Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

5. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 24. November 2009, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(i) Sei B ein festes Anfangskapital, r die Zinsrate und S eine Aktie. Beweisen Sie, dass das Marktmodell mit den Konstanten $0 < d < u$

$$\left(\begin{pmatrix} B(1+r) & uS_0 \\ B(1+r) & dS_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ S_0 \end{pmatrix} \right)$$

genau dann arbitragefrei ist, wenn $d < 1 + r < u$ gilt.

(ii) Überprüfen Sie das Marktmodell

$$\left(\begin{pmatrix} 1,02 & 12 \\ 1,02 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right)$$

auf Arbitragefreiheit und bestimmen Sie den Wert einer Call-Option zum Basispreis 10, sowie den Wert einer Put-Option zum Basispreis $10,5$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Sei (D, S_0) ein Marktmodell und h ein Portfolio mit $\langle h, S_0 \rangle > 0$ und positivem Gewinn $G_h := \langle h, (S_1 - S_0) \rangle$. Sei θ ein weiteres Portfolio mit der Eigenschaft $\langle \theta, S_0 \rangle \neq 0$ und negativer Rendite

$$R_\theta := \frac{\langle \theta, S_1 \rangle - \langle \theta, S_0 \rangle}{\langle \theta, S_0 \rangle} .$$

Zeigen Sie, dass Arbitragemöglichkeiten existieren.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Beweisen Sie Satz 3.33:
Gegeben sei ein Marktmodell (D, S_0) sowie ein risikofreies Portfolio θ mit zugehörigem risikolosen Zinssatz r.

(i) Sei ψ ein Zustandsvektor zu (D, S_0), dann ist durch

$$q_k := \frac{\psi_k}{\sum_{j=1}^K \psi_j} , \ k = 1, \ldots, K ,$$

ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben.

(ii) Sei Q ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann ist der durch $\psi_k := \frac{q_k}{1+r}$, $k = 1, \ldots, K$, definierte Vektor ψ ein Zustandsvektor.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Sei $W = D\theta$ ein replizierbares Auszahlungsprofil in einem arbitragefreien Marktmodell (D, S_0). Beweisen Sie, dass der Markt mit Auszahlungsprofil $\tilde{D} = (D, W) \in \mathbb{R}^{K\times(N+1)}$ und Preis $\tilde{S}_0 = (S_0, S_{N+1})$ genau dann arbitragefrei ist, wenn $S_{N+1} = \langle\theta, S_0\rangle$ gilt.