Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 3. November 2009

Aufgabe 1 (4 Punkte): Betrachten Sie das Cox-Ross-Rubinstein-Modell zu den Parametern $S_0 = K = 1$ und $\sigma = \mu = \log 2$. Bestimmen Sie für die Laufzeiten $N = 1, 2, 3$ die optimale selbstfinanzierende Hedge-Strategie $\alpha\beta$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Beweisen Sie die *Jensensche Ungleichung*:
Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe und differenzierbare Funktion und X eine Zufallsvariable. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}(\varphi(X))$ bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P existieren. Dann gilt

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)) .$$

Hinweis: Legen Sie im Punkte $\mathbb{E}X$ eine Tangente an φ an.
Bemerkung: Die Jensensche Ungleichung ist auch ohne die Bedingung an φ, differenzierbar zu sein, gültig.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Sei $\Pi^*(N) = \mathbb{E}^*((S_N - K)^+)$ der Black-Scholes-Preis einer Call-Option Π^* im Cox-Ross-Rubinstein-Modell zu den Parametern $\mu, \sigma > 0$ mit Laufzeit N. Beweisen Sie:

$$\Pi^*(N) \leq \Pi^*(N+1) .$$

Hinweis: Nutzen Sie die Jensensche Ungleichung (Aufgabe 2).

Aufgabe 4 (4 Punkte): Beweisen Sie durch Nachrechnen im Cox-Ross-Rubinstein-Modell, dass für jede reellwertige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die Identität

$$\mathbb{E}^*[f(X_1, \ldots, X_{n-1}) \exp(2\sigma X_n - \mu)] = \mathbb{E}^*[f(X_1, \ldots, X_{n-1})] \cdot \mathbb{E}^*[\exp(2\sigma X_n - \mu)]$$

gilt und zeigen Sie, dass daraus

$$\mathbb{E}^*(W_n^{\alpha\beta} - W_{n-1}^{\alpha\beta}) = 0$$

folgt.