels der von Fontaine und Wintenberger entwickelten Theorie der Normenkörper. Daraufhin konstruieren wir den oben erwähnten Körper $\mathcal{E}(K)$, wofür wir eine schwache Topologie auf bestimmten Wittvektoren ausnutzen. Im Laufe der Konstruktionen beschreiben wir $E(K)$ und $\mathcal{E}(K)$ als bestimmte Laurentreihenkörper und untersuchen die Topologie von $\mathcal{E}(K)$. Damit können wir schließlich von der zuerst gezeigten Äquivalenz (für $E(K)$) zu der behaupteten (für K) gelangen.

Mathematische Untersuchung des Deduktionsspiels Beams (Lisa Schreiber)

Das Spiel „Beams“ von Michail Antonow ist ein Deduktionsspiel, das auch als zweidimensionale Mastermind-Variante angesehen werden kann. So versucht jeder Spieler das vom Gegner ausgedachte, geheime Farbmuster in Form eines Sechsecks zu erraten.

In meiner Diplomarbeit wurde versucht einen Computer-Spieler zu entwickeln, der „Beams“ gut spielt. Dafür wurde für jede mögliche Frage die Entropie berechnet. Da man die Entropie als ein Maß für die Unsicherheit ansehen kann, bedeutet eine hohe Entropie auf einer Diagonalen, dass dort noch sehr viele Felder ungelöst sind. So kann man einen Maximum-Entropie-Algorithmus für „Beams“ entwickeln, der für jede zulässige Diagonal-Farb-Kombination, d.h. für jede zulässige Frage, die Entropie berechnet und anschließend die Frage mit der höchsten Entropie stellt. Weil eine exakte Berechnung der Entropie in vielen Fällen zu zeitaufwändig ist, wurden in meiner Diplomarbeit mehrere Approximationen der Entropie auf ihre Tauglichkeit hin untersucht. Das Ergebnis ist ein Computer-Spieler, der eine relativ gute Spielstärke hat. Seine Spielergebnisse sind durchaus mit denen von Menschen vergleichbar und der implementierte Entropie-Algorithmus entspricht wahrscheinlich auch in etwa der Vorgehensweise der meisten erfahrenen Spieler.

Deshalb war es auch möglich, mit Hilfe dieses Computer-Spielers Untersuchungen über „Beams“ anzustellen. So wurden unter anderem folgende Fragen untersucht:

1. Welche Minuspunkte werden durchschnittlich erreicht?
2. Was ist eine besonders schlechte und was eine besonders gute Punktzahl?
3. Wodurch zeichnet sich ein schwer zu erratendes Farbmuster aus und kann man mit Hilfe von statistischen Verfahren den Schwierigkeitsgrad eines Brettes mit einem linearen Modell beschreiben?

Kinematische Geometrie einer Sonderverzahnung (Tino Schulz)

Zahnstangen spielen in der Verzahnungstechnik nicht nur als Getriebeteile, sondern insbesondere als Bezugsprofile eine wichtige Rolle. Diese Profile definieren die Flankenformen der entstehenden Verzahnungen und werden als Werkzeugprofile genutzt.

Die Arbeit betrifft eine Verallgemeinerung der Zahnstangenflanken von zylindrischen Regelflächen auf Schraubflächen. Dazu werden technische Herstellungsverfahren der Verzahnungselemente, sowie die entstehende Sonderverzahnung durch die Hüllflächentheorie modelliert. Zur simultanen Lösung dieses zweifachen Hüllvorgangs wird das Prinzip der Doppelhüllung vorgestellt. Die gesuchten Flächenpunkte ergeben sich anschaulich als Schnittpunkt der beiden Charakteristiken eines zweiparametrischen Bewegungsvorganges und sind im Allgemeinen explizit bestimmbar, wenngleich dies nur auf eine der Charakteristiken zutrifft. Daraufhin wird der Eingriff der Sonderverzahnung untersucht und veranschaulicht. In Hinblick auf eine eventuelle, technische Umsetzung werden zudem Methoden zur Flächenapproximation durch Schraubflächen dargestellt.

Polynomiell wachsende Gruppen: Geometrie, Spektren und Rückkehrwahrscheinlichkeiten

(Fabian Schwarzenberger)

Die vorliegende Arbeit ist im Bereich der geometrischen Gruppentheorie anzusiedeln. Im Zentrum der Betrachtungen stehen endlich erzeugte Gruppen, welche bei fester Wahl eines Erzeugendensystems die Möglichkeit bieten einen Cayley Graphen zu definieren. Dieser Zusammenhang stellt die Verbindung zwischen einer abstrakten algebraischen Struktur und einem geometrischen Objekt dar. Daher bietet sich die Möglichkeit, sowohl graphentheoretische als auch algebraische Methoden anzuwenden. Das erste Kapitel der Arbeit liefert einen grundlegenden Überblick über Möglichkeiten zur Klassifikation von Gruppen und diskutiert die (für diese Arbeit) wichtigsten gruppentheoretischen Eigenschaften.

Nachdem im zweiten Kapitel wichtige Resultate wie der Satz von Bass und der Satz von Gromov diskutiert werden, konzentriert sich das dritte Kapitel auf eine spezielle Kenngröße der Geometrie eines Graphen, die *Rückkehrwahrscheinlichkeit*. Hier wird das Hauptresultat der Arbeit [1] vorgestellt. Betrachtet man eine einfache Irrfahrt auf einem Graphen, so bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit nach $2n$ Schritten wieder am Ausgangspunkt angekommen zu sein als Rückkehrwahrscheinlichkeit. Diese kann für einige spezielle Gruppen genau angegeben werden, ist jedoch im Allgemeinen unbekannt. Das hier vorgestellte Resultat liefert unabhängig von der genauen Kenntnis dieser Funktion eine Aussage zur Invarianz der Rückkehrwahrscheinlichkeit unter Quasiisometrie.

Die *integrierte Zustandsdichte* (IDS) ist der zentrale Begriff des vierten Kapitels. Sie gibt die Verteilung des Spektrums eines selbstadjungierten Operators auf der reellen Achse an. Nach ausführlichen Definitionen im allgemeinen Rahmen, wird der Spezialfall des Adjazenzoperators A eines Cayley Graphen untersucht. Hier wird der Zusammenhang zum vorhergehenden Kapitel deutlich. Zum einen lassen sich die Momente der IDS durch Potenzen von A berechnen, zum anderen kodiert die n -te Potenz von A auch die Rückkehrwahrscheinlichkeit einer zufälligen Irrfahrt der Länge n . Durch Anwendung eines Taubertheorems kann man dann von Momenten der Verteilung auf das asymptotische Verhalten der IDS am Rand des Spektrums schließen. Damit wird gezeigt, dass sich für polynomiell wachsende Gruppen die IDS am Rande des Spektrums ebenfalls polynomiell verhält.

Im letzten Kapitel der Arbeit, wird die Vereinbarkeit der beiden Eigenschaften *amenabel* und *residuell endlich* untersucht. Beide Eigenschaften können mittels Folgen von Teilmengen der Gruppe definiert werden. So nennt man eine Gruppe residuell endlich, falls eine absteigende Folge von Normalteilern existiert, welche endlichen Index besitzen und in deren Schnitt nur die triviale Gruppe liegt. Amenabilität ist äquivalent zu der Existenz einer Følner-Folge, d.h einer Folge endlicher Teilmengen, bei welcher der Quotient zwischen Rand und Volumen gegen Null geht. Die Frage welche sich dabei stellt ist, ob man diese Eigenschaften mit einer Folge synchron erfüllen kann.

Am Beispiel der Heisenberg-Gruppe H_3 fragen wir uns: existiert eine Folge von Normalteiler, welche zeigt, dass H_3 residuell endlich ist und deren Fundamentalbereich so gewählt werden können, dass sie eine Følner-Folge bilden? Diese Frage wird für eine große Klasse von Normalteiler und die kanonische Wahl der Fundamentalbereiche mit *Nein* beantwortet.

[1] Christophe Pittet and Laurent Saloff-Coste. On the stability of the behavior of random walks on groups. *J. Geom. Anal.*, 10(4):713-737, 2000.

Vollständige Untergraphen in multipartiten Graphen (Konrad Sperfeld)

Wie groß kann die kleinste Kantendichte (d.h. der relative Anteil der Kanten) zwischen zwei unabhängigen Mengen in einem l -partiten Graphen werden, ohne dass dieser einen vollständigen Untergraphen auf k Knoten enthält? Der Wert d_l^k sei diese größtmögliche kleinste Kantendichte. Das Hauptziel der Diplomarbeit war, die Werte d_l^k so gut wie möglich zu bestimmen und Aussagen über die Struktur all derjenigen Graphen zu treffen, bei denen als größtmögliche Kantendichte der Wert d_l^k angenommen wird.

Ein sehr wichtiges Resultat der Diplomarbeit ist der Endlichkeitssatz. Dieser besagt, dass man in einer vorgegebenen endlichen Menge von knotengewichteten Graphen definitiv einen Graphen findet, der als größtmögliche kleinste Kantendichte den Wert d_l^k annimmt. Es gelang damit einen Algorithmus zu finden, der in der Lage ist, die Werte d_l^k zu bestimmen. Da dieser Algorithmus jedoch eine sehr hohe Komplexität besitzt, ist dieser in der Praxis nur für sehr kleine Parameter l und k anwendbar. Mittels dieses Algorithmus gelang es, die Struktur derjenigen Graphen zu beschreiben, die den bekannten Wert $d_3^3 \approx 0.618$, den goldenen Schnitt, annehmen. Darüber hinaus konnten allgemeine Schranken von oben und unten für den Wert d_l^k gefunden werden. Speziell im Fall $l = k$ konnten diese Schranken erheblich verbessert werden. Dies führt auf eine Vermutung, wie sich die Werte d_n^n allgemein bestimmen lassen.

Ebenfalls sehr intensiv wurden die vierpartiten Graphen ohne Dreiecke untersucht. Hier gelang es eine aus den gefundenen Schranken begründete Vermutung für den Wert d_4^4 anzugeben.

Alternative Konvergenzmaße für die Beschreibung des Verhaltens von Echo - State - Netzen (Tobias Strauß)

Herkömmliche Lernverfahren für rekurrente neuronale Netze, wie z.B. Backpropagation Through Time oder Real Time Recurrent Learning, sind sehr rechenaufwändig. Wir beschäftigen uns daher mit dem von Jaeger [1] publizierten Echo State Ansatz, bei dem das Lernverfahren nicht viel aufwendiger als das Berechnen einer Pseudoinversen und einer Matrix-Matrix-Multiplikation ist.

Es ist unerwünscht, wenn die Zustände der Neuronen von der Initialisierung abhängen. Die Aktivierungen sollen im wesentlichen durch die Eingaben bestimmt sein. Die Echo State Property garantiert diese Unabhängigkeit. Leider ist sie aber schwierig zu verifizieren. Es gibt zwar notwendige und hinreichende Bedingungen an neuronale Netze, welche allerdings sehr ungenau sind, so dass sie in der Praxis wenig sinnvoll erscheinen. In [2] wurde der Lyapunov Exponent als Maß für die Echo State Property vorgeschlagen. In der Diplomarbeit untersuchen wir den Zusammenhang zwischen dem Exponenten und der Eigenschaft sowohl auf theoretische als auch auf praktische Weise. Es gelingt ein Kriterium zu finden, welches eine etwas schwächere Konvergenz-Eigenschaft impliziert. In Simulationen wird das Ergebnis auf seine Praxistauglichkeit überprüft.

[1] Jaeger, H. (2001), *The "echo state" approach to analysing and training recurrent neural networks*, German National Research Center for Information Technology (GMD Report 148) – Forschungsbericht

[2] Verstraeten, D. ; Schrauwen, B. ; D'Haene, M. ; Stroobandt, D. (2007), *An experimental unification of reservoir computing methods*, In: *Neural Networks* 20, S. 391–403

Ein Model für motivische Kohomologie (Florian Strunk)

In meiner Diplomarbeit habe ich eine Anreicherung der additiven Kategorie SmCor/k endlicher Korrespondenzen glatter und separierter Schemata von endlichem Typ über einem Körper k über der Kategorie \mathbf{sAb} der simplizialen abelschen Gruppen konstruiert. Anschließend habe ich auf der Kategorie der simplizialen und additiven Funktoren von $\text{SmCor}/k^{\text{op}}$ nach \mathbf{sAb} eine Modellstruktur angegeben, in deren Homotopiekategorie die motivische Kohomologie beschrieben werden kann.

Eine angereicherte Kategorie ist eine Kategorie, deren Morphismenmengen eine gewisse Zusatzstruktur tragen. Das algebraische Standard-Simplex

$$\Delta^n = \text{Spec} \left(k[X_0, \dots, X_n] / (1 - \sum_{k=0}^n X_k) \right)$$

definiert ein kosimpliziales Objekt in der Kategorie SmCor/k und man bekommt eine Anreicherung von SmCor/k über der Kategorie der simplizialen abelschen Gruppen mit

$$\mathbf{sAb}(X, Y)_n = \text{Cor}(X \otimes \Delta^n, Y).$$

Die Kategorie der simplizialen abelschen Gruppen besitzt ebenfalls eine kanonische \mathbf{sAb} -Anreicherung. Ein \mathbf{sAb} -Funktorkomplex zwischen den \mathbf{sAb} -Kategorien $\text{SmCor}/k^{\text{op}}$ und \mathbf{sAb} ist ein Funktor, der die angereicherte Struktur respektiert. Die \mathbf{sAb} -Funktorkomplexe von $\text{SmCor}/k^{\text{op}}$ nach \mathbf{sAb} bilden zusammen mit den \mathbf{sAb} -natürlichen Transformationen die Kategorie \mathbf{SPST} . Motivische Kohomologie kann in der \mathbb{A}^1 -Homotopiekategorie mit Transfers beschrieben werden. Diese ist die Homotopiekategorie einer Modellstruktur auf der Kategorie \mathbf{sPST} der additiven Funktorkomplexe von $\text{SmCor}/k^{\text{op}}$ in die Kategorie der simplizialen abelschen Gruppen. Diese Modellkategorie entsteht durch eine Bousfield-Lokalisierung aus einer Modellstruktur auf \mathbf{sPST} , die die lokal-projektive Modellstruktur genannt wird. Diese Konstruktion hat den Nachteil, dass es im Allgemeinen schwierig ist zu entscheiden, ob ein Morphismus in \mathbf{sPST} einen Isomorphismus in der \mathbb{A}^1 -Homotopiekategorie mit Transfers induziert und ob ein Objekt von \mathbf{sPST} fasernd ist. Das wesentliche Ergebnis meiner Diplomarbeit ist der folgende Satz:

Satz. *Es gibt eine kofasernd-erzeugte und simpliziale Modellstruktur auf der Kategorie \mathbf{SPST} und eine Quillen-Äquivalenz*

$$\mathbf{sPST} \rightleftarrows \mathbf{SPST}.$$

Alle dargestellten Objekte \widehat{X} in \mathbf{SPST} sind kofasernd. Ein dargestelltes Objekt \widehat{X} ist fasernd genau dann, wenn die simpliziale Prägarbe $\text{Sing}\mathcal{U}(\widehat{X}_{\text{tr}})$ fasernd ist in der lokal-projektiven Modellstruktur.

Primal-Dual Path-Following Methods for Linear Optimization (Julia Vogt)

This thesis deals with primal-dual path-following methods for linear optimization. A general algorithm is introduced and will be extended to different path-following methods.

In general, primal-dual interior-point methods approach the minimizer respectively maximizer of a linear problem from the interior of the feasible set and this happens by NEWTON's method. Like most iterative optimization algorithms, primal-dual interior-point methods have two basic ingredients: a procedure for determining the step length to a certain search direction and a measure of the desirability of each point in the search space. The search direction procedure has its origin in NEWTON's method for nonlinear equations. NEWTON's method forms a linear model around the current point and obtains the required search direction by solving a system of linear equations. A full step along this direction usually is not permissible, since it would violate the constraint that restricts all points to lie in the interior of the feasible set. To avoid this difficulty, we perform a line search along the NEWTON direction. We often can take only a small step along the direction before violating the demanded interior-point condition. Hence, the pure NEWTON direction often does not allow us to make much progress towards a solution.

Path following methods follow a well defined path to the set of optimizers. These methods do not necessarily stay exactly on the path but within a loose, well-defined neighborhood of this path. These neighborhoods will be discussed in detail with a close look at their geometric interpretation. After dealing with feasible algorithms, an infeasible algorithm according to MEHROTRA is presented. This algorithm is working very well in practice and a lot of actual interior-point software is based on MEHROTRA's algorithm. It is shown how to find feasible starting points. A prospect about how one can apply interior-point methods even to quadratic problems is given.

Optimalsteuerungsaufgaben mit Sparsity-Funktional (Gerd Wachsmuth)

Ein aktuelles Forschungsgebiet innerhalb der Optimierung sind nichtglatte Probleme, die sparse Lösungen besitzen, also Lösungen, die an „vielen Stellen“ identisch 0 sind. Dieser Ansatz wird zum Beispiel in der Bild- und Signalverarbeitung erfolgreich verwendet.

Wir wollen diese Ideen nun auf die Optimale Steuerung anwenden und betrachten dazu das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|u\|_{L^1(\Omega)} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -\Delta y = u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u_a \leq u \leq u_b & \text{in } \Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Das Zielfunktional enthält zusätzlich zu den üblichen glatten Least-Squares-Termen die L^1 -Norm der Steuerung u . Dieser nichtglatte Anteil führt dazu, dass die optimale Steuerung \bar{u} auf Teilen des Gebietes Ω identisch 0 (Sparsity der Lösung) wird. Durch diese Eigenschaft müssen nun nicht mehr auf dem ganzen Gebiet Steuerelemente platziert werden, sondern nur an den Stellen, an denen es sich lohnt.

Desweiteren präsentieren wir ein Zielfunktional, mit dem man Lösungen erhält, die auf Streifen des Gebietes verschwinden. Dies ist besonders im Falle zeitabhängiger PDEs interessant, da man dadurch bessere Informationen über die Platzierung der Steuerelemente erhält.

In dem Vortrag werden sowohl die Analysis des Problems als auch die Numerik dargestellt und numerische Ergebnisse präsentiert.

Polytope mit speziellen Simplizes (Timo de Wolff)

Ein Polytop P mit Eckenmenge $\mathcal{V}(P)$ besitzt ein *spezielles Simplex* Σ , falls Σ einerseits ein Simplex mit Ecken in $\mathcal{V}(P)$ ist und andererseits jede Facette von P genau eine Ecke von Σ nicht enthält. Die Existenz eines speziellen Simplexes in einem komprimierten Polytop P ist hoch interessant, da sie beispielsweise starke Rückschlüsse auf dessen Ehrhart-Reihe und den durch P definierten torischen Ring $K[P]$ erlaubt.

Der erste Teil der Diplomarbeit untersucht, welche Polytope über ein spezielles Simplex verfügen. Es ist bekannt, dass *Birkhoff*- und *Ordnungspolytope* stets ein spezielles Simplex enthalten; darüber hinaus lassen sich relativ einfach niederdimensionale Beispiele konstruieren.

Es gab bislang jedoch keine vollständige kombinatorische Klassifikation dieser Polytopklasse: Es war nicht bekannt, ob überhaupt in jeder Dimension n für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ein Polytop mit speziellem k -Simplex existiert. Diese Tatsache wird in der vorliegenden Arbeit bewiesen.

Ferner war nicht bekannt, ob es ein allgemeines Verfahren gibt, mit dem bereits anhand des f -Vektors eines Polytopes entschieden werden kann, ob es über ein spezielles Simplex verfügt bzw. ob es ein Verfahren gibt, das (kombinatorisch oder auch geometrisch) alle Polytope mit speziellen Simplizes erzeugt. In dieser Arbeit charakterisieren wir Polytope P mit speziellem Simplex Σ durch die Kombination aus zwei verschiedenen Verfahren (*Pyramiden*- und *Muschelbildung*). Diese Verfahren sind geometrisch umsetzbar und die kombinatorische Struktur aller von ihnen erzeugten Polytope ist berechenbar. Somit lassen sich Polytope anhand ihrer f -Vektoren auf spezielle Simplizes testen.

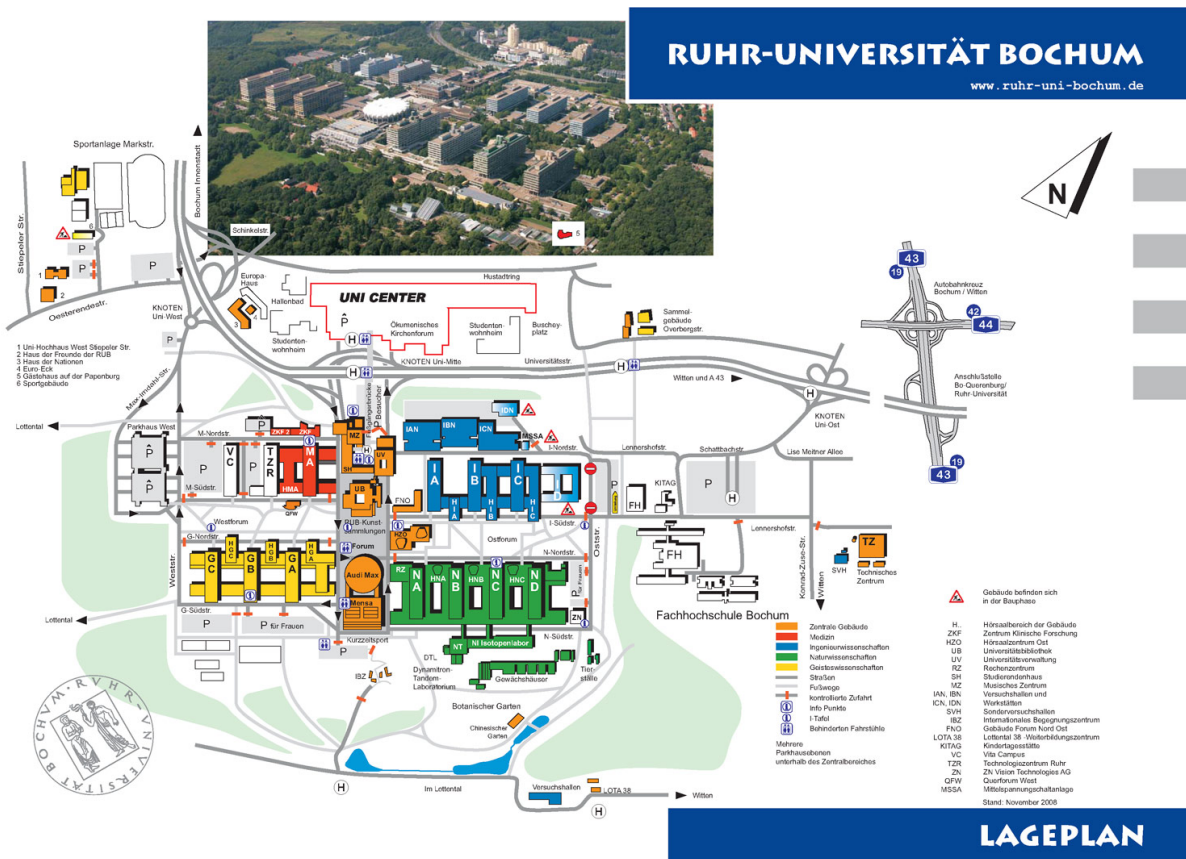
In diesem Zusammenhang zeigen wir, dass es nicht nur die Menge aller Polytope mit speziellen Simplizes sondern auch viele interessante Teilmengen von unendlicher Kardinalität sind.

Die zweite Fragestellung der Arbeit bezieht sich auf die konstruktive Umsetzung eines Resultates von C. Athanasiadis: Er beweist, dass der h -Vektor der rückwärtigen lexikographischen Triangulierung eines komprimierten Polytopes P mit speziellem Simplex mit dem eines niedrigdimensionaleren, simplizialen Polytopes Q übereinstimmt. Er gibt jedoch keinerlei Auskunft darüber, wie dieses Polytop Q (geometrisch) berechnet werden kann. Diese Information liefern wir in dieser Arbeit, indem wir (auch unter Rückgriff auf die zuvor gewonnenen neuen Erkenntnisse über spezielle Simplizes) einen Zerlegungsalgorithmus angeben, der Q in Polynomialzeit in doppelter Beschreibung berechnet, sofern das ursprüngliche Polytop P in doppelter Beschreibung vorliegt.

Lageplan der Ruhr-Universität

Die Haltestelle heißt „Ruhr-Universität“, den Fahrplan des öffentlichen Nahverkehrs findet man unter <http://www.vrr.de>.

Zum Gebäude NA läuft man über die Brücke, links an der Bibliothek vorbei, die Treppen herunter und zum Ende des großen Platzes. Es ist das erste Gebäude mit grünen Balkonen.



Die Mensa der Ruhr-Universität

Der aktuelle Speiseplan der Mensa ist auf der homepage

<http://www.akafoc.de/gastronomie/speiseplan.html?id=1>

nachzusehen.

Für den 2. Oktober haben wir auf der Westempore der Mensa Tische reserviert, so dass alle die mögen gemeinsam Essen können.

Im Gebäude NA befindet sich auf der Etage 02 die Cafeteria (Achtung: Die Null ist wie ein Minus zu lesen und nicht mit der Etage 2 zu verwechseln ☺)

Abendessen am Donnerstag

Am 1. Oktober lädt die DMV alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studierendenkonferenz nach dem Abendvortrag zu einem Buffet im Tapas (Kortumstrasse 3, 44787 Bochum) ein.

Die Kosten für Fahrt und Getränke müssen von jedem selbst bezahlt werden. Das Restaurant befindet sich im sogenannten Bermuda-Dreieck direkt in der Innenstadt. Wir werden gemeinsam mit der U-Bahn 35 zum Hauptbahnhof fahren und von dort wenige Minuten laufen.