RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM RUB

11. Übungsblatt zur Statistik II

Prof. Dr. Holger Dette, WiSe 2016/2017

Aufgabe 1.
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Weiter bezeichne

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

die Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(\hat{S}_n^2 - \sigma^2) \le x \,|\, \mathbb{P}\right) - \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(\hat{S}_n^{*2} - \hat{S}_n^2 \,|\, \mathbb{P}_n)\right)\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Aufgabe 2.
Sei $\hat{\theta}_n$ ein Schätzer für θ basierend auf unabhängig $\mathbb{P}$-verteilten Beobachtungen. Es gelte

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim F,$$

wobei die Verteilungsfunktion F von Z stetig ist. Zeigen Sie, dass der Bootstrap Schätzer für die Verteilung von $(\hat{\theta}_n - \theta)/\hat{\sigma}_n$ genau dann konsistent ist, wenn

$$\mathbb{P}\left(\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\sigma}_n} \le x \,|\, \mathbb{P}\right) \longrightarrow F(x) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\frac{\hat{\theta}_n^* - \hat{\theta}_n}{\hat{\sigma}_n^*} \le x \,|\, \mathbb{P}_n\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3.
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt und U_n eine auf $X_1, \ldots, X_n$ basierende U-Statistik für θ mit Kern $h(x, y)$, sodass $\mathbb{E}h(X_1, X_1) < \infty$ und $\mathbb{E}h(X_1, X_2)^2 < \infty$. Seien nun $X_1^*, \ldots, X_n^*$ unabhängige Beobachtungen der empirischen Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ und U_n^* die U-Statistik mit Kern h basierend auf $X_1^*, \ldots, X_n^*$. Zeigen Sie, dass wenn $\sqrt{n}(U_n - \theta)$ konvergiert, so konvergiert auch $\sqrt{n}(U_n^* - U_n)$ in Verteilung bedingt auf $X_1, \ldots, X_n$ gegen den gleichen Grenzwert.

Aufgabe 4.
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt und $\hat{\theta}_n$ ein auf $X_1, \ldots, X_n$ basierender Schätzer für θ. Es gelte $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} T$ und $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \hat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} T$ gegeben $X_1, \ldots, X_n$ in Wahrscheinlichkeit. Zeigen Sie, dass dann

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta, \hat{\theta}_n^* - \hat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (S, T)$$

für zwei unabhängige Kopien S, T von T gilt.

Besprechung in der Übung am 30.01.2017