Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

6. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 1. Dezember 2009, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Betrachten Sie das Marktmodell

$$(D, S_0) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{10}{11} \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Untersuchen Sie (D, S_0) auf Vollständigkeit und auf Arbitragefreiheit.

(ii) Bestimmen Sie den Preis eines kostenminimierenden Superreplikationsportfolios für eine Call-Option auf S^2 mit Basispreis $K = 6$ und geben Sie das Portfolio an.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Nehmen Sie an, dass im obigen Marktmodell aus Aufgabe 1 die drei möglichen Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit realisiert werden. Bestimmen Sie das optimale Portfolio im Sinne des quadratischen Hedgens für eine Call-Option auf S^2 mit Basispreis $K = 6$ und geben Sie den Preis dieses Portfolios an.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Beweisen Sie Satz 4.5:
Falls für

$$(*) : \qquad \min_\theta \langle \theta, S_0 \rangle; \; D\theta \geq W$$

oder für

$$(**) : \quad \max_\psi \langle \psi, W \rangle; \; D^T\psi = S_0, \; \psi \geq 0$$

eine Lösung existiert, so sind beide linearen Programme lösbar, und die Optimalwerte der Zielfunktionen stimmen überein. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die zulässigen Bereiche von $(*)$ und von $(**)$ beide nicht leer sind.
Hinweis: Es genügt zu zeigen: Falls für $(**)$ eine Lösung existiert, so ist $(*)$ lösbar, und die Optimalwerte der Zielfunktionen stimmen überein.
Sei z_0 der Maximalwert in $(**)$. Zeigen Sie, dass der Punkt $(1, 0)$ nicht in der Menge

$$C = \{(k, v) : k = \langle W, \psi \rangle - tz_0, v = D^T\psi - \langle t, S_0 \rangle, \psi \geq 0, t \geq 0\}$$

liegt, und führen Sie das Problem auf die Situation des Trennungssatzes 3.20 zurück. Betrachten Sie dann für $(x_0, \theta) \in \mathbb{R}^{K+1} \setminus \{0\}$: $\inf_{(k,v)\in C}\{x_0 k + \langle \theta, v \rangle\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Die Rendite für das Portfolio $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ von N Wertpapieren im Einperiodenmodell sei durch

$$R_\theta := \sum_{i=1}^{N} \pi_i R_i$$

mit $\pi_i = \frac{\theta_i S_0^i}{\sum_{i=1}^{n} \theta_i S_0^i}$ und $R_i := S_T^i / S_0^i$ definiert.

(i) Stellen Sie den Erwartungswert und die Varianz von R_θ mit Hilfe der Erwartungswerte $\mu_i = \mathbb{E}R_i$ und den entsprechenden Varianzen $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(R_i)$ der jeweiligen Rendite dar, $i = 1, \ldots, N$.

(ii) Im Folgenden betrachten wir einen Markt mit zwei Wertpapieren (N=2). Sei $\mu_1 = 1.1$, $\sigma_1^2 = 0.08$, $\mu_2 = 1.15$ und $\sigma_2^2 = 0.1$. Tragen Sie für verschiedene (π_1, π_2) den Erwartungswert $\mathbb{E}R_\theta$ über die Varianz $\mathrm{Var}(R_\theta)$ für die folgenden Korrelationen $\rho(R_1, R_2) = \frac{\mathrm{Cov}(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$ der Renditen der beiden Wertpapiere auf:

- $\rho(R_1, R_2) = 1$,
- $\rho(R_1, R_2) = 0$ und
- $\rho(R_1, R_2) = -1$.