Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döring
Wintersemester 2009/2010

1. Aufgabenblatt zur Vorlesung Finanzmathematik

Abgabe bis 27. Oktober 2009

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Ein *long straddle* besteht aus dem Kauf je einer Call-Option (zum Preis C) und einer sonst identischen Put-Option (zum Preis P). Es gelte $C > P$ und K bezeichne den Basispreis sowie r den konstanten Zinssatz. Leiten Sie das Netto-Auszahlungsprofil dieser Vertragskombination her und stellen Sie dies graphisch dar. Bei welchem erwarteten Verhalten des Aktienkurses würde sich ein *long straddle* auszahlen?

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Eine Aktie habe zum Zeitpunkt 0 den Wert S_0. Betrachten Sie eine Europäische Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungszeitpunkt $T > 0$ und Basispreis $K \in (S_0/2, 2S_0)$.

(i) Sei S_T der Wert der Aktie zum Zeitpunkt T. Geben Sie eine Formel für die Auszahlung der Put-Option an.

(ii) Es sei $S_T = 2S_0$ mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ und $S_T = \frac{S_0}{2}$ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Diskutieren Sie den naiven Ansatz für den Preis der Put-Option. Wie kann der Verkäufer dieser Option einen risikolosen Gewinn machen? (Dazu nehme man an, dass ein Leerverkauf (*short selling*) möglich ist: Der Verkäufer kann einen Gewissen Anteil der obigen Aktie zu einem Zeitpunkt verkaufen, an dem er diesen noch gar nicht besitzt. Er muss ihn allerdings zu einem späteren Zeitpunkt tatsächlich kaufen und zurückgeben.)

(iii) Es sei wie zuvor $S_T = 2S_0$ mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ und $S_T = \frac{S_0}{2}$ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Was ist der faire Preis der Put-Option?

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Parameter p, $0 < p < 1$. σ_n^2 sei die Varianz von $\sum_{i=1}^n X_i$ und Φ bezeichne die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx \,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre und Laplace (siehe Seite 73 im Skript zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische

Statistik von Herrn Eichelsbacher), dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a<b} \left| P\Big(a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sigma_n} \leq b\Big) - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| = 0$$

gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Betrachten Sie das Cox-Ross-Rubinstein-Modell zu den Parametern $S_0 = K = 1$ und $\sigma = \mu = \log 2$. Bestimmen Sie für die Laufzeiten $N = 1, 2, 3$ den Black-Scholes-Preis Π^*.