Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

4. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 17. November 2009, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Sei (S_0, D) ein Marktmodell. Angenommen, es gibt ein Portfolio θ mit $\langle \theta, S_0 \rangle > 0$ und $D\theta > 0$. Beweisen Sie, dass genau dann Arbitragegelegenheiten existieren, wenn es ein Portfolio h mit $\langle h, S_0 \rangle = 0$ und $Dh > 0$ gibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Betrachten Sie das Marktmodell

$$(S_0, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1 & 7 \\ 1,1 & 4 \\ 1,1 & 6 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Untersuchen Sie (S_0, D) auf Vollständigkeit und auf Arbitragefreiheit.

(ii) Bestimmen Sie mögliche Werte einer Call-Option auf S^2 mit Basispreis $K = 6$.

(iii) Berechnen Sie den Forward-Preis F eines Forward-Kontrakts auf S^2.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Betrachten Sie das Marktmodell

$$(S_0, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1 & 7 & 12 \\ 1,1 & 4 & 9 \\ 1,1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Untersuchen Sie (S_0, D) auf Vollständigkeit und auf Arbitragefreiheit.

(ii) Finden Sie eine Arbitragegelegenheit.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Seien K eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für die Menge

$$C := K - V := \{x \in \mathbb{R}^n | \exists (k, v) \in K \times V; x = k - v\}$$

die folgenden Behauptungen:

(i) C ist konvex.

(ii) C ist abgeschlossen. Zeigen Sie dazu, dass jeder Unterraum von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist.