10. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 12. Januar 2010, 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Zu gegebenem V_0^θ kann nach Bemerkung 8.5 (a) jede Strategie $(\theta_{t,1},\dots,\theta_{t,d})$ in den Wertpapieren $1,\dots,d$ durch die Wahl

$$\theta_{t,0} = \tilde{V}_0^\theta + \tilde{G}_t^\theta - \sum_{i=1}^{d} \theta_{t,i}\tilde{S}_{t,i}$$

zu einer selbstfinanzierenden Strategie ergänzt werden. Beweisen Sie, dass $\theta_0 = (\theta_{t,0})_{t=1,\dots,N}$ vorhersehbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion über N: Bietet ein Marktmodell eine Arbitragemöglichkeit mit diskontiertem Preisprozess $(\tilde{W}_t)_{t=0,\dots,N}$, der $\tilde{W}_0 = 0$, $\tilde{W}_N \geq 0$ f.s. und $P(\tilde{W}_N > 0) > 0$ erfülle, dann existieren ein $n \in \{1,\dots,N\}$ und eine Arbitragemöglichkeit $\theta = (\theta_t)_{t=1,\dots,N}$, so dass $\theta_t = 0$ für alle $t \in \{1,\dots,N\} \setminus \{n\}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Zeigen Sie, dass im Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit $d < 1+r < u$ der Preis einer europäischen Call-Option zur Zeit $t = 0,1,\dots,N$ mit Basispreis K und Restlaufzeit $N-t$ durch

$$C_t = \frac{1}{(1+r)^{N-t}} \sum_{j=0}^{N-t} \binom{N-t}{j} q^j (1-q)^{N-t-j} \left(S_t u^j d^{N-t-j} - K\right)^+$$

gegeben ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
In einem arbitrage-freien Marktmodell seien

$$\mathcal{K}_t := \{\tilde{G}_t^\theta = (\theta,\tilde{S})_t | \theta_0 = 0, (\theta_n)_{n=1,\dots,t} \text{ eine vorhersehbare Handelsstrategie}\}$$

die Menge aller diskontierten Gewinne der Portfolios mit Anfangskapital Null und

$$\mathcal{G}_t := \mathbb{R} + \mathcal{K}_t = \{\alpha + X | \alpha \in \mathbb{R}, X \in \mathcal{K}_t\}$$

die Menge aller diskontierten Gewinne der Portfolios mit Anfangskapital. Wir definieren für $t \in \{0,\dots,N-1\}$ die Abbildung:

$$\begin{aligned} \pi_t : \mathcal{G}_N &\rightarrow \mathcal{G}_t \\ f = \alpha + \tilde{G}_N^\theta &\mapsto \pi_t(f) := \alpha + \tilde{G}_t^\theta\,. \end{aligned}$$

(i) Folgern Sie, dass für $f \in \mathcal{G}_N$ in jedem arbitrage-freien Marktmodell die folgenden beiden Aussagen gelten:

   (a) Mit $f \geq 0$ folgt $\pi_0(f) \geq 0$.

   (b) Gilt $f \geq 0$ und $P(f > 0) > 0$, so folgt $\pi_0(f) > 0$.

(ii) Sei $f \in \mathcal{G}_N$. Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \{0, \ldots, N-1\}$ und $A \in \mathcal{F}_t$ die Abbildung $g := \big(f - \pi_t(f)\big)1_A$ ein Element aus $\mathcal{G}_N$ ist und $\pi_t(g) = 0$ gilt.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und alles Gute für das neue Jahr 2010!