Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Peter Eichelsbacher
Sommersemester 2008

5. Aufgabenblatt zur Statistik I

Abgabe bis 3. Juni 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):
Betrachten Sie das zweiseitige Exponentialmodell aus Aufgabe 4, Blatt 2. Für jedes $n \geq 1$ sei T_n ein beliebiger Maximum-Likelihood-Schätzer aufgrund von n unabhängigen Beobachtungen. Zeigen Sie: Die Folge $(T_n)_n$ ist konsistent.

2. Aufgabe (4 Punkte):
In einem statistischen Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, P_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ sei S ein erwartungstreuer Schätzer für eine reelle Kenngröße $\tau(\vartheta)$. Zeigen Sie, dass dann jeder weitere erwartungstreue Schätzer T für $\tau(\vartheta)$ die Form

$$T = S - U$$

besitzt, wobei U ein für 0 erwartungstreuer Schätzer ist. Es findet sich nun ein gleichmässig bester erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\vartheta)$, wenn man $\mathbb{E}[(S-U)^2]$ minimiert. Beweisen Sie dies.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Nach dem Hardy-Weinberg-Gesetz treten in einer Population drei Genotypen aa, aA und AA mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 := \vartheta^2$, $p_2 := 2\vartheta(1-\vartheta)$ und $p_3 := (1-\vartheta)^2$ auf, wobei $\vartheta \in (0,1)$ ein unbekannter Parameter ist, der geschätzt werden soll. Dazu werden n Mäuse zufällig mit Zurücklegen aus einer Kiste gezogen und untersucht.

(a) Berechnen Sie die Fisher Information des Experiments.

(b) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$T = \frac{2|\{\text{ Mäuse mit Genotyp aa }\}| + |\{\text{ Mäuse mit Genotyp aA }\}|}{2\mathrm{n}}$$

erwartungstreu ist.

4. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[|X_1|^{2k}] < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiter seien $(A_n)_n$ und $(B_n)_n$ Folgen reeller Zufallsvariablen mit den stochastischen Konvergenzen

$$\lim_{n\to\infty} P(|A_n| > \varepsilon) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{P}(|\mathrm{B_n} - 1| > \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$T_{n,1}(X) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k + A_n \quad \text{und} \quad \mathrm{T_{n,2}(X) := B_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k}$$

Bitte wenden

konsistente Schätzer für $\mathbb{E}(X_1^k)$ sind.

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und $\mathcal{U}_{[0,\vartheta]}$-verteilte Zufallsvariablen ($\vartheta > 0$). Zeigen Sie, dass

$$T_n(X) := \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{1/n}$$

konsistente Schätzer für ϑ/e sind.

Hinweis: Teil (b): Verwenden Sie, dass stochastische Konvergenz gegen eine konstante Zufallsvariable unter einer stetigen Transformation erhalten bleibt.