

Eine kurze und selektive Einführung in die Theorie der zufälligen Matrizen

Thomas Kriecherbauer
Ruhr-Universität Bochum

September 2008

Zusammenfassung

Das Manuskript basiert auf drei Vorträgen, die ich im September 2008 in Oggebbio anlässlich einer Tagung für Doktoranden und Postdoktoranden im Rahmen des SFB/TR 12 gehalten habe. Ziel war es, eine informelle Einführung in die Theorie der Zufallsmatrizen zu geben. Es erschien mir aussichtslos in der kurzen zur Verfügung stehenden Zeit alle wichtigen Aspekte dieses sich rasant entwickelnden Gebiets adäquat ansprechen zu wollen. Die Auswahl der Themen, die ich letztlich getroffen habe, war darauf ausgerichtet, den wissenschaftlichen Hintergrund einiger Fragestellungen zu beleuchten, die in den Projekten C2 und C6 des SFB/TR 12 untersucht werden. Hierbei sollte vor allem auch ein Einblick in grundlegende Beweismethoden gegeben werden. Meine Wahl fiel auf die Momentenmethode (zum Beweis des Wignerschen Halbkreisgesetzes, siehe Abschnitt 2) und auf die Methode der orthogonalen Polynome, mit der invariante Ensembles analysiert werden können (siehe Abschnitt 3). Einleitend wird erläutert, welche Klassen von zufälligen Matrizen im Allgemeinen betrachtet werden und welche Fragestellungen warum von Bedeutung sind. Umfassende Informationen zur Zufallsmatrixtheorie finden sich in den Monographien [8, 3, 1] und in dem Übersichtsartikel [4].

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Peter Eichelsbacher herzlich für die perfekte Organisation dieser wundervollen Tagung, allen Teilnehmern für das wissenschaftliche Gelingen und dem SFB/TR 12 für die Finanzierung.

1 Einleitung und Überblick

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Einführung der zwei wohl berühmtesten Matrix Ensembles. Das sind das Gaußsche Orthogonale Ensemble (GOE) und das Gaußsche Unitäre Ensemble (GUE). In der Theorie zufälliger Matrizen wird meist die Eigenwertstatistik für große Matrixdimensionen untersucht. Wir werden in Abschnitt 1.2 an drei Beispielen deutlich machen, welche konkreten Fragestellungen hierbei von Interesse sind. Abschnitt 1.3 liefert einen ersten Einblick in zentrale Beweismethoden der Theorie. Wir beschließen die Einleitung mit einem kurzen Überblick über weitere gängige Matrix Ensembles und mit einem Ausblick, der das derzeit große Interesse an Zufallsmatrizen beleuchtet.

1.1 Zwei wichtige Beispiele: GOE und GUE

GOE = Gaußsches Orthogonales Ensemble

\mathbb{P}_N : W-Maß auf reellen, symmetrischen $N \times N$ Matrizen
unabhängige Einträge: $m_{jk} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{4N}}\right)$ für $j < k$
 $m_{jj} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2N}}\right)$

GUE = Gaußsches Unitäres Ensemble

\mathbb{P}_N : W-Maß auf komplexen, hermiteschen $N \times N$ Matrizen
unabhängige Zufallsvariablen: $\text{Im}(m_{jk}), \text{Re}(m_{jk}) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{8N}}\right)$, $j < k$
 $m_{jj} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{4N}}\right)$

Bemerkungen:

- Die $N^{-1/2}$ Skalierung der Matrixeinträge (sichtbar in den gewählten Standardabweichungen der Normalverteilung \mathcal{N}) bewirkt, dass sich die Eigenwerte unabhängig von N auf dem Intervall $[-1, 1]$ konzentrieren. Die Skalierung ist wesentlich für die Existenz einer Eigenwertdichte (siehe Abschnitt 2 und §1.2.1)
- Für GOE/GUE gilt: $\mathbb{P}_N(U^* \mathcal{A} U) = \mathbb{P}_N(\mathcal{A})$ für alle orthogonalen/unitären Matrizen U und alle messbaren Mengen \mathcal{A} . Diese Invarianzeigenschaft des W-Maßes unter orthogonalen/unitären Konjugationen ist auch für die Namengebung der Ensembles verantwortlich, wobei Gauß jeweils für die Verwendung der Normalverteilung steht.

1.2 Fragestellungen

Eine zentrale Aufgabe in der Theorie zufälliger Matrizen ist die Beschreibung der Eigenwertstatistik für $N \rightarrow \infty$. Hierfür ist in einem ersten Schritt die Eigenwertdichte (§1.2.1) von fundamentaler Bedeutung. Diese beschreibt die Verteilung der Eigenwerte auf einer globalen Skala, in der die Abstände benachbarter Eigenwerte typischerweise von der Größenordnung $1/N$ sind. Kennt man die Eigenwertdichte, so kann man die Eigenwertstatistik auf lokalen Skalen untersuchen. Hierbei betrachtet man einen kleinen Abschnitt des Spektrums sozusagen unter dem Mikroskop, das so eingestellt ist, dass die Abstände benachbarter Eigenwerte von der Größenordnung Eins sind. Wir werden zwei Beispiele lokaler Statistiken in §1.2.2 kennen lernen. Für Anwendungen sind meist die lokalen Statistiken von Bedeutung. Wir gehen darauf kurz in §1.5 ein.

Im Folgenden werden die Eigenwerte angeordnet und mit $\lambda_1^{(N)} \leq \dots \leq \lambda_N^{(N)}$ bezeichnet. Man beachte, dass die Eigenwerte von der aus dem Ensemble gewählten Matrix und damit vom Zufall abhängen.

1.2.1 Eigenwertdichte

Sei s eine reelle Zahl. Wir betrachten den Erwartungswert für den Anteil der Eigenwerte, die kleiner oder gleich s sind. Dies ergibt eine monotone Funktion in s , die nur Werte in $[0, 1]$ annimmt. Existiert die Ableitung dieser Funktion, so wird sie (mittlere) Eigenwertdichte des Ensembles genannt. Wir sind allerdings nicht an der Eigenwertdichte für festes N interessiert, sondern an deren Limes $N \rightarrow \infty$ und wir wollen nur diesen Grenzwert als Eigenwertdichte ϱ bezeichnen. In Formeln:

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\#\{j: \lambda_j^{(N)} \leq s\}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^s \varrho(t) dt \quad (1)$$

Bemerkungen:

- a) Für GOE, GUE kann man zeigen, dass die Eigenwertdichte existiert mit $\varrho(t) = \varrho_W(t) := \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} \chi_{[-1,1]}(t)$. Man sagt: Für GOE und GUE gilt das Wignersche Halbkreisgesetz.
- b) Die fundamentale (maßwertige) Zufallsvariable ist das empirische Maß der Eigenwerte $\Delta_N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j^{(N)}}$.

Aussage (1) bedeutet, dass das gemittelte empirische Maß $\bar{\Delta}_N := \mathbb{E}_N(\Delta_N)$ in Verteilung konvergiert. Wir werden diese Aussage für eine relativ allgemeine Klasse von Matrix Ensembles (mit unabhängigen Einträgen) in Abschnitt 2 zeigen. Dort werden wir in §2.1 einen Satz formulieren, aus dem sich zudem die Verteilungskonvergenz der Δ_N gegen $\varrho_W(t) dt$ mit Wahrscheinlichkeit 1 ergibt. Man kann diese beiden Aussagen als ein Analogon zum *schwachen* bzw. *starken Gesetz der großen Zahlen* im Kontext von Wahrscheinlichkeitsmaßen auffassen. Ist ein solches Gesetz etabliert, so stellen sich in natürlicher Weise detailliertere Fragen, z.B. nach *Konvergenzraten*, nach einem Analogon zum *zentralen Grenzwertsatz* oder nach der Gültigkeit eines *Prinzips großer Abweichungen*. Wir werden auf diese Fragen im Weiteren nicht eingehen.

- c) Aus der Definition der Eigenwertdichte durch (1) kann man heuristisch eine Gleichung ableiten, welche einen Anhaltspunkt dafür liefert, an welcher Stelle man den j -ten Eigenwert erwartet:

$$\int_{-\infty}^{\lambda_j^{(N)}} \varrho(t) dt = \frac{j - 0.5}{N}$$

Diese Heuristik führt auf weitere Aussagen, welche als Motivation für die in §1.2.2 betrachteten Größen nützlich sind.

- Für Eigenwerte $\lambda_j^{(N)}$ nahe $a \in \mathbb{R}$ ist der Abstand benachbarter Eigenwerte von der Größenordnung $\lambda_{j+1}^{(N)} - \lambda_j^{(N)} \sim \frac{1}{N\varrho(a)}$, falls $\varrho(a) > 0$.

- Verschwindet die Eigenwertdichte in der Nähe des Supremums ihres Trägers wie eine Quadratwurzel – was häufig der Fall ist – d.h. $\varrho(t) \sim \alpha\sqrt{c-t}$ für t nahe $c := \max(\text{supp } \varrho)$, so erwartet man von dem größten Eigenwert $\lambda_N^{(N)} \sim c - \beta N^{-2/3}$.

1.2.2 Lokale Statistiken

Wir geben in diesem Abschnitt zwei Beispiele für lokale Eigenwertstatistiken an. Die Frage nach der Bedeutung dieser Größen werden wir kurz in §1.5 diskutieren. Generell ist eine lokale Eigenwertstatistik von der Art, dass nur ein kleiner Ausschnitt des Spektrums betrachtet wird und dass eine Skala ausgewählt wird, auf der die Fluktuationen der betrachteten Größen von der Ordnung Eins sind.

a) Abstände benachbarter Eigenwerte

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\varrho(a) > 0$. Wir lokalisieren, indem wir nur die Eigenwerte betrachten, die in dem Intervall $I_N := \left[a - \frac{1}{\sqrt{N}}, a + \frac{1}{\sqrt{N}} \right]$ liegen. Die Wahl der Intervalllänge ist etwas willkürlich und es kommt nur darauf an, dass für $N \rightarrow \infty$ die Länge gegen 0 konvergiert, allerdings so langsam, dass gleichzeitig die Anzahl der Eigenwerte in I_N gegen ∞ geht. Weiter bezeichne $J_N := \{j : \lambda_j^{(N)} \in I_N\}$ die Menge der Indizes der Eigenwerte, die in I_N liegen. Für $j \in J_N$ reskalieren wir die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_j := N\varrho(a)\lambda_j^{(N)}$ so, dass die Abstände benachbarter Werte von der Größenordnung Eins sind (vgl. Bemerkung c) in §1.2.1).

Wir definieren nun die mittlere Verteilungsfunktion für die Abstände benachbarter (und reskalierter) Eigenwerte in I_N durch

$$S_N(s) := \frac{1}{\mathbb{E}_N(\#J_N)} \mathbb{E}_N(\#\{j \in J_N : \tilde{\lambda}_{j+1} - \tilde{\lambda}_j \leq s\})$$

Man kann im Falle von GOE/GUE zeigen, dass Dichten $\sigma_{GOE}/\sigma_{GUE}$ (siehe auch Abbildung 1; rechts) existieren mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(s) = \int_0^s \sigma_{GOE/GUE}(t) dt.$$

Man beachte, dass die Dichten σ_{GOE} , σ_{GUE} **nicht** von der Wahl von a und I_N abhängen, falls $\varrho(a) > 0$, $|I_N| \rightarrow 0$, $\#J_N \rightarrow \infty$ für $N \rightarrow \infty$. Dies ist ein erster Hinweis auf die Universalität lokaler Eigenwertstatistiken, die wir in §1.5 weiter diskutieren werden.

b) Größter Eigenwert

Wir betrachten nun die Statistik des größten Eigenwerts $\lambda_N^{(N)}$. Aus den Bemerkungen a) und c) in §1.2.1 ergibt sich $\lambda_N^{(N)} = 1 + \mathcal{O}(N^{-2/3})$. Es ist daher natürlich, die folgende reskalierte Größe zu betrachten

$$\tilde{\lambda}_N := 2N^{2/3}(\lambda_N^{(N)} - 1),$$

wobei der Faktor 2 historisch bedingt ist und diesem keine besondere Bedeutung zukommt. Man kann im Falle von GOE/GUE wieder zeigen, dass Dichten μ_{GOE}/μ_{GUE} existieren, welche im Limes $N \rightarrow \infty$ die Verteilung des größten (reskalierten) Eigenwerts beschreiben.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N(\tilde{\lambda}_N \leq s) = \int_{-\infty}^s \mu_{GOE/GUE}(t) dt.$$

Die Verteilungen $\mu_{GOE/GUE}$ werden nach C. Tracy und H. Widom benannt.

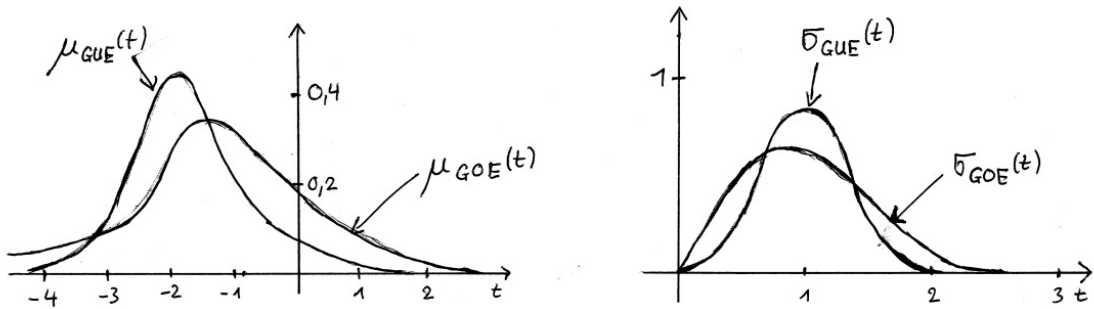


Abbildung 1: Dichten der Verteilungen des größten Eigenwerts (Tracy-Widom Verteilungen; links) und der Abstände benachbarter Eigenwerte (rechts).

1.3 Ein erster Blick auf die Beweismethoden

GOE/GUE zeichnen sich dadurch aus, dass sie zwei wesentliche Eigenschaften besitzen, die für die asymptotische Analyse der Eigenwertstatistik genutzt werden können. Einerseits sind die Einträge unabhängig, wodurch die Bestimmung der Erwartungswerte der Spuren von Matrixpotenzen ermöglicht wird (Momentenmethode). Andererseits kann wegen der in §1.1 Bemerkung b) beschriebenen Invarianz des Wahrscheinlichkeitsmaßes die gemeinsame Verteilung der Eigenwerte explizit angegeben werden. Wir skizzieren nun kurz die sich hieraus ergebenden Beweismethoden. Genaueres findet sich dann in den Abschnitten 2 und 3 für allgemeinere Klassen von Zufallsmatrizen.

1.3.1 Unabhängigkeit der Einträge – Momentenmethode

Der Zusammenhang zwischen Spuren von Matrixpotenzen und Eigenwerten ergibt sich durch

$$\frac{1}{N} \operatorname{tr}(M^k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_j^k = \int t^k d\Delta_N(t) \quad (\text{vgl. Bemerkung b) in §1.2.1})$$

Somit ist plausibel, dass aus $\Delta_N \rightarrow \varrho(t) dt$ folgt $\frac{1}{N} \text{tr}(M^k) \rightarrow \int t^k \varrho(t) dt$ für $N \rightarrow \infty$. Dies bedeutet, dass sich alle Momente des Grenzmaßes $\varrho(t) dt$ aus dem Verhalten der Spuren der Matrixpotenzen bestimmen lassen. Ist das Grenzmaß nun durch seine Momente eindeutig bestimmt, so kann man hoffen, auf diesem Wege das Grenzmaß selbst zu bestimmen. In der Tat werden wir in Abschnitt 2 die Aussage (1) aus §1.2.1 beweisen, indem wir für alle $k \in \mathbb{N}$ nachweisen, dass:

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M^k)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int t^k \varrho_W(t) dt .$$

Wegen

$$\mathbb{E}_N(\text{tr}(M^k)) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^N \mathbb{E}_N(m_{j_1 j_2} \cdot m_{j_2 j_3} \cdot \dots \cdot m_{j_k j_1}) ,$$

wird durch die Unabhängigkeit der Einträge die Berechnung von $\mathbb{E}_N(\text{tr}(M^k))$ auf ein kombinatorisches Problem zurückgeführt (siehe §2.4).

Soshnikov hat gezeigt, dass die Momentenmethode benutzt werden kann, um die Verteilung des größten Eigenwerts zu untersuchen. Dies ist allerdings technisch sehr aufwendig. Weitere Anwendungen der Momentenmethode auf lokale Statistiken sind derzeit nicht bekannt.

1.3.2 Invarianz – gemeinsame Verteilung der Eigenwerte

Durch Variablentransformation

$$M \longleftrightarrow (\text{Eigenwerte/Eigenvektoren})$$

kann man zeigen, dass das von \mathbb{P}_N auf den Eigenwerten induzierte Maß gegeben ist durch

$$d\mathbb{P}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} |\text{VD}(\lambda)|^\beta \left(\prod_{j=1}^N e^{-N\lambda_j^2} \right) d\lambda_1 \dots d\lambda_N, \quad \text{wobei}$$

$$\text{VD}(\lambda) := \prod_{j < k} (\lambda_k - \lambda_j) \quad (\text{Vandermonde Determinante}) \quad (2)$$

$$\beta = 1 \text{ (GOE)} \quad , \quad \beta = 2 \text{ (GUE)}$$

$$Z_{N,\beta} = \text{Normierende Konstante}$$

Eigenwertdichte: Wir schreiben $d\mathbb{P}_N = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-N^2 I(\lambda)} d\lambda$ mit

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{N^2} \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{j \neq k} \ln |\lambda_j - \lambda_k| + \sum_j N \lambda_j^2 \right) \\ &= -\frac{\beta}{2} \iint_{x \neq y} \ln |x - y| d\Delta_N(x) d\Delta_N(y) + \int x^2 d\Delta_N(x) . \end{aligned}$$

Diese Darstellung zeigt, dass solche Eigenwertverteilungen von Relevanz sind, für die $I(\lambda)$ möglichst klein wird. Übersetzt man dies für die zu $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ gehörenden empirischen Maße Δ_N , so befinden sich diese in der Nähe der (eindeutigen bestimmten) Minimalstelle des auf Wahrscheinlichkeitsmaßen operierenden Funktionals I mit

$$I(\mu) := -\frac{\beta}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \ln |x - y| d\mu(x) d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x)$$

Man kann in der Tat zeigen, dass das Wignersche Halbkreisgesetz $\varrho_W(t) dt$ das Funktional I minimiert.

Lokale Eigenwertstatistiken: Durch eine Reihe cleverer Umformungen (siehe Abschnitt 3) kann man aus der gemeinsamen Eigenwertverteilung explizite Darstellungen für gewisse Wahrscheinlichkeiten erhalten, die für die Untersuchung lokaler Eigenwertstatistiken hilfreich sind. Diese Darstellungen enthalten Hermite-Polynome (= orthogonale Polynome bzgl. $e^{-x^2} dx$), woraus sich die Benennung als *Methode der orthogonalen Polynome* erklärt. Der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ erfordert hierbei, dass das Verhalten der orthogonalen Polynome bestimmt werden muss, wobei der Grad der Polynome gegen unendlich geht.

1.4 Matrix Ensembles

Wie bereits erwähnt, besitzen Gaußsche Ensembles zwei wichtige Eigenschaften, nämlich die Unabhängigkeit der Einträge und die Invarianz des W-Maßes unter Wechsel der Orthonormalbasis. Man kann sogar zeigen, dass die Gaußschen Ensembles die einzigen sind, die beide Eigenschaften auf sich vereinen. Besteht man jedoch auf nur einer der beiden Eigenschaften, so erhält man eine Vielzahl von Ensembles. Bewahrt man die Unabhängigkeit der Einträge (bis auf Symmetrie), so spricht man von *Wigner Ensembles*, im anderen Fall von *invarianten Ensembles*. Wir beschreiben zunächst, welche Wahlmöglichkeiten für diese beiden Typen von Ensembles bestehen und gehen dann auf Variationen ein.

a) Standardbaukasten für Ensembles: Wähle

- Symmetrieklasse (10 Klassen)
reell symmetrisch, komplex hermitesch, quaternionisch selbstdual, und
7 weitere Klassen mit Blockstruktur, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^T & 0 \end{pmatrix}$ mit $X \in \mathbb{R}^{m \times (N-m)}$
- Typ (2 Möglichkeiten)
Wigner Ensemble: unabhängige Einträge soweit Symmetrie erlaubt.

Invariantes Ensemble: Die in der Literatur betrachteten Ensembles besitzen stets eine gemeinsame Verteilung der Eigenwerte von der Form

$$d\mathbb{P}_N(\lambda) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} |\text{VD}(\lambda)|^\beta \cdot \left(\prod_{j=1}^N w_N(\lambda_j) \right) d\lambda \quad \text{auf } \mathbb{R}^N \text{ oder } \mathbb{R}_+^N,$$

$\beta \in \{1, 2, 4\}$ (abhängig von Symmetrieklasse)
 VD bezeichnet Vandermonde Determinante, siehe (2).

- Wahl des W-Maßes
 Für Wigner Ensembles: Verteilung der Einträge.
 Für invariante Ensembles: Wahl von w_N .

b) Variationen

- “Circular ensembles” von orthogonalen oder unitären Matrizen, d.h. Spektrum liegt in $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (diese gehören zu der Klasse der invarianten Ensembles).
- Bandmatrizen (unabhängige Einträge)
 Hier wird für die Matrix M_N mit Einträgen m_{jk} , $1 \leq j, k \leq N$, zusätzlich die Bedingung gestellt, dass $m_{jk} = 0$ für $|j - k| > b_N/2$. Eine solche Matrix hat offensichtlich eine Bandstruktur mit Bandweite b_N . Zur Klasse der Bandmatrizen werden oft auch solche Matrizen gezählt, die einer abgeschwächten Bedingung der Form $m_{jk} \rightarrow 0$ für $|j - k| \rightarrow \infty$ genügen. Ein wichtiger Aspekt zufälliger Bandmatrizen ist, dass sie einen kontinuierlichen Übergang zwischen der Welt der zufälligen Matrizen und der Welt der zufälligen Schrödinger Operatoren erlauben, der bislang wenig erforscht ist.
- β -Ensembles: Sei $\beta > 0$ und seien a_j und b_j unabhängige reelle Zufallsvariablen, die den Verteilungsgesetzen

$$b_j^2 \sim \frac{1}{\Gamma\left(\frac{j\beta}{2}\right)} t^{\frac{j\beta}{2}-1} e^{-t} dt \quad (1 \leq j \leq N-1), \quad a_j \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (1 \leq j \leq N)$$

gehören. Dann ist die gemeinsame Eigenwertverteilung von

$$M_N = \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ & & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & b_{N-1} & & a_N \end{pmatrix}$$

gegeben durch (vgl. (2))

$$\mathbb{P}_N(\lambda) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} |\text{VD}(\lambda)|^\beta \left(\prod_{j=1}^N e^{-N\lambda_j^2} \right) d\lambda$$

[Entdeckung: Anwendung der Housholder Transformation auf GOE].

- und viele mehr (z.B. $A+GOE$ mit A deterministisch, ...).

1.5 Warum Zufallsmatrizen?

Zufallsmatrizen wurden zum ersten Mal vor etwa 80 Jahren in der Statistik untersucht. Dort treten bei der Hauptkomponentenanalyse von N Stichproben für p Merkmale zufällige Matrizen der Gestalt $M = X^T X$ in natürlicher Weise auf, wobei $X \in \mathbb{R}^{N \times p}$. Solche Ensembles werden nach Wishart benannt und sind eng verwandt mit den Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^T & 0 \end{pmatrix}$ aus §1.4.

Der entscheidende Impuls für die Entwicklung der Zufallsmatrixtheorie kam jedoch zwanzig Jahre später aus der Physik. Wigner zeigte empirisch, dass das Resonanzspektrum schwerer Kerne bei hohen Energien durch Eigenwerte zufälliger Matrizen modelliert werden kann. Hierbei ist zu beachten, dass nicht die Energiedichten von Interesse sind (das Halbkreisgesetz besitzt keine besondere physikalische Relevanz), sondern die lokalen Korrelationen des Spektrums. Diese werden sehr überzeugend durch die lokalen Eigenwertstatistiken von Zufallsmatrizen beschrieben. So verteilen sich zum Beispiel die Energieabstände benachbarter Resonanzen in guter Näherung gemäß der in §1.2.2 a) eingeführten Dichte σ_{GOE} . Seit dieser Entdeckung Wigners werden zufällige Matrizen in verschiedenen Bereichen der Quantenphysik verwendet, z.B. als spektrale Signatur von Quantenchaos, zur Beschreibung mesoskopischer Systeme mit Unordnung oder in der Quantenchromodynamik. Eine umfangreiche Zusammenstellung dieser Anwendungen findet sich in [4].

Überraschenderweise beschreiben zufällige Matrizen auch die Abstandsverteilung der Nullstellen der Riemann-Zetafunktion auf der kritischen Gerade $\{z: \operatorname{Re}(z) = 1/2\}$. Diese Nullstellen sind natürlich deterministisch. Da es aber unendlich viele davon gibt, kann man die Statistik der Abstände betrachten und sieht, dass diese durch σ_{GUE} (vgl. §1.2.2) beschrieben wird [6].

Eine bahnbrechende Arbeit von Baik, Deift und Johansson, die etwa 10 Jahre zurück liegt, führte zu der Erkenntnis, dass die Fluktuationen gewisser Zufallsgrößen in einer Reihe stochastischer und kombinatorischer Modelle ebenfalls mit Hilfe lokaler Eigenwertstatistiken beschrieben werden können (z.B. längste aufsteigende Teilfolge von Permutationen, TASEP (totally asymmetric exclusion process), Pflasterungen, Wachstumsmodelle, siehe z.B. [7]).

Die obige Diskussion zeigt, dass die Verteilungsfunktionen lokaler Eigenwertstatistiken in den verschiedensten Bereichen von Mathematik und Physik auftreten, und damit eine gewisse Universalität besitzen. Der stochastische Mechanismus, der zu solchen Verteilungen führt, ist bislang nicht allgemein verstanden. In den Spezialfällen, für die Beweise existieren, liegen explizite Formeln für die Verteilungen vor, die mit allerlei Tricks analysiert werden können. Die Beweise brechen schon bei kleinen Störungen der Modelle in sich zusammen. Ein anderer Universalitätsaspekt ist hingegen besser verstanden. Man weiß inzwischen für eine große Klasse invarianter

Ensembles, dass die lokale Eigenwertstatistik nur von der Symmetrieklasse der Matrizen abhängt, nicht aber von anderen Details des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

2 Wigners Halbkreisgesetz – Momentenmethode

In diesem Abschnitt formulieren und beweisen wir eine Version des Wignerschen Halbkreisgesetzes, auf das wir in den Spezialfällen der Gaußschen Ensembles GOE und GUE bereits in der Bemerkung a) in §1.2.1 hingewiesen haben. Das Halbkreisgesetz gilt für eine relativ allgemeine Klasse von Wigner Ensembles. Um die Darstellung so einfach wie möglich zu halten, beschränken wir uns auf die Symmetrieklasse der reellen, symmetrischen Matrizen. Der Satz besagt, dass das empirische Maß Δ_N der Eigenwerte (siehe Bemerkung b) in §1.2.1) fast sicher in Verteilung gegen die Halbkreisverteilung konvergiert. Die genaue Formulierung und ein Beweisüberblick findet sich in §2.1, wobei bemerkt werden muss, dass der in den Abschnitten 2.2–2.4 gegebene Beweis nur die Konvergenz im Mittel zeigt. In §2.5 wird kurz angedeutet, was zu tun ist, um die behauptete fast sichere Konvergenz zu zeigen. Die Momentenmethode zum Beweis des Halbkreisgesetzes geht auf Wigner zurück. Eine ausführliche Darstellung der Momentenmethode findet sich z.B. in Kapitel 4 von [5].

2.1 Satz (für reelle, symmetrische Matrizen)

Es bezeichne $(M_N)_N$ eine Familie von Matrix Ensembles der Form

$$M_N(\omega) := \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\xi_{jl}^{(N)}(\omega) \right)_{1 \leq j, l \leq N}$$

mit

- (i) $\xi_{jl}^{(N)}$ unabhängige reelle Zufallsvariablen für $1 \leq j \leq l \leq N$; $\xi_{jl}^{(N)} = \xi_{lj}^{(N)}$.
- (ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$: $R_k := \sup_{j, l, N} \mathbb{E} \left(|\xi_{jl}^{(N)}|^k \right) < \infty$.
- (iii) Für alle $j < l$: $\mathbb{E} \left(\xi_{jl}^{(N)} \right) = 0$, $\text{Var} \left(\xi_{jl}^{(N)} \right) = \frac{1}{4}$ (**keine** weiteren Bedingungen an ξ_{jj} !).

Dann gilt **fast sicher** für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$\Delta_N((-\infty, s]) = \frac{1}{N} (\#EW \text{ von } M_N(\omega) \leq s) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^s \varrho_W(t) dt ,$$

wobei $\varrho_W(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} \mathcal{X}_{[-1,1]}(t)$ (Halbkreis, vgl. Bemerkung a) in 1.2.1).

Bemerkung: Wir zeigen in den Abschnitten 2.2–2.4 eine schwächere Version, nämlich die Konvergenz im Mittel:

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}_N (\#EW \text{ von } M_N \leq s) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^s \varrho_W(t) dt . \quad (3)$$

Beweisschritte:

- Diskussion von Maßen, die durch ihre Momente bestimmt sind. (§2.2)
- Beweis einer abstrakten Version der Momentenmethode (§2.3), welche impliziert, dass die Behauptung bereits aus der Konvergenz aller Momente $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k)) = \int_{\mathbb{R}} t^k \varrho_W(t) dt$, $k \in \mathbb{N}$, folgt.
- Bestimmung von $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k))$ (§2.4)

2.2 Maße, die durch ihre Momente bestimmt sind

Es bezeichne

$$\mathcal{M} := \{\text{W-Maße auf } \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{M}^* := \{\mu \in \mathcal{M} : \int |t|^k d\mu < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{M}_{\text{def}}^* := \{\mu \in \mathcal{M}^* : \mu \text{ ist durch seine Momente bestimmt}\}$, d.h. für $\mu \in \mathcal{M}_{\text{def}}^*$ gilt, dass jedes $\nu \in \mathcal{M}$, dessen Momente allesamt mit denen von μ übereinstimmen, schon gleich μ sein muss.

Lemma: $\{\mu \in \mathcal{M} : \text{supp } \mu \text{ kompakt}\} \subseteq \mathcal{M}_{\text{def}}^*$

Beweis: Sei $\mu \in \mathcal{M}$ mit $\text{supp } \mu \subseteq [-c, c]$. Dann gilt

a) $\int |t|^k d\mu \leq c^k$

b) $f(z) := \int e^{tz} d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (\int t^k d\mu)$ ist auf \mathbb{C} holomorph. (Folgt aus a).)

Sei $\nu \in \mathcal{M}$ mit $\int t^k d\mu = \int t^k d\nu$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

c) $\int |t|^k d\nu \leq c^k$. (Folgt aus Cauchy-Schwarz Ungleichung für $\int |t|^k \cdot 1 d\nu$.)

d) $g(z) := \int e^{tz} d\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (\int t^k d\nu)$ ist wegen c) auf \mathbb{C} holomorph.

Die Fouriertransformierten $\hat{\mu}, \hat{\nu}$ stimmen überein, da nach b) und d) $g = f$ gilt und $\hat{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-ix) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(-ix) = \hat{\nu}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt $\mu = \nu$. □

2.3 Abstrakte Version der Momentenmethode

Wir formulieren und beweisen zunächst folgenden **Satz**.

Sind $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}^*$ mit $\int x^k d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int x^k d\mu$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\mu \in \mathcal{M}_{\text{def}}^*$, so gilt:

a) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, d.h. $\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$ für alle stetigen und beschränkten reellwertigen Funktionen f .

b) $\int_{-\infty}^s d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(s) := \int_{-\infty}^s d\mu$, falls F an der Stelle s stetig ist.

Beweis: b) folgt aus a) durch ein Standardargument.

a) Wir beginnen mit vier Vorüberlegungen.

1) $(\mu_n)_n$ ist straff, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $R > 0$ mit $\int_{|x| \geq R} d\mu_n < \varepsilon$ gleichförmig für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies folgt z.B. aus der Konvergenz und damit Beschränktheit der zweiten Momente, woraus sich zunächst $\int x^2 d\mu_n \leq K$ und damit $|\int_{|x| \geq R} d\mu_n| \leq \frac{K}{R^2}$ ergibt.

2) Aus dem Satz von Prohorov folgt nun die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $\mu_{n_l} \xrightarrow{w} \nu$, $l \rightarrow \infty$ mit $\nu \in \mathcal{M}$.

3) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\int x^k d\mu_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \int x^k d\nu$. Dies folgt aus 2) zusammen mit einem Abschneideargument, welches Gebrauch macht von der Tatsache, dass $\sup_l \int_{|x| \geq R} |x|^k d\mu_{n_l} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$. Letzteres folgt z.B. aus der Beschränktheit der $2k$ -ten Momente (vgl. Argument in 1).)

4) $\mu = \nu$, da $\mu \in \mathcal{M}_{\text{def}}^*$ und die Momente von μ und ν gemäß 3) und Voraussetzung übereinstimmen.

Wir beweisen nun Aussage a) indirekt. Angenommen es gibt eine stetige und beschränkte Funktion f , $\varepsilon > 0$, und (μ'_n) Teilfolge von (μ_n) mit $|\int f d\mu'_n - \int f d\mu| > \varepsilon$ für alle n . Wende 1)–4) auf $(\mu'_n)_n$ an. Somit existiert Teilfolge $\mu'_{n_l} \xrightarrow{w} \mu$ (Widerspruch!). \square

Fazit aus §2.2 und §2.3: Wir diskutieren nun wie (3), eine schwächere Version von Satz 2.1, bewiesen werden kann. Es bezeichne wie in §1.2.1 Bemerkung b) $\bar{\Delta}_N = \mathbb{E}_N(\Delta_N)$ das gemittelte empirische Maß der Eigenwerte, welches ein W-Maß auf \mathbb{R} darstellt. Die Behauptung lautet:

$$\bar{\Delta}_N((-\infty, s]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^s \varrho_W(t) dt .$$

Gemäß dem Lemma aus §2.2 ist $\varrho_W(t) dt \in \mathcal{M}_{\text{def}}^*$. Mit §2.3 bleibt also zu zeigen, dass

$$\int t^k d\bar{\Delta}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 t^k \sqrt{1-t^2} dt = \begin{cases} 0 & , k \text{ ungerade} , \\ \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s} 2^{-2s} & , k = 2s . \end{cases}$$

Weiter gilt:

$$\int t^k d\bar{\Delta}_N \stackrel{!}{=} \mathbb{E}_N \left(\int t^k d\Delta_N \right) = \mathbb{E}_N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_j^k \right) = \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k)) .$$

Wir haben also gesehen, dass (3) bewiesen ist, falls folgende Aussage für jedes $k \in \mathbb{N}$ gezeigt werden kann.

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & , k \text{ ungerade} , \\ \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s} 2^{-2s} & , k = 2s . \end{cases} \quad (4)$$

Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

2.4 Bestimmung von $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(\mathbf{M}_N^k))$

Die Spur von M^k läßt sich aus den Einträgen von M berechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k)) &= \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{N^k}} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^N \mathbb{E}_N \left(\xi_{j_1 j_2}^{(N)} \cdot \xi_{j_2 j_3}^{(N)} \cdot \dots \cdot \xi_{j_k j_1}^{(N)} \right) \\ &=: \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{N^k}} \sum_{\gamma} \mathbb{E}_N(\xi_{\gamma}) , \end{aligned}$$

wobei wir folgende Bezeichnungen einführen:

$\gamma = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, N\}^k$ wird als Pfad aufgefasst.

$v(\gamma) := \#\{j_l : 1 \leq l \leq k\}$ = Anzahl verschiedener Knoten auf dem Pfad.

Kanten von γ : $\{j_l, j_{l+1}\}$, $1 \leq l \leq k$, ($j_{k+1} \equiv j_1$) (Durchlaufrichtung wird nicht berücksichtigt).

Die Berechnung des Grenzwerts erfolgt nun in sechs Schritten.

Schritt 1. Beh.: $c \leq \frac{k}{2} + 1 \implies \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{N^k}} \sum_{\gamma, v(\gamma)=c} \mathbb{E}_N(\xi_{\gamma}) = \mathcal{O}(N^{c-\frac{k}{2}-1})$

Beweis: Aus Voraussetzung (ii) des Satzes 2.1 zusammen mit der Hölderungleichung folgt wegen $\frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k} = 1$

$$|\mathbb{E}_N(\xi_{\gamma})| \leq \prod_{l=1}^k \mathbb{E}_N \left(|\xi_{j_l j_{l+1}}^{(N)}|^k \right)^{1/k} \leq \prod_{l=1}^k R_k^{1/k} = R_k .$$

Zudem ist

$$\#\{\gamma : v(\gamma) = c\} \leq \binom{N}{c} \cdot c^k \leq N^c c^k$$

insgesamt also

$$\frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{N^k}} \left| \sum_{v(\gamma)=c} \mathbb{E}_N(\xi_{\gamma}) \right| \leq R_k \left(\frac{k}{2} + 1 \right)^k N^{c-\frac{k}{2}-1} .$$

□

Schritt 2. Beh.: $v(\gamma) > \frac{k}{2} + 1 \implies \mathbb{E}_N(\xi_{\gamma}) = 0$

Beweis: Wir zeigen, dass γ eine Kante $\{x, y\}$ mit $x \neq y$ besitzt, die genau einmal durchlaufen wird. Wegen der Unabhängigkeit der Einträge gilt dann schon nach Voraussetzung (iii) des Satzes

$$\mathbb{E}_N(\xi_{\gamma}) = \mathbb{E}_N(\xi_{xy}^{(N)}) \cdot \mathbb{E}_N(\dots) = 0 .$$

Beweis der Existenz einer solchen Kante $\{x, y\}$ durch Induktion nach k :

$k = 1, 2$ nichts zu zeigen

$k = 3$, $v(\gamma) = 3 \Rightarrow \gamma = abc(a)$ 3 verschiedene Kanten, je einmal durchlaufen.

$k = 4$, $v(\gamma) = 4 \Rightarrow \gamma = abcd(a)$ 4 verschiedene Kanten, je einmal durchlaufen.

Wir führen nun den Induktionsschritt von $k - 2$ nach k aus:

Da $v(\gamma) > \frac{k}{2}$, gibt es einen Knoten $j_p = a$, der nur einmal im Pfad vorkommt.

Setze $b := j_{p-1} \neq a$, $c := j_{p+1} \neq a$, wobei wir gegebenenfalls die zyklische Setzung $j_0 \equiv j_k$, $j_{k+1} \equiv j_1$ vornehmen. Der Pfad ist also von der Form $\gamma = \dots bac \dots$

Ist $b \neq c$, so ist die Behauptung bereits bewiesen, da die Kante $\{a, b\}$ nur einmal vorkommt. Sei also $\gamma = \dots dbabe \dots$, wobei der Pfad wieder zyklisch zu interpretieren ist, falls a oder b Anfangs- bzw. Endpunkt des Pfades sein sollte.

Setze $\gamma' := \dots dbe \dots$ (ab wurde aus γ gestrichen). Es gilt $\gamma' \in \{1, \dots, N\}^{k-2}$ und $v(\gamma') = v(\gamma) - 1 > \frac{k}{2} = \frac{k-2}{2} + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung enthält γ' Kante $\{x, y\}$, $x \neq y$, die nur einmal durchlaufen wird. Zudem ist $x \neq a$, $y \neq a$. Somit wird die Kante $\{x, y\}$ in γ auch nur einmal durchlaufen. \square

Schritt 3. Beh.: $v(\gamma) = \frac{k}{2} + 1$ und $\mathbb{E}(\xi_\gamma) \neq 0 \implies$ (a)–(c)

(a) Jede Kante wird genau zweimal durchlaufen.

(b) $j_l \neq j_{l+1}$ für alle $1 \leq l \leq k$ (mit der zyklischen Setzung $j_{k+1} \equiv j_1$).

(c) Sei V definiert durch $\{x, y\} \in V : \iff \{j_x, j_{x+1}\} = \{j_y, j_{y+1}\}$ und $x \neq y$.

V ist nichtüberkreuzende Paarzerlegung von $\{1, \dots, k\}$, wobei nichtüberkreuzend heißt: $\{x, y\} \in V$, $\{v, w\} \in V$, $x < v < y \implies x < w < y$.

Beweis durch Induktion nach $k = 2s$ (k muss gerade sein):

$s = 1$: $\gamma = ab(a)$ mit $b \neq a$, $V = \{\{a, b\}\}$

$s - 1 \rightarrow s$: Konstruiere γ' aus γ wie im Beweis von Schritt 2, wobei der Fall $\gamma = \dots bac \dots$ mit $b \neq c$ durch die Bedingung $\mathbb{E}(\xi_\gamma) \neq 0$ ausgeschlossen ist. \square

Fazit aus den Schritten 1–3:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k)) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1-s} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}_N(\xi_\gamma) & , \text{ falls } k = 2s \end{cases} \quad (5)$$

mit $\Gamma := \{\gamma \in \{1, \dots, N\}^{2s} : v(\gamma) = s + 1, \gamma \text{ erfüllt (a)–(c) aus Schritt 3}\}$

Um die Mächtigkeit von Γ zu ermitteln, führen wir nun Catalan-Pfade ein.

Definition: Catalan-Pfade und Catalan-Zahlen

$\mathcal{C}_s := \{\text{Pfade im Gitter } \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ von } (0, 0) \text{ nach } (2s, 0) \text{ in Schritten } (1, \pm 1)\}$

$C_s := \#\mathcal{C}_s$ (Catalan-Zahl)

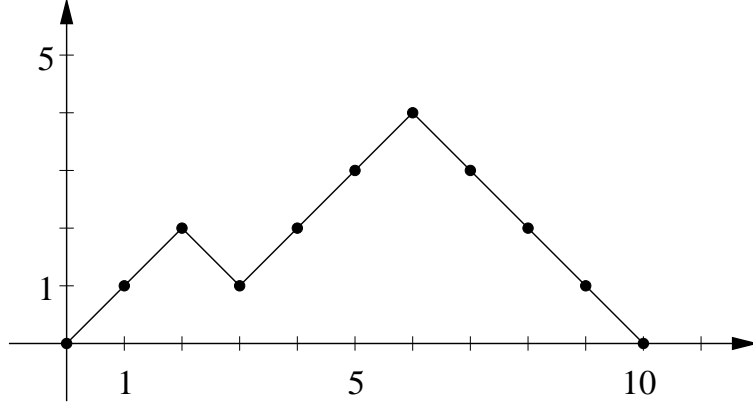


Abbildung 2: Beispiel eines Catalan-Pfades aus \mathcal{C}_5 .

Schritt 4. Beh.: Es gibt eine Bijektion zwischen \mathcal{C}_s und der Menge der nicht-überschneidenden Paarzerlegungen von $\{1, \dots, 2s\}$.

Beweis: Sei $V = \{\{x_l, y_l\} : 1 \leq l \leq s\}$ mit $x_l < y_l$ Paarzerlegung. Konstruiere Catalan-Pfad aufsteigend zwischen $x_j - 1$ und x_j und fallend zwischen $y_j - 1$ und y_j . Um umgekehrt einem Catalan-Pfad die gemäß obiger Vorschrift zugehörige Paarzerlegung eindeutig zuzuordnen, verwendet man, dass nur nichtüberschneidende Paarzerlegungen betrachtet werden. So gehört z.B. der Catalan-Pfad aus Abbildung 2 eindeutig zu der Paarzerlegung $\{\{1, 10\}, \{2, 3\}, \{4, 9\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}\}$.

□

Schritt 5. Beh.: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^{2s})) = \left(\frac{1}{4}\right)^s C_s$

Beweis: Für $\gamma \in \Gamma$ gilt mit (iii), dass $\mathbb{E}(\xi_\gamma) = \prod_{\{a,b\} \text{ Kante in } \gamma} \mathbb{E} \left(\left(\xi_{ab}^{(N)} \right)^2 \right) = \left(\frac{1}{4}\right)^s$.

Zudem ist $\#\Gamma = C_s \binom{N}{s+1} (s+1)!$, da jeder Pfad aus Γ bestimmt ist durch

- die zugehörige nichtüberschneidende Paarzerlegung (gemäß Schritt 4 gibt es davon C_s verschiedene Möglichkeiten),
- die Auswahl der $s+1$ verschiedenen in γ durchlaufenen Knoten (es gibt $\binom{N}{s+1}$ Möglichkeiten),
- die Abfolge der $s+1$ verschiedenen Knoten im Pfad, wobei eine Wahlmöglichkeit nur für den Startpunkt und für die Endpunkte der Kanten, die zum ersten Mal durchlaufen werden, besteht. Der Rest ist dadurch eindeutig festgelegt. Wir können die $s+1$ verschiedenen Knoten also auf $s+1$ Plätze verteilen, wofür $(s+1)!$ verschiedene Möglichkeiten bestehen.

In dem Beispiel des Catalan-Pfades aus Abbildung 2 ($s = 5$) ist der zugehörige Pfad der Knoten von der Form $abc b d e f e d b(a)$. Die 6 Knoten a, b, c, d, e, f können frei aber voneinander verschieden aus $\{1, \dots, N\}$ ausgewählt werden. Hierfür gibt es $N(N-1) \dots (N-5) = \binom{N}{6} 6!$ Möglichkeiten.

Zusammen mit Formel (5) folgt also

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^{2s})) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-s)}{N^{1+s}} C_s \left(\frac{1}{4}\right)^s = C_s \left(\frac{1}{4}\right)^s .$$

□

Bemerkung: Aus dem bisher Bewiesenen folgt schon, dass alle in Satz 2.1 betrachteten Ensembles gegen die gleiche Eigenwertdichte für $N \rightarrow \infty$ streben. Um zu sehen, daß diese durch ϱ_W gegeben ist, benötigen wir gemäß (4) noch

Schritt 6. Beh.: $C_s = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s}$.

Beweis: Es gilt folgende Rekursion $C_{s+1} = \sum_{p=0}^s C_p C_{s-p}$. Um diese Formel zu begründen, ordnen wir jedem Element von \mathcal{C}_{s+1} die Zahl $p \in \{0, 1, \dots, s\}$ zu, die so gewählt ist, dass $(2p+2, 0)$ den ersten Schnittpunkt des Pfades mit der x -Achse nach $(0, 0)$ bezeichnet (vgl. Abbildung 3). Man beachte, dass alle Pfade mit vorgegebenem p durch eine beliebige Kombination von Elementen aus \mathcal{C}_p ($\hat{=}$ Teilpfad von $(1, 1)$ bis $(2p+1, 1)$ verschoben um $(-1, -1)$) und \mathcal{C}_{s-p} ($\hat{=}$ Teilpfad von $(2p+2, 0)$ bis $(2s+2, 0)$ verschoben um $(-2p-2, 0)$) erzeugt werden kann. Hieraus folgt bereits obige Rekursionsformel.

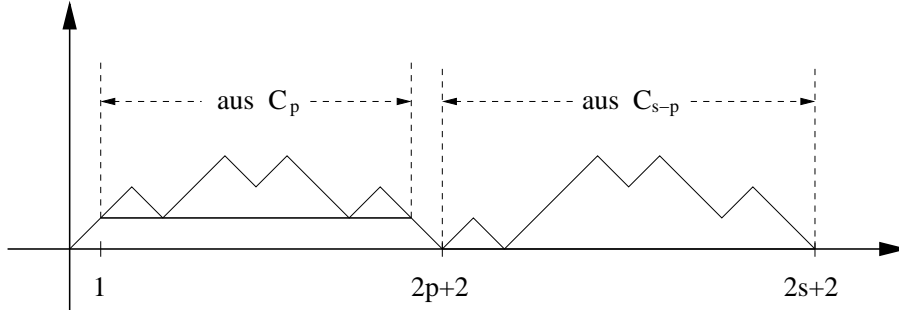


Abbildung 3: Veranschaulichung der Konstruktion zum Beweis der Rekursionsformel.

Wähle $F(x) := \sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s$ (erzeugende Funktion). Dann gilt

$$F(x)^2 = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^s C_l C_{s-l} \right) x^s = \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+1} x^s = \frac{1}{x} (F(x) - 1) .$$

Hieraus und wegen $F(0) = 1$ erhalten wir

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{1/2}{s+1} (-4x)^s ,$$

und somit

$$C_s = 2(-4)^s \binom{1/2}{s+1} = 2^s \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2s-1)}{(s+1)!} = \frac{(2s)!}{s!(s+1)!}.$$

□

Damit ist die schwächere, gemittelte Version von Satz 2.1 gezeigt.

2.5 Bemerkungen und Erweiterungen

- a) Um fast sichere Konvergenz $\int_{-\infty}^s \Delta_N(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^s \varrho_W(t) dt$ zu zeigen, beweist man zusätzlich, dass

$$\mathbb{E}_N \left(\left| \int t^k d\Delta_N - \mathbb{E}_N \left(\int t^k d\Delta_N \right) \right|^2 \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^2} \right)$$

und damit über N summierbar ist. Dazu wird $\mathbb{E}_N([\text{tr}(M_N^k)]^2) - [\mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k))]^2$ ähnlich (aber komplizierter) wie in Abschnitt 2.4 analysiert.

- b) Die Beweismethode funktioniert allgemeiner (für andere Symmetrieklassen; es können auch gewisse lokale stochastische Abhängigkeiten der Einträge zugelassen werden).
- c) Der Beweis zeigt, warum eine Reskalierung der Einträge mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ vorgenommen wurde.
- d) **Bandmatrizen** (vgl. Abschnitt 1.4)

$$M_N = \frac{1}{\sqrt{b_N}} (\xi_{jk}^{(N)})_{1 \leq j, k \leq N}$$

Man sieht leicht, dass für Matrizen mit Bandweite b_N die Abschätzung aus dem ersten Beweisschritt von §2.4 ersetzt werden kann durch

Schritt 1': $\#\{\gamma: v(\gamma) = c\} \leq N \cdot (kb_N)^{c-1} \cdot c^k.$

Somit gilt für $c \leq \frac{k}{2} + 1$

$$\frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{b_N}^k} \sum_{v(\gamma)=c} \mathbb{E}_N(\xi_\gamma) = \mathcal{O} \left(b_N^{c-1-\frac{k}{2}} \right)$$

- Im Fall beschränkter Bandweiten (z.B. $b_N = b$), können die Terme mit $c < \frac{k}{2} + 1$ im Limes $N \rightarrow \infty$ nicht ignoriert werden. Als Konsequenz hängen die Eigenwertdichten von allen Momenten der Einträge ab!

– Im Fall $b_N \rightarrow \infty$ wird (5) ersetzt durch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k)) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{Nb_N^s} \sum_{\gamma \in \Gamma'} \mathbb{E}_N(\xi_\gamma) & , \text{ falls } k = 2s \end{cases}$$

$$\text{mit } \Gamma' = \left\{ \gamma = (j_1, \dots, j_k) \in \Gamma : |j_l - j_{l+1}| \leq \frac{b_N}{2} \right\}.$$

Um das Halbkreisgesetz zu zeigen, müsste man analog zur Rechnung in Abschnitt 2.4 zeigen, dass

$$\frac{\#\Gamma'}{C_s N b_N^s} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

gilt. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht richtig, da für Knoten j_l , die nahe bei den Rändern 1 oder N liegen, deutlich weniger als b_N Möglichkeiten für die Wahl des Nachbarknotens j_{l+1} bestehen (im Extremfall nur halb so viele). Man kann zeigen, dass in dem Fall $\frac{b_N}{N} \rightarrow \alpha \in [0, 1]$ für $N \rightarrow \infty$ folgendes gilt:

$$\frac{\#\Gamma'}{C_s N b_N^s} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g_s(\alpha) \leq 1$$

mit $g_s(0) = g_s(1) = 1$. Somit ist das Halbkreisgesetz gültig für $\alpha \in \{0, 1\}$. Weiter kann man zeigen, dass für $0 < \alpha < 1$ die Eigenwertdichte existiert, aber nicht mehr durch das Halbkreisgesetz beschrieben wird.

Die kombinatorischen Schwierigkeiten, die bei Bandmatrizen mit der Abzählung von Pfaden verbunden sind, die in die Nähe der Randpunkte 1 oder N kommen, kann man dadurch umgehen, dass man die Indexmenge $\{1, \dots, N\}$ zyklisch begreift und 1 als Nachbarn von N auffasst. In diesem Fall, der auch der *periodische* genannt wird, gilt

$$C_s N (b_N - s - 1)^s \leq \#\Gamma' \leq C_s N b_N^s$$

und somit wieder das Halbkreisgesetz. Im periodischen Fall besitzen die Matrizen neben dem Band, welches symmetrisch um die Diagonale liegt, noch je ein Band halber Breite in der rechten oberen und in der linken unteren Ecke.

- e) Mit der Momentenmethode kann auch die Verteilung des größten Eigenwerts untersucht werden. Dies erfordert einen hohen technischen Aufwand. Die Grundidee ist aber leicht skizziert:

Die Funktion $x \mapsto x^n$ verhält sich auf $[0, 1]$ für große Werte von n in etwa wie folgt:

$$x^n \approx \begin{cases} e^{-n(1-x)} & \text{für } x \text{ nahe } 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist der Spektralradius (d.h. der betragsmäßig größte Eigenwert) von der Ordnung $1 - \frac{C}{N^\nu}$, so kann man erwarten, dass

$$\mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^{N^\delta})) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(e^{-N^{\delta-\nu}}\right) & \text{für } \delta > \nu, \\ \mathcal{O}(1) & \text{für } \delta = \nu, \\ \sim \#\{j : |\lambda_j| \geq 1 - N^\delta\} & \text{für } \delta < \nu. \end{cases}$$

Es ist daher plausibel, dass für die Untersuchung des größten Eigenwerts die Asymptotik von $\mathbb{E}_N(\text{tr}(M_N^k))$ für Werte von k von der Größenordnung N^ν betrachtet werden muss. Wie bereits in 1.2.1 Bemerkung c) durch heuristische Überlegungen begründet wurde, gilt wegen des Quadratwurzelverhaltens der Eigenwertdichte am oberen Rand des Trägers $\nu = 2/3$.

3 Invariante Ensembles

In Abschnitt 1.4 wurde erläutert, dass für invariante Ensembles die gemeinsame Verteilung der Eigenwerte explizit gegeben ist durch

$$d\mathbb{P}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda = \frac{1}{Z_{N,\beta}} |\text{VD}(\lambda)|^\beta \left(\prod_{j=1}^N w_N(\lambda_j) \right) d\lambda ,$$

wobei $\beta \in \{1, 2, 4\}$ durch die Symmetrieklasse bestimmt ist. Wir skizzieren in diesem Abschnitt wie aus der speziellen Form der gemeinsamen Verteilung der Eigenwerte die Dichte (durch ein Variationsproblem §3.1) und lokale Statistiken (mit Hilfe der Methode der orthogonalen Polynome §3.2–3.3) bestimmt werden können. Eine ausführliche Einführung in diese Techniken findet sich z.B. in den Kapiteln 5 und 6 von [1]. Für die Methode der orthogonalen Polynome verwenden wir den eleganten Zugang von C. Tracy und H. Widom [9].

3.1 Eigenwertdichte

Sei $V_N := -\frac{1}{N} \ln w_N$, d.h. $w_N = e^{-NV_N}$. Für große N kann man erwarten, dass $\Delta_N \sim \mu_{V_N}$, wobei μ_{V_N} das W -Maß auf \mathbb{R} ist, für das das Funktional

$$I_{V_N}(\mu) = -\frac{\beta}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| d\mu(x) d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} V_N(x) d\mu(x)$$

minimal wird (vgl. Begründung in §1.3.2 im Spezialfall $V_N(x) = x^2$).

Ist $V_N = V$, so kann man unter schwachen Voraussetzungen an V zeigen, dass I_V sein Minimum an genau einer Stelle annimmt und $\Delta_N \rightarrow \mu_V$. Die Eigenwertdichte μ_V hängt von V ab (**kein universelles Gesetz!**). In einigen Fällen kann μ_V durch Lösen der zugehörigen Euler-Lagrange Gleichung explizit bestimmt werden. Diese lautet:

$$\text{Es gibt ein } l \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad -\beta \int_{\mathbb{R}} \ln|x-y| d\mu(y) + V(x) \begin{cases} = l & \text{für } x \in \text{supp } \mu , \\ \geq l & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.2 Lokale Statistik

Eine wichtige Größe zum Verständnis der lokalen Statistik ist die Lückenwahrscheinlichkeit

$$A_N(I) := \mathbb{P}_N(\text{kein Eigenwert liegt in } I) .$$

So gilt zum Beispiel für die Verteilungsfunktion des größten Eigenwerts

$$\mathbb{P}_N(\text{größter Eigenwert} \leq s) = A_N((s, \infty)) .$$

Selbst die Verteilung der Abstände benachbarter Eigenwerte läßt sich (heuristisch) mit $A_N(x, y) := A_N((x, y])$ in Verbindung bringen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N(\text{kein EW in } (x, y] \text{ und mindestens ein EW in } (y, y + dy]) &= \\ &= A_N(x, y) - A_N(x, y + dy) = -\frac{\partial A_N}{\partial y}(x, y) dy . \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N(\text{kein EW in } (x, y], \text{ aber EW'e in } (x - dx, x] \text{ und } (y, y + dy]) &= \\ &= -\frac{\partial A}{\partial x \partial y} dx dy . \end{aligned}$$

Wir erklären nun, wie $A_N(I)$ asymptotisch für $N \rightarrow \infty$ mit Hilfe der Methode der orthogonalen Polynome analysiert werden kann, wobei wir uns auf den einfachsten Fall $\beta = 2$ beschränken.

3.3 Die Methode der orthogonalen Polynome (im Fall $\beta = 2$)

Wie oben erwähnt folgen wir dem Zugang von C. Tracy und H. Widom [9].

Schritt 1: Eigenwertdichte $P_N(\lambda)$ als Quadrat einer Determinante schreiben. Die Vandermonde Determinante ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{VD}(\lambda) &= \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\lambda_k - \lambda_j) = \det(\lambda_j^{k-1})_{1 \leq j, k \leq N} \\ &= \left(\prod_{k=1}^N \gamma_{k-1} \right)^{-1} \det(p_{k-1}(\lambda_j))_{1 \leq j, k \leq N} \end{aligned}$$

für beliebige $p_k(x) = \gamma_k x^k + \dots$ (Polynom vom Grad k , $\gamma_k \neq 0$).
Somit gilt

$$P_N(\lambda) = \frac{1}{Z_{N,2} (\prod_k \gamma_{k-1})^2} \det(\varphi_{k-1}(\lambda_j))^2$$

mit $\varphi_k(x) = p_k(x) \sqrt{w_N(x)}$.

Schritt 2: $A_N(I)$ als Determinante.

$$\begin{aligned} A_N(I) &= \frac{1}{Z_{N,2} (\prod_k \gamma_{k-1})^2} \int_{\mathbb{R}^N} \det(\varphi_{k-1}(\lambda_j))^2 \prod_{j=1}^N (1 - \mathcal{X}_I(\lambda_j)) d\lambda \\ &= \frac{N!}{Z_{N,2} (\prod_k \gamma_{k-1})^2} \det S \end{aligned} \tag{6}$$

mit $S_{jk} = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j-1}(x)\varphi_{k-1}(x)(1 - \mathcal{X}_I(x)) dx$. Relation (6) folgt mit Leibnizformel und Fubini.

Schritt 3: Verwendung Orthogonaler Polynome

Wählt man $(p_j)_j$ als orthogonale Polynome zu $w_N(x) dx$, d.h.

$$\int p_j(x)p_k(x)w_N(x) dx = \int \varphi_j(x)\varphi_k(x) dx = \delta_{jk} ,$$

so gilt

$$A_N(I) = \det(1 - R) \quad \text{mit } R_{jk} = \int_I \varphi_{j-1}(x)\varphi_{k-1}(x) dx .$$

Bemerkung: Man erschließt $\frac{N!}{Z_{N,2}(\prod \gamma_{k-1})^2} = 1$, indem man $I = \emptyset$ betrachtet!

Schritt 4: Von der Matrix zum Integraloperator.

Es ist $R = BA$ mit

$$A: \mathbb{R}^N \rightarrow L^2(I) \quad , \quad u \mapsto \sum_{j=1}^N u_j \varphi_{j-1}$$

$$B: L^2(I) \rightarrow \mathbb{R}^N \quad , \quad f \mapsto \int_I \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \end{pmatrix} (y) f(y) dy .$$

Weiter folgt mit allgemeiner Funktionalanalysis (siehe z.B. [2, Kap. 3]), dass $\det(1 - R) = \det(1_{\mathbb{R}^N} - BA) = \det(1_{L^2(I)} - AB)$, wobei

$$AB: L^2(I) \rightarrow L^2(I) \quad , \quad f \mapsto \int_I K_N(x, y) f(y) dy$$

mit Integralkern $K_N(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j(x)\varphi_j(y)$.

Somit haben wir

$$A_N(I) = \det(1 - K_N(I)) \quad (\text{Fredholm-Determinante}) ,$$

wobei $K_N(I) := AB$ Spurklasse-Operator in $L^2(I)$ ist.

Bemerkung: Es mag überraschen, dass wir nicht bei Schritt 3 aufgehört haben. Dort war $A_N(I)$ durch die Determinante einer $N \times N$ Matrix ausgedrückt worden, während wir es nun mit der Determinante eines Operators auf einem unendlichdimensionalen Raum zu tun haben. Da wir jedoch an dem Limes $N \rightarrow \infty$ interessiert sind, ist letztere Darstellung vorteilhaft, da dort die N -Abhängigkeit auf den Kern des Integraloperators beschränkt ist, dessen asymptotisches Verhalten zudem gut kontrolliert werden kann.

Fazit: Wir haben gesehen, dass sich die Lückenwahrscheinlichkeiten $A_N(I)$, die für die Berechnung lokaler Statistiken zentral ist (§3.2), als Fredholmdeterminante eines Integraloperators schreiben läßt, dessen Integralkern K_N durch orthogonale Polynome ausgedrückt werden kann. Wir gehen im nächsten Abschnitt kurz auf die Asymptotik von K_N für $N \rightarrow \infty$ ein.

3.4 Weitere Bemerkungen

- a) Aus der Theorie der orthogonalen Polynome weiß man, dass unter sehr allgemeinen Voraussetzungen K_N nach geeigneter Reskalierung gegen universelle Kernfunktionen (unabhängig vom Orthogonalitätsmaß $w(x) dx$) konvergiert. Zum Beispiel: Ist $\varrho(a) := \frac{d\mu_V}{dx}(a) > 0$, so gilt

$$\frac{1}{N\varrho(a)} K_N \left(a + \frac{\xi}{N\varrho(a)}, a + \frac{\eta}{N\varrho(a)} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi(\xi - \eta)}{\pi(\xi - \eta)} \quad (\text{Sinus-Kern}) .$$

An den Randpunkten des Spektrums gibt es andere Universalitätsklassen, Airy-Kern für “soft-edge” ($\frac{d\mu_V}{dx} \sim \sqrt{c-x}$) und Bessel Kern an einem “hard-edge” ($\frac{d\mu_V}{dx} \sim \sqrt{c-x}^{-1}$).

- b) Man kann auch die k -dimensionalen Randverteilungen

$$R_k^{(N)}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := \frac{N!}{(N-k)!} \int_{\mathbb{R}^{N-k}} P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_{k+1} \dots d\lambda_N$$

durch die Kernfunktion K_N ausdrücken. Es gilt

$$R_k^{(N)}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \det(K_N(\lambda_j, \lambda_l))_{1 \leq j, l \leq k} .$$

Dies wird beim Beweis der Konvergenz der Abstandsverteilung benachbarter Eigenwerte verwendet.

- c) Für $\beta = 1$ und $\beta = 4$ kann weitgehend analog vorgegangen werden (siehe [9]), wobei erhebliche technische Komplikationen auftreten. Die Kernfunktion muss durch eine 2×2 -matrixwertige Kernfunktion ersetzt werden, deren Universalität noch nicht vollständig geklärt ist.
- d) Die Methode der orthogonalen Polynome kann auch genutzt werden, um die Konvergenz der Eigenwertdichte zu untersuchen. Es gilt zum Beispiel

$$\overline{\Delta}_N = \mathbb{E}_N(\Delta_N) = K_N(x, x) dx .$$

Literatur

- [1] P. Deift. *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach*, vol. 3 of Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.
- [2] P. Deift und D. Gioev. *Random matrix theory: invariant ensembles and universality*. Erscheint in Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences.

- [3] P. J. Forrester. *Log-gases and random matrices*. Erscheint in London Mathematical Society Monographs Series. Princeton University Press.
- [4] T. Guhr, A. Müller–Groeling und H. A. Weidenmüller. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, **299**, 189–425, 1998.
- [5] F. Hiai und D. Petz. *The semicircle law, free random variables and entropy*. Mathematical Surveys and Monographs, **77**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [6] N. M. Katz und P. Sarnak. Zeroes of zeta functions and symmetry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **36** no. 1, 1–26, 1999.
- [7] W. König. Orthogonal polynomial ensembles in probability theory. *Prob. Surv.*, **2**, 385–447 (electronic), 2005.
- [8] M. L. Mehta. *Random matrices*. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), **142**. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004³.
- [9] C. A. Tracy und H. Widom. Correlation functions, cluster functions and spacing distributions for random matrices. *J. Stat. Phys.*, **92** no. 5-6 , 809–835, 1998.