Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

8. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 15. Dezember 2009, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Beweisen Sie Satz 6.20:
Für alle Abbildungen $f, g \in \mathcal{L}^1(P)$ gelten die folgenden Eigenschaften des Integrals:

(i) *Monotonie:* Ist $f \leq g$ P-fast überall, so ist $\int f dP \leq \int g dP$.

(ii) *Dreiecksungleichung:* $|\int f dP| \leq \int |f| dP$.

(iii) *Linearität:* Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $af + bg \in \mathcal{L}^1(P)$ und es gilt

$$\int (af + bg) dP = a \int f dP + b \int g dP\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f : \Omega \to [0, \infty)$ messbar. Durch

$$Q(A) = \int (1_A f) dP \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}$$

wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. Man sagt, $fP := Q$ hat die **Dichte** f bezüglich P. Zeigen Sie, dass $g \in \mathcal{L}^1(fP)$ genau dann, wenn $gf \in \mathcal{L}^1(P)$ gilt, und in diesem Fall ist

$$\int g d(fP) = \int (gf) dP\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Seien X, Y Zufallsvariablen mit $X^2, Y^2 \in \mathcal{L}^1(P)$. Die **Varianz** von X ist durch

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

definiert. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Varianz:

(i) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$

(ii) $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X = \mathbb{E}X$ fast sicher.

(iii) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{E}[(X-x)^2]$ ist in $x_0 = \mathbb{E}X$ mit $f(\mathbb{E}X) = \mathrm{Var}(X)$ minimal.

Die **Kovarianz** von X und Y ist durch

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]$$

definiert. X und Y heißen **unkorreliert**, wenn $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ist. Dies gilt, falls Y fast sicher konstant ist. Die Abbildung Cov ist eine positiv semidefinite Bilinearform. Ausgeschrieben heißt dies: Für alle Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $X_1^2, \ldots, X_m^2, Y_1^2, \ldots Y_n^2 \in \mathcal{L}^1(P)$ sowie $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Cov}(c + \sum_{i=1}^m a_i X_i, d + \sum_{i=1}^n b_i Y_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)\,. \tag{1}$$

(iv) Beweisen Sie die Gleichung (1) und zeigen Sie die Bienaymé-Gleichung:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Sei X eine integrierbare reelle Zufallsvariable mit $X^2 \in \mathcal{L}^1(P)$, deren Verteilung die Dichte f bezüglich des Lebesgue-Maßes λ besitzt. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \lambda(dx)$$

und

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f(x) \lambda(dx)$$

gilt.
Hinweis: Nutzen Sie (ohne Beweis) die Tatsache, dass die Aussage in Aufgabe 2 nicht nur für Wahrscheinlichkeitsmaße, sondern allgemein für Maße gilt.