

12. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 26. Januar 2010, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass für eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{t \in [0, T]}$ und für alle $s, t > 0$

$$(i) \mathbb{E}[B_{t+s} - B_s | B_1, \dots, B_s] = 0$$

$$(ii) \text{Cov}(B_s, B_t) = \min\{s, t\}$$

gelten.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Für die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ sei

$$\pi_n = \{[t_0; t_1), [t_1; t_2), \dots, [t_{n-1}; t_n]\}$$

eine Partition von $[0, T]$. Für jede Partition π_n von $[0, T]$ bezeichne $\delta(\pi_n)$ die Länge des größten Intervalls in π_n . Weiter sei $(B_t)_{t \in [0, T]}$ eine Brownsche Bewegung. Wir definieren $S(\pi_n)$ durch

$$S(\pi_n) := \sum_{j=1}^n |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2.$$

Sei $(\pi_n)_n$ eine Folge von Partitionen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\pi_n) = 0$. Beweisen Sie, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|S(\pi_n) - T|^2] = 0$$

folgt.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Nutzen Sie die Itô-Formel (Satz 11.1), um $\mathbb{E}[B_t^6]$ zu berechnen.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass die Ersteintrittszeit

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

eine fast sicher endliche Stoppzeit mit Laplace-Transformierter

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda \tau_a}) = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda \geq 0$$

ist.