

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 10. November 2009, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Um bei Terminverträgen den Zinsertrag einer Anlage in ausländischer Währung berücksichtigen zu können, bezeichne $e(t)$ den Wechselkurs im Zeitpunkt t (Anzahl Euro pro Einheit der ausländischen Währung). $B(t, T)$ sei der Preis einer deutschen Nullkuponanleihe und $B^a(t, T)$ der Preis in ausländischer Währung einer ausländischen Nullkuponanleihe. Zeigen Sie, dass der Terminpreis des Terminvertrags mit Fälligkeitszeitpunkt $T > t$ in der ausländischen Währung durch

$$F^e(t, T) = e(t) \frac{B^a(t, T)}{B(t, T)}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Für eine amerikanische Put-Option kann das vorzeitige Ausüben optimal sein. Die Option habe den Ausübungspreis K und Fälligkeitszeitpunkt T . Die Zinsrate betrage r . Geben Sie ein hinreichendes Entscheidungskriterium für den Besitzer der amerikanischen Put-Option an, nach welchem er in Abhängigkeit von S_t und K schon vor dem Zeitpunkt T die Option einlösen soll.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Die Put-Call-Parität gilt für Aktien ohne Dividendenzahlung. Schüttet eine Aktie während der Laufzeit einer Option Dividenden aus, so lässt sich die Put-Call-Parität wie folgt verallgemeinern:

- (i) Sind die Zeitpunkte und Höhen der Dividendenzahlung bekannt und haben den heutigen (Zeit t) diskontierten Wert D , so gilt für europäische Optionen:

$$C_t + K \cdot B(t, T) = P_t + S_t - D.$$

- (ii) Ist der heutige diskontierte Wert der Dividenden mit Sicherheit kleiner oder gleich D^* , so gilt für europäische Optionen

$$C_t + K \cdot B(t, T) \geq P_t + S_t - D^*.$$

Beweisen Sie beide Aussagen.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

- (i) Beweisen Sie Satz 3.6 (Law of one price):

Sei (D, S_0) ein Marktmodell und $W \in \text{Im}(D)$ ein replizierbares Auszahlungsprofil. Dann ist W_0 , der mit Hilfe einer Replikationsstrategie definierte Preis, genau dann eindeutig bestimmt, wenn $\text{kern}(D) \perp S_0$ gilt.

- (ii) Konstruieren Sie weiter ein Beispiel eines Marktmodells mit zwei Wertpapieren und den zwei Zeitpunkten 0 und T , wobei das erste Wertpapier ein Vielfaches des anderen ist. Zeigen Sie, dass hier für ein replizierbares Auszahlungsprofil unendlich viele replizierende Portfolios mit gleichem Anfangspreis existieren.