Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

11. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 19. Januar 2010, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Es sei $(\mathcal{A}_n)_n$ eine Filtration. Sei τ eine Stoppzeit und $\mathcal{A}_\tau := \big\{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\big\}$. $(X_n)_n$ sei $(\mathcal{A}_n)_n$ adaptiert. Zeigen Sie,

(i) dass $\mathcal{A}_\tau$ eine σ-Algebra ist,

(ii) dass für je zwei Stoppzeiten τ, σ mit $\tau \leq \sigma$, $\mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{A}_\sigma$ gilt,

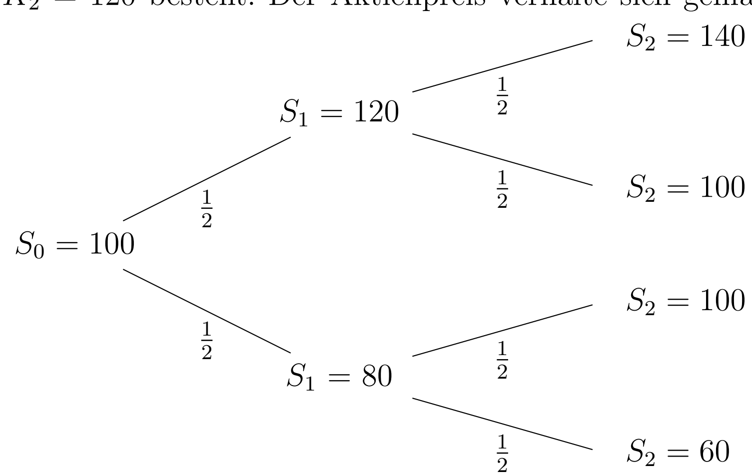
(iii) dass X_τ $\mathcal{A}_\tau$-messbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Beenden Sie den Beweis von Satz 9.6:
Es sei $U_n = M_n + A_n$ die Doob-Zerlegung der Snell-Einhüllenden U, mit $(A_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ ein fallender, vorhersehbarer Prozess mit $A_0 = 0$. Sei

$$\tau_{\max} := \min\big\{n \in \{0, 1, \ldots, N-1\} : A_{n+1} \neq 0\big\} \wedge N$$

mit $\min \emptyset := \infty$. Zeigen Sie, dass für jede weitere Lösung τ^* des optimalen Stopp-problems gilt $\tau^* \leq \tau_{\max}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Betrachten Sie einen „Call-Spread“, der aus dem Kauf einer Call-Option mit Auszahlung $K_1 = 100$ und dem Verkauf einer Call-Option mit höherer Auszahlung $K_2 = 120$ besteht. Der Aktienpreis verhalte sich gemäß des folgenden Baumes:



(i) Geben Sie die Werte des Auszahlungsprozesses $(H_n)_{n=0,1,2}$ und der Snell-Einhüllenden $(U_n)_{n=0,1,2}$ an.

(ii) Geben Sie eine optimale Stoppzeit an.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Sei $\mathcal{M}$ ein arbitragefreies und vollständiges Marktmodell.

(i) Sei $\tilde{C}$ der diskontierte Auszahlungsprozess einer Option. Der Wert einer europäischen Option $E_t := S_{t,0}\mathbb{E}_Q(\tilde{C}_N|\mathcal{F}_t)$ ist nicht größer als der Wert einer amerikanischen Option V_t^θ.

(ii) $(S_{t,0})_{t=0,1,\dots,N}$ sei monoton wachsend. Dann sind die Werte einer amerikanischen und einer europäischen Call-Option gleich.