Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

9. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 22. Dezember 2009, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathcal{L}^1(P)$ eine Zufallsvariable. $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ sei eine Unter-σ-Algebra. Beweisen sie die folgenden Eigenschaften der bedingten Erwartung:

(i) Gilt $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{F}$, so folgt $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}X$.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ für die folgenden σ-Algebren:

- (a) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
- (b) $\mathcal{F} \supset \sigma(X)$
- (c) $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ für ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) \in (0, 1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(i) Sei $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger nicht negativer Zufallsgrößen mit Erwartungswert Eins. Zeigen Sie, dass $\left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right)_n$ ein $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$-Martingal ist.

Seien $\xi_1, \ldots, \xi_n$ unabhängig und log-normalverteilt, d. h. jedes ξ_i hat die Darstellung $\xi_i = \exp(\sigma X_i + \mu)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen sowie $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ seien. Bestimmen Sie μ so, dass die Folge

$$S_0 = 1,\ S_n = S_{n-1}\xi_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i,\ n \in \mathbb{N},$$

ein Martingal ist.

(ii) Seien $(X_{ni})_{n\in\mathbb{N}_0, i\in\mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Setze $p_k := P(X_{11} = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Seien $0 \neq E[X_{11}] < \infty$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_{11}) < \infty$. Wir definieren die Folge von Zufallsgrößen $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$Z_0 = 1 \text{ und } Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{ni}\,.$$

Wie muss Z_n skaliert werden, damit es bezüglich der Filtration $\mathcal{A}_n := \sigma(X_{ki},\ k < n,\ i \in \mathbb{N})$ ein Martingal ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Sei $(X_n)_n$ die Folge ± 1-wertiger unabhängiger Zufallsgrößen mit $P(X_i = 1) = 1/2$. Ein Spieler setzt 1 Einheit Einsatz zu Beginn und verdoppelt seinen Einsatz so lange, bis zum ersten Mal 1 erscheint, um dann aufzuhören! M_n bezeichne den Gewinn nach n Würfen mit $M_0 = 0$. Zeigen Sie, dass $(M_n)_n$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_n)_n$ mit $\mathcal{A}_n := \sigma(M_0, X_1, \dots, X_n)$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Sei τ eine Stoppzeit mit $P(\tau \le c) = 1$ für eine Konstante c. Dann gilt für das Martingal $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{E}(|S_\tau|) < \infty \text{ und } \mathbb{E}(S_\tau) = \mathbb{E}(S_1)\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(i) Betrachten Sie das Cox-Ross-Rubinstein-Modell. Bezüglich welcher Filtration ist $(W_n^*)_{0\le n\le N}$, dass im Beweis von Satz 1.4 definiert wurde, ein Martingal? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Warum ist im Ein-Perioden-Modell die abdiskontierte Auszahlung der gehandelten Wertpapiere unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q ein $\big(\sigma(S_0), \sigma(S_0, S_1)\big)$-Martingal?