Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

7. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 8. Dezember 2009, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Beweisen Sie Beispiel 6.2 (d):
Sei $\mathcal{F}$ ein System von Teilmengen einer Menge Ω. Dann existiert eine eindeutig bestimmte σ-Algebra, die die kleinste $\mathcal{F}$ enthaltende σ-Algebra ist: $\sigma(\mathcal{F})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Zeigen Sie, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ von den folgenden Mengen erzeugt wird, also $\sigma(\mathcal{E}_i) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ für alle $i = 1, \ldots, 5$ gilt.

(i) $\mathcal{E}_1 = \{A \subset \mathbb{R}^d : A \text{ ist abgeschlossen}\}$

(ii) $\mathcal{E}_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d, a_i < b_i \text{ für alle } 1 \le i \le d\}$

(iii) $\mathcal{E}_3 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{Q}^d\}$

(iv) $\mathcal{E}_4 = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}^d\}$

(v) $\mathcal{E}_5 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{Q}^d\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(i) $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega^*, \mathcal{A}^*)$ und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ seien Messräume. Die Abbildungen $X : \Omega \to \Omega^*$ und $X^* : \Omega^* \to \tilde{\Omega}$ seien messbar. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$Y := X^* \circ X : \Omega \to \tilde{\Omega},\ \omega \mapsto X^*\big(X(\omega)\big)$$
$\mathcal{A}$–$\tilde{\mathcal{A}}$-messbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mit $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ und $x \mapsto \lceil x \rceil$ messbar bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$–$\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ sind.

(iii) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, sowie $f := (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Abbildungen. Beweisen Sie, dass die $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-Messbarkeit von f äquivalent zur $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-Messbarkeit der Abbildungen f_i für alle $i = 1, \ldots, n$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Bestimmen Sie das optimale Endvermögen für das Anfangskapital v_0 bezüglich der Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ sowie der Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\alpha}x^\alpha$, $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$.