Integrierte Volatilität unter Marktmikrostruktur

Diplomarbeit
von
Mathias Vetter

Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Lehrstuhl für mathematische Statistik

März 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Die Schätzung der integrierten Volatilität unter Marktmikrostruktur **9**
2.1 Vorbemerkungen zum untersuchten Modell 9
2.2 Fünf Schätzer und ihre Eigenschaften 10
2.2.1 Der klassische Schätzer für die integrierte Volatilität 11
2.2.2 Schätzung der integrierten Volatilität auf Gittern 12
2.2.3 Optimierung des MSE 15
2.2.4 Schätzer auf mehreren Gittern 16
2.2.5 Korrektur des Bias 26
2.3 Zusammenfassung und Ausblick 29

3 Ein Schätzer für $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ im gestörten Modell **33**
3.1 Der Zusammenhang zum Schätzer für die integrierte Volatilität 33
3.2 Einflüsse des Prozesses X 35
3.3 Einflüsse des Prozesses ε 42
3.4 Gemeinsame Einflüsse der beiden Prozesse 48
3.4.1 Vorbemerkungen zur Untersuchungsmethode 48
3.4.2 Die Analyse von $(I)_{K,J,m}$ 49
3.4.3 Die Analyse von $(II)_{K,J,m}$ 51
3.4.4 Die Analyse von $(III)_{K,J,m}$ 53
3.4.5 Das Verhalten von $[X,\varepsilon]_{K,J,m}$ 56
3.5 Die Approximation der Funktionale von X 57

4 Ein Test auf Homoskedastizität **67**
4.1 Vorbemerkungen zur Konstruktion des Tests 67
4.2 Der Grenzwertsatz für T_n 69
4.2.1 Asymptotisch vernachlässigbare Terme 69
4.2.2 Der Grenzwertsatz von Jacod 71
4.2.3 Der Grenzwertsatz für die Störterme 78
4.2.4 Der Grenzwertsatz für den modifizierten Schätzer 83
4.3 Die Berechnung der Kovarianz 87
4.4 Die Definition des Tests 92

5 Appendix **95**
5.1 Voraussetzungen an Drift und Volatilität in dX_t 95
5.2 Stabile Konvergenz 96
5.3 Eigenschaften von lokalen Martingalen 98

Literaturverzeichnis **101**

Kapitel 1

Einleitung

Stochastische Differentialgleichungen - oder allgemeiner: Brownsche Semimartingale - der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

bilden momentan die mathematische Grundlage für die Analyse der Preisentwicklung von Derivaten in Finanzmärkten. In den meisten Modellen dieser Art sind μ_s und σ_s stetige stochastische Prozesse, definiert auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_s, P)$ und ebenso wie W_s messbar bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_s)_s$. Üblicherweise stellt X_t dabei den logarithmierten Preis einer Aktie oder eines anderen Wertpapieres dar.

Die statistische Untersuchung von Prozessen des oben vorgestellten Typs ist in den letzten Jahren deutlich vorangetrieben worden. Insbesondere die Entwicklung von Methoden zur Schätzung der integrierten Volatilität

$$\int_0^1 \sigma_t^2 dt$$

sind für die Beantwortung vieler ökonomischer Fragestellungen von Bedeutung. Klassisch ist dabei die Wahl der realisierten Varianz

$$[X, X] = \sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

als Schätzer für die integrierte Volatilität, dessen stochastische Eigenschaften schon seit längerem untersucht wurden. Dabei wurden insbesondere Konsistenz und schwache Konvergenz nachgewiesen (vgl. zur Untersuchung der realisierten Volatilität unter anderem [4] und [18]). Eine natürliche Konsequenz dieser Grenzwertsätze ist, dass sie bei einer größeren Stichprobe offensichtlich zu einer besseren Schätzung des Integrals führen.

Eine vergleichsweise neue Betrachtungsweise der Vorgänge in der Finanzwelt besteht darin, dass die Einflüsse der Mikrostruktur des Marktes in die Modellierung der Preisprozesse miteinbezogen werden. Diese Effekte werden als Begründung für die empirisch motivierte

Hypothese herangezogen, dass zu viele Beobachtungen mitnichten zu einer besseren Schätzung der integrierten Volatilität führen. De facto wird in der Finanzmarktliteratur ganz im Gegenteil empfohlen, auf hochfrequente Datenerhebung zu verzichten. Offensichtlich lässt sich diese empirische Praxis nicht mit dem mathematischen Modell vereinbaren, das in der obigen Darstellung die Entwicklung des Preisprozesses realistisch darstellen soll. Diese Arbeit widmet sich der Vorstellung und Analyse eines neuen Modells.

Motiviert wird die folgende Untersuchung durch eine Arbeit von Zhang, Mykland und Ait-Sahalia (vgl. [24]), in der die drei Autoren ein Modell vorstellen, das davon ausgeht, dass an der Stelle t_i gar nicht der zu Grunde liegende Prozess X beobachtet werden kann, sondern nur eine gestörte Version. Diese Störung besteht darin, dass jedes Mal zum Wert des Preisprozesses X_{t_i} eine davon unabhängige, zentrierte Zufallsvariable ε_{t_i} addiert und so letztlich nur die Summe dieser beiden Zufallsvariablen beobachtet wird. Die Störungen sollen dabei auch voneinander unabhängig und identisch verteilt sein. Zhang, Mykland und Ait-Sahalia haben es sich in ihrem Artikel zur Aufgabe gemacht, einen Schätzer für die integrierte Volatilität in diesem neuen Modell zu entwickeln. Es ist leicht einzusehen, dass die realisierte Varianz in diesem Fall nicht mehr dazu geeignet ist, um die integrierte Volatilität konstistent zu schätzen. Stattdessen wird ein Schätzer entwickelt, der im wesentlichen darauf beruht, dass die Stichprobe geteilt wird, separat für jede Gruppe die realisierte Variation berechnet und danach über die verschiedenen Werte gemittelt wird. Wir werden uns im zweiten Kapitel ausführlich mit den mathematischen Eigenschaften dieses Schätzers auseinandersetzen.

Im Anschluss daran werden wir in Kapitel 3 damit beginnen, die Methode von Zhang, Mykland und Ait-Sahalia zu adaptieren und einen Schätzer für das Integral über die vierten Potenzen der Volatilität, also

$$\int_0^1 \sigma_t^4 dt,$$

herzuleiten. Der Schätzer wird ebenfalls durch *subsampling* gewonnen, wobei wir die Stichprobe im Gegensatz zum Schätzer für die integrierte Volatilität zweimal unterteilen. Gleichzeitig beginnen wir mit der Herleitung eines zentralen Grenzwertsatzes für diesen Fall, wobei wir zunächst versuchen werden, die Ordnungen diverser Restterme abzuschätzen.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Entwicklung eines Tests auf Homoskedastizität im neuen Modell, zu deren Zweck wir Grenzwertsätze für die Schätzer der beiden Integrale sowie eine verallgemeinerte Delta-Methode benötigen. Wir werden daher kurz die Theorie der stabilen Konvergenz anreißen, um mit Hilfe eines Grenzwertsatzes von Jacod aus [14] die Konvergenzaussage für unseren neuen Schätzer zu erhalten. Die Idee zu dem vorgestellten Test beruht dabei auf der in [9] vorgestellten Definition einer Teststatistik, die mit Hilfe von Hilbertraumtheorie dazu geeignet ist, allgemeinere (speziell lineare) Hypothesen zu testen.

Unsere Untersuchung schließt damit an verschiedene Arbeiten aus der letzten Zeit an. Ein allgemeines Resultat zu Testverfahren im klassischen Modell der direkten Beobachtbarkeit des Prozesses X findet sich in [12], während eine Theorie zur Schätzung der Volatilität im

Modell mit Rundungsfehlern beispielsweise in [8] aufgestellt wird. Methoden zur Schätzung der Volatilität im Modell mit Sprüngen lassen sich aus der asymptotischen Theorie für *power* und *bipower variations* ableiten, dargestellt in [5] bzw. verallgemeinert in [3].

Wir werden aus rechentechnischen Gründen die explizite Verteilung des Grenzprozesses in der Definition unseres Tests nicht angeben. Speziell die Berechnung der Kovarianzen im zentralen Grenzwertsatz ist eine ausgesprochen langwierige Angelegenheit, dabei aber prinzipiell unkompliziert und abgesehen von ihrer Dauer ohne größere Schwierigkeiten durchzuführen. Daher wollen wir uns mit der Angabe ihrer Größenordnung begnügen. Eine zukünftige Untersuchung könnte es sich zur Aufgabe machen, im Rahmen von Simulationen die Werte der Kovarianzen zu schätzen.

In der Diskussion des Tests werden wir erkennen, dass ein Großteil der oben angesprochenen allgemeineren Hypothesen, die über den hier analysierten Fall der Homoskedastizität hinausgehen, in diesem Modell nicht bzw. nicht mit den in [9] und [12] vorgestellten Methoden getestet werden können. Wir werden in Abschnitt 4.1 sehen, für welche Funktionale in diesen Fällen asymptotische Aussagen hergeleitet werden müssten und warum dies nicht funktioniert.

Eine interessante Frage ganz anderer Art betrifft die Wahl des mathematischen Modells. Es wirkt zumindest willkürlich, dass Zhang, Mykland und Ait-Sahalia davon ausgehen, dass die Störterme weder voneinander abhängig sind noch dass ihre Verteilung von n abhängt. Speziell wenn wir hochfrequent Daten erheben, würde ein Modell nahe liegender erscheinen, in dem die ε_{t_i} zumindest k-abhängig sind. Andernfalls könnte man sich kaum vorstellen, dass die Streuung wirklich von einer die Resultate beeinflussenden Größenordnung ist. Es ist allerdings einleuchtend, dass die Wahl des Modells eher eine Aufgabe der klassischen Finanzmathematik denn ihrer statistischen Analyse ist. Wir werden uns dementsprechend auch damit begnügen, uns mit dem von Zhang, Mykland und Ait-Sahalia vorgeschlagenen Modell vertraut zu machen und in ihm den angekündigten Test zu entwickeln. Inwieweit diese Ergebnisse oder zumindest die ihnen zu Grunde liegenden Ideen auf andere Modelle übertragbar sind, wird man in Zukunft sehen.

Danken möchte ich insbesondere meinen beiden Betreuern Holger Dette und Mark Podolskij für ihre enorme Unterstützung. Es war erleichternd und motivierend zugleich, dass ich um die Möglichkeit wusste, mich mit meinen Fragen und Ideen immer an sie wenden zu können. Gerade in den nicht ganz zu vermeidenden Frustrationsphasen haben sowohl ihre aufmunternden Worte als auch ihre praktischen Vorschläge immer sehr geholfen.

Kapitel 2

Die Schätzung der integrierten Volatilität unter Marktmikrostruktur

2.1 Vorbemerkungen zum untersuchten Modell

Bevor wir einen Test auf Homoskedastizität entwickeln können, werden wir einige Vorbemerkungen zu dem zu Grunde liegenden Modell machen. Wir betrachten im folgenden einen Itô-Prozess

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

mit Driftfunktion μ und Volatilitätsfunktion σ^2, definiert auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_s, P)$. Die beiden stochastischen Prozesse μ_s und σ_s^2 sind ebenso wie W_s bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_s)_s$ messbar. Was wir explizit an weiteren Eigenschaften der Prozesse voraussetzen, wird dabei in Abschnitt 5.1 näher erläutert.

Eine für uns typische Eigenschaft von Interesse ist die integrierte Volatilität über das feste Zeitintervall $[0, 1]$, also

$$\int_0^1 \sigma_t^2 dt,$$

die wir anhand endlich vieler Beobachtungen $X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}, 0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$, schätzen wollen. Ein natürlicher Schätzer in diesem Fall ist die realisierte Varianz

$$[X, X] := \sum_{t_i} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2,$$

die (bei wachsender Anzahl der Beobachtungen und gleichzeitiger Konvergenz des Feinheitsmaßes der Zerlegung gegen 0) stochastisch gegen $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ konvergiert (vgl. [17]).

Zhang, Mykland und Ait-Sahalia konstatieren aufgrund von Vorgehensweisen in der empirischen Finanzmarktforschung, dass dieses Modell nicht vollständig die Vorgänge in der Wirtschaft beschreibt. In der Praxis scheint ein zunächst überraschendes Prinzip angewandt zu werden: Obwohl bei der Untersuchung der Finanzmärkte sehr große Datensätze zur Verfügung stehen, werden gar nicht alle verfügbaren Daten benutzt. Etwas scheint der Vermutung zu widersprechen, dass eine hochfrequente Datenerhebung zu besseren Resultaten führt. Dieses Phänomen (vgl. unter anderem [7]) wird in der Literatur auf die Mikrostruktur des Marktes - und dabei vor allem auf die sogenannte *Geld-Brief-Spanne* (engl. *bid-ask spread*) sowie die Rundung der Preise - zurückgeführt.

Der Vorschlag, nicht alle gewonnenen Daten zur Analyse zu benutzen, widerspricht der Intuition des Statistikers, dass jede zusätzliche Information Erkenntnisgewinn bedeutet. Insofern bietet es sich an, ein leicht abgewandeltes Modell für die Beobachtung der Finanzmärkte zu benutzen, in dem die Effekte der Mikrostruktur berücksichtigt werden. Innerhalb dieses Modells werden wir im Rahmen dieser Arbeit Schätzer und Tests auf bestimmte Strukturen der Volatilität entwickeln, die Gebrauch von sämtlichen zur Verfügung stehenden Daten machen.

Die Anpassung des mathematischen Modells an die Abweichungen der empirischen Untersuchungen berührt dabei nicht den zu Grunde liegenden Itô-Prozess, sondern wird als Störung der Beobachtungen verstanden. Wir nehmen im folgenden also an, dass wir an der Stelle t_i nicht direkt X_{t_i} beobachten, sondern in einem Dreiecksschema

$$Y_{t_i} = X_{t_i} + \varepsilon_{t_i}.$$

Die Beobachtungen müssen dabei nicht an äquidistanten Zeitpunkten erfolgen. (Zhang, Mykland und Ait-Sahalia nehmen in ihrer Arbeit allerdings an, dass die Zeitpunkte sich für ein festes T innerhalb des Intervalls $[0, T]$ befinden. Wir beschränken uns hier von Vornherein auf den Fall $T = 1$.) Zudem fordern wir, dass die Störterme ε_{t_i} sowohl vom gesamten Prozess X als auch untereinander unabhängig sind. Sie sollen weiterhin unabhängig von n jeweils dieselbe Verteilung haben und die Eigenschaften

$$E[\varepsilon_{t_i}] = 0$$

und

$$0 < E[\varepsilon_{t_i}^4] < \infty$$

besitzen. Die drei Autoren stellen in ihrer Arbeit verschiedene Methoden vor, wie in diesem neuen Modell die integrierte Volatilität geschätzt werden kann. In fünf Versuchen wird ausgehend von der Übertragung des Schätzers für $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ aus dem ungestörten auf den hier zu betrachtenden gestörten Fall versucht, diesen auf verschiedene Arten zu verbessern. Im Zentrum ihrer Untersuchungen steht dabei eine mathematische Begründung für die Intuition der Praktiker, auf zu häufige Beobachtungen zu verzichten. Wir werden später in dieser Arbeit die Ideen der Autoren für eine Schätzung des Integrals $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ anwenden.

2.2 Fünf Schätzer und ihre Eigenschaften

Obwohl wir in unserer späteren Untersuchung nur wenige der im folgenden vorgestellten Eigenschaften der fünf Schätzer gebrauchen werden, wollen wir uns in diesem Kapitel ausführlich mit ihnen beschäftigen. Zum einen werden wir erkennen, warum in diesem Modell die Bildung von Schätzern über Teilgitter eine effektive Methode zur Schätzung der integrierten Volatilität darstellt. Insbesondere wird unser Schätzer für das Integral über die vierten Potenzen der Volatilität auf eben solchen Funktionalen basieren. Zum anderen werden wir einen kurzen Ausblick auf ein Modell wagen, in dem die Verteilung der Störterme von n abhängt. Auch wenn uns ein solches Modell im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr begegnen wird, liefert es uns natürlich eine mögliche mathematische Beschreibung der Vorgänge in der Realität. Ebenfalls ließe sich die Frage stellen, ob die Forderung nach Unabhängigkeit der Störterme untereinander nicht abzuschwächen ist. Die Antwort auf diese und andere Fragen ist allerdings eine Aufgabe der empirischen Finanzmarktforschung.

2.2.1 Der klassische Schätzer für die integrierte Volatilität

Wir betrachten zu Beginn für eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ das Funktional

$$[Y, Y] := \sum_{i=1}^{n} (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})^2$$

als Pendant zum Schätzer im Modell ohne Störungen. Offensichtlich gilt nach einer einfachen Anwendung der binomischen Formel die Identität

$$[Y, Y] = [X, X] + 2[X, \varepsilon] + [\varepsilon, \varepsilon],$$

wobei wir

$$[X, \varepsilon] := \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(\varepsilon_{t_i} - \varepsilon_{t_{i-1}})$$

gesetzt haben. Bedingt auf den Prozess X gilt aufgrund der Voraussetzungen an die ε_{t_i} demnach

$$E[[Y, Y]|X] = [X, X] + 2nE[\varepsilon^2],$$

so dass wir offenkundig bei wachsender Stichprobengröße nicht die integrierte Volatilität $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ durch $[Y, Y]$ schätzen, sondern nach Standardisierung eine gute Vorhersage für $E[\varepsilon^2]$ erhalten. Mit ähnlichen Argumenten (die bei Zhang, Mykland und Ait-Sahalia durchaus aufgeführt sind, aber nichts zum Verständnis des Verhaltens des besten Schätzers beitragen) lässt sich zeigen, dass die bedingte Varianz von $[Y, Y]$ uns implizit einen Schätzer für $E[\varepsilon^4]$ definiert.

Wichtig für das Konvergenzverhalten des Schätzers $[Y, Y]$ ist allerdings, dass sich ein zentraler Grenzwertsatz für die Konvergenz von $\frac{1}{2n}[Y, Y]$ gegen $E[\varepsilon^2]$ beweisen lässt. Wir werden dieses Funktional später als Korrekturterm wiedertreffen und den im folgenden formulierten Grenzwertsatz parallel zu einigen anderen Aussagen beweisen.

Lemma 2.1 *Für $n \to \infty$ und bedingt auf den Prozess X gilt:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}([Y, Y] - 2nE[\varepsilon^2]) \xrightarrow{\mathcal{D}} 2\sqrt{E[\varepsilon^4]} Z_{Störung}.$$

Die Grenzvariable $Z_{Störung}$ ist dabei standardnormalverteilt.

Der Index „Störung“ deutet in diesem Fall an, dass die Zufälligkeit daher stammt, dass wir nicht den wahren Prozess X beobachten können. Wir werden später Grenzwertsätze erhalten, in denen wir es mit der zweiten Quelle des Zufalls zu tun haben, nämlich der Tatsache, dass wir das zu schätzende Integral selbst nur über die realisierte Volatilität $[X, X]$ approximieren können.

Tatsächlich bleibt die Behauptung in Lemma 2.1 auch ohne Bedingung auf X gültig. Ihr Beweis basiert im wesentlichen auf Satz 2.6 resp. Lemma 2.7, was sich jeweils auch im unbedingten Fall zeigen lässt.

Wir definieren in Anlehnung an die Aussage des Lemmas zudem

$$\widehat{E[\varepsilon^2]} := \frac{1}{2n}[Y, Y].$$

Bereits diese einfache Analyse liefert uns eine (mehr oder weniger) heuristische Erklärung dafür, dass sich in diesem Modell die Anzahl der Beobachtungen negativ auf die Güte der Schätzungen auswirkt: Je größer der Stichprobenumfang wird, desto größer wird auch die Ordnung des Bias. Er wächst linear in n, während die realisierte Volatilität $[X, X]$ für wachsende Beobachtungen zwar näher am zu schätzenden Funktional liegt, aber unter geeigneten Bedingungen an σ^2 natürlich immer die Ordnung $O_P(1)$ besitzt. Dies legt in einem zweiten Schritt nahe, nicht alle Beobachtungen miteinfließen zu lassen, sondern nur einen ausgewählten Teil der Gesamtstichprobe. Wir erhalten dabei genau genommen nicht *einen* neuen Schätzer für die integrierte Volatilität, sondern eine ganze Klasse von Schätzern.

2.2.2 Schätzung der integrierten Volatilität auf Gittern

Zunächst werden wir einige Begriffe und Notationen einführen: Wir nennen die Menge aller Beobachtungspunkte für festes n ein *Gitter* und bezeichnen es mit $\mathcal{G} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Eine Teilmenge des Gitters $\mathcal{G}$ heißt entsprechend *Teilgitter* und wird $\mathcal{H}$ genannt. Zu einem Beobachtungspunkt t_i in $\mathcal{H}$ bezeichnen wir mit t_{i-} bzw. t_{i+} seinen Vorgänger bzw. Nachfolger im Teilgitter. Formal setzen wir $t_{i+} = t_i$, falls t_i der größte Punkt im Gitter $\mathcal{H}$ ist. $|\mathcal{H}|$ sei des weiteren die Anzahl der Intervalle $[t_{i-}, t_i]$ im Teilgitter, also die Anzahl der Punkte von $\mathcal{H}$ minus 1. Sofern wir uns nur auf die Beobachtungen innerhalb eines Teilgitters $\mathcal{H}$ beziehen, bezeichnen wir mit

$$[Y, Y]^{\mathcal{H}} := \sum_{t_i \in \mathcal{H}} (Y_{t_{i+}} - Y_{t_i})^2$$

die realisierte quadratische Variation von Y bzgl. des Teilgitters $\mathcal{H}$. Diese Bezeichnung wird später in Abschnitt 2.2.4 motiviert, wo wir Schätzer auf mehreren Gittern betrachten. Für $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ gilt offensichtlich $[Y, Y]^{\mathcal{H}} = [Y, Y]$. Um die Notation im folgenden halbwegs übersichtlich zu halten, werden wir darauf verzichten, deutlich zu machen, dass die Größen $[Y, Y]^{\mathcal{H}}$ und $[X, X]^{\mathcal{H}}$ ebenfalls von n abhängen.

Formal besteht der Schätzer auf Gittern nun einfach aus $[Y,Y]^{\mathcal{H}}$ für ein beliebiges Teilgitter $\mathcal{H}$ unseres ursprünglichen Gitters $\mathcal{G}$. Mit $n_{\mathcal{H}} = |\mathcal{H}|$ erhalten wir bedingt auf den Prozess X völlig analog zum vorherigen Abschnitt die Identität

$$E[[Y,Y]^{\mathcal{H}}|X] = [X,X]^{\mathcal{H}} + 2n_{\mathcal{H}}E[\varepsilon^2].$$

In dieser Variante ändert sich im Vergleich zum klassischen Schätzer substantiell nichts am asymptotischen Verhalten des Schätzers, falls die Verteilung der ε_{t_i} weiterhin als von n unabhängig angesehen wird. Sofern $n_{\mathcal{H}}$ mit n wächst (was es tun muss, wenn man die Konvergenz von $[X,X]^{\mathcal{H}}$ gegen $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ sicherstellen will), wird der Bias linear wachsen und eine konsistente Schätzung der integrierten Volatilität unmöglich machen. Zhang, Mykland und Ait-Sahalia nehmen daher in diesem und dem folgenden Abschnitt (und letztlich *nur* in diesen Abschnitten) an, dass die Verteilung der Störterme von n abhängt.[1] Je nach Größenordnung von $n_{\mathcal{H}}$ im Vergleich zu $E[\varepsilon_n^2]$ kann dann $[Y,Y]^{\mathcal{H}}$ bereits ein deutlich besserer Schätzer sein als $[Y,Y]$ im Fall der Betrachtung des gesamten Gitters $\mathcal{G}$. Wir wollen dies nun präzisieren, verzichten aber auf die Angabe eines Beweises.

Wir nehmen im folgenden also an, dass die Störterme ε_{t_i} für festes n unabhängig und identisch verteilt sind, weiterhin möge ε_{t_i} zentriert sein und es gelte

$$0 < E[\varepsilon_n^2], \frac{E[\varepsilon_n^4]}{(E[\varepsilon_n^2])^2} < K$$

für alle n ebenso wie $n_{\mathcal{H}} \to \infty$. Ferner seien der Drift (bzw. sein Betrag) $|\mu_t|$ und die Volatilität σ_t gleichmäßig in t beschränkt.

Lemma 2.2 *Sofern der maximale Abstand zweier benachbarter Punkte in den Teilgittern $\mathcal{H}$ gegen 0 konvergiert, erhalten wir für festes n:*

$$\begin{aligned}[Y,Y]^{\mathcal{H}} &= [X,X]^{\mathcal{H}} + 2n_{\mathcal{H}}E[\varepsilon_n^2] \\ &+ (4n_{\mathcal{H}}E[\varepsilon_n^4] + (8[X,X]^{\mathcal{H}}E[\varepsilon_n^2] - 2\mathrm{Var}(\varepsilon_n^2)))^{\frac{1}{2}}\ Z_{St\ddot{o}rung} + O_P(n_{\mathcal{H}}^{-\frac{1}{4}}\sqrt{E[\varepsilon_n^2]}).\end{aligned}$$

$Z_{St\ddot{o}rung}$ ist dabei asymptotisch $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt und unabhängig von der Filtration $\mathcal{F}_t$.

Offenbar hängt die Güte dieser Schätzung von zwei Faktoren ab: Wir haben auf der einen Seite den Bias $2n_{\mathcal{H}}E[\varepsilon_n^2]$ möglichst klein zu halten (die Konvergenz gegen 0 ist natürlich

[1] Über die wissenschaftliche Haltbarkeit dieses Vorgehens kann man geteilter Meinung sein. Formal ist das natürlich unproblematisch: Über die Verteilung der Störterme ist a priori nichts bekannt, das hier vorgestellte Modell stellt ja selbst nur eine Idealisierung der empirisch beobachtbaren Vorgänge dar. Also sind insbesondere verschiedene Interpretationen der ε_{t_i} zulässig. Da dieser Abschnitt tatsächlich nur eine Motivation für die Entwicklung des besten Schätzers sein soll, werden diese Resultate auch nicht die mathematische Gültigkeit der späteren Ergebnisse beeinflussen. Dennoch stellt sich die Frage nach der Brauchbarkeit dieses Modells. Wenn die Autoren selbst noch gar nicht genau wissen, wie sich die Störungen auf das Modell auswirken, müsste eigentlich eine Untersuchung der Natur der Störterme der Untersuchung von Schätzungen bestimmter Funktionale vorangestellt sein.

Minimalforderung für Konsistenz des Schätzers) und wollen also $n_{\mathcal{H}}$ vergleichsweise langsam wachsen lassen, müssen aber auf der anderen Seite beachten, dass der Abstand von $[X,X]^{\mathcal{H}}$ zu $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ desto kleiner ist, je schneller $n_{\mathcal{H}}$ wächst.

Um die Konvergenzgeschwindigkeit von $[X,X]^{\mathcal{H}}$ gegen die integrierte Volatilität zu quantifizieren, werden wir im folgenden ein Resultat angeben, mit dessen Hilfe sich eine Aussage über die „richtige“ Wahl von $n_{\mathcal{H}}$ herleiten lässt. Natürlich sollen weiterhin die Voraussetzungen gelten, die zu Beginn der Diskussion von Lemma 2.2 postuliert worden sind. Wir werden zunächst einen technischen Begriff einführen, der uns über die Verteilung der Punkte auf die verschiedenen Teilgitter und ihr zugehöriges asymptotisches Verhalten informiert.

Definition 2.3 *Sofern*

$$n_{\mathcal{H}} \sum_{\substack{t_i \in \mathcal{H} \\ t_{i+} \leq t}} (t_{i+} - t_i)^2$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig in t konvergiert und die Grenzfunktion stetig differenzierbar ist, definieren wir $H(t)$ als eben jene Grenzfunktion und nennen sie die asymptotische Varianz der Zeit.

Um die Konvergenz von $[X,X]^{\mathcal{H}}$ gegen $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ beweisen zu können, müssen offensichtlich bestimmte Voraussetzungen gemacht werden, die uns die Wohldefiniertheit von $H(t)$ zusichern. Das folgende Lemma wird bei Zhang, Mykland und Ait-Sahalia selbst nur zitiert, für die konkreten Voraussetzungen an die jeweiligen Prozesse wird auf verschiedene andere Arbeiten verwiesen (vgl. hierzu [4], [15], [18] und [23].) Der Begriff der stabilen Konvergenz, symbolisiert durch $\stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\rightarrow}$, wird in Definition 5.1 im Appendix näher erläutert (vgl. auch [2] und [21]).

Lemma 2.4 *Es gilt:*

$$\sqrt{n_{\mathcal{H}}}([X,X]^{\mathcal{H}} - \int_0^1 \sigma_t^2 dt) \stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\rightarrow} (\int_0^1 2H'(t)\sigma_t^4 dt)^{\frac{1}{2}}\, Z_{Diskretisierung}.$$

$Z_{Diskretisierung}$ ist standardnormalverteilt und unabhängig von der Filtration $\mathcal{F}_t$.

Im Fall, dass die Beobachtungen innerhalb des Teilgitters $\mathcal{H}$ äquidistant erfolgen, gilt offensichtlich $(t_{i+} - t_i)^2 = \frac{1}{n_{\mathcal{H}}^2}$. Einfaches Einsetzen in die Definition liefert $H(t) = t$ und also $H'(t) = 1$. Ein ähnliches Resultat werden wir später bei der Betrachtung des Schätzers auf mehreren Teilgittern erhalten.

Aufgrund der Voraussetzung, dass die Prozesse X und ε voneinander unabhängig gewählt worden sind, sind auch die zugehörigen Normalverteilungen aus den beiden vorangegangenen Lemmata voneinander unabhängig. Die erste Grenzverteilung entsteht ausschließlich aufgrund von Grenzwertsätzen für die Zufallsvariablen ε_{t_i}, die zweite bezieht sich nur auf die Konvergenz der Zufallsgröße $[X,X]^{\mathcal{H}}$. Wir versuchen also nun, die beiden Resultate zu kombinieren. Wie angekündigt werden wir hier auch auf zusätzliche Bedingungen an die zu untersuchenden Prozesse eingehen.

Proposition 2.5 *Wir nehmen an, dass für jedes Teilgitter $\mathcal{H}$ die Eigenschaft*

$$\max_{t_i \in \mathcal{H}} (t_{i+} - t_i) = O(1)$$

erfüllt ist, und fordern ferner, dass Bedingung 5.4 aus dem Anhang erfüllt ist. Dann ist H wohldefiniert und es gilt:

$$[Y,Y]^{\mathcal{H}} \;=\; \int_0^1 \sigma_t^2 dt + 2n_{\mathcal{H}} E[\varepsilon_n^2] + \Upsilon \; Z_{gesamt} + O_P(n_{\mathcal{H}}^{-\frac{1}{4}} \sqrt{E[\varepsilon_n^2]}) + o_P(n_{\mathcal{H}}^{-\frac{1}{2}})$$

mit

$$\Upsilon^2 = \underbrace{4n_{\mathcal{H}} E[\varepsilon_n^4] + (8[X,X]^{\mathcal{H}} E[\varepsilon_n^2] - 2\,\mathrm{Var}(\varepsilon_n^2))}_{Varianz\ durch\ Störterme} + \underbrace{\frac{1}{n_{\mathcal{H}}} \int_0^1 2H'(t)\sigma_t^4 dt}_{Varianz\ durch\ Diskretisierung} .$$

Z_{gesamt} ist asymptotisch standardnormalverteilt und unabhängig von der Filtration $(\mathcal{F}_s)_s$.

2.2.3 Optimierung des MSE

Die stochastische Entwicklung in Proposition 2.5 hat uns gezeigt, wie $[Y,Y]^{\mathcal{H}}$ als Schätzer für $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ explizit von der Anzahl der Beobachtungspunkte abhängt. Wir werden hier kurz anreißen, wie eine in einem geeigneten Sinne optimale Wahl von $n_{\mathcal{H}}$ gefunden werden kann. Dazu bietet sich es an, den *mean squared error* (MSE) des Schätzers in Abhängigkeit von $n_{\mathcal{H}}$ zu minimieren.

Wir wissen, dass sich der MSE eines Schätzers als Summe aus dem quadrierten Bias und seiner Varianz darstellen lässt. Daher ergibt sich näherungsweise

$$\begin{aligned} MSE([Y,Y]^{\mathcal{H}}) \;\approx\; & (2n_{\mathcal{H}} E[\varepsilon^2])^2 + \Upsilon^2 = 4n_{\mathcal{H}}^2 (E[\varepsilon^2])^2 \\ & + \; 4n_{\mathcal{H}} E[\varepsilon^4] + (8[X,X]^{\mathcal{H}} E[\varepsilon^2] - 2\,\mathrm{Var}(\varepsilon^2)) + \frac{1}{n_{\mathcal{H}}} \int_0^1 2H'(t)\sigma_t^4 dt. \end{aligned}$$

Differentiation nach $n_{\mathcal{H}}$ liefert die Gleichung

$$8n_{\mathcal{H}} (E[\varepsilon^2])^2 + 4E[\varepsilon^4] - \frac{1}{n_{\mathcal{H}}^2} \int_0^1 2H'(t)\sigma_t^4 dt = 0,$$

die unter den Bedingungen in Proposition 2.5 durch den Ausdruck

$$n_{\mathcal{H}}^* = E[\varepsilon^2]^{-\frac{2}{3}} (\frac{1}{8} \int_0^1 2H'(t)\sigma_t^4 dt)^{\frac{1}{3}} (1 + o_P(1)) \text{ bei } E[\varepsilon^2] \to 0$$

minimiert wird. Sofern $n_{\mathcal{H}}^*$ größer als die tatsächliche Zahl der Beobachtungen n ist, wird natürlich stattdessen n gewählt.

2.2.4 Schätzer auf mehreren Gittern

Der grundsätzliche Nachteil der in den beiden vorangegangenen Abschnitten gewonnenen Schätzer besteht darin, dass sie nicht alle Beobachtungen ausnutzen. Wir verzichten insofern also ganz bewusst auf Informationen, weil diese uns zunächst asymptotisch schlechtere Ergebnisse liefern würden. Eine natürliche Weiterentwicklung dieser Schätzer besteht nun darin, zu einem festen Gitter $\mathcal{G}$ verschiedene voneinander disjunkte Teilgitter zu betrachten, separat für diese die Schätzer zu bestimmen und diese danach zu mitteln. Durch diese Vorgehensweise verliert man nicht die günstigen asymptotischen Eigenschaften und kann gleichzeitig die Streuung unserer Resultate verringern.

Wir zerlegen also zunächst das Gitter $\mathcal{G} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ in K Teilgitter $\mathcal{G}^{(k)}$, für die $\mathcal{G}^{(k)} \cap \mathcal{G}^{(l)} = \emptyset$ und $\mathcal{G} = \cup_{k=1}^{K} \mathcal{G}^{(k)}$ gelten. Die Zerlegung, bei der das k-te Teilgitter mit t_{k-1} beginnt und danach jedes K-te Element ausgewählt wird, heißt *reguläre Zerlegung* des Gitters $\mathcal{G}$. Es gilt in diesem Fall also $\mathcal{G}^k = \{t_{k-1}, t_{k-1+K}, \ldots, t_{k-1+n_k K}\}$ für ein geeignetes n_k. Allgemein bezeichne n_k den Wert $|\mathcal{G}^{(k)}|$ entsprechend der Definition von $|\mathcal{H}|$ im allgemeinen Fall und es sei

$$\bar{n} := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} n_k = \frac{n - K + 1}{K}.$$

Wie bereits im Fall allgemeiner Teilgitter angedeutet, definieren wir zu einem beliebigen k durch

$$[Y, Y]^{(k)} := \sum_{t_i \in \mathcal{G}^{(k)}} (Y_{t_{i+}} - Y_{t_i})^2$$

die realisierte quadratische Variation von Y bzgl. $\mathcal{G}^{(k)}$. Als Schätzer für die integrierte Volatilität $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ bietet sich nun

$$[Y, Y]^{(avg)} := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} [Y, Y]^{(k)}$$

an. Für die Untersuchung von $[Y, Y]^{(avg)}$ machen wir im folgenden die Annahme, dass neben der Konvergenz der maximalen Intervallbreiten gegen 0 außerdem noch

$$\frac{n}{K} \to \infty \text{ bei } n \to \infty$$

gelte. Zudem sollen als technische Bedingung die Zeitpunkte t_i und t_{i+1} für beliebiges i nicht in demselben Teilgitter liegen.

Offensichtlich gilt mit ähnlichen Argumenten wie bei den vorherigen Überlegungen

$$E[[Y, Y]^{(avg)} | X] = [X, X]^{(avg)} + 2\bar{n} E[\varepsilon^2].$$

Wir wollen davon ausgehend nun einen zentralen Grenzwertsatz herleiten.

Satz 2.6 *Unter den oben angegebenen Bedingungen konvergiert der Vektor von Zufallsvariablen*

$$(\sqrt{n}(\widehat{E[\varepsilon^2]} - E[\varepsilon^2]), \sqrt{\frac{K}{\bar{n}}}([Y,Y]^{(avg)} - [X,X]^{(avg)} - 2\bar{n}E[\varepsilon^2]))$$

bedingt auf den Prozess X schwach gegen eine zweidimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix Σ, gegeben durch

$$\Sigma = \begin{pmatrix} E[\varepsilon^4] & 2\,\mathrm{Var}(\varepsilon^2) \\ 2\,\mathrm{Var}(\varepsilon^2) & 4E[\varepsilon^4] \end{pmatrix}.$$

Die Grenzvariable ist dabei unabhängig von dem Prozess X.

Bevor wir den Beweis betrachten, werden wir ein Hilfslemma formulieren.

Lemma 2.7 *Es gilt:*

(a) $[Y,Y] = [\varepsilon,\varepsilon] + O_P(1)$

(b) $[Y,Y]^{(avg)} = [\varepsilon,\varepsilon]^{(avg)} + [X,X]^{(avg)} + O_P(\frac{1}{\sqrt{K}})$.

Beweis: (a): Wir benutzen die Identität

$$[Y,Y] = [X,X] + 2[X,\varepsilon] + [\varepsilon,\varepsilon]$$

und zeigen die Aussage

$$E[([X,\varepsilon])^2|X] \leq 4[X,X]E[\varepsilon^2],$$

woraus die Behauptung via

$$E[([X,\varepsilon])^2] = E[E[([X,\varepsilon])^2|X]] \leq 4E[[X,X]]E[\varepsilon^2]] = O_P(1)$$

folgt. Weil $[X,X]$ stochastisch gegen $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ konvergiert, ist die stochastische Beschränktheit dieses Terms offensichtlich.

Es gilt mit der Bezeichnung $\Delta Y_{t_i} := (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$:

$$\begin{aligned} [X,\varepsilon] &= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta X_{t_i} \Delta\varepsilon_{t_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta X_{t_i}\varepsilon_{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta X_{t_i}\varepsilon_{t_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta X_{t_{i-1}} - \Delta X_{t_i})\varepsilon_{t_i} + \Delta X_{t_{n-1}}\varepsilon_{t_n} - \Delta X_{t_0}\varepsilon_{t_0}. \end{aligned}$$

Wegen

$$E[[X,\varepsilon]|X] = 0$$

und aufgrund der unabhängigen identischen Verteilung der Zufallsvariablen ε_{t_i} können wir folgern:

$$\begin{aligned} E[([X,\varepsilon])^2|X] &= Var([X,\varepsilon]|X) = E[\varepsilon^2](\sum_{i=1}^{n-1}(\Delta X_{t_{i-1}} - \Delta X_{t_i})^2 + \Delta X_{t_{n-1}}^2 + \Delta X_{t_0}^2) \\ &= E[\varepsilon^2](\sum_{i=1}^{n-1}(\Delta X_{t_{i-1}}^2 + \Delta X_{t_i}^2 - 2\Delta X_{t_{i-1}}\Delta X_{t_i}) + \Delta X_{t_{n-1}}^2 + \Delta X_{t_0}^2) \\ &= 2[X,X]E[\varepsilon^2] - 2E[\varepsilon^2]\sum_{i=1}^{n-1}\Delta X_{t_{i-1}}\Delta X_{t_i} \\ &\leq 4[X,X]E[\varepsilon^2] + O_P(1) \end{aligned}$$

nach Ausnutzen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(b): Ähnlich wie in Teil (a) benutzen wir die Zerlegung

$$[Y,Y]^{(avg)} = [X,X]^{(avg)} + 2[X,\varepsilon]^{(avg)} + [\varepsilon,\varepsilon]^{(avg)}$$

und erhalten aufgrund der Disjunktheit der Teilgitter völlig analog zu unseren Berechnungen in (a)

$$E[([X,\varepsilon])^2|X] = Var([X,\varepsilon]|X) = \frac{1}{K^2}\sum_{k=1}^{K} Var([X,\varepsilon]^{(k)}|X) \leq \frac{4E[\varepsilon^2]}{K}[X,X]^{(avg)}.$$

Wegen

$$E[[X,X]^{(avg)}] = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} E[[X,X]^{(k)}]$$

und weil jedes der $[X,X]^{(k)}$ selbst $O_P(1)$ ist, folgt mit

$$[X,X]^{(avg)} = O_P(1)$$

die Behauptung. □

Der Beweis dieses Lemmas im unbedingten Fall fußt auf der Burkholder-Ungleichung (vgl. Satz 5.5), mit deren Hilfe sich die Ordnung von Itô-Integralen auf diejenige von Riemann-Integralen zurückführen lässt. Wir werden solche Argumente später in der Arbeit genauer betrachten.

Beweis von Satz 2.6: Wir betrachten aufgrund der Vorarbeit in Lemma 2.7 nur das Konvergenzverhalten von $[\varepsilon,\varepsilon]$ und $[\varepsilon,\varepsilon]^{(avg)}$, zunächst bezogen auf den Vektor der Zufallsvariablen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}([\varepsilon,\varepsilon] - 2nE[\varepsilon^2], [\varepsilon,\varepsilon]^{(avg)}K - 2\bar{n}KE[\varepsilon^2]).$$

Wir werden in einem ersten Schritt mittels eines zentralen Grenzwertsatzes für Martingale Konvergenzaussagen für bestimmte Funktionale des Prozesses ε herleiten, die uns danach zu entsprechenden Aussagen für den soeben definierten Zufallsvektor führen. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die folgenden drei Folgen von Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned}
M_i^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G} \\ t_j \leq t_i}} (\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2]) \\
M_i^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G} \\ t_j \leq t_i}} \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j-1}} \\
M_i^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G}^{(k)} \\ t_j \leq t_i}} \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j-}}
\end{aligned}$$

Jede dieser Folgen ist ein Martingal bzgl. der neuen Filtration $\mathcal{F}_i^{'} = \sigma(\varepsilon_{t_j}, X_t; j \leq i, \forall\, t)$, denn jedes der Folgenglieder ist offensichtlich integrierbar und es gilt aufgrund der Unabhängigkeit der ε_{t_i} untereinander und ihrer Zentriertheit:

$$\begin{aligned}
E[M_i^{(1)} | \mathcal{F}_{i-1}^{'}] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G} \\ t_j \leq t_{i-1}}} (\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2]) + \frac{1}{\sqrt{n}} E[\varepsilon_{t_i}^2 - E[\varepsilon^2] | \mathcal{F}_{i-1}^{'}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G} \\ t_j \leq t_{i-1}}} (\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2]) = M_{i-1}^{(1)}, \\
E[M_i^{(2)} | \mathcal{F}_{i-1}^{'}] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G} \\ t_j \leq t_{i-1}}} \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} E[\varepsilon_{t_i} \varepsilon_{t_{i-1}} | \mathcal{F}_{i-1}^{'}] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G} \\ t_j \leq t_{i-1}}} \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j-1}} = M_{i-1}^{(2)}, \\
E[M_i^{(3)} | \mathcal{F}_{i-1}^{'}] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G}^{(k)} \\ t_j \leq t_{i-1}}} \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j-}} + \frac{1}{\sqrt{n}} E[\varepsilon_{t_i} \varepsilon_{t_{i-}} | \mathcal{F}_{i-1}^{'}] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{t_j \in \mathcal{G}^{(k)} \\ t_j \leq t_{i-1}}} \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j-}} = M_{i-1}^{(3)}.
\end{aligned}$$

Wir werden nun zu jedem der drei Martingale seine quadratische Variation bzw. die quadratische Variation der gemischten Terme betrachten, also die Folge der $\langle M^{(k)}, M^{(l)} \rangle_i$, für die

$$M_i^{(k)} M_i^{(l)} - \langle M^{(k)}, M^{(l)} \rangle_i$$

ein Martingal bzgl. der gewählten Filtration ist. Diese Größen werden uns später Informationen über die Kovarianzen im Grenzwertsatz liefern. Weil $M_i^{(k)}$ selbst ein Martingal ist, ergibt sich in der Darstellung $M_i^{(k)} = \sum_{j \leq i} N_j^{(k)}$:

$$\langle M^{(k)}, M^{(l)} \rangle_i = \sum_{j \leq i} Cov(N_j^{(k)}, N_j^{(l)} | \mathcal{F}_{j-1}^{'}) =: C_i^{(k,l)}.$$

Diese Identität folgt aus

$$\begin{aligned} E[C_i^{(k,l)}|\mathcal{F}'_{i-1}] &= \sum_{j\leq i} E[Cov(N_j^{(k)}, N_j^{(l)}|\mathcal{F}'_{j-1})|\mathcal{F}'_{i-1}] \\ &= \sum_{j\leq i-1} Cov(N_j^{(k)}, N_j^{(l)}|\mathcal{F}'_{j-1}) + Cov(N_i^{(k)}, N_i^{(l)}|\mathcal{F}'_{i-1}) \\ &= C_{i-1}^{(k,l)} + E[N_i^{(k)} N_i^{(l)}|\mathcal{F}'_{i-1}] - E[N_i^{(k)}|\mathcal{F}'_{i-1}]E[N_i^{(l)}|\mathcal{F}'_{i-1}] \\ &= C_{i-1}^{(k,l)} + E[N_i^{(k)} N_i^{(l)}|\mathcal{F}'_{i-1}] \end{aligned}$$

und

$$E[M_i^{(k)} M_i^{(l)}|\mathcal{F}'_{i-1}] = M_{i-1}^{(k)} M_{i-1}^{(l)} + E[N_i^{(k)} N_i^{(l)}|\mathcal{F}'_{i-1}].$$

Für die jeweiligen quadratischen Variationen erhalten wir dann mit Hilfe des starken Gesetzes der großen Zahlen und unserer Annahmen an die Zufallsvariablen ε_{t_j} im Fall $i = n$

$$\begin{aligned} \langle M^{(1)}, M^{(1)}\rangle_n &= \frac{1}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} Var((\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2])|\mathcal{F}'_{j-1}) = \frac{1}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} Var((\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2])) = Var(\varepsilon^2), \\ \langle M^{(2)}, M^{(2)}\rangle_n &= \frac{1}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} Var(\varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}) = \frac{E[\varepsilon^2]}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} \varepsilon_{t_{j-1}}^2 = (E[\varepsilon^2])^2 + o_P(1), \\ \langle M^{(3)}, M^{(3)}\rangle_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} Var(\varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-}}|\mathcal{F}'_{j-1}) = \frac{E[\varepsilon^2]}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} \varepsilon_{t_{j-}}^2 = (E[\varepsilon^2])^2 + o_P(1). \end{aligned}$$

Für die gemischten Variationen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \langle M^{(1)}, M^{(2)}\rangle_n &= \frac{1}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} Cov(\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2], \varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} E[\varepsilon_{t_j}^3\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}] - E[\varepsilon^2]E[\varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}] \\ &- \frac{1}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} E[\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2]|\mathcal{F}'_{j-1}]E[\varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}}(E[\varepsilon_{t_j}^3\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}] - E[\varepsilon^2]E[\varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}]) = \frac{E[\varepsilon^3]}{n}\sum_{t_j\in\mathcal{G}} \varepsilon_{t_{j-1}} = o_P(1), \end{aligned}$$

$$\langle M^{(1)}, M^{(3)}\rangle_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} Cov(\varepsilon_{t_j}^2 - E[\varepsilon^2], \varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-}}|\mathcal{F}'_{j-1}) = \frac{E[\varepsilon^3]}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} \varepsilon_{t_{j-}} = o_P(1),$$

analog zu obiger Berechnung, und zuletzt, nach Ausnutzen der Tatsache, dass t_j und t_{j+1} für beliebiges j nicht in demselben Teilgitter liegen,

$$\begin{aligned}
\langle M^{(2)}, M^{(3)}\rangle_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} Cov(\varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}, \varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-}}|\mathcal{F}'_{j-1}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} (E[\varepsilon^2_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}\varepsilon_{t_{j-}}|\mathcal{F}'_{j-1}] - E[\varepsilon_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}|\mathcal{F}'_{j-1}]E[\varepsilon_{t_{j-1}}\varepsilon_{t_{j-}}|\mathcal{F}'_{j-1}]) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} E[\varepsilon^2_{t_j}\varepsilon_{t_{j-1}}\varepsilon_{t_{j-}}|\mathcal{F}'_{j-1}] = \frac{E[\varepsilon^2]}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t_j\in\mathcal{G}^{(k)}} \varepsilon_{t_{j-1}}\varepsilon_{t_{j-}} = o_P(1).
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir nun den zentralen Grenzwertsatz für Martingale an, basierend auf der Version aus Korollar 3.1. in [13]. Zusammen mit Cramér-Wold-Technik liefert dieser dann die Konvergenzaussage

$$(M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, M_n^{(3)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, T)$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} Var(\varepsilon^2) & 0 & 0 \\ 0 & (E[\varepsilon^2])^2 & 0 \\ 0 & 0 & (E[\varepsilon^2])^2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun den Vektor

$$\frac{1}{\sqrt{n}}([\varepsilon,\varepsilon] - 2nE[\varepsilon^2], [\varepsilon,\varepsilon]^{(avg)}K - 2\bar{n}KE[\varepsilon^2])$$

als Funktionen der Zufallsvariablen $(M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, M_n^{(3)})$ darstellen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
[\varepsilon,\varepsilon] - 2nE[\varepsilon^2] &= 2\sum_{i\neq 0,n}\varepsilon^2_{t_i} + \varepsilon^2_{t_0} + \varepsilon^2_{t_n} - 2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{t_i}\varepsilon_{t_{i-1}} - 2nE[\varepsilon^2] \\
&= 2\sum_{i\neq 0,n}(\varepsilon^2_{t_i} - E[\varepsilon^2]) + (\varepsilon^2_{t_0} - E[\varepsilon^2]) + (\varepsilon^2_{t_n} - E[\varepsilon^2]) - 2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{t_i}\varepsilon_{t_{i-1}} \\
&= 2\sqrt{n}(M_n^{(1)} - M_n^{(2)}) + O_P(1).
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall erhalten wir analog

$$[\varepsilon,\varepsilon]^{(k)} - 2n_kE[\varepsilon^2] = 2\sum_{t_i\in\mathcal{G}^{(k)}}(\varepsilon^2_{t_i} - E[\varepsilon^2]) - (\varepsilon^2_{\min\mathcal{G}^{(k)}} - E[\varepsilon^2]) - (\varepsilon^2_{\max\mathcal{G}^{(k)}} - E[\varepsilon^2]) - 2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{t_i}\varepsilon_{t_{i-1}},$$

wobei wir verwendet haben, dass $n_k + 1$ die Anzahl der Punkte des k-ten Teilgitters ist. Wegen

$$\bar{n} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} n_k$$

können wir weiterhin folgern

$$[\varepsilon,\varepsilon]^{(avg)}K - 2\bar{n}KE[\varepsilon^2] = 2\sqrt{n}(M_n^{(1)} - M_n^{(3)}) - R = 2\sqrt{n}(M_n^{(1)} - M_n^{(3)}) + O_P(\sqrt{K}).$$

Dabei ist der Restterm durch

$$R := \sum_{k=1}^{K} (\varepsilon^2_{\min \mathcal{G}^{(k)}} - E[\varepsilon^2]) + (\varepsilon^2_{\max \mathcal{G}^{(k)}} - E[\varepsilon^2])$$

definiert und offensichtlich gilt

$$E[R^2] = Var(R) \leq 4K\,Var(\varepsilon^2).$$

Die Voraussetzung $\frac{n}{K} \to \infty$ liefert nun, dass die Fehlerterme $O_P(1)$ und $O_P(\sqrt{K})$ bei Division durch $\sqrt{n}$ stochastisch gegen 0 konvergieren. Wir erhalten also

$$\frac{1}{\sqrt{n}}([\varepsilon,\varepsilon] - 2nE[\varepsilon^2], [\varepsilon,\varepsilon]^{(avg)}K - 2\bar{n}KE[\varepsilon^2]) = 2(M_n^{(1)} - M_n^{(2)}, M_n^{(1)} - M_n^{(3)}) + o_P(1)$$

und mit der Delta-Methode (vgl. beispielsweise Example 29.1. in [6] oder die kurze Diskussion im Vorfeld von Satz 5.2 im Appendix) die asymptotische Normalität mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix

$$\begin{pmatrix} 4E[\varepsilon^4] & 4\,Var(\varepsilon^2) \\ 4\,Var(\varepsilon^2) & 4E[\varepsilon^4] \end{pmatrix}.$$

Nun können wir Lemma 2.7 anwenden, um bedingt auf den Prozess X die Terme $[Y,Y]$ bzw. $[Y,Y]^{(avg)}$ durch die entsprechenden Terme des Prozesses ε zu ersetzen, für die wir bereits den zentralen Grenzwertsatz kennen. Wiederum wegen $\frac{n}{K} \to \infty$ und also $\frac{K}{\sqrt{n}} O_P(\frac{1}{\sqrt{K}}) = o_P(1)$ erhalten wir bedingt auf den Prozess X die asymptotische Normalität von

$$\frac{1}{\sqrt{n}}([Y,Y] - 2nE[\varepsilon^2], K([Y,Y]^{(avg)} - [X,X]^{(avg)} - 2\bar{n}E[\varepsilon^2]))$$

mit Erwartungswert und Kovarianzmatrix wie oben.

Die Behauptung aus Satz 2.6 folgt dann aus $\widehat{E[\varepsilon^2]} = \frac{1}{2n}[Y,Y]$ und

$$\sqrt{\frac{K}{\bar{n}}} = \sqrt{\frac{K}{\frac{n-K+1}{K}}} = \frac{K}{\sqrt{n}} + o_P(1).$$

□

Wir können neben Lemma 2.1 eine weitere Behauptung aus Satz 2.6 folgern.

Proposition 2.8 *Für $n \to \infty$ und bedingt auf den Prozess X gilt:*

$$\sqrt{\frac{K}{\bar{n}}}([Y,Y]^{(avg)} - [X,X]^{(avg)} - 2\bar{n}E[\varepsilon^2]) \xrightarrow{\mathcal{D}} 2\sqrt{E[\varepsilon^4]}\, Z^{(avg)}_{Störung}.$$

Die Zufallsvariable $Z^{(avg)}_{Störung}$ ist standardnormalverteilt.

Ähnlich wie in Lemma 2.1 kann die schwache Konvergenz in Proposition 2.8 auch unbedingt nachgewiesen werden.

Wie im letzten Schritt des Beweises von Satz 2.6 angedeutet fällt auf, dass sowohl der asymptotische Bias $2\bar{n}E[\varepsilon^2]$ als auch die asymptotische Varianz $\frac{4\bar{n}}{K}E[\varepsilon^4]$ unseres neuen Schätzers $[Y,Y]^{(avg)}$ von kleinerer Ordnung sind als die entsprechenden Terme in der Betrachtung von $[Y,Y]^{\mathcal{H}}$. In diesem Sinne ist bereits jetzt eine Verbesserung des Schätzers zu erkennen.

Ähnlich wie in Abschnitt 2.2.2 betrachten wir nun den Fehler, der auf der Konvergenz von $[X,X]^{(avg)}$ gegen die integrierte Volatilität $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ basiert. Mittels der Itô-Formel (vgl. Theorem 4.1.2 in [19]) lässt sich leicht zeigen, dass die integrierte Volatilität genau die quadratische Variation des Prozesses X_t ist. Entsprechend werden wir im folgenden von $\langle X,X\rangle_t$ bzw. $\langle X,X\rangle_1$ sprechen, wenn wir das Integral der Volatilität σ_s^2 über das Intervall $[0,t]$ bzw. $[0,1]$ meinen.

Uns interessiert nun also das asymptotische Verhalten der Zufallsvariablen D_1, wobei wir die Bezeichnung

$$D_t := [X,X]_t^{(avg)} - \langle X,X\rangle_t := \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}[X,X]_t^{(k)} - \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

mit

$$[X,X]_t^{(k)} = \sum_{\substack{t_i\in\mathcal{G}^{(k)}\\ t_{i+}\le t}} (X_{t_{i+}} - X_{t_i})^2$$

verwendet haben. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird im folgenden von einer regulären Verteilung der Beobachtungen auf die jeweiligen Teilgitter ausgegangen. Zudem nehmen wir

$$\max_i |\Delta t_i| := \max_i |t_{i+1} - t_i| = O(\frac{1}{n})$$

und weiterhin $\frac{n}{K} \to \infty$ an. Die asymptotische Verteilung von D_1 hängt nun von den Gewichtsfunktionen

$$h_i := \frac{4}{K\bar{\Delta t}} \sum_{j=1}^{(K-1)\wedge i} (1-\frac{j}{K})^2 \Delta t_{i-j}$$

ab, wobei $\bar{\Delta t}$ das arithmetische Mittel über die Δt_i, also $\frac{1}{n}$, bezeichnet. Im äquidistanten Fall $\Delta t_i = \bar{\Delta t}$, der uns hauptsächlich interessiert, gilt für alle (außer die ersten $K-1$) Funktionen

$$h_i = \frac{4}{K^3}\sum_{j=1}^{K-1}(K^2 - 2jK + j^2) = \frac{4}{K^3}\frac{K(K-1)(2K-1)}{6} = \frac{4}{3} + o(1).$$

Die Voraussetzungen an die t_i sichern uns allerdings auch im allgemeinen Fall zu, dass $\sup_i h_i = O(1)$ gilt.

Die folgenden beiden Sätze liefern uns nun die benötigten Informationen über das Konvergenzverhalten von D_1. Im ersten Schritt werden wir ein Resultat über die quadratische Variation des Prozesses D_t herleiten, das den Zusammenhang zu den Gewichtsfunktionen h_i herstellt.

Satz 2.9 *Für einen Itô-Prozess $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ mit Driftfunktion μ und Volatilitätsfunktion σ^2, die die Eigenschaften $|\mu_t| < C$ und $0 < \sigma_t < C$ gleichmäßig in t erfüllen, und unter den in diesem Abschnitt an die Beobachtungspunkte t_i sowie an K gemachten Voraussetzungen gilt asymptotisch für die quadratische Variation von D_1*

$$\langle D, D\rangle_1 = \frac{K}{n}\eta_n^2 + o_P(\frac{K}{n}),$$

wobei die Zufallsvariable $\eta_n^2 := \sum_i h_i \sigma_{t_i}^4 \Delta t_i$ definiert ist.

Beweis: Für i mit $t_i \in \mathcal{G}^{(k)}$ bezeichne t_{i-} den nächst kleineren Gitterpunkt. Offensichtlich gilt

$$(X_{t_i} - X_{t_{i-}})^2 = (\sum_{j=i-}^{i-1} \Delta X_{t_j})^2 = \sum_{j=i-}^{i-1} \Delta X_{t_j}^2 + 2\sum_{\substack{j,l=i-\\ j\neq l}}^{i-1} \Delta X_{t_j}\Delta X_{t_l},$$

und damit wegen der regulären Anordnung der Beobachtungen

$$\begin{aligned}
[X,X]^{(avg)} &= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\substack{t_i\in\mathcal{G}^{(k)}\\ i>k-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-}})^2 = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\substack{t_i\in\mathcal{G}^{(k)}\\ i>k-1}} (\sum_{j=i-}^{i-1} \Delta X_{t_j}^2 + 2\sum_{\substack{j,l=i-\\ j>l}}^{i-1} \Delta X_{t_j}\Delta X_{t_l}) \\
&= [X,X] + \frac{2}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\substack{t_i\in\mathcal{G}^{(k)}\\ i>k-1}}\sum_{\substack{j,l=i-\\ j>l}}^{i-1} \Delta X_{t_j}\Delta X_{t_l} + O_P(\frac{K}{n}) \\
&= [X,X] + 2\sum_{i=1}^{n}\Delta X_{t_i}\sum_{j=1}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})\Delta X_{t_{i-j}} + O_P(\frac{K}{n}). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

In dem Term $O_P(\frac{K}{n})$ fassen wir dabei diejenigen Restterme zusammen, die am Rand auftreten, weil nicht jedes t_j genau K Vorgänger besitzt. Die Abschätzung wird dadurch gerechtfertigt, dass Drift und Volatilität als beschränkt angenommen werden und der maximale Abstand zweier Zeitpunkte $O(\frac{1}{n})$ ist.

Aufgrund von Argumenten aus [18] lässt sich nun ausnutzen, dass $[X,X]$ gegen $\langle X, X\rangle_1$ konvergiert und

$$[X,X] - \langle X, X\rangle_1 = o_P(\sqrt{\frac{K}{n}})$$

gilt. Wir erhalten daher

$$D_1 = [X,X]^{(avg)} - \langle X,X\rangle_1 = 2\sum_{i=1}^{n} \Delta X_{t_i} \sum_{j=1}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})\Delta X_{t_{i-j}} + o_P(\sqrt{\frac{K}{n}}).$$

Um nun die quadratische Variation von D_1 zu berechnen, nutzen wir die $\mathcal{F}_{t_i}$-Messbarkeit von

$$\sum_{j=1}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})\Delta X_{t_{i-j}}$$

aus und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle D,D\rangle_1 &= 4\sum_{i=1}^{n}\Delta\langle X,X\rangle_{t_i}(\sum_{j=1}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})\Delta X_{t_{i-j}})^2 + o_P(\frac{K}{n}) \qquad (2.2)\\
&= 4\sum_{i=1}^{n}\Delta\langle X,X\rangle_{t_i}[\sum_{j=1}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})^2\Delta X^2_{t_{i-j}} + 2\sum_{\substack{j,l=1\\ j>l}}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})(1-\frac{l}{K})\Delta X_{t_j}\Delta X_{t_l}] + o_P(\frac{K}{n})\\
&=: (I) + (II) + o_P(\frac{K}{n}).
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des ersten Summanden erinnern wir uns an die Definition der h_i und errechnen

$$\begin{aligned}
(I) &= 4\sum_{i=1}^{n}\Delta\langle X,X\rangle_{t_i}\sum_{j=1}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})^2\Delta X^2_{t_{i-j}}\\
&= 4\sum_{i=1}^{n}\sigma^4_{t_i}\Delta t_i\sum_{j=1}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})^2\Delta t_{i-j} + o_P(\frac{K}{n})\\
&= \frac{K}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^4_{t_i}\Delta t_i h_i + o_P(\frac{K}{n}).
\end{aligned}$$

Wir haben dabei $(dW_t)^2 = dt$ angewendet sowie ausgenutzt, dass $\langle X,X\rangle_{t_i}$ ein Riemann-Integral darstellt, und jeweils entsprechend approximiert. Für den zweiten Summanden finden wir aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse einer Brownschen Bewegung mit ähnlichen Argumenten eine Abschätzung der Form

$$(II) = 8\sum_{i=1}^{n}\Delta\langle X,X\rangle_{t_i}\sum_{\substack{j,l=1\\ j>l}}^{K\wedge i}(1-\frac{j}{K})(1-\frac{l}{K})\Delta X_{t_j}\Delta X_{t_l} = o_P(\frac{K}{n}).$$

□

Der dritte Satz in diesem Abschnitt wird uns nun den zentralen Grenzwertsatz für D_1 liefern.

Satz 2.10 *Unter den Bedingungen von Satz 2.9 und mit der zusätzlichen Voraussetzung*

$$\eta_n^2 \xrightarrow{P} \eta^2$$

für eine Zufallsvariable η^2 gilt erneut unter der Bedingung 5.4 aus dem Appendix an die Filtration $\mathcal{F}_t$ der folgende Grenzwertsatz

$$\sqrt{\frac{n}{K}} D_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \eta \; Z_{Diskretisierung}.$$

Die standardnormalverteilte Grenzvariable ist dabei unabhängig vom Prozess X.

Zhang, Mykland und Ait-Sahalia geben für diesen Satz nur eine Beweisidee an und verweisen für Details erneut auf [15] bzw. [23]. Wir werden zudem in Kapitel 4 die Argumente für Grenzwertsätze dieser Art selbst ausführlich präsentieren.

Wir hatten bereits bei der Definition der Größen h_i gesehen, dass im äquidistanten Fall $h_i = \frac{4}{3} + o(1)$ gilt. Offensichtlich bekommen wir dann

$$\eta_n^2 = \sum_i h_i \sigma_{t_i}^4 \Delta t_i \xrightarrow{P} \frac{4}{3} \int_0^1 \sigma_t^4 dt = \eta^2. \tag{2.3}$$

Insgesamt erhalten wir aus den Sätzen 2.6 und 2.10 nun für das asymptotische Verhalten des betrachteten Schätzers

$$[Y,Y]^{(avg)} - \langle X,X \rangle_1 = 2\bar{n} E[\varepsilon^2] + \xi Z_{gesamt} + o_P(1),$$

wobei Z_{gesamt} normalverteilt und unabhängig von der Filtration $\mathcal{F}_t$ ist. Zudem gilt

$$\xi^2 = \underbrace{4\frac{\bar{n}}{K} E[\varepsilon^4]}_{Varianz\ durch\ Störterme} + \underbrace{\frac{1}{\bar{n}}\eta^2}_{Varianz\ durch\ Diskretisierung}.$$

Im Fall $K = cn^{\frac{2}{3}}$ sind beide Summanden in der Varianz gleich gewichtet und haben die Ordnung $n^{-\frac{1}{3}}$. Ähnlich wie in Abschnitt 2.2.3 ließe sich nun zusätzlich noch diskutieren, wie wir unter der Annahme, dass die zweiten Momente der Störterme verschwinden, ein optimales n wählen können. Wir verzichten an dieser Stelle darauf, die Idee (Minimierung des *MSE*) ist dieselbe.

2.2.5 Korrektur des Bias

Der entscheidende Schritt besteht nun darin, unsere Klasse von Schätzern auf Gittern so zu modifizieren, dass der Bias von $[Y,Y]^{(avg)}$ verschwindet. Wir hatten bereits in Lemma 2.1 gesehen, dass $E[\varepsilon^2]$ konsistent durch $\widehat{E[\varepsilon^2]} = \frac{1}{2n}[Y,Y]$ geschätzt werden kann. Insofern bietet sich als korrigierter Schätzer nun

$$\widehat{\langle X,X \rangle}_1 := [Y,Y]^{(avg)} - \frac{\bar{n}}{n}[Y,Y]$$

an. Sein asymptotisches Verhalten hängt offensichtlich von der Wahl von K ab; wir werden dies später untersuchen.

Vorher versuchen wir noch einmal kurz, uns die Struktur dieses Schätzers vor Augen zu führen. Wir haben zunächst durch die Wahl verschiedener Zeitskalen ein Funktional $[Y,Y]^{(avg)}$ definieren können, dessen Bias und dessen Varianz von kleinerer Ordnung sind als die des korrespondierenden Schätzers $[Y,Y]$, der sämtliche Beobachtungspunkte ausnutzt. Diesen Unterschied in der Größenordnung können wir nun dazu ausnutzen, um mit Hilfe des „schlechteren“ Schätzers den Bias zu korrigieren und so einen asymptotisch erwartungstreuen neuen Schätzer zu erhalten. Der letzte Schritt besteht dann bloß darin, die Varianz unter Kontrolle zu halten - und das nur noch in Abhängigkeit von K.

Die erste Idee bei der Untersuchung der Asymptotik von $\widehat{\langle X,X\rangle}_1$ besteht in der Anwendung von Satz 2.6, wo wir bedingt auf den Prozess X bereits das Verhalten von $[Y,Y]^{(avg)}$ und $[Y,Y]$ untersucht hatten. Wir erhalten durch einfaches Nachrechnen den folgenden Grenzwertsatz

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{\bar{n}}}(\widehat{\langle X,X\rangle}_1 - [X,X]^{(avg)}) &= \sqrt{\frac{K}{\bar{n}}}([Y,Y]^{(avg)} - [X,X]^{(avg)} - 2\bar{n}E[\varepsilon^2]) \\
&- 2\sqrt{K\bar{n}}(\widehat{E[\varepsilon^2]} - E[\varepsilon^2]) \\
&\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 8(E[\varepsilon^2])^2),
\end{aligned}$$

wobei wir die Bezeichnung

$$K\bar{n} = n - K + 1 = n + o(n)$$

benutzt haben.

Zusätzlich dazu hatten wir in Satz 2.10 gesehen, von welcher Größenordnung die Konvergenzrate von $[X,X]^{(avg)}$ gegen $\langle X,X\rangle_1$ ist. Wir werden diese beiden Resultate nun kombinieren (was wir aufgrund der Unabhängigkeit der Grenzvariable in Satz 2.6 vom Prozess X auch ohne weiteres tun können) und bekommen

$$\begin{aligned}
&\widehat{\langle X,X\rangle}_1 - \langle X,X\rangle_1 \\
&= (\widehat{\langle X,X\rangle}_1 - [X,X]^{(avg)}) + ([X,X]^{(avg)} - \langle X,X\rangle_1) \qquad (2.4)\\
&= O_P(\sqrt{\frac{\bar{n}}{K}}) + O_P(\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}).
\end{aligned}$$

Falls wir K so wählen, dass beide Terme auf der rechten Seite von derselben Ordnung sind, haben wir den Fehler insgesamt minimiert. Es ergibt sich sofort $K = O(n^{\frac{2}{3}})$ als optimale Wahl, so dass der Fehler die Ordnung $n^{-\frac{1}{6}}$ besitzt. Wir fassen zusammen:

Satz 2.11 *Unter den in den Sätzen 2.6 und 2.10 formulierten Bedingungen und mit der*

Wahl von $K = dn^{\frac{2}{3}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{6}}(\widehat{\langle X, X\rangle}_1 - \int_0^1 \sigma_s^2 ds) &\stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\to} \mathcal{N}(0, 8d^{-2}(E[\varepsilon^2])^2) + \eta\mathcal{N}(0, d) \\ &= (8d^{-2}(E[\varepsilon^2])^2 + d\eta^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(0,1), \end{aligned}$$

wobei die Normalverteilung unabhängig von der Filtration $(\mathcal{F}_s)_s$ ist.

Beweis: Wir hatten bereits in (2.4) gesehen, dass das asymptotische Verhalten von

$$n^{\frac{1}{6}}(\widehat{\langle X, X\rangle}_1 - \int_0^1 \sigma_s^2 ds)$$

davon abhängt, wie sich

$$n^{\frac{1}{6}}(\widehat{\langle X, X\rangle}_1 - [X, X]^{(avg)})$$

und

$$n^{\frac{1}{6}}([X, X]^{(avg)} - \int_0^1 \sigma_s^2 ds)$$

verhalten. Der erste Summand konvergiert nach Satz 2.6 bedingt auf den Prozess X gegen eine von X unabhängige Zufallsvariable, während der zweite Summand laut Satz 2.10 unabhängig vom Prozess der Störterme stabil gegen $\eta\mathcal{N}(0, d)$ konvergiert. Daraus folgt sowohl die unbedingte schwache Konvergenz der Summe als auch die Unabhängigkeit der beiden Grenzvariablen, so dass sich die asymptotischen Varianzen wie behauptet addieren lassen. □

Es lässt sich eine alternative Schreibweise der Grenzvariable etablieren, die die Analogie zum Grenzwertsatz in Abschnitt 4.2.2 deutlich macht. Im Falle der äquidistanten Zerlegung erhalten wir wegen (2.3)

$$n^{\frac{1}{6}}(\widehat{\langle X, X\rangle}_1 - \int_0^1 \sigma_s^2 ds) \stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\to} \int_0^1 \sqrt{8d^{-2}(E[\varepsilon^2])^2 + \frac{4}{3}d\sigma_t^4}\, dB_t.$$

Die Brownsche Bewegung B ist von der Filtration $(\mathcal{F}_s)_s$ unabhängig. Für Details verweisen wir auf [8].

Die optimale Wahl der Konstanten d in Satz 2.11 ergibt sich mit elementaren Methoden der Analysis, indem wir zur Minimierung der quadratischen Variation den Ausdruck

$$8d^{-2}(E[\varepsilon^2])^2 + d\eta^2$$

ableiten. Wir erhalten die Gleichung

$$-16(E[\varepsilon^2])^2 d^{-3} + \eta^2 = 0,$$

so dass sich also

$$d = \left(\frac{16(E[\varepsilon^2])^2}{\eta^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

als Wahl anbietet. Zur Erinnerung: η^2 ist eine Zufallsvariable!

Um d und damit implizit die quadratische Variation im zentralen Grenzwertsatz, die man für das Erstellen eines konsistenten Tests benötigt, zu schätzen, müssen wir einerseits $E[\varepsilon^2]$ schätzen (dies haben wir durch $\widehat{E[\varepsilon^2]}$ schon getan) und andererseits Methoden entwickeln, um einen sinnvollen Schätzer für η^2 zu erhalten. Dieser Aufgabe werden wir uns im folgenden widmen.

2.3 Zusammenfassung und Ausblick

Wir hatten bereits in (2.3) gesehen, dass im äquidistanten Fall

$$\eta^2 = \frac{4}{3}\int_0^1 \sigma_t^4 dt$$

gilt. Die Idee von Zhang, Mykland und Ait-Sahalia, die wir leicht abgewandelt zur Grundlage unserer Untersuchung machen werden, besteht nun darin, das Intervall $[0,1]$ in Teilintervalle der Form $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ aufzuteilen und für voneinander verschiedene J und K das Funktional

$$\sum_{m=1}^{M} (\widehat{\langle X, X\rangle}_m^{(K)} - \widehat{\langle X, X\rangle}_m^{(J)})^2$$

als Schätzer für η^2 zu benutzen. Dabei steht

$$\widehat{\langle X, X\rangle}_m^{(K)}$$

für die Anwendung des bekannten Schätzers $\widehat{\langle X, X\rangle}_1$ mit regulären Teilgittern vom Abstand K auf die Beobachtungen im Intervall $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$.

Unser Interesse an η^2 rührt allerdings nicht in erster Linie daher, dass wir die optimale Wahl der Konstante d für den Grenzwertsatz in Satz 2.11 bestimmen wollen. Der Test auf Homoskedastizität, den wir in Abschnitt 4 entwickeln werden, beruht einerseits auf einer Konvergenzaussage bzgl. der integrierten Volatilität und hängt zum anderen von $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ ab. Wir werden uns im nächsten Kapitel deswegen ausführlich mit der Schätzung dieses Integrals beschäftigen.

Entgegen der Vorschläge von Zhang, Mykland und Ait-Sahalia werden wir uns dabei allerdings nicht mit dem hier betrachteten besten Schätzer auseinandersetzen, sondern eine leicht abgewandelte Version von $[Y, Y]^{(avg)}$ zur Grundlage unseres Schätzers für $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ machen.

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt konkret mit der Schätzung des Integrals über die vierten Potenzen der Volatilität auseinandersetzen werden, wollen wir noch einmal kurz einen Überblick über die bisher untersuchten Schätzer geben. Die Zufallsvariablen Z in diesem Abschnitt sind jedes Mal (asymptotisch) normalverteilt.

Wir hatten zuerst versucht, den klassischen Schätzer für die integrierte Volatilität auf das neue Modell zu übertragen. Lemma 2.1 zeigte uns jedoch, dass dieser eher ein Schätzer für die Varianz der Störterme ist, wir erhielten nämlich bedingt auf den Prozess X

$$\frac{1}{\sqrt{n}}([Y,Y] - 2nE[\varepsilon^2]) \xrightarrow{\mathcal{D}} 2\sqrt{E[\varepsilon^4]}Z_{Störung}. \tag{2.5}$$

Eine erste Konsequenz daraus bestand darin, zur Verringerung des Bias nicht alle Beobachtungen zu benutzen und nur ein Teilgitter zu betrachten. Substantiell änderte sich dadurch nichts am asymptotischen Verhalten des klassischen Schätzers, so dass zusätzlich die ad hoc-Hypothese aufgestellt wurde, dass die Verteilung der Störterme von n abhängt. Unter der Bedingung 5.4, die letztlich die Konvergenz der realisierten Volatilität $[X,X]^{\mathcal{H}}$ gegen die integierte Volatilität $\int_0^1 \sigma_t^2 dt$ zusichert, erhielten wir in Proposition 2.5 dann die Konvergenzaussage

$$[Y,Y]^{\mathcal{H}} \;=\; \langle X,X\rangle_1 + 2n_{\mathcal{H}}E[\varepsilon_n^2] + \Upsilon\; Z_{gesamt} + O_P(n_{\mathcal{H}}^{-\frac{1}{4}}\sqrt{E[\varepsilon_n^2]}) + o_P(n_{\mathcal{H}}^{-\frac{1}{2}}).$$

Um allerdings auch im ursprünglichen Modell eine konsistente Schätzung der integrierten Volatilität möglich zu machen, haben wir danach eine Erweiterung der Schätzer auf Teilgitter vorgestellt. Diese Erweiterung beruhte darauf, nicht nur *ein* Teilgitter zu betrachten, sondern sämtliche Beobachtungspunkte in verschiedene Gruppen einzuteilen, separat für diese die Schätzer zu berechnen und im Anschluss darüber zu mitteln. Bedingt auf X schätzt allerdings auch $[Y,Y]^{(avg)}$ nicht die integrierte Volatilität, sondern ebenfalls die Varianz der Störterme, erkennbar anhand der Aussage von Proposition 2.8:

$$\sqrt{\frac{K}{\bar{n}}}([Y,Y]^{(avg)} - [X,X]^{(avg)} - 2\bar{n}E[\varepsilon^2]) \xrightarrow{\mathcal{D}} 2\sqrt{E[\varepsilon^4]}\; Z_{Störung}^{(avg)}. \tag{2.6}$$

Vorteilhaft war allerdings die Verringerung des Bias, statt n betrug die Größenordnung der Abweichung nur noch $\bar{n}$.

Aussagen zum Konvergenzverhalten von $[X,X]^{(avg)}$ setzten in der Regel deutlich mehr Kenntnisse über den Prozess und die Verteilung der Gitterpunkte voraus. Neben der bereits erwähnten Bedingung 5.4 mussten wir zudem vor allem annehmen, dass $\eta_n^2 := \sum_i h_i \sigma_{t_i}^4 \Delta t_i$ stochastisch gegen eine Zufallsvariable η^2 konvergiert. Es ergab sich dann in Satz 2.10 der folgende Grenzwertsatz

$$\sqrt{\frac{n}{K}}D_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \eta\; Z_{Diskretisierung}. \tag{2.7}$$

In Abschnitt 2.2.5 haben wir dann zuletzt eine Synthese aus den drei Konvergenzaussagen (2.5) bis (2.7) vorgestellt: Die Wahl von $K = dn^{\frac{2}{3}}$ sicherte uns zu, dass die Konvergenzraten in (2.6) und (2.7) dieselben sind, zudem haben wir versucht, mit Hilfe von (2.5) eine Korrektur des Bias vorzunehmen. Dies führte uns schließlich zu Satz 2.11 und dem Grenzwertsatz

$$n^{\frac{1}{6}}(\widehat{\langle X, X\rangle}_1 - \langle X, X\rangle_1) \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} (8d^{-2}(E[\varepsilon^2])^2 + d\eta^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(0, 1).$$

Kapitel 3

Ein Schätzer für $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ im gestörten Modell

3.1 Der Zusammenhang zum Schätzer für die integrierte Volatilität

Wir wollen in diesem Kapitel einen Schätzer für $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ in jenem Modell konstruieren, dass Zhang, Mykland und Ait-Sahalia zur mathematischen Beschreibung der Vorgänge in der empirischen Finanzmarktforschung benutzen. Wir gehen also davon aus, dass an der Stelle t_i nicht der zu Grunde liegende Prozess X_{t_i} mit

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

beobachtet wird, sondern eine gestörte Version. Konkret heißt das, dass uns gemäß der in Kapitel 2 vorgestellten Theorie nicht die realen Daten von X zur Verfügung stehen, sondern bloß

$$Y_{t_i} = X_{t_i} + \varepsilon_{t_i}.$$

Der Prozess der Störterme ε wird dabei als unabhängig vom Prozess X angesehen, zudem sind auch die einzelnen ε_{t_i} unabhängig und identisch verteilt mit

$$E[\varepsilon_{t_i}] = 0$$

und existierendem achten Moment. Wir machen ferner die Annahme, dass auch die dritten Momente verschwinden. (In Kapitel 2 haben wir nur die Existenz des vierten Moments vorausgesetzt. Dadurch, dass wir hier im wesentlichen die Quadrate der Funktionale aus jenem Abschnitt benutzen, erhöht sich entsprechend das benötigte Moment.)

Wir nehmen im folgenden an, dass unsere Beobachtungen äquidistant erfolgen (also $t_i = \frac{i}{n}$) und unterteilen zunächst das Intervall $[0, 1]$ in M Teilintervalle der Form $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$. Die grundsätzliche Idee unserer Untersuchung wird darin bestehen, dass wir zunächst in jedem dieser Intervalle die bereits bekannten Schätzer für $\int \sigma_t^2 dt$ benutzen, um mit ihrer Hilfe einen neuen Schätzer für $\int \sigma_t^4 dt$ zu definieren. Danach werden wir dann die Summe über die einzelnen

Teilintervalle bilden. M wird dabei als von n abhängig gewählt und soll ebenfalls gegen ∞ konvergieren. Die genaue Wahl wird im folgenden erläutert.

Wir hatten in der Diskussion des „zweitbesten Schätzers" $[Y,Y]^{(avg)}$ in Abschnitt 2.2.4 bereits gesehen, dass dessen Resultate als gewichtete Summe über die natürlichen Schätzer für die integrierte Volatilität in den verschiedenen Teilgittern stark davon abhängen, mit wie vielen dieser Teilgitter wir es überhaupt zu tun haben. Da wir in unserer Diskussion ebenfalls von einer regulären Anordnung der Beobachtungspunkte gemäß Abschnitt 2.2.4 ausgehen werden, wird der zu betrachtende Schätzer im jeweiligen Intervall $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ bis auf den noch zu bestimmenden Vorfaktor von der Form

$$\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} (Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-K}{n}})^2$$

sein. Nach der Wahl von K werden wir dann M maximal in Bezug auf zwei Kriterien wählen: Zum einen darf M nicht von kleinerer Ordnung als $\frac{n}{K}$ sein, da sonst $(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-K}{n}})$ immer mindestens eine Beobachtung enthalten würde, die außerhalb des zu betrachtenden Teilintervalls liegt. Zum anderen soll die Summe im Grenzübergang unendlich viele Summanden enthalten, so dass die Wahl von $M = \frac{n}{K}$ ausscheidet. Wir werden daher in der folgenden Untersuchung

$$K := \frac{n}{2M}$$

setzen.

Grundlage unseres Schätzers wird nun der Ausdruck

$$T_n := M \sum_{m=1}^{M} ([Y,Y]_m^{(K)} - [Y,Y]_m^{(J)})^2 \tag{3.1}$$

sein, wobei wir ganz allgemein für beliebige Prozesse Z und Z' und beliebiges A

$$[Z,Z']_m^{(A)} := \frac{1}{\frac{n}{M} - A + 1} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}} (Z_{\frac{i}{n}} - Z_{\frac{i-A}{n}})(Z'_{\frac{i}{n}} - Z'_{\frac{i-A}{n}}).$$

gesetzt haben. Entsprechend der Motivation aus der Arbeit von Zhang, Mykland und Ait-Sahalia sind die beiden Funktionale $[Y,Y]_m^{(K)}$ und $[Y,Y]_m^{(J)}$ im wesentlichen Schätzer für $\int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} \sigma_t^2 dt$, speziell dem bereits erwähnten „zweitbesten Schätzer" im Fall $M = 1$ nachempfunden. Der entscheidende Unterschied zur Definition in Abschnitt 2.2.4 besteht allerdings in der Wahl des Vorfaktors, worauf wir in Abschnitt 3.4.4 noch näher eingehen werden.

Die Wahl von K bzw. implizit von M wird nun gemäß der Definition von T_n darüber entscheiden, in welchem Maße die beiden Prozesse X und ε in die Ergebnisse unserer Untersuchungen einfließen werden. Je nach Größenordnung von K werden die Eigenschaften eines der beiden

Prozesse überproportional gewichtet. Speziell wird der Prozess ε umso stärker betont, je kleiner K und damit je größer M ist. Da sich später $\sqrt{M}$ als Konvergenzrate ergeben wird, empfiehlt sich die größtmögliche Wahl von M, so dass die relevanten Funktionale von X geschätzt werden können. Dies geschieht im Zustand der Gleichgewichtung beider Prozesse, er ergibt sich für

$$M = n^{\frac{1}{3}}.$$

J wird zudem von derselben Ordnung wie K gewählt, d. h.

$$J = \frac{K}{c}$$

für ein natürliches $c > 1$. Ähnlich wie bei der Wahl von d in Kapitel 2 lässt sich ein optimales c bestimmen, wenn wir in der Lage sind, die Varianz im später aufgestellten zentralen Grenzwertsatz zu minimieren.

Um das asymptotische Verhalten von T_n zu erfassen, werden wir die Identität

$$[Y,Y]_m^{(A)} = [X,X]_m^{(A)} + 2[X,\varepsilon]_m^{(A)} + [\varepsilon,\varepsilon]_m^{(A)}$$

benutzen und so die Einflüsse der verschiedenen Prozesse separat betrachten. Mittels elementarer arithmetischer Umformungen erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
([Y,Y]_m^{(J)} - [Y,Y]_m^{(K)})^2 &= (([X,X]_m^{(K)} - [X,X]_m^{(J)}) + 2([X,\varepsilon]_m^{(K)} - [X,\varepsilon]_m^{(J)}) + ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - [\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)}))^2 \\
&= ([X,X]_m^{(K)} - [X,X]_m^{(J)})^2 + ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - [\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)})^2 \\
&+ 2([X,X]_m^{(K)} - [X,X]_m^{(J)})(([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - 2E[\varepsilon^2]) - ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} - 2E[\varepsilon^2])) \\
&+ 4([X,\varepsilon]_m^{(K)} - [X,\varepsilon]_m^{(J)})^2 + 4([X,X]_m^{(K)} - [X,X]_m^{(J)})([X,\varepsilon]_m^{(K)} - [X,\varepsilon]_m^{(J)}) \\
&+ 4([X,\varepsilon]_m^{(K)} - [X,\varepsilon]_m^{(J)})(([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - 2E[\varepsilon^2]) - ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} - 2E[\varepsilon^2])),
\end{aligned}$$

was wir im folgenden durch

$$[X,X]_{K,J,m} + [\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} + [X,\varepsilon]_{K,J,m} + (I)_{K,J,m} + (II)_{K,J,m} + (III)_{K,J,m} \tag{3.2}$$

abkürzen wollen.

Grundsätzlich nehmen wir im folgenden an, dass sowohl M, K und J als auch Quotienten der Form $\frac{n}{M}$ oder $\frac{n}{MK}$ bzw. $\frac{n}{MJ}$ durchweg natürliche Zahlen sind. Es ist leicht einzusehen, dass wir diese Forderung ohne Beschränkung der Allgemeinheit aufstellen können.

3.2 Einflüsse des Prozesses X

In diesem Abschnitt werden wir mit der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von

$$[X,X]_{K,J,m} = ([X,X]_m^{(K)} - [X,X]_m^{(J)})^2$$

beginnen und zunächst dessen bedingten Erwartungswert berechnen. Wir erhalten so Informationen über die Ordnung dieses Ausdrucks und werden dieses Wissen später aufgreifen, um einen zentralen Grenzwertsatz zu beweisen.

Um

$$E[([X,X]_m^{(K)} - [X,X]_m^{(J)})^2 | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$$

explizit auszurechnen, müssen wir die drei verschiedenen Fälle betrachten, in denen wir es mit Produkten der Form

$$E[[X,X]_m^{(A)} [X,X]_m^{(B)} | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$$

zu tun haben und eine allgemeine Aussage über das Verhalten dieser Ausdrücke herleiten. Konkret werden wir jenes Resultat dann auf die Fälle anwenden, in denen wir A und B durch die entsprechenden Werte von J und K ersetzt haben.

De facto werden wir im Ausdruck

$$[X,X]_m^{(A)} = \frac{1}{\frac{n}{M} - A + 1} \sum_{l=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}} (X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-A}{n}})^2$$

für jedes beliebige l den jeweiligen Summanden $(X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-A}{n}})$ durch $\sigma_{\frac{m-1}{M}}(W_{\frac{l}{n}} - W_{\frac{l-A}{n}})$ approximieren und somit aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse der Brownschen Bewegung von der Vorgeschichte des Prozesses nur Behauptungen über

$$E[[W,W]_m^{(A)} [W,W]_m^{(B)}]$$

beweisen. Die mathematische Begründung für diese Approximation geben wir in Abschnitt 3.5.

Lemma 3.1 *Es seien A und B von der Ordnung $\frac{n}{M}$. Dann gilt für $A \leq B$*

$$\begin{aligned} & E[[W,W]_m^{(A)} [W,W]_m^{(B)}] \\ = & \frac{1}{(\frac{n}{M} - A + 1)(\frac{n}{M} - B + 1)} \left(\frac{AB}{M^2} + \frac{A^2B - AB^2 - \frac{2}{3}A^3}{nM} + \frac{\frac{2}{3}A^3B - A^2B^2 - \frac{1}{3}A^4}{n^2} \right) + O(\frac{1}{M^4}). \end{aligned}$$

Beweis: Um

$$E[[W,W]_m^{(A)} [W,W]_m^{(B)}] = \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}} \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} \frac{E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2 (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2]}{(\frac{n}{M} - A + 1)(\frac{n}{M} - B + 1)}$$

explizit auszurechnen, müssen wir vier verschiedene Fälle unterscheiden, wie sich i und j zueinander verhalten können. Die ersten drei Fälle sind solche, in denen die zugehörigen Intervalle $[i - A, i]$ und $[j - B, j]$ nicht disjunkt sind, der vierte Fall ist der Betrachtung der vergleichsweise einfachen disjunkten Variante gewidmet. Es ergibt sich für uns also

$$E[[W,W]_m^{(A)} [W,W]_m^{(B)}] = \frac{E[U_{A,B,1}] + E[U_{A,B,2}] + E[U_{A,B,3}] + E[U_{A,B,4}]}{(\frac{n}{M} - A + 1)(\frac{n}{M} - B + 1)}, \tag{3.3}$$

wobei sich die Definition der $U_{A,B,i}$ aus dem Kontext des jeweiligen Falls ergeben wird.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir die Berechnungen zunächst ohne die Vorfaktoren durchführen und diese erst nach der Untersuchung der vier Fälle wieder berücksichtigen.

Erster Fall:
Wir betrachten zunächst den Fall $i \geq j > i - A$. Wegen $A \leq B$ folgt dann automatisch $i - A \geq j - B$. Aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse und mittels $E[W_{\frac{i}{n}}] = 0$ erhält man die folgende Identität

$$\begin{aligned}
& E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2] \\
= \; & E[((W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{j}{n}}) + (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}}))^2((W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}}) + (W_{\frac{i-A}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}}))^2] \\
= \; & E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{j}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2 + (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{j}{n}})^2(W_{\frac{i-A}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2 \\
+ \; & (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^4 + (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2(W_{\frac{i-A}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2] \\
= \; & \frac{(i-j)(j-i+A) + (i-j)(i-A-j+B)}{n^2} \\
+ \; & \frac{3(j-i+A)^2 + (j-i+A)(i-A-j+B)}{n^2} \\
= \; & \frac{2i^2 + 2j^2 - 4ij + 4jA - 4iA + 2A^2 + AB}{n^2} \\
= \; & \frac{2(i-j)^2 - 4A(i-j) + 2A^2 + AB}{n^2}.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, dass die Zuwächse der Brownschen Bewegung normalverteilt sind und dass das vierte Moment der Standardnormalverteilung 3 ist.

Offensichtlich hängt

$$E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2]$$

als Funktion in i und j nur von $i-j$ ab. Diese Eigenschaft werden wir im folgenden mehrfach ausnutzen.

Um eine allgemeine Aussage über das Verhalten der Tupel (i, j) im ersten Fall herzuleiten, müssen wir beachten, dass es nicht zu jedem i genau A verschiedene Indizes j gibt, die der Forderung $i \geq j > i-A$ genügen. Am Rand (also am linken Ende des Intervalls $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$) existieren zu festem i offensichtlich weniger Indizes j mit der entsprechenden Eigenschaft. Wir werden also zwischen dem Fall am Rand

$$\frac{n(m-1)}{M} + B \leq i \leq \frac{n(m-1)}{M} + A + B - 1 \text{ und } \frac{n(m-1)}{M} + B \leq j \leq i$$

und den restlichen Möglichkeiten

$$\frac{n(m-1)}{M} + A + B \leq i \leq \frac{nm}{M} \text{ und } i - A \leq j \leq i$$

unterscheiden müssen. Es ergibt sich dann mit $E[U_{A,B,1}] = E[U_{A,B,1,1}] + E[U_{A,B,1,2}]$ (und weil wegen $A \leq K$ bzw. $B \leq K = \frac{n}{2M}$ natürlich auch $\frac{n(m-1)}{M} + A + B \leq \frac{nm}{M}$ gilt)

$$\begin{aligned}
E[U_{A,B,1,1}] &= \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{n(m-1)}{M}+A+B-1} \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{i} \frac{2(i-j)^2 - 4A(i-j) + 2A^2 + AB}{n^2} \\
&= \sum_{i=0}^{A-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{2j^2 - 4Aj + 2A^2 + AB}{n^2} \\
&= \sum_{i=0}^{A-1} \frac{i(i+1)(2i+1) - 6Ai(i+1) + 6iA^2 + 3iAB}{3n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}) \\
&= \sum_{i=1}^{A} \frac{2i^3 - 6Ai^2 + 6iA^2 + 3iAB}{3n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}) \\
&= \frac{A^4 + A^3B}{2n^2} + O(\frac{A^3}{n^2})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E[U_{B,A,1,2}] &= \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A+B}^{\frac{nm}{M}} \sum_{j=i-A}^{i} \frac{2(i-j)^2 - 4A(i-j) + 2A^2 + AB}{n^2} \\
&= (\frac{n}{M} - B - A + 1) \sum_{j=0}^{A} \frac{2j^2 - 4Aj + 2A^2 + AB}{n^2} \\
&= (\frac{n}{M} - B - A) \frac{\frac{2}{3}A^3 - 2A^3 + 2A^3 + A^2B}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}) \\
&= (\frac{n}{M} - B - A) \frac{\frac{2}{3}A^3 + A^2B}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$E[U_{B,A,1}] = \frac{A^4 + A^3B + (\frac{n}{M} - B - A)(\frac{4}{3}A^3 + 2A^2B)}{2n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}).$$

Zweiter Fall:
Die Tupel (i, j) mit $j > i > j - B$ müssen wir wegen $B \geq A$ in zwei verschiedenen Situationen betrachten. Im Fall $j - B \geq i - A$ (und also $j - B + A \geq i$) ergibt sich eine zum ersten Fall analoge Rechnung. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2 (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2] \\
= \; & E[((W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}}) + (W_{\frac{j-B}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}}))^2 ((W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{i}{n}}) + (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}}))^2] \\
= \; & \frac{2i^2 + 2j^2 - 4ij + 4iB - 4jB + 2B^2 + AB}{n^2} \\
= \; & \frac{2(j-i)^2 - 4B(j-i) + 2B^2 + AB}{n^2}.
\end{aligned}$$

Wir müssen auch hier wegen der unterschiedlichen Anzahl der Tupel am Rand zwei verschiedene Varianten betrachten, deren Erwartungwerte wir separat berechnen. Aufgrund der beiden Bedingungen $j > i > j - B$ und $j - B + A \geq i$ ergibt sich für den ersten Fall

$$
\begin{aligned}
E[U_{B,A,2,1}] &= \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{n(m-1)}{M}+B+A-1} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\min(j-1,j-B+A)} \frac{2(j-i)^2 - 4B(j-i) + 2B^2 + AB}{n^2} \\
&= \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{n(m-1)}{M}+B+A-1} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{j-B+A} \frac{2(j-i)^2 - 4B(j-i) + 2B^2 + AB}{n^2} \\
&= \sum_{j=0}^{A-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{2(B-A+i)^2 - 4B(B-A+i) + 2B^2 + AB}{n^2} \\
&= \sum_{j=0}^{A-1} \frac{2j(B-A)^2 + 2j^2(B-A) + \frac{2}{3}j^3 - 4jB(B-A) - 2j^2B + 2jB^2 + jAB}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}) \\
&= \frac{A^4 + A^3B}{2n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}).
\end{aligned}
$$

Im Fall $B = A$ hätten wir nach der zweiten Identität formal korrekt nur bis $j - 1$ und nicht bis j summieren dürfen. Aus der weiteren Rechnung wird aber klar, dass durch die Vernachlässigung von Termen kleinerer Ordnungen der Unterschied asymptotisch vernachlässigbar ist.

Der zweite Summand im Erwartungswert errechnet sich dann wie folgt:

$$
\begin{aligned}
E[U_{B,A,2,2}] &= \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B+A}^{\frac{nm}{M}} \sum_{i=j-B}^{j-B+A} \frac{2(j-i)^2 - 4B(j-i) + 2B^2 + AB}{n^2} \\
&= \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B+A}^{\frac{nm}{M}} (\sum_{i=1}^{B} \frac{2i^2 - 4Bi + 2B^2 + AB}{n^2} - \sum_{i=1}^{B-A} \frac{2i^2 - 4Bi + 2B^2 + AB}{n^2}) \\
&= (\frac{n}{M} - B - A)(\frac{\frac{2}{3}B^3 + B^2A}{n^2} - \frac{\frac{2}{3}(B-A)^3 - 2B(B-A)^2 + 2B^3 - B^2A - AB^2}{n^2}) + O(\frac{A^3}{n^2}) \\
&= (\frac{n}{M} - B - A)\frac{\frac{2}{3}A^3 + A^2B}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}).
\end{aligned}
$$

Insgesamt gilt dann:

$$
E[U_{B,A,2}] = \frac{A^4 + A^3B + (\frac{n}{M} - B - A)(\frac{4}{3}A^3 + 2A^2B)}{2n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}) = E[U_{B,A,1}].
$$

Beide Fälle liefern also asymptotisch dasselbe Resultat.

Dritter Fall:
Wir hatten im zweiten Fall diejenigen Indizes (i,j) betrachtet, für die neben $j > i > j - B$ auch $j - B \geq i - A$ erfüllt ist. Die andere Möglichkeit besteht - zumindest falls $B \neq A$ gilt - darin, dass wir es zusätzlich mit der Eigenschaft $i - A > j - B$ zu tun haben. In diesem Fall ist also das Intervall $[i-A, i]$ ganz in $[j-B, j]$ enthalten. Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
&E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2] \\
=\ &E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2((W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{i}{n}}) + (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}}) + (W_{\frac{i-A}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}}))^2] \\
=\ &\frac{A}{n^2}((j-i) + 3A + (i - A - j + B)) = \frac{2A^2 + AB}{n^2}.
\end{aligned}$$

Hier müssen wir offensichtlich keine spezielle Situation am Rand betrachten. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
E[U_{B,A,3}] &= \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} \sum_{i=j-B+A+1}^{j} \frac{2A^2+AB}{n^2} = (\frac{n}{M} - B)(B-A)\frac{2A^2+AB}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}) \\
&= \frac{A^2B + AB^2 - 2A^3}{nM} + \frac{2A^3B - A^2B^2 - AB^3}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}).
\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass im Fall $A = B$ offensichtlich $U_{B,A,3} = 0$ gilt, spiegelt sich in diesem Resultat wider: Wir erhalten dann

$$E[U_{B,A,3}] = O(\frac{A^3}{n^2}).$$

Vierter Fall:
Falls entweder $j - B \geq i$ oder $i - A \geq j$ gilt, erhalten wir aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-A}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-B}{n}})^2] = \frac{AB}{n^2}.$$

Zur noch fehlenden Berechnung von $E[U_{B,A,4}]$ müssen wir die Anzahl der auftretenden Fälle für die Tupel (i,j) zählen, in denen die zugehörigen Intervalle $[\frac{i-A}{n}, \frac{i}{n}]$ und $[\frac{j-B}{n}, \frac{j}{n}]$ disjunkt sind.

Insgesamt gibt es bis auf Terme kleinerer Ordnungen $(\frac{n}{M} - B)(\frac{n}{M} - A)$ Tupel. Bei der Berechnung von $E[U_{B,A,1,1}]$ bzw. $E[U_{B,A,2,1}]$ traten jeweils $\frac{A^2}{2}$ Summanden auf, bei der Berechnung von $E[U_{B,A,1,2}]$ bzw. $E[U_{B,A,2,2}]$ waren es jeweils $(\frac{n}{M} - B - A)A$ Summanden. Der dritte Fall bestand aus $(\frac{n}{M} - B)(B - A)$ Tupeln. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
E[U_{B,A,4}] &= ((\frac{n}{M} - B)(\frac{n}{M} - A) - A^2 - 2(\frac{n}{M} - B - A)A - (\frac{n}{M} - B)(B - A))\frac{AB}{n^2} \\
&= \frac{AB}{M^2} - 2\frac{AB^2 + A^2B}{nM} + \frac{AB(B+A)^2}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}).
\end{aligned}$$

Nachdem wir nun den Anteil von jedem der vier Fälle berechnet haben, können wir die Resultate zusammenfassen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} & E[U_{B,A,1}] + E[U_{B,A,2}] + E[U_{B,A,3}] + E[U_{B,A,4}] \\ = \; & 2E[U_{B,A,1}] + E[U_{B,A,3}] + E[U_{B,A,4}] \\ = \; & \frac{AB}{M^2} + \frac{A^2B - AB^2 - \frac{2}{3}A^3}{nM} + \frac{\frac{2}{3}A^3B - A^2B^2 - \frac{1}{3}A^4}{n^2} + O(\frac{A^3}{n^2}). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus (3.3) und mittels $O(\frac{A^3}{n^2}) = O(1)$. □

Mit Hilfe von Lemma 3.1 sind wir nun in der Lage, das Verhalten der Terme in

$$([Y, Y]_m^{(K)} - [Y, Y]_m^{(J)})^2$$

zu beschreiben, die ausschließlich auf den Prozess X zurückführbar sind. Wir wollen also die bedingte Erwartung

$$\begin{aligned} E[[X, X]_{K,J,m} | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \; &= \; E[([X, X]_m^{(K)} - [X, X]_m^{(J)})^2 | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \\ &= \; E[([X, X]_m^{(K)})^2 - 2[X, X]_m^{(K)} [X, X]_m^{(J)} + ([X, X]_m^{(J)})^2 | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \end{aligned}$$

betrachten und erhalten dafür wieder nach Approximation durch die entsprechenden Ausdrücke von W

Satz 3.2 *Es gilt:*

$$E[\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} [W, W]_{K,J,m} | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{c} + \frac{3}{8c^2} + \frac{5}{24c^3} - \frac{1}{24c^4} - \frac{1}{24c^5}}{M^2(1 - \frac{1}{2c})^2} + O(\frac{1}{M^4}).$$

Dabei ist $[W, W]_{K,J,m}$ analog zum entsprechenden Ausdruck für den Prozess X definiert.

Beweis: Wir nutzen die Messbarkeit von $\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}$ bezüglich $\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}$ aus und führen den Beweis dieser Aussage aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse der Brownschen Bewegung von der Vorgeschichte des Prozesses auf die Berechnung des Erwartungswerts von $[W, W]_{K,J,m}$ zurück. Zu diesem Zweck ersetzen wir A und B aus Lemma 3.1 durch die im jeweiligen Fall relevanten Werte und nutzen ferner aus, dass wir $K = \frac{n}{2M}$ und $J = \frac{K}{c}$ gesetzt haben. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \text{(a) } E[([W, W]_m^{(K)})^2] \; &= \; \frac{1}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} (\frac{K^2}{M^2} - \frac{\frac{2}{3}K^3}{nM} - \frac{\frac{2}{3}K^4}{n^2}) + o(\frac{1}{M^2}) \\ &= \; \frac{(\frac{n}{M} - J + 1)^2}{(\frac{n}{M} - J + 1)^2 (\frac{n}{M} - K + 1)^2} (\frac{K^2}{M^2} - \frac{\frac{2}{3}K^3}{nM} - \frac{\frac{2}{3}K^4}{n^2}) + O(\frac{1}{M^4}) \\ &= \; \frac{n^4}{M^6 (\frac{n}{M} - J + 1)^2 (\frac{n}{M} - K + 1)^2} (\frac{1}{8} - \frac{1}{8c} + \frac{1}{32c^2}) + O(\frac{1}{M^4}), \end{aligned}$$

(b) $E[[W,W]_m^{(K)}[W,W]_m^{(J)}]$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K+1)}\left(\frac{JK}{M^2}+\frac{J^2K-JK^2-\frac{2}{3}J^3}{nM}+\frac{\frac{2}{3}J^3K-J^2K^2-\frac{1}{3}J^4}{n^2}\right)+O(\frac{1}{M^4})\\
&= \frac{(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K+1)}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}\left(\frac{JK}{M^2}+\frac{J^2K-JK^2-\frac{2}{3}J^3}{nM}+\frac{\frac{2}{3}J^3K-J^2K^2-\frac{1}{3}J^4}{n^2}\right)+O(\frac{1}{M^4})\\
&= \frac{n^4}{M^6(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}\left(\frac{1}{16c}-\frac{7}{192c^3}+\frac{1}{192c^5}\right)+O(\frac{1}{M^4})
\end{aligned}
$$

und

(c) $E[([W,W]_m^{(J)})^2]$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\frac{n}{M}-J+1)^2}\left(\frac{J^2}{M^2}-\frac{\frac{2}{3}J^3}{nM}-\frac{\frac{2}{3}J^4}{n^2}\right)+O(\frac{1}{M^4})\\
&= \frac{(\frac{n}{M}-K+1)^2}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}\left(\frac{J^2}{M^2}-\frac{\frac{2}{3}J^3}{nM}-\frac{\frac{2}{3}J^4}{n^2}\right)+O(\frac{1}{M^4})\\
&= \frac{n^4}{M^6(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}\left(\frac{1}{16c^2}-\frac{1}{48c^3}-\frac{1}{96c^4}\right)+O(\frac{1}{M^4}).
\end{aligned}
$$

Wir müssen diese drei Ausdrücke nur noch in die ausmultiplizierte Darstellung von $E[[W,W]_{K,J,m}]$ einsetzen, so dass sich die folgende Identität ergibt:

$$
\begin{aligned}
E[[W,W]_{K,J,m}] &= \frac{n^4((\frac{1}{8}-\frac{1}{8c}+\frac{1}{32c^2})-2(\frac{1}{16c}-\frac{7}{192c^3}+\frac{1}{192c^5})+(\frac{1}{16c^2}-\frac{1}{48c^3}-\frac{1}{96c^4}))}{M^6(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}+O(\frac{1}{M^4})\\
&= \frac{n^4(\frac{1}{8}-\frac{1}{4c}+\frac{3}{32c^2}+\frac{5}{96c^3}-\frac{1}{96c^4}-\frac{1}{96c^5})}{M^6(\frac{n}{M}-J)^2(\frac{n}{M}-K)^2}+O(\frac{1}{M^4})\\
&= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{c}+\frac{3}{8c^2}+\frac{5}{24c^3}-\frac{1}{24c^4}-\frac{1}{24c^5}}{M^2(1-\frac{1}{2c})^2}+O(\frac{1}{M^4})
\end{aligned}
$$

□

3.3 Einflüsse des Prozesses ε

Grundsätzlich werden wir in diesem Abschnitt genauso vorgehen wie bei der Analyse der Terme, die ausschließlich von X abhängen, indem wir den Erwartungswert der Produkte $[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(A)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)}$ für verschiedene Wahlen der A und B berechnen. Uns wird dabei helfen, dass aufgrund der Unabhängigkeit von $\varepsilon_{\frac{i}{k}}$ und $\varepsilon_{\frac{j}{n}}$ für $i \neq j$ und wegen $E[\varepsilon_{\frac{k}{n}}]=0$ die Identität

$$E[(\varepsilon_{\frac{i}{n}}-\varepsilon_{\frac{i-A}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{j}{n}}-\varepsilon_{\frac{j-B}{n}})^2] \;=\; E[\varepsilon_i^2\varepsilon_j^2+\varepsilon_i^2\varepsilon_{j-B}^2+\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_j^2+\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_{j-B}^2]. \tag{3.4}$$

gilt.

Lemma 3.3 *Es seien A und B von der Ordnung $\frac{n}{M}$ mit $A \leq B$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} E[[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(A)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)}] &= \frac{4(\frac{n}{M}-A)(\frac{n}{M}-B)+(4\frac{n}{M}-2A)}{(\frac{n}{M}-A+1)(\frac{n}{M}-B+1)}E[\varepsilon^2]^2 \\ &+ \frac{4(\frac{n}{M}-B)-2A}{(\frac{n}{M}-A+1)(\frac{n}{M}-B+1)}E[\varepsilon^4]+O(\frac{1}{M^4}). \end{aligned}$$

Beweis: Wir ignorieren in unserer Berechnung die Vorfaktoren und definieren implizit

$$E[[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(A)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)}] =: \frac{1}{(\frac{n}{M}-A+1)(\frac{n}{M}-B+1)}V_{A,B}.$$

Der Beweis fußt dann im wesentlichen auf der im Vorfeld des Lemmas angesprochenen Identität (3.4), so dass wir nach Umsortieren

$$E[(\varepsilon_{\frac{i}{n}}-\varepsilon_{\frac{i-A}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{j}{n}}-\varepsilon_{\frac{j-B}{n}})^2] = E[\varepsilon_i^2\varepsilon_j^2+\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_{j-B}^2+\varepsilon_i^2\varepsilon_{j-B}^2+\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_j^2]$$

erhalten. Die Rechnung verläuft nun so, dass wir jeden dieser Summanden in Abhängigkeit von i in zwei Fällen betrachten: Entweder gibt es zu i ein passendes j, so dass die beiden Indizes dieselben sind (im Erwartungswert erhalten wir dann $E[\varepsilon^4]$), oder alle möglichen j liefern von i verschiedene Indizes und wir erhalten jedes Mal $E[\varepsilon^2]^2$. Konkret liefert das

$$\begin{aligned} V_{A,B} &= \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_i^2\varepsilon_j^2+\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_{j-B}^2+\varepsilon_i^2\varepsilon_{j-B}^2+\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_j^2] \\ &= \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{n(m-1)}{M}+B-1}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_i^2\varepsilon_j^2] + \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_i^2\varepsilon_j^2] \\ &+ \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}-B+A}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_{j-B}^2] + \sum_{i=\frac{nm}{M}-B+A+1}^{\frac{nm}{M}}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_{j-B}^2] \\ &+ \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}-B}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_i^2\varepsilon_{j-B}^2] + \sum_{i=\frac{nm}{M}-B+1}^{\frac{nm}{M}}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_i^2\varepsilon_{j-B}^2] \\ &+ \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{n(m-1)}{M}+A+B-1}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_j^2] + \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A+B}^{\frac{nm}{M}}\sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} E[\varepsilon_{i-A}^2\varepsilon_j^2]. \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass für $A = B$ die erste und die vierte Summe jeweils leere Summen sind. Gemäß der obigen Erläuterungen bedeutet dies, dass in diesem Fall zu jedem i ein j mit demselben Index existiert und wir demnach für jedes i einmal $E[\varepsilon^4]$ erhalten.

Wir hatten die ε-Terme vorher so sortiert, dass jeweils die ersten vier und die zweiten vier Summanden das gleiche Ergebnis liefern. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
V_{A,B} &= 2(B-A)(\frac{n}{M}-B+1)E[\varepsilon^2]^2 + 2(\frac{n}{M}-B+1)E[\varepsilon^4] \\
&+ 2(\frac{n}{M}-B+1)(\frac{n}{M}-B)E[\varepsilon^2]^2 + 2(\frac{n}{M}-B-A+1)(\frac{n}{M}-B)E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ 2(\frac{n}{M}-B-A+1)E[\varepsilon^4] + 2B(\frac{n}{M}-B+1)E[\varepsilon^2]^2 \\
&= 4(\frac{n}{M}-B)(\frac{n}{M}-A)E[\varepsilon^2]^2 + (4\frac{n}{M}-2A)E[\varepsilon^2]^2 + (4(\frac{n}{M}-B)-2A)E[\varepsilon^4] + O(1).
\end{aligned}$$

Nach Division durch die Vorfaktoren erhalten wir das gewünschte Ergebnis. □

Wir betrachten nun analog zur Analyse des Einflusses von X den Gesamteinfluss der ε-Terme, nämlich

$$[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} = ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - [\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)})^2 = ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)})^2 - 2[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} + ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)})^2.$$

Dies führt uns zu

Satz 3.4 *Es gilt:*

$$E[[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m}] = \frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{c^2}}{M^2(1-\frac{1}{2c})^2} Var(\varepsilon^2) + O(\frac{1}{M^4}).$$

Wir ersetzen zunächst wieder A und B durch die hier verwendeten Werte K und J und erhalten

(a)

$$\begin{aligned}
E[([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)})^2] &= \frac{4(\frac{n}{M}-K)^2 + (4\frac{n}{M}-2K)}{(\frac{n}{M}-K+1)^2} E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{4(\frac{n}{M}-K)-2K}{(\frac{n}{M}-K+1)^2} E[\varepsilon^4] + O(\frac{1}{M^4}) \\
&= \frac{4(\frac{n}{M}-K)^2(\frac{n}{M}-J+1)^2}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2} E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{(4\frac{n}{M}-2K)(\frac{n}{M}-J+1)^2}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2} E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{(4\frac{n}{M}-6K)(\frac{n}{M}-J+1)^2}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2} E[\varepsilon^4] + O(\frac{1}{M^4})
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
E[[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)}] &= \frac{4(\frac{n}{M}-J)(\frac{n}{M}-K)+(4\frac{n}{M}-2J)}{(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K+1)}E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{4(\frac{n}{M}-K)-2J}{(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K+1)}E[\varepsilon^4]+O(\frac{1}{M^4}) \\
&= \frac{4(\frac{n}{M}-J)(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K)(\frac{n}{M}-K+1)}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{(4\frac{n}{M}-2J)(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K+1)}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{(4(\frac{n}{M}-K)-2J)(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K+1)}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}E[\varepsilon^4]+O(\frac{1}{M^4})
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
E[([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)})^2] &= \frac{4(\frac{n}{M}-J)^2+(4\frac{n}{M}-2J)}{(\frac{n}{M}-J+1)^2}E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{4(\frac{n}{M}-J)-2J}{(\frac{n}{M}-J+1)^2}E[\varepsilon^4]+O(\frac{1}{M^4}) \\
&= \frac{4(\frac{n}{M}-J)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{(4\frac{n}{M}-2J)(\frac{n}{M}-K+1)^2}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}E[\varepsilon^2]^2 \\
&+ \frac{(4\frac{n}{M}-6J)(\frac{n}{M}-K+1)^2}{(\frac{n}{M}-J+1)^2(\frac{n}{M}-K+1)^2}E[\varepsilon^4]+O(\frac{1}{M^4})
\end{aligned}
$$

Wir erkennen leicht, dass alle drei Ausdrücke einen Erwartungswert von derselben Ordnung haben. Grundsätzlich haben wir es in jedem Fall mit einem Summanden der Ordnung 1 und zwei Summanden der Ordnung $\frac{1}{M^2}$ zu tun, die Restterme sind jeweils $O(\frac{1}{M^4})$.

Der Übersichtlichkeit halber werden wir

$$E[[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m}] = ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)})^2 - 2[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} + ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)})^2$$

in mehreren Schritten ausrechnen. Wir zeigen zunächst, dass sich die Terme von Ordnung 1, die bei der Berechnung der einzelnen Erwartungswerte jeweils als erste Summanden auftreten, in der Summe gegenseitig aufheben. Für die Zähler dieser Ausdrücke gilt

$$
\begin{aligned}
& 4(\frac{n}{M}-K)(\frac{n}{M}-K)(\frac{n}{M}-J+1)^2 \\
-\; & 8(\frac{n}{M}-J)(\frac{n}{M}-J+1)(\frac{n}{M}-K)(\frac{n}{M}-K+1) \\
+\; & 4(\frac{n}{M}-J)(\frac{n}{M}-J)(\frac{n}{M}-K+1)^2 \\
=\; & 4((\frac{n}{M}-K)^2-2(\frac{n}{M}-K)(\frac{n}{M}-J)+(\frac{n}{M}-J)^2) = 4(K-J)^2, \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

was geteilt durch den Nenner

$$(\frac{n}{M} - J + 1)^2(\frac{n}{M} - K + 1)^2$$

ein $O(\frac{1}{M^4})$ ergibt.

Im nächsten Schritt berechnen wir den Anteil der Ordnung $\frac{1}{M^2}$, getrennt nach $E[\varepsilon^2]^2$ und $E[\varepsilon^4]$. Im ersten Fall erhalten wir wegen $K = \frac{n}{2M}$ für die Zähler

$$\begin{aligned}
& (4\frac{n}{M} - 2K)(\frac{n}{M} - J + 1)^2 - (8\frac{n}{M} - 4J)(\frac{n}{M} - J + 1)(\frac{n}{M} - K + 1) \\
+ \ & (4\frac{n}{M} - 2J)(\frac{n}{M} - K + 1)^2 = (4\frac{n}{M} - 2K)(\frac{n}{M} - J)^2 \\
- \ & (8\frac{n}{M} - 4J)(\frac{n}{M} - J)(\frac{n}{M} - K) + (4\frac{n}{M} - 2J)(\frac{n}{M} - K)^2 + O(\frac{n^2}{M^2}) \\
= \ & 2(J - K)(JK + \frac{n^2}{M^2} - 2K\frac{n}{M}) + O(\frac{n^2}{M^2}) = 2(J - K)(JK) + O(\frac{n^2}{M^2}),
\end{aligned}$$

im zweiten Fall entsprechend

$$\begin{aligned}
& (4\frac{n}{M} - 6K)(\frac{n}{M} - J + 1)^2 - (8(\frac{n}{M} - K) - 4J)(\frac{n}{M} - J + 1)(\frac{n}{M} - K + 1) \\
+ \ & (4\frac{n}{M} - 6J)(\frac{n}{M} - K + 1)^2 = (4\frac{n}{M} - 6K)(\frac{n}{M} - J)^2 \\
- \ & (8(\frac{n}{M} - K) - 4J)(\frac{n}{M} - J)(\frac{n}{M} - K) + (4\frac{n}{M} - 6J)(\frac{n}{M} - K)^2 + O(\frac{n^2}{M^2}) \\
= \ & 2(K - J)(JK + \frac{n^2}{M^2} - 2K\frac{n}{M}) + O(\frac{n^2}{M^2}) = 2(K - J)(JK) + O(\frac{n^2}{M^2}).
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die beiden Zähler bis auf unterschiedliches Vorzeichen dieselben sind. Wir werden uns also nur noch mit dem ersten Fall auseinandersetzen. Wenn wir durch den Nenner teilen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& 2\frac{(J - K)(JK)}{(\frac{n}{M} - J + 1)^2(\frac{n}{M} - K + 1)^2} + O(\frac{1}{M^4}) = 2\frac{(J - K)(JK)}{(\frac{n}{M} - J)^2(\frac{n}{M} - K)^2} + O(\frac{1}{M^4}) \\
= \ & 2\frac{\frac{n^3}{M^3}(\frac{1}{2c} - \frac{1}{2})\frac{1}{4c}}{\frac{n^4}{M^4}\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2c})^2} + O(\frac{1}{M^4}) = \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c}}{M^2(1 - \frac{1}{2c})^2} + O(\frac{1}{M^4}).
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann mit

$$Var(\varepsilon^2) = E[\varepsilon^4] - E[\varepsilon^2]^2.$$

□

Für den zentralen Grenzwertsatz, den wir in Kapitel 4 herleiten wollen, werden wir uns neben der Berechnung des Erwartungswerts von $[\varepsilon, \varepsilon]_{K,J,m}$ bzw. formal richtig neben der Berechnung von $E[[\varepsilon, \varepsilon]_{K,J,m}|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$ (was wegen der Unabhängigkeit der $\varepsilon_{\frac{l}{n}}$ praktisch dasselbe ist) auch mit der Untersuchung der bedingten Varianz dieser Ausdrücke beschäftigen müssen. Wir hatten bereits in der Einleitung angekündigt, dass wir manche Rechnung aufgrund des Missverhältnisses zwischen Rechenaufwand und Bedeutung des Resultats nicht durchführen wollen. Diese Analyse wird eine davon sein.

Formal müssten wir zu diesem Zweck

$$E[([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - [\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)})^4]$$

bzw. nach Aufspaltung in die einzelnen Summanden Ausdrücke vom Typ

$$E[[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(A)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(C)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(D)}]$$

berechnen. Dies entspricht der Untersuchung von Vierfachsummen über Terme der Form

$$E[(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-A}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-B}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{k}{n}} - \varepsilon_{\frac{k-C}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{l}{n}} - \varepsilon_{\frac{l-D}{n}})^2],$$

wobei wir wieder die Vorfaktoren ignoriert und für A, B, C und D außerdem je nach Fall K und J eingesetzt haben. Diese Berechnung wird natürlich deutlich komplizierter als in Lemma 3.3, wo wir nur zwei Produkte dieser quadrierten Differenzen zu untersuchen hatten. Analog zu den dortigen Ergebnissen werden wir allerdings zeigen, dass

$$E[[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(A)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(C)}[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(D)}]$$

eine Summe von Ausdrücken der Form

$$C^{(1)}_{A,B,C,D} + C^{(2)}_{A,B,C,D}\frac{1}{M^2} + C^{(3)}_{A,B,C,D}\frac{1}{M^4} + C^{(3)}_{A,B,C,D}\frac{1}{M^6}$$

ist. Wir machen dabei davon Gebrauch, dass die achten Momente der Verteilung der Störterme nach Voraussetzung existieren.

Wir hatten nun

$$[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} = (([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - 2E[\varepsilon^2]) - ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} - 2E[\varepsilon^2]))^2$$

so konstruiert, dass sich Terme von Ordnung 1, die sich bei der Berechnung des Erwartungswerts der einzelnen Summanden ergeben hatten, wie in (3.5) berechnet gegenseitig aufheben. Es ergibt sich also

$$E[[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m}] = \frac{1}{M^2}D_c Var(\varepsilon^2) + O(\frac{1}{M^4}),$$

wobei wir aus Gründen der Übersichtlichkeit eine abkürzende Notation einführen wollen, nämlich

$$D_c := \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}}{(1-\frac{1}{2c})^2}. \tag{3.6}$$

Wenn wir nun zur Analyse der Varianz übergehen, werden entsprechend der Konstruktion nicht nur die $C^{(1)}_{A,B,C,D}$ als Terme der Ordnung 1 verschwinden, sondern auch die $C^{(2)}_{A,B,C,D}$ als Ausdrücke von der Ordnung $\frac{1}{M^2}$. Wir erhalten demnach

$$E[([\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m})^2] = \Delta_c \frac{1}{M^4} + O(\frac{1}{M^6})$$

mit einer Konstanten Δ_c, die genau wie D_c nur von c abhängt. Weil die $[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m}$ für verschiedene m praktisch unabhängig sind (einzig die $\varepsilon_{\frac{m}{M}}$ als Störungen an den Randpunkten der Intervalle treten in zweien dieser Ausdrücke auf, was im Vergleich zu den $\frac{n}{M}$ übrigen Zufallsvariablen in den einzelnen Intervallen spätestens im Grenzübergang keinen messbaren Einfluss mehr hat), wird sich dieses Resultat im wesentlichen auch auf den bedingten Fall übertragen, das heißt

$$E[([\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m})^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = \Delta_c \frac{1}{M^4} + O(\frac{1}{M^6}). \tag{3.7}$$

Eine Konsequenz ist nun, dass wir mit Hilfe von Satz 3.4 die folgende Gleichung erhalten:

$$\begin{aligned} & E[(M^2[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} - D_c Var(\varepsilon^2))^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \\ = \ & M^4 E[([\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m})^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] - 2M^2 D_c Var(\varepsilon^2) E[[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m}|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] + D_c^2 Var(\varepsilon^2)^2 \\ = \ & \Delta_c - D_c^2 Var(\varepsilon^2)^2 + O(\frac{1}{M^2}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wir werden diese Identität später in Satz 4.5 wiederfinden.

Im folgenden Abschnitt werden wir die Ausdrücke untersuchen, die von beiden Prozessen beeinflusst werden.

3.4 Gemeinsame Einflüsse der beiden Prozesse

3.4.1 Vorbemerkungen zur Untersuchungsmethode

Der weitaus größte Teil der Summanden in

$$([Y,Y]^{(K)}_m - [Y,Y]^{(J)}_m)^2$$

besteht aus Termen, in denen sowohl der Prozess X als auch die Störterme ε eine Rolle spielen. In der Darstellung (3.2) sind dies die Ausdrücke $(I)_{K,J,m}$ bis $(III)_{K,J,m}$ sowie $[X,\varepsilon]_{K,J,m}$. Wir werden im folgenden zeigen, dass jeder der ersten drei Terme im Vergleich zu den beiden bereits untersuchten Ausdrücken $[X,X]_{K,J,m}$ und $[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m}$ eine kleinere Ordnung besitzt, so dass die gemeinsamen Einflüsse in einem zentralen Grenzwertsatz keine Rolle mehr spielen. Den Term $[X,\varepsilon]_{K,J,m}$ werden wir danach gesondert betrachten, da er trotz seiner Zentriertheit einen Beitrag zum Grenzwertsatz liefern wird.

Vor Beginn dieser Untersuchungen wollen wir kurz auf die im Anhang in Satz 5.5 formulierte Burkholder-Ungleichung hinweisen, die uns bei der Berechnung von Erwartungswert und/oder Varianz der zu betrachtenden Ausdrücke mehrfach unterstützen wird.

3.4.2 Die Analyse von $(I)_{K,J,m}$

In diesem Abschnitt werden wir die Ordnung von Ausdrücken der Form

$$[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,\varepsilon]_m^{(B)} = \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}} \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} \frac{(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-A}{n}})(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-A}{n}})(X_{\frac{j}{n}} - X_{\frac{j-B}{n}})(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-B}{n}})}{(\frac{n}{M} - A + 1)(\frac{n}{M} - B + 1)} \tag{3.9}$$

berechnen und dabei ausführlich die Argumente präsentieren, mit denen wir später auch die anderen Behauptungen beweisen wollen. Zunächst werden wir mit Hilfe der Burkholder-Ungleichung eine Aussage über das asymptotische Verhalten von Potenzen von Zuwächsen des Prozesses X herleiten.

Lemma 3.5 *Es gilt für $A = O(n^{\frac{2}{3}})$ und ein gerades $\alpha > 0$:*

$$(X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-A}{n}})^\alpha = O_P((\frac{A}{n})^{\frac{\alpha}{2}}).$$

Beweis: Wir erhalten aufgrund der Konvexität von $x \mapsto x^\alpha$ für eine davon abhängige Konstante c_α

$$\begin{aligned} E[(X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-A}{n}})^\alpha] &= E[(\int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l}{n}} \mu_u du + \int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l}{n}} \sigma_u dW_u)^\alpha] \\ &\leq c_\alpha(E[(\int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l}{n}} \mu_u du)^\alpha] + E[(\int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l}{n}} \sigma_u dW_u)^\alpha]). \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden nutzen wir die fast sichere Beschränktheit von μ gemäß Abschnitt 5.1 aus und erhalten

$$E[(\int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l}{n}} \mu_u du)^\alpha] = O((\frac{A}{n})^\alpha).$$

Zur Berechnung der Ordnung des zweiten Summanden werden wir wie angekündigt die Burkholder-Ungleichung benutzen. Wir definieren für $t \in [0, \frac{A}{n}]$

$$\tilde{M}_t := \int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l-A}{n}+t} \sigma_u dW_u$$

und erhalten gemäß Satz 5.5 und wegen der fast sicheren Beschränktheit von σ

$$E[(\int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l}{n}} \sigma_u dW_u)^\alpha] = E[\sup_{t\in[0,\frac{A}{n}]} (\tilde{M}_t)^\alpha] \leq C_\alpha E[\langle \tilde{M}, \tilde{M}\rangle_{\frac{A}{n}}^{\frac{\alpha}{2}}] = C_\alpha E[(\int_{\frac{l-A}{n}}^{\frac{l}{n}} \sigma_u^2 du)^{\frac{\alpha}{2}}] = O((\frac{A}{n})^{\frac{\alpha}{2}}).$$

Wir führen diese beiden Resultate zusammen und es ergibt sich

$$E[(X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-A}{n}})^\alpha] = O((\frac{A}{n})^\alpha) + O((\frac{A}{n})^{\frac{\alpha}{2}}) = O((\frac{A}{n})^{\frac{\alpha}{2}}),$$

insgesamt also

$$(X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-A}{n}})^\alpha = O_P((\frac{A}{n})^{\frac{\alpha}{2}}).$$

□

Dieses Lemma wird uns nun direkt eine Aussage über die Ordnung von $(I)_{K,J,m}$ liefern. Im Prinzip beruht der im Anschluss formulierte Satz wie auch die gesamte folgende Diskussion der weiteren gemischten Terme nur noch auf eben diesem Lemma, den im Appendix diskutierten Identitäten und der Unabhängigkeit der beiden zu Grunde liegenden Prozesse. Konkret ergibt sich

Satz 3.6 *Für A und B von der Ordnung $n^{\frac{2}{3}}$ gilt:*

$$[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,\varepsilon]_m^{(B)} = O_P(\frac{1}{n}).$$

Beweis: Wegen der Unabhängigkeit von X und ε und weil der Erwartungswert von $\varepsilon_{\frac{i}{n}}$ verschwindet, gilt für festes i, dass

$$E[(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-A}{n}})(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-A}{n}})(X_{\frac{j}{n}} - X_{\frac{j-B}{n}})(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-B}{n}})] \tag{3.10}$$

nur in maximal vier Fällen der Wahl von j ungleich 0 ist. In zweien dieser möglichen Fälle, nämlich für $i = j$ und $i - A = j - B$, überschneiden sich die Intervalle, über die wir die Zuwächse des Prozesses X betrachten. Die beiden anderen Varianten liefern disjunkte Intervalle. Aufgrund unserer Vorbereitungen in (5.11) bis (5.13) lässt sich nun leicht zeigen, dass die Ordnung des Produkts der Zuwächse von X in den ersten beiden Fällen größer als im disjunkten Fall ist. Wir erhalten exemplarisch für $i = j$

$$(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-A}{n}})(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-B}{n}}) = O_P(\frac{A}{n}).$$

Formal ist

$$[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,\varepsilon]_m^{(B)}$$

eine Doppelsumme, wobei die Anzahl der Summanden jeweils von der Ordnung $\frac{n}{M}$ ist. Als Konsequenz aus (3.9), wo wir erkannt haben, dass es für festes i nur vier mögliche Wahlen des zweiten Indizes gibt, wissen wir allerdings, dass anstatt der Doppelsumme praktisch nur eine Summe in die Berechnung der Ordnung einfließen wird. Es ergibt sich damit unter Berücksichtigung der Vorfaktoren

$$[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,\varepsilon]_m^{(B)} = O_P(\frac{n}{M}\frac{A}{n}\frac{M^2}{n^2}) = O_P(\frac{1}{n}).$$

□

Als Konsequenz aus Satz 3.6 erhalten wir aufgrund der Definition von $(I)_{K,J,m}$ als Summe über Ausdrücke der Form $[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,\varepsilon]_m^{(B)}$ sofort

$$(I)_{K,J,m} = O_P(\frac{1}{n}),$$

und wir können als Vorgriff auf die spätere Formulierung des Grenzwertsatzes bereits jetzt konstatieren, dass für den Anteil von $(I)_{K,J,m}$ in der Teststatistik T_n gemäß (3.1) auch

$$M\sum_{m=1}^{M}(I)_{K,J,m} = O_P(\frac{1}{M}) = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}}) \tag{3.11}$$

gilt, wobei wir die Bedingung $M = n^{\frac{1}{3}}$ benutzt haben.

3.4.3 Die Analyse von $(II)_{K,J,m}$

Wir berechnen im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt hier nicht die Ordnung von $(II)_{K,J,m}$ und summieren erst danach wie in (3.11) über die m, sondern wir betrachten direkt

$$M\sum_{m=1}^{M}[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}.$$

Wir werden die Ordnung dieser Summe nun mittels der Markov-Ungleichung berechnen.

Satz 3.7 *Es gilt:*

$$M\sum_{m=1}^{M}[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)} = O_P(\frac{1}{M}) = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}}).$$

Beweis: Wir errechnen zunächst

$$\begin{aligned} E[(M\sum_{m=1}^{M}[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)})^2] &= M^2\sum_{m=1}^{M}E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^2([X,X]_m^{(B)})^2] \\ &+ M^2\sum_{\substack{m,m'=1\\ m\neq m'}}^{M}E[[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}[X,X]_{m'}^{(B)}]. \end{aligned}$$

Den ersten Summanden hatten wir bereits in Satz 3.6 bzw. in Abschnitt 3.2 untersucht, wo wir nämlich

$$([X,\varepsilon]_m^{(A)})^2 = O_P(\frac{1}{n}),$$

und

$$([X,X]_m^{(B)})^2 = O_P(\frac{1}{M^2})$$

erhalten hatten. Leider lassen sich diese Eigenschaften nicht direkt auf den hier zu diskutierenden Fall übertragen, weil sich aus den Ordnungen der einzelnen Faktoren keine allgemeine Aussage über das Verhalten des Produkts herleiten lässt. Allerdings erhalten wir mit praktisch denselben Methoden wie im Beweis von Satz 3.6 das vermutete Resultat, nämlich

$$E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^2([X,X]_m^{(B)})^2] = O_P(\frac{1}{nM^2}).$$

Wir verzichten auf die explizite Angabe der Argumentation. Insgesamt ergibt sich dann

$$M^2 \sum_{m=1}^{M} E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^2([X,X]_m^{(B)})^2] = O(M^3 \frac{1}{nM^2}) = O(\frac{1}{M^2}).$$

Den zweiten Summanden müssen wir ganz ähnlich betrachten. Wir sehen recht schnell, dass die Zufallsvariablen

$$[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}$$

bzgl. m unkorreliert zum Abstand 1 sind, das heißt

$$E[[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}[X,X]_{m'}^{(B)}] = 0$$

für $|m-m'| > 1$. De facto ist

$$[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}[X,X]_{m'}^{(B)}$$

eine Vierfachsumme, jeder Summand enthält allerdings zwei Differenzen von ε-Termen, deren Indizes aus den Intervallen $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ bzw. $[\frac{m'-1}{M}, \frac{m'}{M}]$ stammen. Sofern diese Intervalle disjunkt sind, sind offensichtlich auch alle Erwartungswerte über Produkte dieser ε-Terme gleich 0 und damit auch die gesamte Summe.

So wird also bzgl. der Ordnung des Ausdrucks analog zur Diskussion im Beweis von Satz 3.6 auch in diesem Fall aus der Doppelsumme über die $m \neq m'$ effektiv nur eine einfache Summe. Die Ordnung der übrig bleibenden Summanden des Typs

$$E[[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}[X,X]_{m'}^{(B)}]$$

lässt sich dann mit denselben Argumenten wie im ersten Fall ebenfalls durch $\frac{1}{nM^2}$ abschätzen, so dass auch hier

$$M^2 \sum_{\substack{m,m'=1 \\ m \neq m'}}^{M} E[[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}[X,X]_{m'}^{(B)}] = O_P(\frac{1}{M^2})$$

und damit die Behauptung folgt. □

Offensichtlich enthält $(II)_{K,J,m}$ nur Summanden vom Typ $[X,\varepsilon]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}$, so dass sich insgesamt

$$M \sum_{m=1}^{M} (II)_{K,J,m} = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}})$$

ergibt.

3.4.4 Die Analyse von $(III)_{K,J,m}$

Wir hatten bereits zu Beginn dieses Kapitels kurz darauf hingewiesen, dass die Schätzer $[Y,Y]_m^{(K)}$ und $[Y,Y]_m^{(J)}$ in unserer Untersuchung keine exakten Kopien von entsprechenden Ausdrücken aus [24] sind. Der Grund dafür wird nun speziell in der Analyse des Terms $(III)_{K,J,m}$ in (3.2) zu erkennen sein. Wir werden hier unter anderem das asymptotische Verhalten von

$$([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])$$

untersuchen und sind zu diesem Zweck darauf angewiesen, die Ordnung dieses Terms mittels des klassischen zentralen Grenzwertsatzes angeben zu können. Wir haben deshalb

$$[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} = \frac{1}{\frac{n}{M} - B + 1} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+B}^{\frac{nm}{M}} (\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-B}{n}})^2$$

so definiert, dass der Erwartungswert dieses Terms genau $2E[\varepsilon^2]$ ist. In [24] war der Vorfaktor in diesem Ausdruck nur ein $\frac{1}{B}$, was zwar von derselben Ordnung wie im jetzigen Fall ist, aber nicht die stochastische Konvergenz von $[\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)}$ gegen $2E[\varepsilon^2]$ liefert. Diese Tatsache werden wir nun ausnutzen.

Wir gehen ansonsten genauso vor wie im vorherigen Abschnitt und werden direkt

$$M \sum_{m=1}^{M} (III)_{K,J,m} = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}})$$

zeigen, indem wir gemäß der Definition von $(III)_{K,J,m}$ die folgende Aussage beweisen:

Satz 3.8 *Es gilt:*

$$M \sum_{m=1}^{M} [X,\varepsilon]_m^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2]) = O_P(\frac{1}{M}) = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}}).$$

Beweis: Wir betrachten auch hier die zweiten Momente der zu untersuchenden Summe und werden letztlich erneut die 1-Abhängigkeit der Summanden bzgl. m ausnutzen. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
& E[(M \sum_{m=1}^{M} [X,\varepsilon]_m^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2]))^2] \\
= \ & M^2 \sum_{m=1}^{M} E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^2([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^2] \\
+ \ & M^2 \sum_{\substack{m,m'=1 \\ m \neq m'}}^{M} E[[X,\varepsilon]_m^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_{m'}^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])].
\end{aligned}$$

Anders als in den Sätzen zuvor wollen wir die Ordnung des ersten Summanden mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung errechnen. Wir werden also

$$E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^2([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^2] \leq E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^4]^{\frac{1}{2}} E[([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^4]^{\frac{1}{2}}$$

benutzen und uns so mit der Ordnung der vierten Potenzen der beiden Faktoren auseinandersetzen müssen.

Es ergibt sich für den zweiten Faktor

$$E[([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^4] = O(\frac{1}{B^2}),$$

was, ohne in Details zu gehen, im wesentlichen eine Folge aus dem zentralen Grenzwertsatz ist. Wir erhalten beispielsweise, dass

$$\sqrt{\frac{n}{M} - B + 1}([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])$$

asymptotisch normalverteilt ist, so dass in der Untersuchung des Konvergenzverhaltens von

$$([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^2$$

ein ähnliches Resultat (z. B. die Konvergenz gegen eine χ^2-Verteilung) mit einem Vorfaktor der Ordnung B plausibel ist. Außerdem existieren die für die Grenzverteilung in der vierten Potenz relevanten Momente der $\varepsilon_{\frac{i}{n}}$, speziell benutzen wir wieder die Voraussetzung $E[\varepsilon^8] < \infty$.

Die Ordnung des ersten Faktors lässt sich nicht direkt erkennen. Formal ist

$$([X,\varepsilon]_m^{(A)})^4$$

eine Vierfachsumme, so dass wir ähnlich wie in Satz 3.6 abzählen müssen, wie viele Summanden tatsächlich einen nicht verschwindenden Beitrag zum Erwartungswert liefern. Ohne die Vorfaktoren und wegen der Unabhängigkeit der beiden Prozesse beschränken wir uns an dieser Stelle zunächst auf die Untersuchung von

$$\sum_{i,j,k,l=\frac{n(m-1)}{M}+A}^{\frac{nm}{M}} E[(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-A}{n}})(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-A}{n}})(\varepsilon_{\frac{k}{n}} - \varepsilon_{\frac{k-A}{n}})(\varepsilon_{\frac{l}{n}} - \varepsilon_{\frac{l-A}{n}})].$$

Jeder dieser Summanden besteht nach Ausmultiplikation aus einer endlichen Summe von Ausdrücken der Form

$$E[\varepsilon_{\frac{i}{n}}\varepsilon_{\frac{j}{n}}\varepsilon_{\frac{k}{n}}\varepsilon_{\frac{l}{n}}].$$

Aus der Unabhängigkeit der einzelnen ε_{t_i} und wegen ihrer Zentriertheit ergibt sich, dass nur solche Erwartungswerte nicht verschwinden, in denen entweder alle vier Indizes dieselben sind oder paarweise jeweils zwei. Offensichtlich gibt es dann $O(\frac{n}{M})$ Tupel (i,j,k,l), die $E[\varepsilon^4]$

liefern, und $O(\frac{n^2}{M^2})$ Tupel (i,j,k,l), die im wesentlichen $E[\varepsilon^2]^2$ enthalten. Aus der ursprünglichen Vierfachsumme wird so nur noch eine Zweifachsumme, die wir bei der Berechnung der Ordnung berücksichtigen müssen.

Mit denselben Argumenten wie in Satz 3.6 können wir zudem rechtfertigen, dass die noch zu betrachtenden

$$E[(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-A}{n}})(X_{\frac{j}{n}} - X_{\frac{j-A}{n}})(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-A}{n}})(X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-A}{n}})]$$

die Ordnung $O(\frac{A^2}{n^2})$ besitzen.

Insgesamt ergibt sich dann

$$([X,\varepsilon]_m^{(A)})^4 = O(\frac{1}{A^4}\frac{n^2}{M^2}\frac{A^2}{n^2}) = O(\frac{1}{M^2A^2}),$$

so dass wir

$$M^2\sum_{m=1}^{M} E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^2([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^2] = O(M^3(\frac{1}{B^2})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{M^2A^2})^{\frac{1}{2}}) = O(\frac{1}{M^2})$$

erhalten.

Den zweiten Summanden behandeln wir ebenfalls so wie im Beweis von Satz 3.7. Für $|m-m'| > 1$ sind $[X,\varepsilon]_m^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])$ und $[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_{m'}^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])$ unkorreliert und zentriert, da nach Voraussetzung die ersten und dritten Momente der ε-Terme verschwinden. Dadurch geht die Doppelsumme über die $m \neq m'$ nur einfach in die Berechnung der Ordnung ein.

Die Analyse der dann noch verbleibenden Terme lässt sich beispielsweise durch eine doppelte Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die vorherige Untersuchung zurückführen. Es gilt

$$\begin{aligned}
& E[[X,\varepsilon]_m^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_{m'}^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])] \\
\leq\ & E[([X,\varepsilon]_m^{(A)})^4]^{\frac{1}{4}} E([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^4]^{\frac{1}{4}} E[([X,\varepsilon]_{m'}^{(A)})^4]^{\frac{1}{4}} E[([\varepsilon,\varepsilon]_{m'}^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])^4]^{\frac{1}{4}} \\
=\ & O((\frac{1}{B^2})^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{M^2A^2})^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{B^2})^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{M^2A^2})^{\frac{1}{4}}) = O(\frac{1}{MB^2}).
\end{aligned}$$

Letztlich führt uns das zu

$$M^2\sum_{\substack{m,m'=1\\ m\neq m'}}^{M} E[[X,\varepsilon]_m^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])[X,\varepsilon]_{m'}^{(A)}([\varepsilon,\varepsilon]_{m'}^{(B)} - 2E[\varepsilon^2])] = O(M^3\frac{1}{MB^2}) = O(\frac{1}{M^2})$$

und damit zur gewünschten Aussage. □

3.4.5 Das Verhalten von $[X, \varepsilon]_{K,J,m}$

Der letzte Term in unserer Analyse von

$$([Y, Y]_m^{(J)} - [Y, Y]_m^{(K)})^2$$

ist nun der Ausdruck

$$[X, \varepsilon]_{K,J,m} = 2([X, X]_m^{(K)} - [X, X]_m^{(J)})(([\varepsilon, \varepsilon]_m^{(K)} - 2E[\varepsilon^2]) - ([\varepsilon, \varepsilon]_m^{(J)} - 2E[\varepsilon^2])),$$

der gewissermaßen eine Synthese aus den separaten Einflüssen beider Prozesse darstellt. Jeder der beiden Faktoren liefert quadriert den Schätzer $[X, X]_{K,J,m}$ bzw. $[\varepsilon, \varepsilon]_{K,J,m}$, so dass sich (heuristisch betrachtet) bereits anhand der Struktur von $[X, \varepsilon]_{K,J,m}$ erkennen lässt, dass seine Ordnung dieselbe wie in den einzelnen Fällen ist. Wir können daher erwarten, dass dieser gemischte Term einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf den später zu formulierenden Grenzwertsatz haben wird. Diesen Einfluss wollen wir im folgenden quantifizieren.

Wir gehen dabei ähnlich wie in Abschnitt 3.2 so vor, dass anstatt des Ausdrucks $[X, \varepsilon]_{K,J,m}$ eine approximierte Variante betrachtet wird, in der wir die Zuwächse von X im Prinzip durch die entsprechenden Zuwächse von W angenähert haben.

Satz 3.9 *Es gilt:*

$$M \sum_{m=1}^{M} E[\sigma^2_{\frac{m-1}{M}} [W, \varepsilon]_{K,J,m} | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = 0$$

und

$$M^2 \sum_{m=1}^{M} E[\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} ([W, \varepsilon]_{K,J,m})^2 | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$$
$$= \sum_{m=1}^{M} 4\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{c} + \frac{3}{8c^2} + \frac{5}{24c^3} - \frac{1}{24c^4} - \frac{1}{24c^5})(\frac{1}{c} - \frac{1}{c^2})}{M^2(1 - \frac{1}{2c})^4} Var(\varepsilon^2) + o(\frac{1}{M}).$$

Beweis: Die bedingte Zentriertheit von $[W, \varepsilon]_{K,J,m}$ ergibt sich aus der Unabhängigkeit der beiden Prozesse und aus der Identität

$$E[[\varepsilon, \varepsilon]_m^{(K)}] = E[[\varepsilon, \varepsilon]_m^{(J)}] = 2E[\varepsilon^2].$$

Formal ganz korrekt ist diese Argumentation nicht, da die Zufallsvariable $\varepsilon_{\frac{m-1}{M}}$ ein Summand von $[W, \varepsilon]_{K,J,m}$ ist, dabei jedoch von $\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}$ abhängt. Allerdings ist der Fehler von genügend kleiner Ordnung. Alternativ bietet sich eine Modifikation des Schätzers dahingehend an, dass die Summanden $(\varepsilon_{\frac{m-1}{M}+\frac{K}{n}} - \varepsilon_{\frac{m-1}{M}})$ bzw. $(\varepsilon_{\frac{m-1}{M}+\frac{J}{n}} - \varepsilon_{\frac{m-1}{M}})$ konsequent aus den betrachteten Ausdrücken gestrichen werden, wir also T_n leicht abändern. Wir wollen das an dieser Stelle jedoch nicht vertiefen.

Die Berechnung des zweiten Ausdrucks lässt sich auf unsere Resultate aus den Sätzen 3.2 und 3.4 zurückführen. Weil die beiden Prozesse W und ε sowohl von ihrer Vorgeschichte als auch untereinander unabhängig sind, gilt für die Bildung des bedingten Erwartungswerts

$$\begin{aligned} E[(\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}[W,\varepsilon]_{K,J,m})^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] &= 4\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} E[[W,W]_{K,J,m}]\ E[[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m}] \\ = 4\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} & \frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{c}+\frac{3}{8c^2}+\frac{5}{24c^3}-\frac{1}{24c^4}-\frac{1}{24c^5})(\frac{1}{c}-\frac{1}{c^2})}{M^4(1-\frac{1}{2c})^4} Var(\varepsilon^2) + O(\frac{1}{M^8}). \end{aligned}$$

Daraus folgt offensichtlich die Behauptung. □

3.5 Die Approximation der Funktionale von X

In diesem Abschnitt wollen wir uns der mathematischen Begründung dafür widmen, dass wir bislang mehrfach von X beeinflusste Größen durch Ausdrücke ersetzt haben, die von dem Prozess σ_t und der zu Grunde liegenden Brownschen Bewegung abhängen. Konkret haben wir in Kapitel 3.2 und implizit auch in Abschnitt 3.4.5 die Annahme gemacht, dass sich die Produkte der Zuwächse des Prozesses X vom Typ

$$(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-A}{n}})^2(X_{\frac{l}{n}} - X_{\frac{l-B}{n}})^2$$

im Intervall $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ durch die entsprechenden Zuwächse der Brownschen Bewegung, multipliziert mit $\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}$, approximieren lassen. Eine Konsequenz aus dieser Näherung war, dass wir nicht das asymptotische Verhalten von

$$[X,X]_m^{(A)}[X,X]_m^{(B)}$$

betrachtet, sondern uns bloß mit

$$\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(A)}[W,W]_m^{(B)}$$

auseinandergesetzt haben. Wir wollen im folgenden ausführen, warum diese Approximation gerechtfertigt ist und beweisen dies, indem wir ähnlich wie in den vorherigen Untersuchungen zeigen, dass die Differenz der beiden Ausdrücke von kleiner Ordnung ist.

Wir werden den Beweis der Approximierbarkeit dabei ohne Einschränkung nur für den Fall $A = J$ und $B = K$ führen. Die beiden anderen Möglichkeiten stellen nur solche Fälle dar, in denen A und B denselben Wert besitzen. Wir werden in den folgenden Ausführungen sehen, dass die vorgestellten Methoden auch in den nicht betrachteten Varianten funktionieren, aber dass die Rechnungen in diesen Fällen deutlich einfacher werden würden.

Inhaltlich orientieren wir uns vor allem an den Ausführungen in [20], insbesondere nehmen wir an, dass Drift und Volatilität die in Abschnitt 5.1 präzisierten Bedingungen an sie erfüllen.

Satz 3.10 *Es gilt:*

$$M\sum_{m=1}^{M}([X,X]_m^{(J)}[X,X]_m^{(K)} - \sigma^4_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(J)}[W,W]_m^{(K)}) = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}}).$$

Beweis: Wir nutzen zunächst die Darstellung

$$\begin{aligned}
& M\sum_{m=1}^{M}([X,X]_m^{(J)}[X,X]_m^{(K)} - \sigma^4_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(J)}[W,W]_m^{(K)}) \\
=\ & M\sum_{m=1}^{M}\sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(K)}([X,X]_m^{(J)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(J)}) \\
+\ & M\sum_{m=1}^{M}\sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(J)}([X,X]_m^{(K)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(K)}) \qquad (3.12) \\
+\ & M\sum_{m=1}^{M}([X,X]_m^{(J)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(J)})([X,X]_m^{(K)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(K)}) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

aus und beschränken uns aus Symmetriegründen von nun an auf die Untersuchung der Terme (3.12) und (3.13).

Untersuchung von (3.12):
Der erste Schritt im Beweis besteht darin, den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anzuwenden. Wir definieren

$$\Delta_i^K X := (X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-K}{n}})$$

bzw.

$$\Delta_i^K W := (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})$$

und erhalten gemäß der Definition der Ausdrücke für Zwischenstelle ξ_i mit

$$\xi_i \in [\min\{\Delta_i^K X, \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W\}, \max\{\Delta_i^K X, \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W\}]$$

die Identität

$$\begin{aligned}
& [X,X]_m^{(K)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(K)} \\
=\ & \frac{1}{\frac{n}{M} - K + 1}\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \Big\{(\Delta_i^K X)^2 - (\sigma_{\frac{m-1}{M}}(\Delta_i^K W))^2\Big\} \\
=\ & \frac{1}{\frac{n}{M} - K + 1}\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} 2\sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W) \\
+\ & \frac{1}{\frac{n}{M} - K + 1}\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} 2(\xi_i - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen

$$|\xi_i - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W| \leq |\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W|$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&M \sum_{m=1}^{M} \sigma^2_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} ([X,X]_m^{(K)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(K)}) \\
&= \frac{M}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^2_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} ((\Delta_i^K X)^2 - (\sigma_{\frac{m-1}{M}} (\Delta_i^K W))^2) \\
&\leq \frac{2M}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W (\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)) \\
&+ |\frac{M}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} [W,W]_m^{(J)} 2(\xi_i - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)| \\
&\leq \frac{2M}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W (\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)) \qquad (3.14) \\
&+ \frac{2M}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)^2. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Ordnung der beiden Summanden werden wir im folgenden einige Hilfsaussagen aus Abschnitt 2.4.5 in [20] benutzen, speziell die Identität (2.71) und Lemma 2.27. Auf deren konkrete Aussagen gehen wir später ein.

Wir betrachten zunächst mit (3.14) den ersten Summanden und spalten ihn in zwei Ausdrücke auf. Dabei benutzen wir Bedingung 5.1 aus dem Anhang, die uns eine Darstellung von σ_s liefert, und erhalten

$$\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W = \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \mu_s ds + \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\sigma_s - \sigma_{\frac{m-1}{M}}) dW_s = \frac{1}{\sqrt{M}} (\zeta(1)_m^{i,K} + \zeta(2)_m^{i,K}) \tag{3.16}$$

mit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{M}} \zeta(1)_m^{i,K} \\
:= &\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\mu_s - \mu_{\frac{m-1}{M}}) ds + \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\int_{\frac{m-1}{M}}^{s} a_u du + \int_{\frac{m-1}{M}}^{s} (\nu_u - \nu_{\frac{m-1}{M}}) dW_u + \int_0^s (\tau_u - \tau_{\frac{m-1}{M}}) dV_u) dW_s
\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\zeta(1)_m^{i,K} := \frac{K}{n}\mu_{\frac{m-1}{M}} + \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \nu_{\frac{m-1}{M}}(W_s - W_{\frac{m-1}{M}})dW_s + \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \tau_{\frac{m-1}{M}}(V_s - V_{\frac{m-1}{M}})dW_s,$$

analog zur Notation in [20], dort explizit in (2.71) angeführt.

Es ergibt sich die Darstellung

$$(3.14) = \frac{2M}{\sqrt{M}(\frac{n}{M} - K + 1)} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W)\zeta(1)_m^{i,K} \tag{3.17}$$

$$+ \frac{2M}{\sqrt{M}(\frac{n}{M} - K + 1)} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W)\zeta(2)_m^{i,K}, \tag{3.18}$$

wir berechnen die Ordnung beider Terme getrennt. Für den ersten Ausdruck erhalten wir mit Hilfe der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung und aufgrund der Annahme der Beschränktheit von σ durch eine Konstante C_σ

$$E[|(3.17)|] \leq \frac{2M}{\sqrt{M}(\frac{n}{M} - K + 1)} C_\sigma^3 \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} E[|[W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W)\zeta(1)_m^{i,K}|]$$

$$\leq \frac{2M}{\sqrt{M}(\frac{n}{M} - K + 1)} C_\sigma^3 \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} E[([W,W]_m^{(J)})^2]^{\frac{1}{2}} E[(\Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{4}} E[(\zeta(1)_m^{i,K})^4]^{\frac{1}{4}}.$$

Wir erhalten aus Lemma 3.1

$$C_J := E[([W,W]_m^{(J)})^2]^{\frac{1}{2}} = O(\frac{1}{M}), \tag{3.19}$$

zudem gilt offensichtlich

$$C_K := E[(\Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{4}} = O(\frac{1}{\sqrt{M}}).$$

Beide Erwartungswerte hängen nicht von m ab. Es ergibt sich also

$$E[|(3.17)|] \leq \frac{2M}{\sqrt{M}(\frac{n}{M} - K + 1)} C_\sigma^3 C_J C_K \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} E[(\zeta(1)_m^{i,K})^4]^{\frac{1}{4}}.$$

Um die Ordnung der Doppelsumme zu berechnen, benutzen wir $K = \frac{n}{2M}$. Nach Definition von $\zeta(1)_m^{i,K}$ besteht

$$\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} E[(\zeta(1)_m^{i,K})^4]^{\frac{1}{4}}$$

aus einer Summe von $K+1$ Ausdrücken, von denen im wesentlichen jeder das vierte Moment eines Integrals mit den Grenzen $\frac{i-K}{n}$ und $\frac{i}{n}$ ist. Also liegen die Grenzen innerhalb des Intervalls $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ und haben jeweils den Abstand $\frac{M}{2}$ voneinander. Wir können daher jeden einzelnen Ausdruck so nach oben abschätzen, dass wir die Intervallgrenzen auf $\frac{m-1}{M}$ und $\frac{m}{M}$ ausdehnen und erhalten dann

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} E[(\zeta(1)_m^{i,K})^4]^{\frac{1}{4}} \leq \sum_{m=1}^{M} (K+1) E[(\zeta(1)_m^{\frac{nm}{M},\frac{m}{M}})^4]^{\frac{1}{4}}.$$

An dieser Stelle hilft uns zuletzt Lemma 2.27 aus [20]. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} E[(\zeta(1)_m^{\frac{nm}{M},\frac{m}{M}})^4]^{\frac{1}{4}} = o(1)$$

und damit insgesamt

$$E[|(3.17)|] = O(\frac{M^2}{n} \frac{1}{M} \frac{1}{\sqrt{M}} K)\ o(1) = o(\frac{1}{\sqrt{M}}).$$

Bei der Untersuchung der Terms (3.18) gehen wir anders vor. Wir nutzen dabei aus, dass nach Konstruktion von $\zeta(2)_m^{i,K}$ (und also implizit wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse der Brownschen Bewegung von ihrer Vorgeschichte) die Summanden für verschiedene m unkorreliert sind und erhalten

$$\begin{aligned}
Var((3.18)) &= Var(\frac{2M}{\sqrt{M}(\frac{n}{M} - K + 1)} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W) \zeta(2)_m^{i,K}) \\
&= \frac{4M}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \sum_{m=1}^{M} Var(\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W) \zeta(2)_m^{i,K}) \\
&= \frac{4M}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2 (\frac{n}{M} - J + 1)^2} \sum_{m=1}^{M} Var(\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+J}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} (\Delta_j^J W)^2 (\Delta_i^K W) \zeta(2)_m^{i,K}).
\end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{M}} E[(\Delta_j^J W)^2 (\Delta_i^K W) \zeta(2)_m^{i,K}] &= E[(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-J}{n}})^2 (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})]\ E[\mu_{\frac{m-1}{M}}] \\
&+\ E[(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-J}{n}})^2 (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}}) \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \nu_{\frac{m-1}{M}} (W_s - W_{\frac{m-1}{M}}) dW_s] \\
&+\ E[(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-J}{n}})^2 (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}}) \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \tau_{\frac{m-1}{M}} (V_s - V_{\frac{m-1}{M}}) dW_s] \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

und nutzen im folgenden aus, dass nach Definition der Brownschen Bewegung und aufgrund der Unabhängigkeit der beiden Prozesse die Verteilung von (W, V) dieselbe wie von $-(W, V)$ ist. Aus der Darstellung in (3.20) ergibt sich, dass eine Funktion g mit

$$\frac{1}{\sqrt{M}} E[(\Delta_j^J W)^2 (\Delta_i^K W) \zeta(2)_m^{i,K}] = g(W, V)$$

existiert und weiterhin

$$g(W, V) = -g(-W, -V)$$

gilt. Wegen der Gleichheit der Verteilung ist ferner

$$E[g(W, V)] = E[g(-W, -V)] = -E[g(W, V)],$$

so dass offenbar $E[(3.18)] = 0$ bzw.

$$\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sum_{j=\frac{n(m-1)}{M}+J}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} E[(\Delta_j^J W)^2 (\Delta_i^K W) \zeta(2)_m^{i,K}] = 0$$

folgt. Wir erhalten also für eine Konstante C die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} Var((3.18)) &= \frac{4M}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \sum_{m=1}^{M} Var(\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sigma^3_{\frac{m-1}{M}} [W, W]_m^{(J)} (\Delta_i^K W) \zeta(2)_m^{i,K}) \\ &\leq C \frac{M}{(\frac{n}{M})^2} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} \sum_{l=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} E[([W, W]_m^{(J)})^2 (\Delta_i^K W)(\Delta_l^K W)(\zeta(2)_m^{i,K})(\zeta(2)_m^{l,K})]. \end{aligned}$$

Die Abschätzung der Ordnung des Erwartungswerts werden wir wiederum mittels der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung vollziehen. Es gilt

$$\begin{aligned} & E[([W, W]_m^{(J)})^2 \; (\Delta_i^K W) \; (\Delta_l^K W) \; (\zeta(2)_m^{i,K}) \; (\zeta(2)_m^{l,K})] \\ \leq \; & E[([W, W]_m^{(J)})^4]^{\frac{1}{2}} \; E[(\Delta_i^K W)^8]^{\frac{1}{8}} \; E[(\Delta_l^K W)^8]^{\frac{1}{8}} \; E[(\zeta(2)_m^{i,K})^8]^{\frac{1}{8}} \; E[(\zeta(2)_m^{l,K})^8]^{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

mit

$$E[([W, W]_m^{(J)})^4]^{\frac{1}{2}} = O(\frac{1}{M^2}),$$

was wir später in der Analyse von (4.7), ebenfalls in Abschnitt 4.2.2, genauer betrachten wollen, und

$$E[(\Delta_i^K W)^8]^{\frac{1}{8}} = O(\frac{1}{\sqrt{M}})$$

nach den üblichen Rechenregeln für die Brownsche Bewegung. Zur Berechnung der Ordnung des letzten Faktors benutzen wir die Minkowski-Ungleichung und betrachten die einzelnen Summanden in der Definition von $\zeta(2)_m^{i,K}$ in (3.16) separat. Offenbar gilt

$$E[(\sqrt{M}(\frac{K}{n}\mu_{\frac{m-1}{M}}))^8] = O(M^4\frac{1}{M^8}) = O(\frac{1}{M^4})$$

und wir erhalten mit Hilfe der Burkholder-Ungleichung (vgl. Satz 5.5) für eine Konstante D

$$\begin{aligned} E[(\sqrt{M}\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \nu_{\frac{m-1}{M}}(W_s - W_{\frac{m-1}{M}})dW_s)^8] &\leq DM^4 E[(\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (W_s - W_{\frac{m-1}{M}})^2 ds)^4] \\ &\leq DM^4 E[(\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{m-1}{M}})^2 ds)^4] \\ &\leq DM^4\frac{1}{M^8} = O(\frac{1}{M^4}). \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich

$$E[(\zeta(2)_m^{i,K})^8]^{\frac{1}{8}} = O(\frac{1}{\sqrt{M}})$$

und letztlich insgesamt

$$\begin{aligned} &Var((3.18)) \leq O(\frac{M}{(\frac{n}{M})^2}M\frac{n^2}{M^2})\ E[([W,W]_m^{(J)})^2\ (\Delta_i^K W)\ (\Delta_l^K W)\ (\zeta(2)_m^{i,K})\ (\zeta(2)_m^{l,K})] \\ \leq\ & O(M^2)\ E[([W,W]_m^{(J)})^4]^{\frac{1}{2}}\ E[(\Delta_i^K W)^8]^{\frac{1}{8}}\ E[(\Delta_l^K W)^8]^{\frac{1}{8}}\ E[(\zeta(2)_m^{i,K})^8]^{\frac{1}{8}}\ E[(\zeta(2)_m^{l,K})^8]^{\frac{1}{8}} \\ \leq\ & O(M^2)\ O(\frac{1}{M^2})\ O(\frac{1}{M^2}) = O(\frac{1}{M^2}). \end{aligned}$$

Weil wir bereits $E[(3.18)] = 0$ errechnet hatten, ergibt sich

$$(3.18) = O(\frac{1}{M}) = o(\frac{1}{\sqrt{M}}).$$

Wir haben jetzt die Aussage für (3.14) gezeigt. Die Ordnung des zweiten Ausdrucks (3.15) lässt sich deutlich schneller berechnen. Es gilt zum einen

$$E[([W,W]_m^{(J)})^2] = O(\frac{1}{M^2})$$

wie in (3.19), zum anderen erhalten wir wegen der Konvexität von $x \mapsto x^4$

$$\begin{aligned} (\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)^4 &= (\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \mu_s ds + \int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\sigma_s - \sigma_{\frac{m-1}{M}})dW_s)^4 \\ &\leq 8(\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} \mu_s ds)^4 + 8(\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\sigma_s - \sigma_{\frac{m-1}{M}})dW_s)^4. \end{aligned}$$

Die Ordnung des ersten Summanden ist mit den üblichen Argumenten $\frac{1}{M^4}$, für den zweiten Term erhalten wir unter wiederholter Benutzung der Burkholder-Ungleichung und der Bedingung 5.1 für Konstanten C und D die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
& E[(\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\sigma_s - \sigma_{\frac{m-1}{M}}) dW_s)^4] \leq CE[(\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\sigma_s - \sigma_{\frac{m-1}{M}})^2 ds)^2] \leq CE[(\int_{\frac{i-K}{n}}^{\frac{i}{n}} (\sigma_{\frac{i}{n}} - \sigma_{\frac{m-1}{M}})^2 ds)^2] \\
= \;& C\frac{K^2}{n^2} E[(\sigma_{\frac{i}{n}} - \sigma_{\frac{m-1}{M}})^4] \leq C\frac{K^2}{n^2} E[(\int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} a_u du + \int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} \nu_u dW_u + \int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} \tau_u dV_u)^4] \\
\leq \;& 16C\frac{K^2}{n^2} (E[(\int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} a_u du)^4] + E[(\int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} \nu_u dW_u)^4] + E[(\int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} \tau_u dV_u)^4]) \\
\leq \;& D\frac{K^2}{n^2} (\frac{1}{M^4} + E[(\int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} \nu_u^2 du)^2] + E[(\int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} \tau_u^2 du)^2]) = O(\frac{1}{M^4}).
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$E[(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{2}} = O(\frac{1}{M^2}). \tag{3.21}$$

Diese beiden Abschätzungen können wir nun aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zur Berechnung der Ordnung von (3.15) benutzen. Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned}
E[[W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)^2] \;&\leq\; E[([W,W]_m^{(J)})^2]^{\frac{1}{2}} E[(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{2}} \\
&=\; O(\frac{1}{M}\frac{1}{M^2}) = O(\frac{1}{M^3})
\end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned}
E[(3.15)] \;&=\; \frac{M}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} [W,W]_m^{(J)} (\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}} \Delta_i^K W)^2 \\
&=\; O(M^2 \frac{1}{M^3}) = O(\frac{1}{M}) = o(\frac{1}{\sqrt{M}}).
\end{aligned}$$

Wir haben damit sowohl für (3.14) als auch für (3.15) die Behauptung gezeigt und können uns somit dem zweiten Ausdruck widmen.

Untersuchung von (3.13):
Die Analyse von

$$(3.13) \;=\; M \sum_{m=1}^{M} ([X,X]_m^{(J)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(J)})([X,X]_m^{(K)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}} [W,W]_m^{(K)})$$

wird sich im wesentlichen an der Argumentation aus dem ersten Teil orientieren. Wir benutzen wieder den Mittelwertsatz der Differentialrechnnung und erhalten analog zur Definition der Ausdrücke (3.14) und (3.15)

$$
\begin{aligned}
[X,X]_m^{(K)} - \sigma^2_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_m^{(K)} \leq\ & \frac{2}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} |\sigma_{\frac{m-1}{M}}||\Delta_i^K W(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)| \\
& + \frac{1}{\frac{n}{M} - K + 1} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+K}^{\frac{nm}{M}} (\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)^2. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Dieselbe Aufspaltung erhalten wir natürlich auch für die Taylor-Entwicklung der Terme in J. Bei der Berechnung der Ordnung dieser Ausdrücke heben sich Vorfaktor und Summe gegenseitig auf. Zur Untersuchung der Ordnung von (3.13) ist dann gemäß (3.22) nach Ausmultiplikation nur noch die Abschätzung von Ausdrücken der Form

$$
\begin{aligned}
& E[|(\Delta_i^K W(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W))\ (\Delta_j^J W(\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W))|] && (3.23) \\
& E[|(\Delta_i^K W(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W))\ (\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W)^2|] && (3.24) \\
& E[|(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)^2\ (\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W)^2|] && (3.25)
\end{aligned}
$$

von Bedeutung. Die Hilfsmittel dazu haben wir in der vorherigen Untersuchung schon bereitgestellt.

Wir nutzen jeweils die Cauchy-Schwarz-Ungleichung bzw. die Hölder-Ungleichung ebenso wie (3.21) aus, um für (3.23) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
& E[|(\Delta_i^K W(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W))\ (\Delta_j^J W(\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W))|] \\
\leq\ & E[(\Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{4}}\ E[(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{4}}\ E[(\Delta_j^J W)^4]^{\frac{1}{4}}\ E[(\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W)^4]^{\frac{1}{4}} \\
=\ & O(\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{1}{M}\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{1}{M}) = O(\frac{1}{M^3}),
\end{aligned}
$$

für (3.24)

$$
\begin{aligned}
& E[|(\Delta_i^K W(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W))\ (\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W)^2|] \\
\leq\ & E[(\Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{4}}\ E[(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{4}}\ E[(\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W)^4]^{\frac{1}{2}} \\
=\ & O(\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{1}{M}\frac{1}{M^2}) = O(\frac{1}{M^{\frac{7}{2}}}),
\end{aligned}
$$

und für (3.25)

$$
\begin{aligned}
& E[|(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)^2\ (\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W)^2|] \\
\leq\ & E[(\Delta_i^K X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_i^K W)^4]^{\frac{1}{2}}\ E[(\Delta_j^J X - \sigma_{\frac{m-1}{M}}\Delta_j^J W)^4]^{\frac{1}{2}} \\
=\ & O(\frac{1}{M^2}\frac{1}{M^2}) = O(\frac{1}{M^4})
\end{aligned}
$$

zu erhalten. Dadurch ergibt sich

$$E[|(3.13)|] \leq M \sum_{m=1}^{M} O(\frac{1}{M^3}) = O(\frac{1}{M}) = o(\frac{1}{\sqrt{M}})$$

und also die Behauptung. □

Eine Konsequenz dieses Satzes wird sein, dass wir bei einer Konvergenzrate von $\sqrt{M}$ für die Funktionale von W den gewonnenen Grenzwertsatz direkt auf die entsprechenden Funktionale von X übertragen können. Wir werden im nächsten Kapitel beweisen, dass dies auch tatsächlich die richtige Konvergenzrate ist, und aus dem Grenzwertsatz einen Test auf Homoskedastizität herleiten.

Kapitel 4

Ein Test auf Homoskedastizität

4.1 Vorbemerkungen zur Konstruktion des Tests

Wir wollen in diesem Abschnitt wie bereits angekündigt einen Test auf Homoskedastizität herleiten. Die folgende Ausarbeitung orientiert sich im wesentlichen an der Argumentation aus [9] und [12], insbesondere wird die Motivation der Teststatistik dieselbe sein. Wir werden daher kurz auf die dort diskutierten Hypothesen eingehen. Beide Arbeiten widmen sich der Analyse von Hypothesen auf bestimmte Formen der Volatilität im Diffusionsmodell, speziell

$$H_0' : \sigma^2(t,x) = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \sigma_j^2(t) \ \forall t \in [0,1] \ \forall x$$

für gegebene Funktionen σ_j^2 in [9] und als Verallgemeinerung der Abhängigkeit von σ auf beide Parameter

$$H_0'' : \sigma^2(t,X_t) = \sigma^2(t,X_t,\theta) \ \forall t \in [0,1]$$

für einen festen, aber unbekannten, d-dimensionalen Parameter θ in [12]. Auch diese zweite Hypothese kann unter bestimmten technischen Bedingungen auf die Untersuchung einer linearen Hypothese zurückgeführt werden, so dass dort im wesentlichen

$$H_0''' : \sigma^2(t,X_t) = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \sigma_j^2(t,X_t) \ \forall t \in [0,1]$$

betrachtet wird.

Als kurze Notiz ist zu bemerken, dass wir in dieser Arbeit Funktionen σ_t betrachtet haben, die von ganz anderer Art sind. Die beiden oben beschriebenen Hypothesen im Diffusionsmodell sind nicht notwendigerweise Spezialfälle unserer Annahme, dass die Volatilität ein stochastischer Prozess ist, der der Darstellung aus Abschnitt 5.1 genügt.

Die von uns im folgenden adaptierte Idee besteht darin, die zu H_0''' äquivalente Hypothese

$$\widetilde{H_0} : N^2 := \min_{\theta_1,\ldots,\theta_d \in \mathbb{R}^d} \int_0^1 (\sigma^2(t,X_t) - \sum_{j=1}^{d} \theta_j \sigma_j^2(t,X_t))^2 dt = 0$$

zur Grundlage der weiteren Untersuchungen zu machen. Ein typischer Satz aus der Hilbertraumtheorie (vgl. [1]) liefert die äquivalente Darstellung

$$N^2 = f(C_0, C_1, \ldots C_d, D) := C_0 - (C_1, \ldots C_d)D^{-1}(C_1, \ldots, C_d)^T$$

mit

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^1 \sigma^4(t, X_t)dt \\ C_i &= \int_0^1 \sigma^2(t, X_t)\sigma_i^2(t, X_t)dt,\ 1 \leq i \leq d \\ D_{ij} &= \int_0^1 \sigma_i^2(t, X_t)\sigma_j^2(t, X_t)dt,\ 1 \leq i, j \leq d. \end{aligned}$$

Das in [9] und [12] jeweils betrachtete Modell ist dabei das klassische, in dem der Prozess X direkt beobachtet werden kann. Die Darstellung von N^2 ändert sich in der von uns untersuchten gestörten Variante natürlich nicht, allerdings wird die Schätzung der oben definierten Integrale zumindest im allgemeinen Fall unmöglich. Die Idee zur Schätzung von C_i in [12] bestand darin, die entsprechenden Integrale über Riemann-Summen von Ausdrücken der Form

$$\sigma_i^2(\frac{k}{n}, X_{\frac{k}{n}})$$

zu approximieren. Im hier diskutierten Modell mit Störungen ist dieser Weg offensichtlich nicht zu beschreiten, da wir keine Möglichkeit haben, Informationen über die $X_{\frac{k}{n}}$ zu erhalten. Die Schätzung der Integrale in $H_0^{'}$ dagegen ist natürlich auch in unserer Untersuchung möglich.

Wir beschränken uns hier allerdings auf die Hypothese der Homoskedastizität, d. h. wir wollen einen Test auf die Hypothese

$$H_0 : \sigma_t^2 = \sigma^2$$

für ein festes, aber unbekanntes σ^2 entwickeln.

Im homoskedastischen Fall vereinfacht sich die Darstellung von N^2 offensichtlich erheblich, es ergibt sich wegen $d = 1$ und mit

$$\sigma_1^2(t, X_t) = 1$$

die Identität

$$N^2 = f(C_0, C_1, 1) = C_0 - C_1^2 = \int_0^1 \sigma_t^4 dt - (\int_0^1 \sigma_t^2 dt)^2.$$

Wir haben nach den Vorbereitungen in Kapitel 3 nun die Möglichkeit, einen Schätzer für N^2 zu definieren und für diesen einen zentralen Grenzwertsatz herzuleiten. Konkret werden wir dazu im folgenden Schätzer $\widehat{C_0}$ und $\widehat{C_1}$ für C_0 und C_1 definieren und im Anschluss daran eine Konvergenzaussage der Form

$$\sqrt{M}\begin{pmatrix} \widehat{C_0} - C_0 \\ \widehat{C_1} - C_1 \end{pmatrix} \stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\to} \int_0^1 \Sigma_t^{\frac{1}{2}} dB_t \tag{4.1}$$

beweisen. Σ_t ist dabei eine von t abhängige Kovarianzmatrix, B_t eine von $\mathcal{F}_t$ unäbhängige zweidimensionale Brownsche Bewegung. Mittels der in Satz 5.2 beschriebenen verallgemeinerten Delta-Methode erhalten wir dann den entsprechenden Grenzwertsatz für

$$\widehat{N^2} := \widehat{C_0} - \widehat{C_1}^2.$$

Offensichtlich gilt

$$\nabla f(x_1, x_2) = (1, -2x_2),$$

so dass aus (4.1) die Aussage

$$\sqrt{M}(\widehat{N^2} - N^2) \stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\to} (1, -2C_1) \int_0^1 \Sigma_t^{\frac{1}{2}} dB_t \tag{4.2}$$

folgt.

Als Konsequenz aus Kapitel 2 haben wir mit $\widehat{\langle X, X \rangle}_1$ bereits einen Schätzer für C_1 erhalten und für diesen in Satz 2.11 auch einen Grenzwertsatz hergeleitet. Wir hatten bereits in der Diskussion dieses Satzes darauf hingewiesen, dass die dort formulierte Version einer normalverteilten Grenzvariable mit der Darstellung des Grenzprozesses als stochastischem Integral korrespondiert.

Wir werden uns im nächsten Abschnitt mit einem Grenzwertsatz für $\widehat{C_0}$ auseinandersetzen.

4.2 Der Grenzwertsatz für T_n

4.2.1 Asymptotisch vernachlässigbare Terme

Wir hatten zu Beginn von Kapitel 3 in (3.1) den Ausdruck

$$T_n := M \sum_{m=1}^{M} ([Y, Y]_m^{(K)} - [Y, Y]_m^{(J)})^2$$

definiert und im weiteren Verlauf das Verhalten einzelner Summanden in T_n untersucht. Dabei sind wir zu dem Schluss gelangt, dass nur drei Ausdrücke in der Darstellung für

$$([Y, Y]_m^{(K)} - [Y, Y]_m^{(J)})^2$$

aus Abschnitt 3.1 nicht mit der Größenordnung $o_P(\frac{1}{\sqrt{M}})$ in die gesamte Summe eingehen, nämlich

$$[X,X]_{K,J,m}, [\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} \text{ und } [X,\varepsilon]_{K,J,m}.$$

Wir wollen in einer ausführlichen Diskussion des zu Grunde liegenden Grenzwertsatzes von Jacod zunächst das asymptotische Verhalten der Einflüsse von X separat betrachten. Dabei verwenden wir, dass wir in Satz 3.10 gezeigt haben, dass

$$M\sum_{m=1}^{M}([X,X]_{K,J,m} - \sigma^4_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_{K,J,m}) = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}})$$

gilt, und sich unsere Untersuchung deswegen auf eine Konvergenzaussage für die Zufallsvariable

$$M\sum_{m=1}^{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}[W,W]_{K,J,m}$$

beschränken lässt, sofern die Konvergenzrate wie bereits angekündigt $\sqrt{M}$ beträgt.

In Anlehnung an das Resultat in Satz 3.2 definieren wir der Übersichtlichkeit halber

$$C_c := \frac{(1-\frac{1}{2c})^2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{c} + \frac{3}{8c^2} + \frac{5}{24c^3} - \frac{1}{24c^4} - \frac{1}{24c^5}}.$$

Wir haben in Satz 3.2 unter anderem bewiesen, dass

$$M^2 C_c\,[W,W]_{K,J,m} - 1$$

im wesentlichen zentriert ist und die Restterme von der Ordnung $\frac{1}{M^2}$ sind. Gleichzeitig ist beispielsweise nach [3] die Güte der Riemann-Approximation bekannt, für die wir

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} - \int_0^1 \sigma_t^4 dt = O_P(\frac{1}{M})$$

erhalten. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
M\sum_{m=1}^{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}C_c[W,W]_{K,J,m} - \int_0^1 \sigma_t^4 dt &= M\sum_{m=1}^{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}C_c[W,W]_{K,J,m} - \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} + O(\frac{1}{M}) \\
&= \sum_{m=1}^{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}(MC_c\,[W,W]_{K,J,m} - \frac{1}{M}) + O(\frac{1}{M}) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}(M^2C_c\,[W,W]_{K,J,m} - 1) + O(\frac{1}{M}).
\end{aligned}$$

Anhand dieser Vorbereitungen bietet sich als Schätzer für das Integral über die vierten Potenzen der Volatilität ganz natürlich

$$T_X^n := M \sum_{m=1}^{M} C_c[X,X]_{K,J,m} \tag{4.3}$$

bzw. nach Approximation

$$T_W^n := M \sum_{m=1}^{M} \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} C_c[W,W]_{K,J,m}$$

an. Wir werden für diesen Ausdruck im nächsten Abschnitt einen Grenzwertsatz angeben und unter anderem beweisen, dass die Konvergenzrate tatsächlich $\sqrt{M}$ beträgt. Im Anschluss daran werden wir einige Aussagen zu den Einflüssen des Prozesses ε und zu den gemischten Einflüssen herleiten, um danach in einer leicht abgewandelten Version von T_n den gewünschten Schätzer für $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ zu erhalten.

4.2.2 Der Grenzwertsatz von Jacod

Dieser Abschnitt beschäftigt sich in Anlehnung an Theorem 3-2 aus [14], das wir in Satz 5.3 im Appendix ausführlich formuliert haben, mit der Entwicklung eines zentralen Grenzwertsatzes für die Zufallsvariablen T_W^n. Dabei werden wir uns an der dort eingeführten Notation orientieren und uns entsprechend der Aussage des Satzes zunächst damit befassen, einige Eigenschaften der Größen

$$\chi_m^n := \frac{1}{\sqrt{M}} \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} (M^2 C_c\,[W,W]_{K,J,m} - 1) \tag{4.4}$$

nachzurechnen. Daraus lässt sich danach der bereits angekündigte Grenzwertsatz folgern.

Offensichtlich ist χ_m^n $\mathcal{F}_{\frac{m}{M}}$-messbar. Zudem erkennen wir, dass für χ_m^n als Produkt einer Funktion von Zuwächsen der Brownschen Bewegung (die von $\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}$ unabhängig sind) und einer $\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}$-messbaren Zufallsvariable

$$E[\chi_m^n | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} E[\frac{1}{\sqrt{M}}(M^2 C_c\,[W,W]_{K,J,m} - 1)] =: \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} E[\xi_m^n]$$

gilt. Wegen Satz 3.2 ist

$$E[\xi_m^n] = O(\frac{1}{M^{\frac{5}{2}}}) \tag{4.5}$$

und wir erhalten

$$\sum_{m=1}^{M} E[\chi_m^n | \mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \xrightarrow{P} 0. \tag{4.6}$$

Wir wenden uns nun dem Term $E[(\chi_m^n)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$ zu, für den wir

$$\begin{aligned}
E[(\chi_m^n)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] &= \frac{1}{M}\sigma^8_{\frac{m-1}{M}}(M^4C_c^2\ E[[W,W]^2_{K,J,m}] - 2M^2C_c\ E[[W,W]_{K,J,m}] + 1) \\
&= \frac{1}{M}\sigma^8_{\frac{m-1}{M}}(M^4C_c^2\ E[[W,W]^2_{K,J,m}] - 2M^2C_c\ C_c^{-1}\frac{1}{M^2} + 1) + O(\frac{1}{M^3}) \\
&= \frac{1}{M}\sigma^8_{\frac{m-1}{M}}(M^4C_c^2\ E[[W,W]^2_{K,J,m}] - 1) + O(\frac{1}{M^3})
\end{aligned}$$

erhalten.

Im folgenden wollen wir uns mit der Berechnung von $E[[W,W]^2_{K,J,m}]$ beschäftigen. Exemplarisch betrachten wir dabei $E[([W,W]_m^{(J)})^4]$ als einen der Summanden nach Anwendung der binomischen Formel auf

$$[W,W]^2_{K,J,m} = ([W,W]_m^{(K)} - [W,W]_m^{(J)})^4.$$

Wir werden dabei erkennen, wie kompliziert die exakte Berechnung des Erwartungswerts ist und uns mit der Angabe der Größenordnung dieses Terms begnügen.

Unser Augenmerk liegt nun also auf der Untersuchung von

$$\sum_{i,j,k,l=\frac{n(m-1)}{M}+J}^{\frac{nm}{M}} \frac{(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-J}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-J}{n}})^2(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-J}{n}})^2(W_{\frac{l}{n}} - W_{\frac{l-J}{n}})^2}{(\frac{n}{M} - J + 1)^4}.$$

Aus der Hölder-Ungleichung ergibt sich sofort, dass diese Zufallsvariablen $O_P(\frac{1}{M^4})$ sind, wir benötigen jedoch eine explizite Angabe ihrer Ordnung. Um zu einem exakten Ergebnis zu gelangen, müssen wir in einem ersten Schritt den Erwartungswert für jeden einzelnen Summanden berechnen. Je nach Überschneidung der Zuwächse der Brownschen Bewegung ergeben sich verschiedene Resultate, zumeist abhängig von (i,j,k,l). Wir hatten im Beweis von Lemma 3.1 gesehen, dass im Falle zweier sich überschneidender Zuwächse nur vier Möglichkeiten existieren, wie die zugehörigen Intervalle ineinander verschachtelt sind. Die hier eigentlich anstehende Betrachtung von vier Zuwächsen verkompliziert die Berechnung jedoch erheblich. Wie wollen dies im folgenden näher ausführen.

Offensichtlich gibt es bis auf Permutationen nur einen wesentlichen Fall, in dem die vier Intervalle $[i-J,i]$, $[j-J,j]$, $[k-J,k]$ und $[l-J,l]$ disjunkt sind. Natürlich gilt dann

$$E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-J}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-J}{n}})^2(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-J}{n}})^2(W_{\frac{l}{n}} - W_{\frac{l-J}{n}})^2] = \frac{J^4}{n^4},$$

unabhängig von (i,j,k,l). Bei der Abzählung all dieser Fälle erhält man, dass deren Größenordnung exakt $(\frac{n}{M})^4$: Wir wählen ohne Einschränkung die erste Variable beliebig und betrachten für jeweils die nächste Variable alle verbleibenden Kombinationen nach Festsetzung der vorherigen. Offensichtlich verschwinden mit jeder Setzung einer Variablen nur

Wahlmöglichkeiten der Größenordnung von J, so dass mindestens $(\frac{n}{M}-2J)$ von diesen übrig bleiben. Zudem gehen die Vorfaktoren mit der Ordnung $\frac{1}{J^4}$ in die Berechnung ein.

Wenn wir $E[([W,W]_m^{(J)})^4]$ als Summe der Erwartungswerte $V_{K,J,p}$ über die wesentlich verschiedenen Kombinationen der (i,j,k,l) darstellen, so erhalten wir im ersten Fall der disjunkten Zerlegungen

$$E[V_{K,J,1}] = \Lambda_c^1 \frac{1}{J^4}(\frac{n}{M})^4 \frac{J^4}{n^4} + O(\frac{1}{M^6}) = \Lambda_c^1 \frac{1}{M^4} + O(\frac{1}{M^6}).$$

Dabei ist Λ_c^1 eine Konstante, die nur von der Wahl von c in der Definition von J abhängt.

Wir wollen im folgenden kurz andeuten, dass auch die Ordnung in den anderen Fällen - also wenn die vier Intervalle nicht disjunkt sind - exakt $\frac{1}{M^4}$ ist.

Wir spalten dazu mit denselben Methoden wie im Beweis von Lemma 3.1 das Produkt über die vier Zuwächse

$$(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-J}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-J}{n}})^2(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-J}{n}})^2(W_{\frac{l}{n}} - W_{\frac{l-J}{n}})^2$$

so auf, dass wir verschiedene Summen von miteinander multiplizierten Zuwächsen erhalten, bei denen sich die zugehörigen Intervalle nicht überschneiden. Jede einzelne dieser Summen besteht dann aus Produkten von Zuwächsen, deren Exponenten sich jedes Mal zu Acht addieren. Danach lässt sich leicht ausnutzen, dass die Zuwächse normalverteilt sind, um auch im allgemeinen Fall

$$E[(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-J}{n}})^2(W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-J}{n}})^2(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-J}{n}})^2(W_{\frac{l}{n}} - W_{\frac{l-J}{n}})^2] = C\frac{J^4}{n^4}$$

zu erhalten. Ähnlich wie im disjunkten Fall besteht die Vierfachsumme weiterhin aus $(\frac{n}{M})^4$ Summanden, so dass wir bis auf einen neuen Vorfaktor dasselbe Resultat erhalten, also

$$E[V_{K,J,p}] = \Lambda_c^p \frac{1}{M^4} + O(\frac{1}{M^6}).$$

Der Grund dafür, dass wir

$$E[([W,W]_m^{(J)})^4]$$

in dieser Arbeit nicht explizit berechnen wollen, besteht darin, dass speziell in den nicht-disjunkten Fällen sehr viele Möglichkeiten bestehen, wie die Intervalle ineinander verschachtelt sein können. Sowohl die Berechnung des Erwartungswerts der Zuwächse als auch die korrekte Summierung über die zugehörigen Tupel nimmt dann sehr viel Raum ein.

Außerdem müssen bei der Berechnung von $E[[W,W]_{K,J,m}^2]$ neben $E[([W,W]_m^{(J)})^4]$ natürlich noch andere Summanden betrachtet werden. Nach Ausmultiplikation ist jeder Summand aus $E[[W,W]_{K,J,m}^2]$ bis auf Vorfaktoren von der Form

$$E[([W,W]_m^{(K)})^A([W,W]_m^{(J)})^B]$$

mit $A+B=4$. Es wird sich offensichtlich mit denselben Argumenten wie oben das Resultat aus dem Fall $B=4$ ergeben, also insgesamt

$$E[[W,W]^2_{K,J,m}] = \Gamma_c \frac{1}{M^4} + O(\frac{1}{M^6})$$

für eine Konstante Γ_c.

Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse und der äquidistanten Zerlegung von $[0,1]$ in M Teilintervalle hängt $E[[W,W]^2_{K,J,m}]$ nicht von m ab. Wir erhalten somit insgesamt

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M}(E[(\chi^n_m)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] &= \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{M}\sigma^8_{\frac{m-1}{M}}(M^4C_c^2\ E[[W,W]^2_{K,J,m}]-1)+o(1)\\ &= \frac{1}{M}(C_c^2\ \Gamma_c-1)\sum_{m=1}^{M}\sigma^8_{\frac{m-1}{M}}+o(1)\\ &\xrightarrow{P} (C_c^2\ \Gamma_c-1)\int_0^1\sigma_t^8 dt. \end{aligned} \tag{4.7}$$

In einem dritten Schritt werden wir den bedingten Erwartungswert von

$$\chi^n_m\Delta^n_m W := \chi^n_m(W_{\frac{m}{M}} - W_{\frac{m-1}{M}})$$

gegeben $\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}$ berechnen. Weil auch $\Delta^n_m W$ als Zuwachs der Brownschen Bewegung von $\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}$ unabhängig ist, gilt

$$\begin{aligned}E[\chi^n_m\Delta^n_m W|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] &= E[\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}\xi^n_m\Delta^n_m W|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = \sigma^4_{\frac{m-1}{M}}E[\xi^n_m\Delta^n_m W]\\ &= \frac{1}{\sqrt{M}}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}E[M^2C_c\ [W,W]_{K,J,m}-1)\Delta^n_m W]\\ &= \frac{1}{\sqrt{M}}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}(E[M^2C_c\ [W,W]_{K,J,m}\Delta^n_m W]-E[\Delta^n_m W])\\ &= \frac{1}{\sqrt{M}}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}M^2C_c\ E[[W,W]_{K,J,m}\Delta^n_m W].\end{aligned}$$

Wir werden im folgenden kurz andeuten, dass

$$E[\chi^n_m\Delta^n_m W|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \xrightarrow{P} 0 \tag{4.8}$$

gilt. Dazu verweisen wir analog zur Argumentation im Beweis von Satz 3.10 darauf, dass die Verteilung von W dieselbe wie die von $-W$ ist und dass auch

$$E[[W,W]_{K,J,m}\Delta^n_m W]$$

als $g(W)$ mit

$$g(W) = -g(-W)$$

darstellbar ist. Die Aussage in (4.8) ergibt sich dann entsprechend.

Als nächstes betrachten wir

$$\sum_{m=1}^{M} E[(\chi_m^n)^2 1_{\{|\chi_m^n|>\varepsilon\}}|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}].$$

Es gilt für jedes $\varepsilon > 0$ aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{M} E[(\chi_m^n)^2 1_{\{|\chi_m^n|>\varepsilon\}}|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \\ \leq &\sum_{m=1}^{M} E[(\chi_m^n)^4|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]^{\frac{1}{2}} P(|\chi_m^n| > \varepsilon|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nach Definition in (4.4) und analog zur Argumentation im Vorfeld von (4.7) ist

$$E[(\chi_m^n)^4|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{M}\sigma^8_{\frac{m-1}{M}}\ D \leq \frac{1}{M}C$$

für Konstanten C und D, denn wir können ähnlich wie in Abschnitt 5.1 im Appendix annehmen, dass σ_t^8 beschränkt ist. Ferner erhalten wir aus der bedingten Markov-Ungleichung

$$P(|\chi_m^n| > \varepsilon|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{E[|\chi_m^n||\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

und analog zur Argumentation in (4.6) ergibt sich dann

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P(|\chi_m^n| > \varepsilon|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}})^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{P} 0.$$

Insgesamt können wir nun schlussfolgern, dass

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M} E[(\chi_m^n)^2 1_{\{|\chi_m^n|>\varepsilon\}}|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] &\leq \sum_{m=1}^{M} E[(\chi_m^n)^4|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]^{\frac{1}{2}} P(|\chi_m^n| > \varepsilon|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} C P(|\chi_m^n| > \varepsilon|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{o}(1) \end{aligned} \tag{4.9}$$

gilt.

Zuletzt beweisen wir die Eigenschaft

$$\sum_{m=1}^{M} E[\chi_m^n \Delta_m^n N|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \xrightarrow{P} 0 \tag{4.10}$$

für jedes beschränkte Martingal N auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$, das zu W orthogonal bezüglich der quadratischen Variation ist. Wir fordern also

$$\langle W, N \rangle_t = 0 \; \forall t \in [0,1]$$

oder äquivalent, dass der Prozess $(WN)_t$ ein Martingal ist. Nach dem Martingaldarstellungssatz (vgl. Proposition 3.4.18 in [17]) gilt, dass aufgrund der Quadratintegrierbarkeit von χ_m^n ein bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ vorhersagbarer Prozess H_t existiert, so dass

$$\chi_m^n = E[\chi_m^n] + \int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} H_t dW_t$$

gilt. Nach Konstruktion ist χ_m^n zentriert, wir erhalten also

$$\chi_m^n = \int_{\frac{m-1}{M}}^{\frac{m}{M}} H_t dW_t.$$

Wir zeigen im folgenden, dass unter den obigen Voraussetzungen an W und N für jeden vorhersagbaren Prozess f_t und für beliebige Grenzen a und b die Identität

$$E[\int_a^b f_t dW_t \; (N_b - N_a) | \mathcal{F}_a] = 0$$

gilt. Dadurch ergibt sich offensichtlich (4.10).

Weil das Itô-Integral als Grenzwert von stückweise konstanten Funktionen definiert ist, betrachten wir eine beliebige Zerlegung $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ und zeigen die Aussage für jedes k. Durch Grenzwertbildung und mit dem Satz von der dominierten Konvergenz lässt sich dann leicht die Behauptung folgern.

Zunächst ergibt sich aufgrund der Tatsache, dass die Zuwächse der Brownschen Bewegung für Zeitpunkte größer als a von $\mathcal{F}_a$ unabhängig sind, die Identität

$$\begin{aligned}
& E[\sum_{j=1}^k f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})(N_b - N_a)|\mathcal{F}_a] \\
= \; & E[\sum_{j=1}^k f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})N_b|\mathcal{F}_a] - N_a E[\sum_{j=1}^k f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_a] \\
= \; & E[\sum_{j=1}^k f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})N_b|\mathcal{F}_a] - N_a \sum_{j=1}^k (E[f_{t_{j-1}}|\mathcal{F}_a] E[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})]) \\
= \; & E[\sum_{j=1}^k f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})N_b|\mathcal{F}_a].
\end{aligned}$$

Weil die σ-Algebren $\mathcal{F}_{t_j}$ und $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ größer sind als $\mathcal{F}_a$, erhalten wir unter Ausnutzung der Martingaleigenschaften der Prozesse W, N und NW sowie den üblichen Rechenregeln für messbare Zufallsvariablen in bedingten Erwartungswerten

$$
\begin{aligned}
& E[\sum_{j=1}^{k} f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})N_b|\mathcal{F}_a] = E[\sum_{j=1}^{k} E[E[f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})N_b|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]|\mathcal{F}_a] \\
= \; & E[\sum_{j=1}^{k} E[f_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})N_{t_j}|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]|\mathcal{F}_a] = E[\sum_{j=1}^{k} f_{t_{j-1}}E[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})N_{t_j}|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]|\mathcal{F}_a] \\
= \; & E[\sum_{j=1}^{k} f_{t_{j-1}}(E[W_{t_j}N_{t_j}|\mathcal{F}_{t_{j-1}}] - W_{t_{j-1}}E[N_{t_j}|\mathcal{F}_{t_{j-1}}])|\mathcal{F}_a] \\
= \; & E[\sum_{j=1}^{k} f_{t_{j-1}}(W_{t_{j-1}}N_{t_{j-1}} - W_{t_{j-1}}N_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_a] = 0.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Insgesamt erhalten wir so als Konsequenz aus Theorem 3-2 in [14] das folgende Resultat.

Satz 4.1 *Es gilt:*

$$\sum_{m=1}^{M} \chi_m^n \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \chi.$$

Der Grenzprozess χ ist darstellbar als

$$\chi = \int_0^1 w_t dB_t,$$

wobei w_t in Anlehnung an (4.7) implizit durch

$$F_1 = \int_0^1 w_s^2 ds = (C_c^2\,\Gamma_c - 1)\int_0^1 \sigma_s^8 ds$$

gegeben ist. B_t ist eine von $(\mathcal{F}_t)_t$ unabhängige Brownsche Bewegung, definiert auf einer geeigneten Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$.

Beweis: Der benutzte Grenzwertsatz von Jacod ist in Satz 5.3 im Anhang ausführlich dargestellt. Wir können ihn anwenden, da $\sum_{m=1}^{M} \chi_m^n$ nach (4.6) als Summe aus einem Martingal und einem Ausdruck kleinerer Ordnung darstellbar ist und wir in unseren Vorarbeiten (4.7) bis (4.10) die zugehörigen Bedingungen (5.3) bis (5.6) nachgerechnet haben.

Es ergibt sich also die Darstellung

$$\chi = \int_0^1 u_t dW_t + \int_0^1 w_t dB_t,$$

wobei v und w bezüglich $(\mathcal{F}_t)_t$ vorhersagbare Prozesse mit Werten in $\mathbb{R}$ sind und B_t eine von $(\mathcal{F}_t)_t$ unabhängige Brownsche Bewegung ist. Die impliziten Darstellungen für diese Prozesse sind aus (5.7) bis (5.9) ableitbar und ergeben sich wie folgt:

$$\langle W, W\rangle_t = \int_0^t v_s^2 ds,\ G_t = \int_0^t u_s v_s^2 ds \text{ und } F_t = \int_0^1 u_s^2 v_s^2 + w_s^2 ds.$$

Wir wissen nun, dass die für die quadratische Variation von W als Brownscher Bewegung

$$\langle W, W\rangle_t = t$$

gilt, so dass sich

$$v_s = 1\ \forall s \ \text{ f. s.}$$

folgern lässt. Als Konsequenz aus (4.8) ist ferner

$$G_t = 0\ \forall t,$$

wir erhalten also auch

$$u_s = 0\ \forall s \ \text{ f. s.}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wie angekündigt hat sich $\sqrt{M}$ als Konvergenzrate für T_W^n ergeben, es gilt nämlich nach Definition

$$\sqrt{M} T_W^n = \sum_{m=1}^{M} (\chi_m^n + \frac{1}{\sqrt{M}} \sigma^4_{\frac{m-1}{M}}).$$

4.2.3 Der Grenzwertsatz für die Störterme

Natürlich lässt sich aus den uns vorliegenden Beobachtungen nicht direkt der Schätzer T_X^n extrahieren, so dass wir für den endgültigen Beweis eines Grenzwertsatzes auch die Einflüsse der Störterme berücksichtigen müssen. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst ganz analog zu (4.3) den Ausdruck

$$T_\varepsilon^n := M \sum_{m=1}^{M} C_c[\varepsilon, \varepsilon]_{K,J,m},$$

die wir im folgenden näher untersuchen wollen.

Als Konsequenz aus Satz 3.4 ergibt sich

$$E[[\varepsilon, \varepsilon]_{K,J,m}] = D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2) + O(\frac{1}{M^4}),$$

wobei die Größe D_c in (3.6) definiert ist. Wir müssen zunächst Schätzer für die beiden varianzbestimmenden Ausdrücke $E[\varepsilon^2]^2$ und $E[\varepsilon^4]$ finden, mittels derer wir den Bias korrigieren wollen.

Im ersten Fall bietet sich die Delta-Methode an, weil wir aus Kapitel 2 bereits einen Schätzer für $E[\varepsilon^2]$ kennen. Wir hatten im Anschluss an Lemma 2.1

$$\widehat{E[\varepsilon^2]} = \frac{1}{2n}[Y,Y] = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}})^2$$

gesetzt und in Lemma 2.7 gezeigt, dass außer $[\varepsilon,\varepsilon]$ alle Terme in $[Y,Y]$ vernachlässigt werden können. Wir erwähnten bereits, dass mit Hilfe der Burkholder-Ungleichung die Aussage von Lemma 2.7 auch ohne Bedingung auf den Prozess X bewiesen werden kann. Wir werden diese Argumentation im folgenden noch öfter anwenden und verzichten dabei auf die explizite Angabe eines Beweises.

Methodisch verläuft die Schätzung von $E[\varepsilon^4]$ ganz analog zum obigen Fall. Wir betrachten den Ausdruck

$$S_\varepsilon^4 := \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}})^4$$

und erhalten dafür die Identität

$$\begin{aligned} E[S_\varepsilon^4] &= E[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}})^4] = E[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^4] + O(\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{2}E[(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^4] + O(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}E[\varepsilon_{\frac{i}{n}}^4 + 6\varepsilon_{\frac{i}{n}}^2\varepsilon_{\frac{i-1}{n}}^2 + \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^4] + O(\frac{1}{n}) \\ &= E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2 + O(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Diese Rechnung legt uns nahe, im nächsten Schritt einen bivariaten Grenzwertsatz für die beiden Ausdrücke $\widehat{E[\varepsilon^2]}$ und S_ε^4 aufzustellen. Mit Hilfe der Delta-Methode lässt sich danach leicht ein Schätzer für $Var(\varepsilon^2)$ finden, für den wir direkt eine Konvergenzaussage erhalten. (Ein alternativer Schätzer für $E[\varepsilon^4]$ ließe sich in Anlehnung an die Untersuchung nichtparametrischer Regression in [10] aufstellen, indem wir anstelle von $(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}})^4$ über Ausdrücke der Form $(Y_{\frac{i+1}{n}} - Y_{\frac{i}{n}})^2(Y_{\frac{i}{n}} - Y_{\frac{i-1}{n}})^4$ summieren würden. Letztlich würde sich das Resultat in jenem Fall aber nicht sonderlich von der in dieser Arbeit betrachteten Variante unterscheiden.)

Satz 4.2 *Es gilt*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{E[\varepsilon^2]} - E[\varepsilon^2] \\ S_\varepsilon^4 - (E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\Sigma)$$

mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11} &= E[\varepsilon^4] \\
\Sigma_{12} &= \Sigma_{21} = E[\varepsilon^6] + 9E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2] - 6E[\varepsilon^2]^3 \\
\Sigma_{22} &= E[\varepsilon^8] + 20E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 16E[\varepsilon^4]^2 + 6E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 - 27E[\varepsilon^2]^4.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir werden den Beweis nur skizzieren und verweisen für Details auf den zentralen Grenzwertsatz für 1-abhängige Zufallsgrößen oder auf die Analogien zu Satz 2.6. Letzterer Satz liefert uns zudem die Behauptung über

$$\Sigma_{11} = Var(\widehat{E[\varepsilon^2]} - E[\varepsilon^2]).$$

Wir berechnen im folgenden die Varianz der zweiten Komponente. Es gilt

$$\begin{aligned}
(S_\varepsilon^4)^2 &= \frac{1}{4n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^4(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-1}{n}})^4 \\
&= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^8 + \frac{2}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^4(\varepsilon_{\frac{i-1}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-2}{n}})^4 \\
&+ (\frac{1}{4n^2} - \frac{3}{4n^3}) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j,j-1,j+1}}^{n} (\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^4(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-1}{n}})^4 + o_P(\frac{1}{n}) \\
&=: (I) + (II) + (III) + o_P(\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Wir erhalten für diese Ausdrücke

$$\begin{aligned}
E[(I)] &= \frac{1}{4n}(2E[\varepsilon^8] + 56E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 70E[\varepsilon^4]^2) + o(\frac{1}{n}). \\
E[(II)] &= \frac{2}{4n}E[(\varepsilon^4_{\frac{i}{n}} + 6\varepsilon^2_{\frac{i}{n}}\varepsilon^2_{\frac{i-1}{n}} + \varepsilon^4_{\frac{i-1}{n}})(\varepsilon^4_{\frac{i-1}{n}} + 6\varepsilon^2_{\frac{i-1}{n}}\varepsilon^2_{\frac{i-2}{n}} + \varepsilon^4_{\frac{i-2}{n}})] + o(\frac{1}{n}) \\
&= \frac{2}{4n}(E[\varepsilon^8] + 3E[\varepsilon^4]^2 + 12E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 48E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2) + o(\frac{1}{n}). \\
E[(III)] &= (\frac{1}{4} - \frac{3}{4n})E[(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^4(\varepsilon_{\frac{i-2}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-3}{n}})^4] + o(\frac{1}{n}) \\
&= (\frac{1}{4} - \frac{3}{4n})(2E[\varepsilon^4] + 6E[\varepsilon^2]^2)(2E[\varepsilon^4] + 6E[\varepsilon^2]^2) + o(\frac{1}{n}) \\
&= (\frac{1}{4} - \frac{3}{4n})(4E[\varepsilon^4]^2 + 24E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 + 36E[\varepsilon^2]^4) + o(\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt

$$(E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2)^2 = E[\varepsilon^4]^2 + 6E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 + 9E[\varepsilon^2]^4$$

und also folgt bis auf Terme kleinerer Ordnungen

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Var}(S_\varepsilon^4 - (E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2)) = E[(S_\varepsilon^4)^2] - E[S_\varepsilon^4]^2 \\
= \; & E[(S_\varepsilon^4)^2] - (E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2)^2 + o(\frac{1}{n}) \\
= \; & \frac{1}{4n}(2E[\varepsilon^8] + 56E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 70E[\varepsilon^4]^2) \\
+ \; & \frac{2}{4n}(E[\varepsilon^8] + 3E[\varepsilon^4]^2 + 12E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 48E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2) \\
- \; & \frac{3}{4n}(4E[\varepsilon^4]^2 + 24E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 + 36E[\varepsilon^2]^4) + o(\frac{1}{n}) \\
= \; & \frac{1}{n}(E[\varepsilon^8] + 20E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 16E[\varepsilon^4]^2 + 6E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 - 27E[\varepsilon^2]^4) + o(\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Zuletzt berechnen wir die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen. Wir konzentrieren uns wieder nur auf die von ε abhängigen Terme und erhalten

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon^4 \; \widehat{E[\varepsilon^2]} \; &= \; \frac{1}{4n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-1}{n}})^4 \\
&= \; \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^6 + \frac{2}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{i-1}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-2}{n}})^4 \\
&+ \; (\frac{1}{4n^2} - \frac{3}{4n^3}) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j-1,j,j+1}}^{n} (\varepsilon_{\frac{i}{n}} - \varepsilon_{\frac{i-1}{n}})^2(\varepsilon_{\frac{j}{n}} - \varepsilon_{\frac{j-1}{n}})^4 + o_P(\frac{1}{n}) \\
&=: \; (IV) + (V) + (VI) + o_P(\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Wir berechnen die Erwartungswerte wieder separat, so dass sich die folgenden Identitäten ergeben:

$$\begin{aligned}
E[(IV)] \; &= \; \frac{1}{4n}(2E[\varepsilon^6] + 30E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]) + o(\frac{1}{n}). \\
E([V)] \; &= \; \frac{2}{4n}E[(\varepsilon^2_{\frac{i}{n}} + \varepsilon^2_{\frac{i-1}{n}})(\varepsilon^4_{\frac{i-1}{n}} + 6\varepsilon_{\frac{i-1}{n}}\varepsilon_{\frac{i-2}{n}} + \varepsilon^4_{\frac{i-2}{n}})] + o(\frac{1}{n}) \\
&= \; \frac{2}{4n}(E[\varepsilon^6] + 9E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2] + 6E[\varepsilon^2]^3) + o(\frac{1}{n}). \\
E[(VI)] \; &= \; (\frac{1}{4} - \frac{3}{4n})E[(\varepsilon^2_{\frac{i}{n}} + \varepsilon^2_{\frac{i-1}{n}})(\varepsilon^4_{\frac{i-2}{n}} + 6\varepsilon^2_{\frac{i-2}{n}}\varepsilon^2_{\frac{i-3}{n}} + \varepsilon^4_{\frac{i-3}{n}})] + o_P(\frac{1}{n}) \\
&+ \; (\frac{1}{4} - \frac{3}{4n})(4E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2] + 12E[\varepsilon^2]^3) + o_P(\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Wie bei der Berechnung der Varianz der zweiten Komponente unseres Zufallsvektors heben sich die Terme der Ordnung 1 gegenseitig auf, denn es gilt

$$E[\varepsilon^2](E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2) = E[\varepsilon^2]E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^3.$$

Wir erhalten demnach insgesamt

$$Cov(\widehat{E[\varepsilon^2]} - E[\varepsilon^2], S_\varepsilon^4 - (E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2)) = \frac{1}{n}(E[\varepsilon^6] + 9E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2] - 6E[\varepsilon^2]^3).$$

□

Die Delta-Methode (vgl. Satz 5.2 und die dortige Diskussion) liefert uns wie vorhergesagt nun einen Schätzer für $Var(\varepsilon^2)$ und den zugehörigen Grenzwertsatz.

Satz 4.3 *Wir definieren*

$$\widehat{Var(\varepsilon^2)} := S_\varepsilon^4 - 4(\widehat{E[\varepsilon^2]})^2.$$

Dann gilt:

$$\sqrt{n}(\widehat{Var(\varepsilon^2)} - Var(\varepsilon^2)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \tau^2)$$

mit

$$\tau^2 = E[\varepsilon^8] + 4E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 16E[\varepsilon^4]^2 - 74E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 + 69E[\varepsilon^2]^4.$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$g(x, y) := y - 4x^2$$

und erhalten als Gradienten

$$\nabla g(x, y) = (-8x, 1).$$

Offensichtlich gilt weiterhin

$$\widehat{Var(\varepsilon^2)} = g(\widehat{E[\varepsilon^2]}, S_\varepsilon^4)$$

und

$$Var(\varepsilon^4) = g(E[\varepsilon^2], E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2).$$

so dass wir die Delta-Methode anwenden können. Wir müssen zuletzt die Varianz der eindimensionalen Normalverteilung berechnen. Zunächst gilt allgemein für beliebige x, y und für eine zweidimensionale Matrix Σ mit den Einträgen Σ_{ij}:

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y)\ \Sigma\ \nabla g(x, y)^T &= (-8x\Sigma_{11} + \Sigma_{21}, -8x\Sigma_{12} + \Sigma_{22})(-8x, 1)^T \\ &= 64x^2\Sigma_{11} - 8x(\Sigma_{12} + \Sigma_{21}) + \Sigma_{22}. \end{aligned}$$

Sofern wir die Variablen durch die konkreten Ausdrücke ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} 64x^2\Sigma_{11} &\mathrel{\hat{=}} 64E[\varepsilon^2]^2E[\varepsilon^4] \\ 8x(\Sigma_{12} + \Sigma_{21}) &\mathrel{\hat{=}} 16E[\varepsilon^2](E[\varepsilon^6] + 9E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2] - 6E[\varepsilon^2]^3) \\ \Sigma_{22} &\mathrel{\hat{=}} E[\varepsilon^8] + 20E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 16E[\varepsilon^4]^2 + 6E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 - 27E[\varepsilon^2]^4 \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \nabla g(E[\varepsilon^2], E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2)\ \Sigma\ \nabla g(E[\varepsilon^2], E[\varepsilon^4] + 3E[\varepsilon^2]^2)^T \\ &= E[\varepsilon^8] + 4E[\varepsilon^6]E[\varepsilon^2] + 16E[\varepsilon^4]^2 - 74E[\varepsilon^4]E[\varepsilon^2]^2 + 69E[\varepsilon^2]^4.\end{aligned}$$

□

Eine Konsequenz aus diesem Satz ist, dass die Konvergenzrate für den Grenzwertsatz der Störterme deutlich besser ist als die Rate $\sqrt{M}$ bei der Konvergenzaussage für die Funktionale von X. Wir werden im nächsten Abschnitt kurz auf die Diskussion des Verhaltens der gemischten Terme aus Abschnitt 3.4.5 eingehen und zeigen, dass auch für sie die Konvergenzrate $\sqrt{M}$ im Grenzwertsatz gilt.

Danach lässt sich der Schätzer T_n so modifizieren, dass wir den Einfluss von T_ε^n durch Subtraktion von

$$\widehat{T_\varepsilon^n} := C_c D_c \widehat{Var(\varepsilon^2)} \tag{4.11}$$

korrigieren und somit letztlich nur noch $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ schätzen. Durch die bessere Konvergenzrate $\sqrt{n}$ wird zumindest die Schätzung von $Var(\varepsilon^2)$ keinen Einfluss auf die asymptotische Varianz haben. Wir werden dies im folgenden formalisieren:

Korollar 4.4 *Es gilt:*

$$\widehat{T_\varepsilon^n} - C_c D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2) = O_P(\frac{1}{\sqrt{n}}) = o_P(\frac{1}{\sqrt{M}}).$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.3 und der Definition von $M = n^{\frac{1}{3}}$. □.

4.2.4 Der Grenzwertsatz für den modifizierten Schätzer

Neben den Einflüssen der Prozesse X und ε hatten wir in Satz 3.9 eine Aussage über Erwartungswert und Varianz der Einflüsse der gemischten Terme hergeleitet, also von

$$M \sum_{m=1}^{M} [X, \varepsilon]_{K,J,m}.$$

Mit ihrer Hilfe wollen wir nun zunächst den endgültigen Schätzer für

$$\int_0^1 \sigma_t^4 dt$$

definieren und danach für diesen stabile Konvergenz nachweisen.

Formal werden wir in diesem Abschnitt erneut Satz 5.3 aus dem Anhang benutzen und daher die Bedingungen nachrechnen müssen, mit deren Berechnung wir uns im Vorfeld von

Satz 4.1 bereits ausgiebig beschäftigt haben. Wir verzichten an dieser Stelle darauf, alle Eigenschaften zu untersuchen und verweisen auf die offensichtlichen Analogien. Zentral wird allerdings die Betrachtung der Bedingung (5.3) sein, da diese uns entscheidende Informationen über den Grenzprozess liefert.

Wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt werden wir den Schätzer T_n leicht modifizieren. Wir definieren also

$$T_n^{'} := M \sum_{m=1}^{M} C_c([Y,Y]_m^{(K)} - [Y,Y]_m^{(J)})^2 - \widehat{T_\varepsilon^n},$$

wobei $\widehat{T_\varepsilon^n}$ in (4.11) definiert ist, und nutzen direkt aus, dass wir den neuen Schätzer wie folgt zerlegen können:

$$\begin{aligned} T_n^{'} &= T_X^n + T_{X,\varepsilon}^n + (T_\varepsilon^n - C_c D_c Var(\varepsilon^2)) + (C_c D_c Var(\varepsilon^2) - \widehat{T_\varepsilon^n}) \\ &:= T_X^n + M \sum_{m=1}^{M} C_c[X,\varepsilon]_{K,J,m} + (T_\varepsilon^n - C_c D_c Var(\varepsilon^2)) + (C_c D_c Var(\varepsilon^2) - \widehat{T_\varepsilon^n}). \end{aligned}$$

Dabei ist T_X^n in (4.3) und $T_{X,\varepsilon}^n$ durch die zweite Identität definiert. Aus Korollar 4.4 folgt sofort

$$T_n^{'} = T_X^n + T_{X,\varepsilon}^n + (T_\varepsilon^n - C_c D_c Var(\varepsilon^2)) + o_P(\frac{1}{\sqrt{M}}),$$

so dass wir uns ausschließlich auf die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von

$$T_X^n + T_{X,\varepsilon}^n + (T_\varepsilon^n - C_c D_c Var(\varepsilon^2))$$

konzentrieren können.

Mit denselben Argumenten wie in Satz 3.10 können wir im folgenden auch $T_{X,\varepsilon}^n$ in natürlicher Weise durch

$$T_{W,\varepsilon}^n := M \sum_{m=1}^{M} C_c \sigma^2_{\frac{m-1}{M}} [W,\varepsilon]_{K,J,m}$$

approximieren. Weiterhin definieren wir

$$\eta_m^n := \frac{1}{\sqrt{M}} \sigma^2_{\frac{m-1}{M}} M^2 C_c \, [W,\varepsilon]_{K,J,m}$$

und

$$\psi_m^n := \frac{1}{\sqrt{M}} C_c(M^2[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} - D_c Var(\varepsilon^2)),$$

um die folgenden Zufallsvariablen zu erhalten:

$$\zeta_m^n := \chi_m^n + \eta_m^n + \psi_m^n.$$

Wir zeigen nun im folgenden für $\sqrt{M}\ T_n^{'}$ bzw. äquivalent für die Summe über die oben definierten Ausdrücke die stabile Konvergenz. Der Ausdruck χ_m^n bezeichnet dabei die approximierten Funktionale des Prozesses X wie in (4.4).

Satz 4.5 *Es gilt:*

$$\sqrt{M}(T_n' - \int_0^1 \sigma_t^4 dt) \stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\to} \zeta$$

mit

$$\zeta = \int_0^1 \omega_t dB_t,$$

wobei der vorhersagbare Prozess ω_t implizit durch

$$F_1 = \int_0^1 \omega_s^2 ds = (C_c^2\,\Gamma_c - 1)\int_0^1 \sigma_t^8 dt + 4C_c D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\int_0^1 \sigma_t^4 dt + C_c^2(\Delta_c - D_c^2 \mathrm{Var}(\varepsilon^2)^2)$$

gegeben ist.

Beweis: Wir zeigen die stabile Konvergenz von $\sum_{m=1}^M \zeta_m^n$ gegen den Grenzprozess ζ. Die bedingte Zentriertheit von ζ_m^n ergibt sich dabei aus den Sätzen 3.4 und 3.9 sowie aus (4.6). Wir berechnen hier ausschließlich

$$\sum_{m=1}^M E[(\zeta_m^n)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$$

und verweisen ansonsten auf die Analogien zu den Resultaten aus (4.8) bis (4.10).

Nun gilt:

$$\begin{aligned}(\zeta_m^n)^2 &= (\chi_m^n + \eta_m^n + \psi_m^n)^2 \\ &= (\chi_m^n)^2 + (\eta_m^n)^2 + (\psi_m^n)^2 + 2\chi_m^n\eta_m^n + 2\chi_m^n\psi_m^n + 2\eta_m^n\psi_m^n\end{aligned}$$

und als Konsequenz aus Satz 3.9 und den Identitäten (3.8) und (4.7) erhalten wir in einem ersten Schritt

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^M E[(\chi_m^n)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] + \sum_{m=1}^M E[(\eta_m^n)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] + \sum_{m=1}^M E[(\psi_m^n)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \\ =\ &\frac{1}{M}(C_c^2\,\Gamma_c - 1)\sum_{m=1}^M \sigma^8_{\frac{m-1}{M}} + \frac{4}{M}C_c D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\sum_{m=1}^M \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} + C_c^2(\Delta_c - D_c^2\mathrm{Var}(\varepsilon^2)^2) + o(1) \\ \stackrel{P}{\to}\ &(C_c^2\,\Gamma_c - 1)\int_0^1 \sigma_t^8 dt + 4C_c D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\int_0^1 \sigma_t^4 dt + C_c^2(\Delta_c - D_c^2\mathrm{Var}(\varepsilon^2)^2).\end{aligned}$$

Nach Definition ist ferner

$$[W,\varepsilon]_{K,J,m} = 2([W,W]_m^{(K)} - [W,W]_m^{(J)})(([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - 2E[\varepsilon^2]) - ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} - 2E[\varepsilon^2]))$$

und es gilt zum einen

$$E[([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - 2E[\varepsilon^2]) - ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} - 2E[\varepsilon^2])|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = 0$$

Andererseits lässt sich durch Nachrechnen zeigen, dass

$$E[(([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(K)} - 2E[\varepsilon^2]) - ([\varepsilon,\varepsilon]_m^{(J)} - 2E[\varepsilon^2]))^3|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$$

zwar nicht verschwindet, aber von kleiner Ordnung ist. Wegen der Unabhängigkeit der Prozesse W und ε ergibt sich dann

$$\sum_{m=1}^{M} E[\chi_m^n \eta_m^n|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = 0$$

und

$$\sum_{m=1}^{M} E[\eta_m^n \psi_m^n|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] = o(1).$$

Zuletzt erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\chi_m^n \psi_m^n = \frac{1}{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}}(M^2 C_c\,[W,W]_{K,J,m} - 1)C_c(M^2[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} - D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)) \\
=\ & \frac{1}{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} C_c \\
\times\ & (M^4 C_c\,[W,W]_{K,J,m}[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} - M^2 C_c D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\,[W,W]_{K,J,m} - M^2[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} + D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)) \\
=\ & \frac{1}{M}\sigma^4_{\frac{m-1}{M}} C_c(\frac{1}{4}M^4 C_c\,([W,\varepsilon]_{K,J,m})^2 - M^2 C_c D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\,[W,W]_{K,J,m} - M^2[\varepsilon,\varepsilon]_{K,J,m} + D_c \mathrm{Var}(\varepsilon^2)),
\end{aligned}$$

wodurch sich nach einer kurzen Rechnung

$$\sum_{m=1}^{M} E[\chi_m^n \psi_m^n|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}] \xrightarrow{P} 0$$

ergibt. Mit der Aussage von Satz 5.3 folgt die Behauptung. □

Wir haben nun das Pendant zu Satz 2.11 erhalten und eine Konvergenzaussage für

$$T_n' \to \int_0^1 \sigma_t^4 dt$$

hergeleitet. Unsere Aufgabe wird zuletzt darin liegen, für einen bivariaten Grenzwertsatz gemäß (4.1) die Kovarianz zwischen T_n' und $\widehat{\langle X, X\rangle}_1$ zu berechnen.

4.3 Die Berechnung der Kovarianz

An vielen Stellen in der Herleitung des zentralen Grenzwertsatzes aus Satz 4.5 haben wir die Varianzterme nicht explizit angegeben. Ein Beispiel war die Berechnung von $E[(\chi_m^n)^2|\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}}]$ in Abschnitt 4.2.2, wo wir uns mit dem Hinweis auf die Ordnung der Erwartungswerts von

$$([W,W]_{K,J,1})^2 = ([W,W]_1^{(K)} - [W,W]_1^{(J)})^4$$

begnügt haben. In der folgenden Untersuchung der Kovarianz zwischen den beiden Schätzern für das Integral über die vierten Potenzen von σ_t bzw. für die integrierte Volatilität müssen wir uns unter anderem mit den dritten Momenten jener Ausdrücke beschäftigen. Wir werden auch hier auf das exakte Ausrechnen der Kovarianz verzichten und stattdessen bereits an dieser Stelle auf die grundsätzlich bestehende Möglichkeit verweisen, Berechnungen dieser Art durch Simulationen zu ersetzen.

Die Kovarianz zwischen

$$T_n' = T_X^n + T_{X,\varepsilon}^n + (T_\varepsilon^n - C_c D_c Var(\varepsilon^2))$$

und

$$\widehat{\langle X,X\rangle}_1 = [Y,Y]^{(avg)} - \frac{\bar{n}}{n}[Y,Y]$$

errechnet sich gemäß der Aussage von Satz 5.3 formal so, dass wir alle Summanden des einen Schätzers jeweils mit allen Summanden des anderen Schätzers multiplizieren und danach ihren bedingten Erwartungswert berechnen müssen. Wir werden uns hier auf die Angabe der Ordnung des Produkts von T_X^n und $[Y,Y]^{(avg)}$ beschränken und uns dabei mit dem Problem auseinandersetzen, dass die beiden Konvergenzaussagen für unterschiedliche Zeitskalen aufgestellt worden sind:

In Kapitel 2 ist der relevante Grenzwertsatz für den Prozess X in Satz 2.9 zu finden, wo als Erweiterung der stabilen Konvergenz von $[X,X]$ gegen die integrierte Volatilität die Konvergenz des neuen Schätzers $[X,X]^{(avg)}$ hergeleitet wurde. $[X,X]$ ist dabei zur Erinnerung die Summe der quadratischen Differenzen benachbarter Beobachtungen, während wir

$$[X,X]^{(avg)} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}[X,X]^{(k)}$$

gesetzt haben, wobei $[X,X]^{(k)}$ die Summe der quadrierten Differenzen der Beobachtungen mit Abstand K, beginnend bei der k-ten Beobachtung, bezeichnet.

Der Unterschied zum Schätzer in Kapitel 3 bzw. zu unseren Ausführungen in Abschnitt 4.2.2 besteht darin, dass wir an Stelle von $[X,X]^{(avg)}$ eine M-fache Kopie dieses Schätzers zur Grundlage unserer Untersuchungen gemacht haben. De facto ist jedes $[X,X]_m^{(K)}$ (bis auf den Vorfaktor) selbst eine Variante von $[X,X]^{(avg)}$, nur dass sich die Beobachtungen auf das Intervall $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ beschränken. Nach Approximation durch die zu Grunde liegende

Brownsche Bewegung W haben wir dann auch eine Summe von M bedingt unabhängigen Funktionalen erhalten, durch die wir in (4.6) einen Schätzer für $\int_0^1 \sigma_t^4 dt$ herleiten konnten. Die für den Grenzwertsatz von Jacod relevante Filtration, bezüglich derer die Schätzer bedingt unabhängig waren, ist die der $(\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}})_m$ für $1 \leq m \leq M$ gewesen.

Der in [24] nur skizzierte Grenzwertsatz, auf dem die Aussage der Sätze 2.9 und 2.10 beruht, ist dagegen für $[X,X]^{(avg)}$ und in Bezug auf die Filtration $\mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}$ formuliert. Es wird ähnlich wie von uns in Abschnitt 4.2.2 gezeigt, dass nach Approximation durch die Brownsche Bewegung die quadratische Variation von

$$D_1 = [X,X]^{(avg)} - \langle X,X \rangle_1$$

als Pendant zu (5.3) bis auf Standardisierung im wesentlichen dem Ausdruck η^2 entspricht.

Für den zu formulierenden bivariaten Grenzwertsatz müssen wir demnach zu einer gemeinsamen Filtration der beiden Schätzer übergehen. Um die Messbarkeit zu bewahren, bietet es sich nur an, den Schätzer T_n' bzw. in unserem Beispiel T_X^n so darzustellen, dass der Grenzwertsatz aus Satz 4.1 bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}$ formuliert werden kann. Offenbar wird dadurch die Aussage des Satzes nicht verändert, die Darstellung wird nur um einiges komplizierter.(Eine Alternative bestünde darin, $\widehat{\langle X,X \rangle}_1$ so zu modifizieren, dass für diesen neuen Schätzer auch ein Grenzwertsatz in Bezug auf die Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{m-1}{M}})_m$ aufgestellt werden kann. Prinzipiell sollte das möglich sein, wir verzichten in dieser Arbeit aber auf eine eingehendere Untersuchung.)

In einer neuen Formulierung des Grenzwertsatzes aus Abschnitt 4.2.2 müssen wir formal an Stelle der Zufallsvariablen χ_m^n die neuen Ausdrücke ψ_i^n betrachten, die letztlich so definiert werden, dass ihre Summe über alle Zeitpunkte i aus dem Intervall $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ exakt wieder die Zufallsvariable χ_m^n ergibt. Dabei lassen sich Analogien zum Schätzer aus Kapitel 2 erkennen, speziell zur Identität (2.2). Insbesondere erhalten wir analog zur Argumentation aus Satz 2.9, dass auch in dieser umformulierten Variante die Konvergenzrate $\sqrt{M}$ beträgt.

Da wir in diesem Abschnitt nur die Argumentationsstruktur deutlich machen und erklären wollen, warum sich tatsächlich die von uns geforderte Größenordnung der Kovarianz ergibt, teilen wir χ_m^n für festes m in drei Fälle auf, von denen wir exemplarisch nur einen behandeln wollen. Entsprechend der Definition dieser Zufallsvariablen in (4.4) und aufgrund der natürlichen Aufspaltung von

$$\begin{aligned}[W,W]_{K,J,m} &= ([W,W]_m^{(K)} - [W,W]_m^{(J)})^2 \\ &= ([W,W]_m^{(K)})^2 + ([W,W]_m^{(J)})^2 - 2[W,W]_m^{(K)}[W,W]_m^{(J)}\end{aligned}$$

in drei Summanden, werden wir uns ausschließlich mit dem ersten Fall auseinandersetzen. Weil die $[W,W]_m^{(K)}$ für verschiedene m unabhängig und identisch verteilt sind, beschränken wir unsere Untersuchung weiterhin auf den Fall $m = 1$. Für diesen erhalten wir die Identität

$$
\begin{aligned}
([W,W]_1^{(K)})^2 &= \frac{1}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \sum_{i,j=K}^{\frac{n}{M}} (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})^2 (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-K}{n}})^2 \\
&= \frac{1}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} (\sum_{i=K}^{\frac{n}{M}} (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})^4 + 2 \sum_{i=K}^{\frac{n}{M}} \sum_{j=K}^{i-1} (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})^2 (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-K}{n}})^2).
\end{aligned}
$$

Die zweite Summe ist offensichtlich von größerer Ordnung, so dass wir im folgenden nur noch diese analysieren wollen. Mit der Notation

$$\Delta_p^n W^a := (W_{\frac{p+1}{n}} - W_{\frac{p}{n}})^a$$

gilt ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.7 bzw. Satz 2.9

$$(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})^2 = (\sum_{p=i-K}^{i-1} \Delta_p^n W)^2 = \sum_{p=i-K}^{i-1} \Delta_p^n W^2 + 2 \sum_{p=i-K}^{i-1} \sum_{q=i-K}^{p-1} \Delta_p^n W \Delta_q^n W$$

und also

$$
\begin{aligned}
([W,W]_1^{(K)})^2 &= \frac{1}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \sum_{i=K}^{\frac{n}{M}} \sum_{j=K}^{i-1} (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})^2 (W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j-K}{n}})^2 + O_P(\frac{K}{n^2}) \\
&= \frac{1}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \sum_{i=K}^{\frac{n}{M}} \sum_{j=K}^{i-1} (\sum_{p=i-K}^{i-1} \Delta_p^n W^2 + 2 \sum_{p=i-K}^{i-1} \sum_{q=i-K}^{p-1} \Delta_p^n W \Delta_q^n W) \\
&\quad \times (\sum_{r=j-K}^{j-1} \Delta_r^n W^2 + 2 \sum_{r=j-K}^{j-1} \sum_{s=j-K}^{r-1} \Delta_r^n W \Delta_s^n W) + O_P(\frac{K}{n^2}) \\
&=: \frac{1}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \sum_{i=1}^{\frac{n}{M}} \varphi_i^n + O_P(\frac{K}{n^2}),
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

wobei wir $\varphi_i^n \equiv 0$ gesetzt haben, sofern i in der Summe nicht auftaucht.

In den Grenzwertsatz aus Abschnitt 4.2.2 gehen diese Zufallsvariablen unter Vernachlässigung von Vorfaktoren der Ordnung 1 als

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} M^2 \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} ([W,W]_1^{(K)})^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+1}^{\frac{nm}{M}} \sigma^4_{\frac{m-1}{M}} \frac{M^3}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \varphi_i^n \tag{4.13}$$

ein, wobei die φ_i^n für andere Intervalle als $[\frac{m-1}{M}, \frac{m}{M}]$ analog definiert sind.

Ähnlich wie in der Identität (2.1) gilt nach Approximation der Funktionale von X beim

Schätzer für die integrierte Volatilität und der Einfachheit halber ebenfalls im Fall einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
[W,W]^{(avg)} &= \frac{1}{K}\sum_{i=K}^{n}(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-K}{n}})^2 \\
&= \frac{1}{K}\sum_{i=K}^{n}(\sum_{j=i-K}^{i-1}\Delta_j^n W^2 + 2\sum_{j=i-K}^{i-1}\sum_{l=i-K}^{j-1}\Delta_j^n W\Delta_l^n W) =: \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K}\gamma_i^n, \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

wobei wir auch hier $\gamma_i^n \equiv 0$ gesetzt haben, sofern i in der Summe nicht auftaucht.

Bewiesen wird der Grenzwertsatz im Falle der integrierten Volatilität in Satz 2.10 und erneut ohne die explizite Angabe aller Vorfaktoren für

$$\sqrt{M}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2_{\frac{i-K}{n}}\frac{1}{K}\gamma_i^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2_{\frac{i-K}{n}}\gamma_i^n,$$

was wir durch

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+1}^{\frac{nm}{M}}\sigma^2_{\frac{m-1}{M}}\gamma_i^n \qquad (4.15)$$

approximieren wollen.

Die explizite Berechnung der bedingten Erwartung des Produkts der beiden Ausdrücke (4.13) und (4.15) besteht dann im wesentlichen nur noch aus der Untersuchung von

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M}\sigma^6_{\frac{m-1}{M}}\sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+1}^{\frac{nm}{M}}E[\frac{M^3}{(\frac{n}{M}-K+1)^2}\varphi_i^n\gamma_i^n|\mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}],$$

wobei wir uns wie angekündigt mit der Angabe der Ordnung dieses Terms begnügen werden. Als Folge aus der Definition in (4.12) ist die Hälfte der φ_i^n konstant gleich Null, die andere Hälfte liefert einen nicht verschwindenden Beitrag. Die Summe geht demnach mit der Ordnung K in die Rechnung ein. Im nicht verschwindenden Fall erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
E[\varphi_i^n\gamma_i^n|\mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}] &= \sum_{j=K}^{i-1}E[(\sum_{p=i-K}^{i-1}\Delta_p^n W^2 + 2\sum_{p=i-K}^{i-1}\sum_{q=i-K}^{p-1}\Delta_p^n W\Delta_q^n W) \\
\times\ (\sum_{r=j-K}^{j-1}\Delta_r^n W^2 &+ 2\sum_{r=j-K}^{j-1}\sum_{s=j-K}^{r-1}\Delta_r^n W\Delta_s^n W)(\sum_{k=i-K}^{i-1}\Delta_k^n W^2 + 2\sum_{k=i-K}^{i-1}\sum_{l=i-K}^{k-1}\Delta_k^n W\Delta_l^n W)|\mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}],
\end{aligned}$$

was mit ähnlichen Argumenten wie in der Diskussion von (4.7) auf die Berechnung der Ordnung von

$$E[\sum_{j=K}^{i-1}\sum_{p=i-K}^{i-1}\sum_{r=j-K}^{j-1}\sum_{k=i-K}^{i-1}\Delta_p^n W^2\Delta_r^n W^2\Delta_k^n W^2|\mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}]$$

reduziert werden kann. Es ergibt sich sofort

$$E[\varphi_i^n \gamma_i^n | \mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}] = O(\frac{K^4}{n^3}),$$

was uns insgesamt für eine Konstante C das Resultat

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{M} \sigma^6_{\frac{m-1}{M}} \sum_{i=\frac{n(m-1)}{M}+1}^{\frac{nm}{M}} E[\frac{M^3}{(\frac{n}{M} - K + 1)^2} \varphi_i^n \gamma_i^n | \mathcal{F}_{\frac{i-K}{n}}] \xrightarrow{P} C \int_0^1 \sigma_t^6 dt$$

liefert.

Wir erkennen also, dass die Ordnung der Kovarianz 1 ist - ganz in Übereinstimmung mit der Größenordnung der Varianzen in den einzelnen Grenzwertsätzen. Natürlich müsste ein formaler Beweis auch noch Bezug auf die Ausdrücke in den Schätzern nehmen, die die Konvergenz gegen bestimmte Momente der Störterme liefern. Solche Ausdrücke führen ja sowohl in Satz 2.10 als auch in Satz 4.5 zu einer Varianz, die auch von den Verteilungen der Störterme abhängt. Typische Resultate würden dann die Summanden

$$E[\varepsilon^2] \int_0^1 \sigma_t^4 dt, \mathit{Var}(\varepsilon^2) \int_0^1 \sigma_t^2 dt \text{ und } E[\varepsilon^2] \mathit{Var}(\varepsilon^2).$$

sein, also eine Kovarianz der Form

$$C_1 \int_0^1 \sigma_t^6 dt + C_2 E[\varepsilon^2] \int_0^1 \sigma_t^4 dt + C_3 \mathit{Var}(\varepsilon^2) \int_0^1 \sigma_t^2 dt + C_4 E[\varepsilon^2] \mathit{Var}(\varepsilon^2)$$

Analog zu unserer Untersuchung im Vorfeld von (4.7) lässt sich feststellen, dass bis auf die Wahl der Konstanten das exakte Ergebnis genauso aussehen wird. Wir erhalten also schlussendlich den folgenden bivariaten Grenzwertsatz:

Satz 4.6 *Für die beiden Schätzer T_n' und $\widehat{\langle X, X \rangle}_1$ gilt die gemeinsame Konvergenzaussage*

$$\sqrt{M} \begin{pmatrix} T_n' - \int_0^1 \sigma_t^4 dt \\ \widehat{\langle X, X \rangle}_1 - \int_0^1 \sigma_t^2 dt \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \int_0^1 \Sigma_t^{\frac{1}{2}} dB_t$$

mit Kovarianzmatrix

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \omega_t^{11} & \omega_t^{12} \\ \omega_t^{21} & \omega_t^{22} \end{pmatrix}$$

und

$$\int_0^1 \omega_t^{11} dt \xrightarrow{P} \int_0^1 \frac{4}{3} d\sigma_t^4 dt + 8d^{-2}(E[\varepsilon^2])^2$$

$$\int_0^1 \omega_t^{12} dt \xrightarrow{P} C_1 \int_0^1 \sigma_t^6 dt + C_2 E[\varepsilon^2] \int_0^1 \sigma_t^4 dt + C_3 \mathit{Var}(\varepsilon^2) \int_0^1 \sigma_t^2 dt + C_4 E[\varepsilon^2] \mathit{Var}(\varepsilon^2)$$

$$\int_0^1 \omega_t^{22} dt \xrightarrow{P} (C_c^2 \, \Gamma_c - 1) \int_0^1 \sigma_t^8 dt + 4 C_c D_c \mathit{Var}(\varepsilon^2) \int_0^1 \sigma_t^4 dt + C_c^2 (\Delta_c - D_c^2 \mathit{Var}(\varepsilon^2)^2).$$

Beweis: Wir fügen die Aussagen der Sätze 2.11 und 4.5 zusammen und verweisen auf die obige Diskussion. □

4.4 Die Definition des Tests

Wir sind nun in der Lage, aus unseren Vorarbeiten in (4.2) und Satz 4.6 zumindest prinzipiell einen Test herzuleiten. Auch wenn wir die exakte Struktur der Kovarianz Σ_t im Grenzwertsatz für die beiden Schätzer T_n' und $\widehat{\langle X, X\rangle}_1$ nicht angeben konnten, wollen wir dennoch kurz darauf eingehen, wie im weiteren vorgegangen werden müsste.

Die Grenzverteilung aus (4.2) ist bedingt auf der Prozess X asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz

$$\tau^2 = (1, -2C_1) \int_0^1 \Sigma_t dt \; (1, -2C_1)^T.$$

A priori sind sowohl C_1 als auch Σ_t unbekannt, so dass wir für beide Schätzer finden müssten. Für C_1 ist diese Aufgabe bereits erledigt, kritischer ist dabei die Untersuchung von Σ_t.

In gewisser Hinsicht schließt sich jetzt der Kreis. Wir hatten uns am Ende von Kapitel 2 damit auseinandergesetzt, dass wir zur Minimierung der Varianz in Satz 2.11 einen Schätzer für η^2 finden müssen. In dem von uns betrachteten Fall der äquidistanten Intervallzerlegung korrespondierte diese Suche damit, das Integral über die vierten Potenzen der Volatilität zu schätzen. Hier stehen wir nun vor der Aufgabe, einen Schätzer für τ^2 herzuleiten, was gemäß der Aussage von Satz 4.5 unter anderem bedeutet, dass wir

$$\int_0^1 \sigma_t^6 dt \text{ und } \int_0^1 \sigma_t^8 dt$$

vorhersagen müssen. Wir verzichten an dieser Stelle darauf, wobei im Verlauf dieser Arbeit hinreichend deutlich geworden ist, nach welchem Prinzip die Schätzung funktionieren könnte.

Sofern ein entsprechender Schätzer für diesen Fall entwickelt worden ist und man also eine Möglichkeit gefunden hat, über $\widehat{\tau}^2$ die Varianz τ^2 konsistent zu schätzen, ergibt sich aus Remark 2-1 in [14] die Konvergenzaussage

$$\frac{\sqrt{M}(\widehat{N^2} - N^2)}{\widehat{\tau^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \mathcal{N}(0,1)$$

bzw. unter der Nullhypothese

$$\frac{\sqrt{M}\widehat{N^2}}{\widehat{\tau^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \mathcal{N}(0,1).$$

H_0 würde also in einem asymptotischen Test zum Niveau α abgelehnt werden, sofern

$$\frac{\sqrt{M}\widehat{N^2}}{\widehat{\tau^2}} > u_{1-\alpha}$$

gilt, wobei $u_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil einer Standardnormalverteilung bezeichnet. Details dazu finden sich u.a. in [12].

Die optimale Wahl von c in der Definition von J zu Beginn von Kapitel 3 beruht darauf, dass die Varianz im zentralen Grenzwertsatz, d. h. in Satz 4.6, minimiert werden kann. Offensichtlich sind wir nach unseren bisherigen Resultaten dazu nicht in der Lage, die Methoden dafür haben wir allerdings entwickelt.

Ein alternativer Test auf Homoskedastizität, bei dem wir nicht darauf angewiesen sind, τ^2 konsistent zu schätzen, könnte sich aus einem Bootstrap-Verfahren ableiten lassen. Wir wollen kurz ein mögliches Prinzip skizzieren und eine detaillierte Ausarbeitung dessen auf einen späteren Zeitpunkt verschieben:

Sofern reale Daten $Y_1, \ldots, Y_n$ bekannt sind, ließen sich einerseits die Teststatistik $T_n^{'}$ und andererseits Schätzer für die geraden Momente der ε_{t_i} sowie (unter der Nullhypothese) für σ^2 berechnen. Mit Hilfe der $\widehat{E[\varepsilon^{2k}]}$ ließe sich dann eine Verteilung ε^* definieren (beispielsweise würde sich aufgrund der Annahme, dass die ersten beiden ungeraden Momente verschwinden, eine symmetrische Verteilung, abhängig von den geraden Momenten, anbieten), außerdem könnte ein neuer Prozess X^* erzeugt werden, der durch

$$X_t^* = \widehat{\sigma} W_t,$$

also unter der Nullhypothese, definiert wird.

In jeder Bootstrap-Replikation würden so verschiedene $Y_{\frac{i}{n}}^{*b}$ mit $b = 1, \ldots, B$ erzeugt werden, die der Identität

$$Y_{\frac{i}{n}}^{*b} = X_{\frac{i}{n}}^{*b} + \varepsilon_{\frac{i}{n}}^{*b}$$

genügen. Für jede dieser B Versionen der $Y_{\frac{i}{n}}^{*b}$ mit $i = 1, \ldots, n$ ließen sich erneut die zugehörigen Teststatistiken berechnen, so dass wir auf diesem Weg zu einer Schätzung des p-Werts von $T_n^{'}$ gelangen.

Kapitel 5

Appendix

Wir wollen im folgenden Abschnitt einige der grundlegenden wie auch der technischen Voraussetzungen erläutern, die wir im Rahmen dieser Arbeit benutzt haben. Zudem werden wir einige Begriffe definieren und nützliche Hilfsaussagen formulieren. Den Anfang wird eine kurze Beschreibung der Forderungen machen, die wir an den zu Grunde liegenden Itô-Prozess gestellt haben.

5.1 Voraussetzungen an Drift und Volatilität in dX_t

Wir gehen in der gesamten Arbeit davon aus, dass der Prozess X_t auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ definiert ist und der folgenden Darstellung genügt:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

W_t bezeichnet dabei eine bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ messbare Brownsche Bewegung.

μ_s ist die Driftfunktion, ein lokal beschränkter, vorhersagbarer reellwertiger stochastischer Prozess, natürlich an $\mathcal{F}_s$ adaptiert. Dabei heißt ein Prozess h_s lokal beschränkt, wenn eine Folge von Stoppzeiten (T_k) existiert, so dass einerseits

$$T_k \to \infty \text{ f. s.}$$

gilt und andererseits die gestoppten Prozesse $h_{s \wedge T_k}$ für alle k beschränkt sind.

Mit σ_s bezeichnen wir den Prozess der Volatilität. Dieser soll *càdlàg* sein, d.h. rechtsseitig stetig mit jeweils existierendem linksseitigen Grenzwert. Es lässt sich zeigen, dass Prozesse dieser Art ebenfalls lokal beschränkt sind. Wir machen weiterhin die strukturelle Annahme, dass σ_s wie folgt aufteilbar ist:

$$\sigma_s = \sigma_0 + \int_0^s a_u du + \int_0^s \nu_u dW_u + \int_0^s \tau_u dV_u. \tag{5.1}$$

Die drei Prozesse a_u, ν_u und τ_u sind jeweils an die Filtration adaptiert und *càdlàg*, zudem ist auch a_u lokal beschränkt und vorhersagbar. V_u ist ebenfalls eine Brownsche Bewegung auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum, unabhängig von W_u.

Weiterhin gehen wir davon aus, dass auch die Folge der ε_{t_i} an dieselbe Filtration wie der Prozess X adaptiert ist. Wir benötigen diese Eigenschaft, um im gemeinsamen zentralen Grenzwertsatz die Messbarkeit aller Funktionale bezüglich der gewählten Filtration sicherzustellen.

Aufgrund der Voraussetzung der lokalen Beschränktheit an die Prozesse μ_s und σ_s lässt sich (wie im Rahmen dieser Arbeit bei der Abschätzung der Ordnung bestimmter Funktionale immer wieder gemacht) ohne Einschränkung annehmen, dass beide Prozesse tatsächlich beschränkt sind. Die Idee dazu besteht darin, den zentralen Grenzwertsatz zunächst für die gestoppten Prozesse zu beweisen und danach die fast sichere Divergenz der Stoppzeiten bei wachsendem k zu benutzen. Weil wir die Prozesse μ_s und σ_s sowieso nur auf dem festen Intervall $[0, 1]$ betrachten, können die Aussagen dann über $\mu_{s \wedge T_k}$ und $T_k \to \infty$ f. s. leicht auf den ursprünglichen Fall übertragen werden. Für Details verweisen wir auf Abschnitt 2.4.1 aus [20].

5.2 Stabile Konvergenz

Grundlegend für die Konvergenzaussagen zur realisierten Volatilität ist das Konzept der stabilen Konvergenz von Zufallsvariablen.

Definition 5.1 *Eine Folge von d-dimensionalen Zufallsvariablen (Y_n), definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, konvergiert stabil gegen eine d-dimensionale Grenzvariable Y, definiert auf einer geeigneten Erweiterung $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ des ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraums, falls für alle beschränkten $\mathcal{F}$-messbaren Z und alle stetigen und beschränkten Funktionen g gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} E[Zg(Y_n)] = E[Zg(Y)].$$

Symbolisch schreiben wir $Y_n \stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\to} Y$.

Offensichtlich ist dieser Konvergenzbegriff stärker als schwache Konvergenz. Verschiedene äquivalente Definitionen ebenso wie einige wichtige Eigenschaften der stabilen Konvergenz finden sich unter anderem in [2], [13], [16], [20] oder [21]. Für uns ist vor allem die verallgemeinerte Delta-Methode von Bedeutung. Sie liefert uns hauptsächlich die Begründung dafür, in unserer Untersuchung statt schwacher Konvergenz das Konzept der stabilen Konvergenz zu verwenden. Wir folgen der Argumentation in [20] und erhalten

Satz 5.2 *Es seien $(Y_n)_n$, Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die*

$$\sqrt{n}(Y_n - Y) \stackrel{\mathcal{D}_{st}}{\to} Z$$

erfüllen. Zudem sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit ∇f als Gradienten. Dann gilt

$$\sqrt{n}(f(Y_n) - f(Y)) \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \nabla f(Y)Z.$$

Der Unterschied zur schwachen Konvergenz besteht darin, dass die Delta-Methode dort nur funktioniert, sofern Y keine Zufallsvariable, sondern deterministisch ist.

In dieser Arbeit schließen wir auf die stabile Konvergenz von Funktionalen des Prozesses X vor allem mit Hilfe des folgenden Grenzwertsatzes von Jacod, den wir in der hier vorgestellten zentrierten Version Theorem 3-2 in [14] entnommen haben.

In der allgemeinen Fassung des Satzes ist $(M_s)_{s\in[0,t]}$ ein d-dimensionales Martingal auf

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in[0,t]}, P),$$

adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,t]}$. Weiterhin sei $\mathcal{M}_b$ die Menge aller beschränkten Martingale und $\mathcal{M}_2$ die Menge aller quadratintegrierbaren Martingale auf dem zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum. Wir definieren außerdem

$$\mathcal{M}_b(M^{\perp}) := \{N \in \mathcal{M}_b | \langle M, N\rangle = 0\}$$

als die Menge aller beschränkten Martingale, die orthogonal zu M sind. Zuletzt sei

$$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_s)_{s\in[0,t]}, \bar{P})$$

eine Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s)_{s\in[0,t]}, P)$, auf der eine zu M unabhängige Brownsche Bewegung $B = (B_s)_{s\in[0,t]}$ definiert ist.

Die folgende Konvergenzaussage werden wir nun für ein q-dimensionales Martingal $(Z^n)_{n\geq 1}$ bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{\lfloor ns\rfloor}{n}})_{s\in[0,t]}$ herleiten, das als

$$Z_t^n = \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Y_{in} \tag{5.2}$$

mit q-dimensionalen $\mathcal{F}_{\frac{i}{n}}$-messbaren Zufallsvariablen Y_{in} dargestellt werden kann.

Satz 5.3 *Wir nehmen an, dass das zu Grunde liegende Martingal M in $\mathcal{M}_2$ liegt und stetig ist, ferner seien auch die Y_{in} für alle i und n quadratintegrierbar. Weiterhin nehmen wir an, dass zwei stetige stochastische Prozesse F und G mit Werten in $\mathbb{R}^{q\times q}$ bzw. $\mathbb{R}^{q\times d}$ existieren,* *für die die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} E[Y_{in}Y_{in}^T|\mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \xrightarrow{P} F_t \; \forall t \in [0,1] \tag{5.3}$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} E[Y_{in}(M_{\frac{i}{n}} - M_{\frac{i-1}{n}})^T|\mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \xrightarrow{P} G_t \; \forall t \in [0,1] \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} E[|Y_{in}|^2 I_{\{|Y_{\frac{i}{n}}|>\varepsilon|\}}|\mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \xrightarrow{P} 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \forall t \in [0,1] \tag{5.5}$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} E[Y_{in}(N_{\frac{i}{n}} - N_{\frac{i-1}{n}})^T|\mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \xrightarrow{P} 0 \; \forall t \in [0,1] \; \forall N \in \mathcal{M}_b(M^\perp) \tag{5.6}$$

Falls zudem vorhersagbare Prozesse u, v und w mit Werten in $\mathbb{R}^{q\times d}$, $\mathbb{R}^{d\times d}$ bzw. $\mathbb{R}^{q\times q}$ existieren, so dass jeweils

$$\langle M, M^T\rangle_s = \int_0^s v_x v_x^T dx \; \forall s \in [0,t] \tag{5.7}$$

$$G_s = \int_0^s u_x v_x v_x^T dx \; \forall s \in [0,t] \tag{5.8}$$

$$F_s = \int_0^s u_x v_x v_x^T u_x^T + w_x w_x^T dx \; \forall s \in [0,t] \tag{5.9}$$

gilt, so konvergiert der in 5.2 definierte stochastische Prozess stabil, wobei die Grenzvariable wie folgt darstellbar ist:

$$Z_t^n \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} Z_t = \int_0^t v_s dM_s + \int_0^t w_s dB_s. \tag{5.10}$$

5.3 Eigenschaften von lokalen Martingalen

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften diskutieren, die allgemein für lokale Martingale gelten, in dieser Arbeit aber zumeist nur für die Brownsche Bewegung relevant sind. Den Anfang macht eine technische Bedingung, die für den Prozess X mit

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

die Konvergenz der realisierten Volatilität gegen die integrierte Volatilität zusichert.

Allgemein sind lokale Martingale ähnlich wie die lokale Beschränktheit von Prozessen so definiert, dass ein zu einer gegebenen Filtration adaptierter Prozess X_t dann ein lokales Martingal ist, wenn eine Folge von Stoppzeiten (T_k) existiert, so dass einerseits

$$T_k \to \infty \text{ f. s.}$$

gilt und andererseits der gestoppte Prozess $X_{t\wedge T_k}$ ein Martingal ist.

Bedingung 5.4 *Für die Filtration $\mathcal{F}_t$, an die der Prozess X adaptiert ist, existiert ein p und ein stetiges lokales Martingal*

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}^1, \ldots, \mathcal{X}^p),$$

so dass $\mathcal{F}_t$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\sigma(\mathcal{X}_s; s \leq t)$ und die Menge $\mathcal{N}$ aller P-Nullmengen in $\sigma(\mathcal{X}_s; s \leq 1)$ enthält.

Speziell in Kapitel 2 machen wir von dieser Bedingung Gebrauch.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Analyse der Ordnung von Funktionalen des Prozesses X wird die Burkholder-Ungleichung sein, die wir zur Abschätzung von Momenten der stochastischen Integrale $\int_s^t \sigma_u dW_u$ benutzen werden. Sie besagt unter anderem (vgl. für die allgemeine Formulierung [22], S. 160f.) das Folgende:

Satz 5.5 *Zu einem lokalen Martingal $(M_t)_t$ mit $M_0 = 0$ und zu einem beliebigen $p \in (0, \infty)$ existieren Konstanten c_p und C_p, so dass für festes t die Ungleichung*

$$c_p E[\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{2}}] \leq E[(\sup_{s\leq t} |M_s|)^p] \leq C_p E[\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{2}}]$$

gilt.

Wir hatten bereits im Beweis von Satz 2.6 gesehen, dass sich im Falle

$$M_t = \int_0^t \sigma_u dW_u$$

die Identität

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t \sigma_u^2 du$$

ergibt. So lässt sich dann die Ordnung eines Itô-Integrals leicht auf die Ordnung der zugehörigen Riemann-Integrale zurückführen.

Außerdem erinnern wir uns an dieser Stelle an einige Rechenregeln für Erwartungswerte von Produkten verschiedener Integrale. Für zwei an die Filtration derselben Brownschen Bewegung W_t adaptierte Prozesse f_u und g_u sowie beliebige reelle Zahlen a, b, c, d gilt die folgende Rechenregel:

$$E[\int_{[a,b]} f_u dW_u \int_{[c,d]} g_u dW_u] = E[\int_{[a,b]\cap[c,d]} f_u g_u du]. \tag{5.11}$$

Sofern eines der beiden oder beide Integrale „klassische“ du-Integrale sind, haben wir mehrere Möglichkeiten, die Ordnung ihres Produkts abzuschätzen. Wir setzen voraus, dass f_u und

g_u beschränkt sind (vgl. Abschnitt 5.1), und erhalten daher mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Konstanten C und D

$$\begin{aligned} E[|\int_{[a,b]} f_u du \int_{[c,d]} g_u dW_u|] &\leq E[(\int_{[a,b]} f_u du)^2]^{\frac{1}{2}} E[(\int_{[c,d]} g_u dW_u)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(b-a)E[\int_{[c,d]} g_u du]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CD(b-a)(d-c)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und deswegen

$$\int_{[a,b]} f_u du \int_{[c,d]} g_u dW_u = O_P((b-a)(d-c)^{\frac{1}{2}}). \tag{5.12}$$

Mit demselben Argument erhalten wir auch

$$E[\int_{[a,b]} f_u du \int_{[c,d]} g_u du] = O((b-a)(d-c)). \tag{5.13}$$

Literaturverzeichnis

[1] **N. J. Achieser** (1956). *Theory of approximation.* Dover publications inc, New York.

[2] **D. J. Aldous, G. K. Eagleson** (1978). *On mixing and stability of limit theorems.* Annals of probability 6, 325-331.

[3] **O. E. Barndorff-Nielsen, S. E. Graversen, J. Jacod, M. Podolskij, N. Shephard** (2006). *A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales.* From stochastic analysis to mathematical finance, Festschrift for Albert Shiryaev.

[4] **O. E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard** (2002). *Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models.* Journal of the Royal Statistical Society, B, 64, 253-280.

[5] **O. E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard** (2004). *Power and bipower variations with stochastic volatility and jumps.* Journal of finance and economics 2, 1-48.

[6] **P. Billingsley** (1986). *Probability and measure.* Wiley, New York.

[7] **S. J. Brown** (1990). *Estimating volatility.* Financial options: From theory to practice; Business One-Irwin, Homewood, IL, 516-537.

[8] **S. Delattre, J. Jacod** (1997). *A central limit theorem for normalized functions of the increments of a diffusion process in the presence of round-off errors.* Bernoulli 3 (1), 1-28.

[9] **H. Dette, C. von Lieres und Wilkau** (2003). *On a test for a parametric form of volatility in continuous time financial models.* Finance and Stochastics 7, 363-384.

[10] **H. Dette, A. Munk** (1998). *Testing heteroscedasticity in nonparametric regression.* Journal of the Royal Statistical Society B 60, 693-708.

[11] **H. Dette, M. Podolskij** (2005). *Testing the parametric form of the volatility in continuous time diffusion models.* Preprint, Ruhr-Universität Bochum.

[12] **H. Dette, M. Podolskij, M. Vetter** (2005). *Estimation of integrated volatility in continuous time financial models with applications to goodness-of-fit testing.* erscheint in: Scandinavian Journal of Statistics.

[13] **P. Hall, C. C. Heyde** (1980). *Martingale limit theory and its applications.* Academic press, New York.

[14] **J. Jacod** (1997). *On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law.* Seminaire de Probabilites XXXI, 232-246.

[15] **J. Jacod, P. Protter** (1998). *Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations.* Annals of probability 26, 267-307.

[16] **J. Jacod, A. N. Shiryaev** (2003). *Limit theorems for stochastic processes.* Springer, Berlin/Heidelberg.

[17] **I. Karatzas, S. E. Shreve** (1988). *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer, New York.

[18] **P. A. Mykland, L. Zhang** (2006). *ANOVA for diffusions.* erscheint in: Annals of Statistics 34.

[19] **B. Øksendal** (2003). *Stochastic differential equations.* Springer, Berlin/Heidelberg.

[20] **M. Podolskij** (2006). *New theory on estimation of integrated volatility with applications.* Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.

[21] **A. Renyi** (1963). *On stable sequences of events.* Sankhya, Ser. A 25, 293-302.

[22] **D. Revuz, M. Yor** (1998). *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer, Berlin/Heidelberg.

[23] **H. Rootzen** (1980). *Limit distributions for the error in approximations of stochastic integrals.* Annals of probability 8, 241-251.

[24] **L. Zhang, P. A. Mykland, Y. Ait-Sahalia** (2005). *A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high frequency data.* Journal of the American Statistical Association 100 (472), 1394-1411.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln verfasst habe.

Bochum, den 14. März 2006 Mathias Vetter