Aufgaben zum Vorkurs für Mathematiker und Physiker 2015

Prof. Dr. H. Dette/ Prof. Dr. G. Röhrle — 14. September 2015
Blatt 2

Die Abgabe kann grundsätzlich zu jeder beliebigen Zeit bei Ihrem jeweiligen Übungsgruppenleiter erfolgen. Es ist dennoch ratsam, die Aufgaben im Wochenrhythmus zu bearbeiten.

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Beweisen Sie die binomischen Formeln:

(a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Geben Sie dabei präzise an, welche Gesetze Sie bei welcher Umformung benutzt haben.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Lösen Sie die Gleichungen

(a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} = 1 + \frac{6}{x}$.

(b) $2(x+1) = x + 4$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie für reelle Zahlen a,b:

(a) $a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow (a = 0) \wedge (b = 0)$.

(b) Ist $a < b$ und $ab < 0$, so ist $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Nehmen wir an, ein Student gibt die folgenden Zeilen ab. Was hat er alles falsch gemacht?

(a) $x^2 = 48 \Longleftrightarrow 4\sqrt{3}$.

(b) $n = m + 2 \Longrightarrow (m+2)^3 \Longrightarrow m^3 + 6m^2 + 12m + 8$.

(c) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Beweisen Sie per vollständiger Induktion: Sind $m, n \in \mathbb{N}$, so ist auch $m + n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

(a) Geben Sie sämtliche Primzahlen zwischen 1 und 100 an.

(b) Bestimmen Sie ggT(14312,4064) mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Finden Sie ein Formel für

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1),$$

die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, und beweisen Sie diese.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Eine Eisdiele bietet die Sorten Vanille, Schokolade, Erdbeere, Stracciatella, Haselnuss, Kirsche und Zitrone an. Sie möchten drei Kugeln im Hörnchen (von verschiedener Sorte und unabhängig von der Reihenfolge) bestellen.

(a) Wie viele Varianten dafür gibt es?

(b) Wenn Sie sich für eine Kugel Schokolade entschieden haben: Wie viele Möglichkeiten bleiben übrig?

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Bestimmen Sie Infimum und Supremum der folgenden Mengen und entscheiden Sie, ob sie jeweils zur Menge gehören oder nicht.

(a) $M_1 = [0,1] \backslash \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 2\}$.

Beachte: $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Aufgabe 10: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie sie.

(a) $|4 - 3x| > 2x + 10$.

(b) $|2x - 10| \leq x$.

(c) $2x^2 - 5x + 6 \leq 4$.