Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 1, 3. Aufl. (Version 2010), Kapitel 4

10 Stetige Funktionen

Abschnitt 10.B, Aufg. 1a), p. 249 (1.8.2010) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Lösung: Seien $m, n > 0$. Wir benutzen die Summenformel für die endliche geometrische Reihe, kürzen den Faktor $x-1$ und verwenden dann die Grenzwertrechenregeln:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1} = \frac{n}{m} .$$

Dieses Ergebnis erhält man auch bei negativen Exponenten. Beispielsweise ist mit dem bereits Gezeigten:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{-n}-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x^n} \cdot \frac{x^n-1}{x^m-1} = -\frac{1}{1^n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{-n}{m} .$$

Man hätte hier auch die Definition der Ableitung von x^m bzw. x^n im Punkt 1 sowie die Grenzwertrechenregeln benutzen können:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{x^n-1}{x-1}}{\dfrac{x^m-1}{x-1}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x-1}} = \frac{(x^n)'\,\big|_{x=1}}{(x^m)'\,\big|_{x=1}} = \frac{nx^{n-1}\,\big|_{x=1}}{mx^{m-1}\,\big|_{x=1}} = \frac{n}{m} . \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, Variante zu **Aufg. 1a)**, p. 249 (1.8.2010) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^n+1}{x^m+1}$, $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, m, n beide ungerade.

Seien $m, n > 0$. Da m und n beide ungerade sind, ist $(-1)^m = -1$, $(-1)^n = -1$, und die Verallgemeinerung der Summenformel für die endliche geometrische Reihe, vgl. das Ende von Abschnitt 4.C, liefert wie in der vorstehenden Aufgabe:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^n+1}{x^m+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^n-(-1)^n}{x^m-(-1)^m} = \lim_{x\to -1} \frac{\big(x-(-1)\big)(x^{n-1}-x^{n-2}\pm\cdots-x+1)}{\big(x-(-1)\big)(x^{m-1}-x^{m-2}\pm\cdots-x+1)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^{n-1}-x^{n-2}\pm\cdots-x+1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^{m-1}-x^{m-2}\pm\cdots-x+1)} = \frac{(-1)^{n-1}-(-1)^{n-2}\pm\cdots-(-1)+1}{(-1)^{m-1}-(-1)^{m-2}\pm\cdots-(-1)+1} = \frac{n}{m} .$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn n und/oder m negativ sind. Beispielsweise ist mit dem bereits Gezeigten:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^{-n}+1}{x^m+1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x^n} \cdot \frac{x^n+1}{x^m+1} = \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{-n}{m} .$$

Man hätte hier auch die Definition der Ableitung von x^m bzw. x^n im Punkt -1 sowie die Grenzwertrechenregeln benutzen können:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^n+1}{x^m+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\dfrac{x^n-(-1)^n}{x-(-1)}}{\dfrac{x^m-(-1)^m}{x-(-1)}} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^n-(-1)^n}{x-(-1)}}{\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^m-(-1)^m}{x-(-1)}} = \frac{(x^n)'\,\big|_{x=-1}}{(x^m)'\,\big|_{x=-1}} = \frac{nx^{n-1}\,\big|_{x=-1}}{mx^{m-1}\,\big|_{x=-1}} = \frac{n}{m} . \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, Variante zu **Aufg. 1a)**, p. 249 (1.8.2010) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lösung: Die Summenformel für die endliche geometrische Reihe und die Stetigkeit der Wurzelfunktionen, vgl. Beispiel 10.C.10, ergeben:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\big(\sqrt[n]{x}-1\big)}{(x-1)\big(\sqrt[m]{x}-1\big)}=\lim_{x\to 1}\frac{\big(\sqrt[m]{x}-1\big)\big(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\cdots+\sqrt[m]{x}+1\big)\big(\sqrt[n]{x}-1\big)}{\big(\sqrt[n]{x}-1\big)\big(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{x}+1\big)\big(\sqrt[m]{x}-1\big)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\cdots+\sqrt[m]{x}+1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{x}+1}=\frac{\lim_{x\to 1}\big(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\cdots+\sqrt[m]{x}+1\big)}{\lim_{x\to 1}\big(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{x}+1\big)}=\frac{m}{n}\;. \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, **Aufg. 1b)**, p. 249 (1.8.2010) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Lösung: Wir erweitern, um die dritte binomische Formel benutzen zu können, und verwenden dann die Grenzwertrechenregeln sowie die Stetigkeit der Wurzelfunktion im Punkt 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\big(\sqrt{x+3}-2\big)\big(\sqrt{x+3}+2\big)}{(x-1)\big(\sqrt{x+3}+2\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3-4}{(x-1)\big(\sqrt{x+3}+2\big)}$$
$$=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{3}+2}\;. \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, Variante zu **Aufg. 1b)**, p. 249 (1.8.2010) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Lösung: Wir erweitern, um die dritte binomische Formel benutzen zu können, und verwenden dann die Grenzwertrechenregeln sowie die Stetigkeit der Wurzelfunktion im Punkt 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\big(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\big)\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\big)}{x\,\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\big)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\,\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\big)}=\frac{2}{\lim_{x\to 0}\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\big)}=\frac{2}{1+1}=1\;. \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, Aufg. 1c), p. 249 (1.8.2010) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}+1}\,\left(\sqrt{\frac{1}{x}+a}-\sqrt{\frac{1}{x}+b}\right)$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Lösung: Wir erweitern, um die dritte binomische Formel benutzen zu können, und verwenden dann die Grenzwertrechenregeln sowie die Stetigkeit der Wurzelfunktion im Punkt 1:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}+1}\,\left(\sqrt{\frac{1}{x}+a}-\sqrt{\frac{1}{x}+b}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}+1}\;\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+a}-\sqrt{\frac{1}{x}+b}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+a}+\sqrt{\frac{1}{x}+b}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+a}+\sqrt{\frac{1}{x}+b}}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}+1}\;\frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)-\left(\frac{1}{x}+b\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+a}+\sqrt{\frac{1}{x}+b}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(a-b)\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{\sqrt{\frac{1}{x}+a}+\sqrt{\frac{1}{x}+b}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(a-b)\sqrt{1+x}}{\big(\sqrt{1+ax}+\sqrt{1+bx}}$$
$$=\frac{(a-b)\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)}+\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+bx)}}=\frac{(a-b)\cdot 1}{1+1}=\frac{a-b}{2}\;. \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, Variante zu **Aufg. 1c)**, p. 249 (1.9.2010) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\left(\sqrt{\dfrac{a}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{b}{x}+1}\right)$,

Lösung: Wir verwenden die Grenzwertrechenregeln und die Stetigkeit der Wurzelfunktion in den Punkten a und b und erhalten:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{a}{x}+1}-\sqrt{\frac{b}{x}+1}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}\right)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}\right)}{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(a+x)-(b+x)}{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, **Zusatzaufgabe**, p. 249 (1.8.2010) :

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1}$ ist im Punkt $a := 1$ stetig. Man gebe zu jedem $\varepsilon > 0$ explizit ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ an mit $|f(x)-f(1)| \le \varepsilon$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1| \le \delta$.

Lösung: Für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1| \le \delta := \operatorname{Min}(2\varepsilon\,,1)$ gilt $|x-1| \le 1$ und $|x-1| \le 2\varepsilon$ und folglich

$$|f(x)-f(1)| = \left|\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-x^2-1}{2(x^2+1)}\right| = \frac{|-(x-1)^2|}{2x^2+2} \le \frac{|x-1|}{2}\,|x-1| \le \frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon = \varepsilon\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, **Zusatzaufgabe**, p. 249 (1.8.2010) :

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) := \dfrac{2x^2}{x^2+x+2}$ ist im Punkt $a := 2$stetig. Man gebe zu jedem $\varepsilon > 0$ explizit ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ an mit $|f(x)-f(2)| \le \varepsilon$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-2| \le \delta$.

Lösung: Für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-2| \le \delta := \operatorname{Min}(\varepsilon\,,1)$ gilt $|x-2| \le 1$, also $|x+1| = |x-2+3| \le |x-2|+3 \le 4$ und $x \ge 1$, $|x^2+x+2| \ge 1^2+1+2 = 4$, sowie $|x-2| \le \varepsilon$, und folglich

$$|f(x)-f(2)| = \left|\frac{2x^2}{x^2+x+2}-1\right| = \left|\frac{x^2-x-2}{x^2+x+2}\right| = \frac{|(x+1)(x-2)|}{x^2+x+2} \le \frac{4}{4}\,|x-2| \le \varepsilon\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 10.B, **Aufg. 30a)**, p. 252 (1.8.2010) :

Man begründe, dass die Funktion $f(x) := \frac{1}{4}(1-x^3)$ auf $[0, 1]$ stark kontrahierend ist, und bestimme durch sukzessive Approximation eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$. (Dieser Fixpunkt ist eine Nullstelle von x^3+4x-1.)

Lösung: Für $0 \le x \le 1$ ist $0 \le x^3 \le 1$ und somit $0 \le \frac{1}{4}(1-x^3) \le \frac{1}{4} < 1$, d.h. f bildet das Intervall $[0, 1]$ in sich ab. Ferner ist $|f(x)-f(y)| = \frac{1}{4}\,|y^3-x^3| = \frac{1}{4}\,|x^2+xy+y^2|\,|x-y|$. Da $x, y\in\mathbb{R}_+$ höchstens den Wert 1 annehmen, ist $|x^2+xy+y^2| \le 3$ und wir erhalten $|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y|$ mit $L := \frac{3}{4} < 1$. Daher liefert f eine stark kontrahierende Abbildung $[0, 1] \to [0, 1]$, besitzt dort also genau einen Fixpunkt x.

Um dieses x mit einem Fehler $< 10^{-6}$ zu berechnen, starten wir mit $x_0 := 1$ und berechnen $x_1 = f(x_0) = 0{,}25$. Die (a priori-)Fehlerabschätzung in Satz 10.B.13 liefert für die weiteren Iterationen

$$|x-x_n| \le |x-x_1|\,L^n\big/(1-L) = (3^n/4^{n-1})\,|x-x_1| < 3^{n+1}/4^n.$$

Für $n \ge 52$ ist dieser Fehler $< 10^{-6}$. Man berechnet also: $x_0 = 1$; $f(x_0) = x_1 = 0{,}25$; $f(x_1) = x_2 = 0{,}24609375$; $f(x_2) = x_3 = 0{,}2462740093\ldots$; $f(x_3) = x_4 = 0{,}2462658156\ldots$; $f(x_4) = x_5 = 0{,}24626618838\ldots$ usw. Dies legt die Vermutung nahe, dass x bereits im Intervall $[0\,,\,0{,}25]$ liegt.

Das Intervall $[0\,,\,0{,}25]$ wird ebenfalls durch f in sich abgebildet, und wegen $0 \le x, y \le \frac{1}{4}$ ist dort $|f(x)-f(y)| \le \frac{1}{4}\,|x^2+xy+y^2|\,|x-y| \le L|x-y|$ mit $L = 3/64$. Die obige Fehlerabschätzung hat für dieses L und $x_1 = 0{,}25$ als Startwert die Form

$$|x-x_n| \le L^{n-1}\big/(1-L)\,|x-x_2| = (3/64)^{n-1}\cdot(64/61)\,|x-x_2| < (64/61)\cdot(3/64)^{n-1}\,.$$

Dieser Fehler ist $< 10^{-6}$ bereits für $n \ge 6$. Die zweite (a posteriori-)Fehlerabschätzung in Satz 10.B.13 liefert aber $|x - x_n| \le |x_{n+1} - x_n| \big/ (1-L) = (64/61)|x_{n+1} - x_n| \approx 3{,}9 \cdot 10^{-7}$ für $n = 4$ und zeigt, dass schon x_4 sich von x um weniger als 10^{-6} unterscheidet. •

Abschnitt 10.B, Variante zu **Aufg. 30a)**, p. 252 (1.8.2010) :

Man berechne die Nullstelle, die die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^5 - 4x - 1$ aus der nachfolgenden Aufgabe im Intervall $[-0{,}5\,,\,0]$ besitzt, bis auf einen Fehler $\le 10^{-6}$ als Fixpunkt einer geeigneten stark kontrahierenden Abbildung.

Lösung: Durch $g(x) := \frac{1}{4}(x^5 - 1)$ wird eine stark kontrahierende Abbildung $g : [-0{,}5\,,\,0]\big) \to [-0{,}5\,,\,0]$ definiert: Für $-0{,}25 < x < 0$ ist nämlich $-1 < x^5 - 1 < 0$, und mit $L := 5/64$ gilt

$$|g(x) - g(y)| = \tfrac{1}{4}\,|x^5 - y^5| = \tfrac{1}{4}\,|x-y|\,|x^4 + x^3y + \cdots + xy^3 + y^4| \le L\,|x-y|\,.$$

Um das x mit $g(x) = \frac{1}{4}(x^5 - 1) = x$, also $x^5 - 4x - 1 = 0$, mit einem Fehler $< 10^{-6}$ zu berechnen, starten wir mit $x_0 := 0$ und berechnen $x_0 = 0$; $f(x_0) = x_1 = -0{,}25$; $f(x_1) = x_2 = -0{,}250244140\ldots$; $f(x_2) = x_3 = -0{,}250245335\ldots$; $f(x_3) = x_4 = -0{,}250245340903\ldots$ usw. Die (a priori-)Fehlerabschätzung in Satz 10.B.13 liefert $|x - x_n| \le |x - x_1|\, L^n \big/ (1-L) \le (1/4) \cdot (5/64)^n \big/ (59/64) = (5/64)^n \cdot (16/59)$. Bei $n \ge 6$ ist dieser Fehler $< 10^{-6}$.

Die (a posteriori-)Abschätzung $|x - x_3| \le |x_4 - x_3| \big/ (1-L) \approx 6{,}4 \cdot 10^{-9}$ zeigt, dass bereits x_3 um höchstens 10^{-8} von x abweicht. •

Abschnitt 10.C, Variante zu **Aufg. 2**, p. 261 (1.8.2010) :

Man begründe, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^5 - 4x - 1$ mindestens drei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt, und berechne die Nullstelle im Intervall $[-1, 0]$ bis auf einen Fehler $\le 10^{-2}$, indem man das Beweisverfahren des Nullstellensatzes anwendet.

Lösung: Wegen $f(-2) = -25 < 0$, $f(-1) = 2 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = -4 < 0$ und $f(2) = 23 > 0$ hat f als stetige Funktion nach dem Nullstellensatz in den drei Intervallen $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ und $[1, 2]$ jeweils mindestens eine Nullstelle.

Durch fortgesetztes Halbieren erhält man aus $[-1, 0]$ die folgenden Intervalle, an deren Randpunkten f links jeweils positives und rechts negatives Vorzeichen hat: $[-1\,,\,0]$, $[-0{,}5,\,0]$, $[-0{,}5,\,-0{,}25]$, $[-0{,}375\,,\,-0{,}25]$, $[-0{,}3125\,,\,-0{,}25]$, $[-0{,}28125\,,\,-0{,}25]$, $[-0{,}265625\,,\,-0{,}25]$. Der Mittelpunkt $x_0 \approx -0{,}258$ des letzten Intervalls hat die gewünschte Eigenschaft, da er von dessen Randpunkten weniger als 10^{-2} entfernt ist und eine Nullstelle im Inneren dieses Intervalls liegt. •

Lösung: Abschnitt 10.C, Variante zu **Aufg. 2**, p. 261 (1.8.2010) :

Man begründe, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^5 - 3x^4 + 5$ mindestens drei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt, und berechne die Nullstelle im Intervall $[1, 2]$ bis auf einen Fehler $\le 10^{-2}$, indem man das Beweisverfahren des Nullstellensatzes anwendet.

Lösung: Wegen $f(-2) = -75 < 0$, $f(-1) = 1 > 0$, $f(1) = 2 > 0$, $f(2) = -11 < 0$ und $f(3) = 5 > 0$ hat f als stetige Funktion nach dem Nullstellensatz in den drei Intervallen $[-2, -1]$, $[1, 2]$ und $[2, 3]$ jeweils mindestens eine Nullstelle.

Durch fortgesetztes Halbieren erhält man aus $[1, 2]$ die folgenden Intervalle, an deren Randpunkten f links jeweils positives und rechts negatives Vorzeichen hat: $[1\,,\,2]$, $[1\,,\,1{,}5]$, $[1{,}25\,,\,1{,}5]$, $[1{,}25\,,\,1{,}375]$, $[1{,}25\,,\,1{,}3125]$, $[1{,}28125\,,\,1{,}3125]$, $[1{,}296875\,,\,1{,}3125]$. Der Mittelpunkt $x_0 \approx 1{,}305$ des letzten Intervalls hat die gewünschte Eigenschaft, da er von dessen Randpunkten weniger als 10^{-2} entfernt ist. •

Abschnitt 10.C, **Aufg. 7**, p. 261 (1.8.2010) :

Es sei $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ gibt es dann ein $x_n \in [a\,,\,b - (b-a)/n]$ mit $f(x_n) = f\big(x_n + (b-a)/n\big)$.

Beweis: Wir betrachten die Teilpunkte $t_k := a + k(b-a)/n$, $k = 0, \ldots, n$, des Intervalls $[a, b]$, also mit $t_0 = a$ und $t_n = b$, und betrachten die Hilfsfunktion $h : [a\,,\,t_{n-1}] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := f\big(x + (b-a)/n\big) - f(x)$. Sie ist stetig, da f stetig ist, und es gilt $h(t_{k-1}) = f(t_k) - f(t_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$. Ist $h(t_{k-1}) = 0$ für ein k, so gilt die Behauptung mit $x_n := t_{k-1}$. Wären andernfalls alle $h(t_{k-1}) > 0$, so wäre $0 < h(t_0) + \ldots + h(t_{n-1}) =$

$f(t_1) - f(t_0) + f(t_2) - f(t_1) + \cdots + f(t_n) - f(t_{n-1}) = f(t_n) - f(t_0) = f(b) - f(a)$ im Widerspruch zu $f(a) = f(b)$. Ebenso sieht man, dass nicht $h(t_{k-1}) < 0$ für alle k gilt. Daher gibt es ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ derart, dass $h(t_{k-1})$ und $h(t_k)$ verschiedene Vorzeichen haben. Dann hat h nach dem Nullstellensatz eine Nullstelle x_n im Intervall $[t_{k-1}, t_k]$. Dafür gilt $f\big(x_n + (b-a)/n\big) - f(x_n) = h(x_n) = 0$. •

Abschnitt 10.D, **Aufg. 1**, p. 265 (1.8.2010) :

Es gibt keine stetige surjektive Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1[$.

Beweis: Nach Satz 10.D.2 wäre mit dem abgeschlossenen und beschränkten, also kompakten, Intervall $[0, 1]$ auch das stetige Bild $f\big([0, 1]\big) = [0, 1[$ kompakt, also insbesondere abgeschlossen. Widerspruch! Man hätte auch argumentieren können, dass ein solche Funktion das Supremum 1 ihrer Funktionswerte auf der kompakten Menge $[0, 1]$ nicht annimmt im Widerspruch zu 10.D.5. •

Abschnitt 10.D, Variante zu **Aufg. 1**, p. 265 (1.8.2010) :

a) Es gibt keine surjektive stetige Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
b) Es gibt keine surjektive stetige Abbildung $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
c) Es gibt keine bijektive stetige Abbildung $f :]a, b] \to]a, b[$.
d) Es gibt keine bijektive stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$.
e) Es gibt keine bijektive stetige Abbildung $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Beweis: a) Das Interval $[a, b]$ ist kompakt, $\mathbb{R}$ jedoch nicht. Daher kann R nicht das Bild von $[a, b]$ unter einer stetigen Abbildung sein.
b) Der Zwischenwert 0 nicht würde von f nicht angenommen im Widerspruch zum Zwischenwertsatz.
c) Der Zwischenwert $f(b)$ würde von der bijektiven stetigen Abbildung $f\,|\,]a, b[$ von $]a, b[$ auf $]a, b[- \{f(b)\}$ nicht angenommen.
d) Ein solches f wäre injektiv, also streng monoton. Nach dem Umkehrsatz 10.C.9 müsste auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv sein im Widerspruch zu a) .
e) Für ein solches f wären $f\,|\,]-\infty, 0[$ und $f\,|\,]0, \infty[$ injektiv, also streng monoton. Nach dem Umkehrsatz 10.C.9 müssten auch die Umkehrabbildungen dieser beiden Abbildungen auf den disjunkten offenen Intervallen $f\big(]-\infty, 0[\big)$ bzw. $f\big(]0, \infty[\big)$ stetig sein. Dann wäre auch $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ stetig im Widerspruch dazu, dass diese Abbildung den Zwischenwert 0 nicht annimmt. •

11 Polynom-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Abschnitt 11.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 273 (1.8.2010):

Man gebe die Zerlegung des Polynoms x^4+2 in $\mathbb{C}[x]$ gemäß 11.A.8 und in $\mathbb{R}[x]$ gemäß 11.A.9 an.

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten. Wegen $-2 = 2\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$ besitzt -2 die 4 vierten Wurzeln

$$\begin{aligned}
z_1 &:= \sqrt[4]{2}\big(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)\big) = \big(1/\sqrt[4]{2}\big)(1+\mathrm{i})\,,\\
z_2 &:= \sqrt[4]{2}\big(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)\big) = \big(1/\sqrt[4]{2}\big)(-1+\mathrm{i})\,,\\
z_3 &:= \sqrt[4]{2}\big(\cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\sin(5\pi/4)\big) = \big(1/\sqrt[4]{2}\big)(-1-\mathrm{i}) = \overline{z}_2\,,\\
z_4 &:= \sqrt[4]{2}\big(\cos(7\pi/4) + \mathrm{i}\sin(7\pi/4)\big) = \big(1/\sqrt[4]{2}\big)(1-\mathrm{i}) = \overline{z}_1\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist x^4+2 in $\mathbb{C}[x]$ das Produkt der zugehörigen Linearfaktoren:

$$\begin{aligned}
&x^4+2 = (x-z_1)\cdots(x-z_4) = \big((x-z_1)(x-\overline{z}_1)\big)\big((x-z_2)(x-\overline{z}_2)\big)\\
&= \big(x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,z_1\,x + |z_1|^2\big)\big(x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,z_2\,x + |z_2|^2\big) = \big(x^2 - \big(2/\sqrt[4]{2}\big)\,x + \sqrt{2}\big)\big(x^2 + \big(2/\sqrt[4]{2}\big)\,x + \sqrt{2}\big)\,.
\end{aligned}$$

Letzteres ist die gesuchte Zerlegung von x^4+2 in $\mathbb{R}[x]$.

Abschnitt 11.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 273 (1.8.2010):

Man gebe die Zerlegung des Polynoms x^6+8 in $\mathbb{C}[x]$ gemäß 11.A.8 und in $\mathbb{R}[x]$ gemäß 11.A.9 an.

Lösung: Wegen $-8 = 8(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$ besitzt -8 die 6 sechsten Wurzeln

$$\begin{aligned}
z_1 &:= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,,\\
z_2 &:= \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{6} = \sqrt{2}\,\mathrm{i}\,,\\
z_3 &:= \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,,\\
z_4 &:= \sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{6} = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \overline{z}_3\,,\\
z_5 &:= \sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{6} = -\sqrt{2}\,\mathrm{i} = \overline{z}_2\,,\\
z_6 &:= \sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \overline{z}_1\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist x^6+8 in $\mathbb{C}[x]$ das Produkt der zugehörigen Linearfaktoren:

$$\begin{aligned}
&x^6 + 8 = x^6 - (-8) = (x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)(x-z_5)(x-z_6)\\
&= \big((x-z_1)(x-\overline{z}_1)\big)\big((x-z_2)(x-\overline{z}_2)\big)\big((x-z_3)(x-\overline{z}_3)\big)\\
&= \Big(x-\big(\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big)\Big)\Big(x-\big(\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big)\Big)\,(x-\sqrt{2}\mathrm{i})(x+\sqrt{2}\mathrm{i})\,\Big(x-\big(-\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big)\Big)\Big(x-\big(-\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big)\Big)\\
&= \big(x^2 - \sqrt{6}\,x + 2\big)\,\big(x^2+2\big)\,\big(x^2 + \sqrt{6}\,x + 2\big)\,.
\end{aligned}$$

Letzteres ist die gesuchte Zerlegung von x^6+8 in $\mathbb{R}[x]$. •

Abschnitt 11.A, **Aufg. 3a)**, p. 274 (1.8.2010):

Sei $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ ein normiertes Polynom aus $\mathbb{C}[x]$. Dann gilt für jede Nullstelle α von f in $\mathbb{C}$ die Abschätzung $|\alpha| \le \mathrm{Max}\big(1\,,\,|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|\big)$.

Beweis: Wegen $f(\alpha) = 0$ ist $\alpha^n = -(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1})$. Ist nun $|\alpha| > 1$, so ist $1/|\alpha|^j < 1$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$. Division durch α^{n-1} und Übergang zu Beträgen liefert dann zusammen mit der

Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$|\alpha| = \left|\frac{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\right| \le \frac{|a_0|}{|\alpha|^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_{n-2}|}{|\alpha|} + |a_{n-1}| \le |a_0| + \cdots + |a_{n-1}| \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.A, **Aufg. 3b)**, p. 274 (1.8.2010) :

Sei $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ ein normiertes Polynom aus $\mathbb{C}[x]$. Dann gilt für jede Nullstelle α von f in $\mathbb{C}$ die Abschätzung $|\alpha| \le \operatorname{Max}\big(|a_0|\,, 1+|a_1|\,, \ldots, 1+|a_{n-1}|\big)$.

Beweis: Andernfalls wäre $|\alpha| > |a_0|$ und $|\alpha| > 1+|a_k|$, d.h. $|a_k| < |\alpha| - 1$, für $k = 1, \ldots, n-1$. Wegen $f(\alpha) = 0$ ist $\alpha^n = -(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1})$. Daraus folgte der Widerspruch

$$|\alpha^n| = \Big|a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\alpha^k\Big| \le |a_0| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k||\alpha|^k < |\alpha| + \sum_{k=1}^{n-1} \big(|\alpha| - 1\big)\,|\alpha|^k = |\alpha| + \sum_{k=1}^{n-1} \big(|\alpha|^{k+1} - |\alpha|^k\big) = |\alpha^n|\,. \bullet$$

Abschnitt 11.A, **Zusatzaufgabe**, p. 274 (1.8.2010) :

Man bestimme ein Polynom f vom Grad ≤ 3 mit $f(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ und begründe, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summenformel $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = f(n)$ gilt.

Lösung: Es ist $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 10$, $f(3) = 35$. Newton-Interpolation liefert also

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + x + x(x-1)\frac{10-2}{2\cdot 1} + x(x-1)(x-2)\frac{35-27}{3\cdot 2\cdot 1} = x + 4x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\ &= \frac{x}{3}(4x^2-1)\,. \end{aligned}$$

Dann besitzt das Polynom $f(x+1) - f(x) - (2x+1)^2$ nach Konstruktion die 4 Nullstellen 0, 1, 2 und hat wegen Grad $f = 3$ den Grad ≤ 2, ist also nach dem Identitätssatz gleich 0. Für alle x folgt $f(x+1) = f(x) + (2x+1)^2$. Induktion über n liefert nun, dass $f(n)$ Summe der ersten n ungeraden Quadrate ist: Für $n \le 4$ gilt das nach Konstruktion, und beim Schluss von n auf $n+1$ ist

$$f(n+1) = f(n) + (2n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1) - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.A, **Zusatzaufgabe**, p. 274 (1.8.2010) :

Man bestimme ein Polynom f vom Grad ≤ 4 mit $f(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3$ für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und begründe, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summenformel $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = f(n)$ gilt.

Lösung: Es ist $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 28$, $f(3) = 153$, $f(4) = 496$. Newton-Interpolation liefert also

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + x + x(x-1)\frac{28-2}{2\cdot 1} + x(x-1)(x-2)\frac{153-81}{3\cdot 2\cdot 1} + x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{496-448}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= x + 13x(x-1) + 12x(x-1)(x-2) + 2x(x-1)(x-2)(x-3) = 2x^4 - x^2 = x^2(2x^2-1)\,. \end{aligned}$$

Dann besitzt das Polynom $f(x+1) - f(x) - (2x+1)^3$ nach Konstruktion die 4 Nullstellen $0, 1, 2, 3$ und hat wegen Grad $f = 4$ den Grad ≤ 3, ist also nach dem Identitätssatz gleich 0. Für alle x folgt $f(x+1) = f(x) + (2x+1)^3$. Induktion über n liefert nun, dass $f(n)$ Summe der ersten n ungeraden dritten Potenzen ist: Für $n \le 4$ gilt das nach Konstruktion, und beim Schluss von n auf $n+1$ ist

$$f(n+1) = f(n) + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 + (2(n+1) - 1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.A, **Zusatzaufgabe**, p. 274 (1.8.2010) :

Man bestimme ein Polynom f vom Grad ≤ 4 mit $f(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$ für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und begründe, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{n} k^3 = f(n)$ gilt, vgl. auch Aufg. 1 in Abschnitt 2.A und die Lösung dazu.

Lösung: Es ist $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=9$, $f(3)=36$, $f(4)=100$. Newton-Interpolation liefert also

$$f(x) = 0 + x + x(x-1)\frac{9-2}{2\cdot 1} + x(x-1)(x-2)\frac{36-24}{3\cdot 2\cdot 1} + x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{100-94}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} =$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \big(\tfrac{1}{2}x(x+1)\big)^2.$$

Dann besitzt das Polynom $f(x+1) - f(x) - (x+1)^3$ nach Konstruktion die 4 Nullstellen 0, 1, 2, 3 und hat wegen Grad $f \leq 4$ den Grad ≤ 3, ist also nach dem Identitätssatz gleich 0. Induktion über n liefert nun, dass $f(n)$ die Summe der ersten n Kuben ist: Für $n \leq 4$ ist das so nach Konstruktion, und beim Schluss von n auf $n+1$ ist

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n+1} k^3 \,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.A, **Zusatzaufgabe**, p. 274 (1.8.2010) :

Man bestimme ein Polynom f vom Grad ≤ 5 mit $f(n) = \sum_{k=0}^{n} k^4$ für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und begründe, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{n} k^4 = f(n)$ gilt.

Lösung: Es ist $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=17$, $f(3)=98$, $f(4)=354$, $f(5)=979$. Newton-Interpolation liefert also

$$f(x) = 0 + x + x(x-1)\frac{17-2}{2\cdot 1} + x(x-1)(x-2)\frac{98-48}{3\cdot 2\cdot 1} + x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{354-294}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} +$$
$$+ x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\frac{979-955}{5!} = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x =$$
$$= \frac{1}{30}x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1)\,.$$

Dann besitzt das Polynom $f(x+1) - f(x) - (x+1)^4$ nach Konstruktion die 5 Nullstellen 0, 1, 2, 3, 4 und hat wegen Grad $f \leq 5$ den Grad ≤ 4, ist also nach dem Identitätssatz gleich 0. Für alle x gilt somit $f(x+1) = f(x) + (x+1)^4$. Induktion über n liefert nun, dass $f(n)$ die Summe der ersten n vierten Potenzen ist: Für $n \leq 5$ ist das so nach Konstruktion, und beim Schluss von n auf $n+1$ ist

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4 + (n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n+1} k^4 \,. \qquad \bullet$$

Bemerkung. Die beiden letzten Aufgaben sind Spezialfälle der allgemeinen Eulerschen Formel

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} B_j \cdot \binom{m+1}{j}(n+1)^{m+1-j}$$

mit den Bernoulli-Zahlen B_j, vgl. das Ende von Beispiel 12.E.7 und Beispiel 18.B.1. Ferner verweisen wir auf die allgemeinen Überlegungen in Teil (3) am Ende von Beispiel 12.C.8.

Abschnitt 11.B, Variante zu **Aufg. 3**, p. 278 (1.8.2010) :

Man bestimme die Partialbruchzerlegungen folgender rationaler Funktionen:

$$\frac{x^6 - x^4 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,, \quad \frac{x^6 + x - 1}{x^4 + x^2}\,, \quad \frac{x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2(x^2+1)}\,.$$

Lösung: Bei der ersten Funktion multiplizieren wir zunächst den Nenner aus und verwenden dann Division mit Rest:

$(x-1)^2(x^2+1) = x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ und $x^6-x^4+1 = (x^2+2x+1)(x^4-2x^3+2x^2-2x+1) + x^2$.

Dies liefert die Darstellung

$$\frac{x^6-x^4+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^6-x^4+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = x^2+2x+1+\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,.$$

Wir machen nun einen komplexen Ansatz für eine Partialbruchzerlegung und zerlegen dazu den Nenner weiter in Linearfaktoren:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} = \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma}{x-\mathrm{i}}+\frac{\overline{\gamma}}{x+\mathrm{i}}\,.$$

Zur Berechnung von γ multiplizieren wir diese Darstellung mit $x-\mathrm{i}$, kürzen dann $x-\mathrm{i}$, wo es möglich ist, und setzen schließlich $x=\mathrm{i}$ ein. So erhalten wir $\gamma = \dfrac{\mathrm{i}^2}{(\mathrm{i}-1)^2(\mathrm{i}+\mathrm{i})} = -\dfrac{1}{4} = \overline{\gamma}$. Analog berechnet man β, indem man zunächst mit $(x-1)^2$ multipliziert, wieder kürzt und schließlich $x=1$ setzt. Dies liefert $\beta = \dfrac{1^2}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$. Schließlich berechnen wir x, indem wir in der obigen Darstellung die erhaltenen Werte für β, γ und $\overline{\gamma}$ einsetzen und so $0 = \dfrac{\alpha}{-1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{(-1)^2}+\dfrac{-\frac{1}{4}}{-\mathrm{i}}+\dfrac{-\frac{1}{4}}{\mathrm{i}}$, also $\alpha = \dfrac{1}{2}$ erhalten. Dies liefert die gesuchte komplexe Partialbruchzerlegung und dann durch Zusammenfassen der komplexen Terme auch die reelle Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^6-x^4+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = x^2+2x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-\mathrm{i}}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+\mathrm{i}} = x^2+2x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}\,.$$

Alternativ kann man auch gleich einen rellen Ansatz machen, hat dann aber ein größeres lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1} = \frac{\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} =$$
$$= \frac{(\alpha+\gamma)\,x^3+(-\alpha+\beta-2\gamma+\delta)\,x^2+(\alpha+\gamma-2\delta)\,x+(-\alpha+\beta+\delta)}{(x-1)^2(x^2+1)}\,.$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von x^3, x^2, x und x^0 im Zähler liefert die Gleichungen:

$$\alpha+\gamma=0\,,\quad -\alpha+\beta-2\gamma+\delta=1\,,\quad \alpha+\gamma-2\delta=0\,,\quad -\alpha+\beta+\delta=0\,.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt $\alpha=-\gamma$. Damit ergibt die dritte Gleichung $\delta=0$, und aus der vierten folgt $\beta=\alpha$. Setzt man all dieses in die zweite Gleichung ein, so erhält man $\gamma=-\frac{1}{2}$ und dann $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$. Insgesamt bekommt man so direkt:

$$\frac{x^6-x^4+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = x^2+2x+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}\,.$$ •

Bei der zweiten Funktion verwenden wir ebenfalls Division mit Rest und machen dann einen komplexen Ansatz für die Partialbruchzerlegung: $x^6+x-1 = (x^2-1)(x^4+x^2)+(x^2+x-1)$,

$$\frac{x^6+x-1}{x^4+x^2} = x^2-1+\frac{x^2+x-1}{x^2(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} = x^2-1+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x-\mathrm{i}}+\frac{\overline{\gamma}}{x+\mathrm{i}}$$

mit $\gamma = \dfrac{\mathrm{i}^2+\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}^2\cdot 2\mathrm{i}} = -\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$, $\overline{\gamma} = -\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$ und $\beta = \dfrac{-1}{0^2+1} = -1$. Dann setzen wir beispielsweise $x=1$ und erhalten $\alpha=1$. Die gesuchte komplexe und die relle Partialbruchzerlegung sind also

$$\frac{x^6+x-1}{x^4+x^2} = x^2-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}+\frac{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} = x^2-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-x+2}{x^2+1}\,.$$ •

Bei der dritten Funktion multiplizieren wir den Nenner aus, verwenden dann ebenfalls Division mit Rest und machen schließlich gleich einen reellen Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$(x+2)^2(x^2+1) = x^4+4x^3+5x^2+4x+4\,,$$
$$x^5+4x^4+6x^3+4x^2+6x+7 = x\,(x^4+4x^3+5x^2+4x+4) + (x^3+2x+7)\,,$$
$$\frac{x^5+4x^4+6x^3+4x^2+6x+7}{(x+2)^2(x^2+1)} = x + \frac{x^3+2+7}{(x+2)^2(x^2+1)} \quad \text{mit}$$
$$\begin{aligned}\frac{x^3+2+7}{(x+2)^2(x^2+1)} &= \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{(x+2)^2} + \frac{\gamma t+\delta}{x^2+1}\\ &= \frac{\alpha(x+2)(x^2+1) + \beta(x^2+1) + (\gamma x+\delta)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+1)}\\ &= \frac{(\alpha+\gamma)\,x^3 + (2\alpha+\beta+4\gamma+\delta)\,x^2 + (\alpha+4\gamma+4\delta)\,x + (2\alpha+\beta+4\delta)}{(x+2)^2(x^2+1)}\,.\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von x^3, x^2, x und x^0 im Zähler liefert:

$$\alpha+\gamma=1\,,\quad 2\alpha+\beta+4\gamma+\delta=0\,,\quad \alpha+4\gamma+4\delta=2\,,\quad 2\alpha+\beta+4\delta=7\,.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt $\alpha = 1-\gamma$. Damit ergibt die dritte Gleichung $1-\gamma+4\gamma+4\delta = 2$, d.h. $3\gamma+4\delta = 1$. Die Differenz aus zweiter und vierter Gleichung liefert $4\gamma-3\delta = -7$. Es folgt $25\delta = 4(3\gamma+4\delta) - 3(4\gamma-3\delta) = 4\cdot 1 - 3\cdot(-7) = 25$, d.h. $\delta = 1$ und dann $\gamma = \frac{3}{4}\delta - \frac{7}{4} = -1$, $\alpha = 1-(-1) = 2$. Setzt man all dieses in die zweite Gleichung ein, so erhält man $\beta = -1$. Insgesamt bekommen wir:

$$\frac{x^5+4x^4+6x^3+4x^2+6x+7}{(x+2)^2(x^2+1)} = x + \frac{2}{x+2} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}\,. \qquad \bullet$$

12 Funktionenfolgen und Potenzreihen

Abschnitt 12.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 293 (1.8.2010) :
Man untersuche folgende Funktionenfolgen auf gleichmäßige bzw. lokal gleichmäßige Konvergenz:

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\ ,\ n\in\mathbb{N},\quad \text{auf } \mathbb{R} \text{ und auf } \,]1\,,\infty[\,,\qquad \frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}}\ ,\ n\in\mathbb{N},\quad \text{auf } \mathbb{R} \text{ und auf } \,]-1\,,1[\,.$$

Lösung: Die erste Funktionenfolge hat die Grenzfunktion

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1/x^{2n})+1} = \begin{cases} 0\,, & \text{bei } |x|<1,\\ 1/2\,, & \text{bei } |x|=1,\\ 1\,, & \text{bei } |x|>1.\end{cases}$$

Auf $\mathbb{R}$ ist die Funktionenfolge also nach 12.A.11 nicht einmal lokal gleichmäßig konvergent, da sie dort nicht stetig ist. Auf $]1,\infty[$ ist sie nicht gleichmäßig konvergent, da sie sonst auch auf $[1,\infty[$ gleichmäßig konvergent wäre und dann dort eine stetige Grenzfunktion hätte, wohl aber lokal gleichmäßig konvergent wegen

$$\Big|\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}-1\Big| = \frac{1}{1+x^{2n}} \le \frac{1}{1+r^{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{für } 1<r\le x\,. \qquad \bullet$$

Die zweite Funktionenfolge hat die Grenzfunktion

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2/x^{2n}-1}{(2/x^{2n})+1} = \begin{cases} 1\,, & \text{bei } |x|<1,\\ 1/3\,, & \text{bei } |x|=1,\\ -1\,, & \text{bei } |x|>1.\end{cases}$$

Auf $\mathbb{R}$ ist die Funktionenfolge also nach 12.A.11 nicht einmal lokal gleichmäßig konvergent, da sie dort nicht stetig ist. Auf $]1,\infty[$ ist sie nicht gleichmäßig konvergent, da sie sonst auch auf $[1,\infty[$ gleichmäßig konvergent wäre und dann dort eine stetige Grenzfunktion hätte, wohl aber lokal gleichmäßig konvergent wegen

Abschnitt 12.A, **Aufg. 2a)**, p. 293 (1.8.2010) :

Man untersuche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2(1+|x|)}$ auf $\mathbb{C}$ auf gleichmäßige bzw. lokal gleichmäßige Konvergenz.

Lösung: Für alle $x\in\mathbb{C}$ gilt $\displaystyle\Big|\frac{x}{n^2(1+|x|)}\Big| \le \frac{1}{n^2}$ und die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert. Nach dem Kriterium von Weierstraß konvergiert die zu untersuchende Reihe daher auf ganz $\mathbb{C}$ gleichmäßig und dann natürlich auch lokal gleichmäßig. •

Abschnitt 12.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 293 (1.8.2010) :

Man untersuche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin(nx)}{n^2}$ auf $\mathbb{C}$ auf gleichmäßige bzw. lokal gleichmäßige Konvergenz.

Lösung: Sei $R>0$. Auf dem Intervall $[-R\,,R]$ gilt $\displaystyle\Big\|\frac{x\sin nx}{n^2}\Big\|_{[-R,R]} \le \frac{R}{n^2}$. Da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{n^2}$ konvergiert, liefert das Weierstraßsche Kriterium, dass die Reihe lokal gleichmäßig konvergent ist. Sie ist auf $\mathbb{C}$ jedoch nicht gleichmäßig konvergent. Andernfalls gäbe es zu $\varepsilon=1$ ein n_0 mit $\displaystyle\Big|\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x\sin(nx)}{n^2}\Big|\le 1$ für alle $x\in\mathbb{C}$. Für $x=2k\pi$ wäre dann $\displaystyle 2k\pi\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le 1$ für alle $k\in\mathbb{N}$ im Widerspruch zu $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}>0$. •

Abschnitt 12.B, Variante zu **Aufg. 2**, p. 301 (1.8.2010):

b) Man berechne die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n n^2\,(x-2)^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x+3)^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2-n}}{n^{2n}}\,.$$

Lösung: Wir verwenden das Quotientenkriterium. Bei der ersten Reihe ist

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^2\,(x-2)^{n+1}}{3^n n^2\,(x-2)^n} = 3|x-2|\,\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\Big)^2 = 3|x-2|$$

genau dann <1, wenn $|x-2|<\frac{1}{3}$, und >1, wenn $|x-2|>\frac{1}{3}$ ist. Ihr Konvergenzradius ist also $\frac{1}{3}$. •

Bei der zweiten Reihe ist $\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n^2\,(x-3)^{n+1}}{3^n(n+1)^2\,(x-3)^n} = \frac{1}{2}|x-3|\,\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\Big)^2 = \frac{1}{2}|x-3|$ genau dann <1, wenn $|x-3|<2$, und >1, wenn $|x-3|>2$ ist. Ihr Konvergenzradius ist also 2. •

Bei der dritten Reihe ist $\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \Big|\frac{(n+1)!\,(x+3)^{n+1}}{n!\,(x+3)^n}\Big| = (n+1)\,|x+3|$ bei $|x+3|>0$ gleich ∞. Sie divergiert also für $|x+3|>0$, d.h. der Konvergenzradius ist 0. •

Bei der vierten Reihe konvergiert $\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \Big|\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)^2}\Big/\frac{x^{2n}}{2^n n^2}\Big| = \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2|x|^2$ gegen $|x|^2/2$. Sie konvergiert also für $|x|^2/2<1$, d.h. $|x|<\sqrt{2}$, und divergiert für $|x|^2/2>1$, d.h. $|x|>\sqrt{2}$. Ihr Konvergenzradius ist somit $\sqrt{2}$. •

Bei der fünften Reihe ist $\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim\limits_{n\to\infty}\Big|\frac{x^{(n+1)^2}/(n+1)!}{x^{n^2}/n!}\Big| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{n+1}$ für $|x|<1$ gleich 0 und für $|x|>1$ gleich ∞. Letzteres sieht man wieder mit Hilfe des Quotientenkriteriums: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{|x|^{2n+1}}$ konvergiert, da die zugehörigen Quotienten $\frac{(n+2)/|x|^{2n+3}}{(n+1)/|x|^{2n+1}} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{|x|^2}$ bei $|x|>1$ den Grenzwert $1/|x|^2<1$ haben. Das allgemeine Glied dieser Reihe konvergiert also gegen 0, und sein Inverses geht folglich gegen ∞ (da es positiv ist). Insgesamt erhalten wir, dass der Konvergenzradius der fünften Potenzreihe gleich 1 ist. •

Bei der sechsten Reihe ist

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\frac{x^{(n+1)^2-(n+1)}/(n+1)^{2(n+1)}}{x^{n^2-n}/n^{2n}}\Big| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n}}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^{2n}(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^2}\,\frac{|x|^{2n}}{(n+1)^2}$$

für $|x|<1$ gleich 0 und für $|x|>1$ gleich ∞. Letzteres sieht man wieder mit Hilfe des Quotientenkriteriums: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{|x|^{2n}}$ konvergiert, da die zugehörigen Quotienten $\frac{(n+2)^2/|x|^{2n+2}}{(n+1)^2/|x|^{2n}} = \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^2\cdot\frac{1}{|x|^2}$ bei $|x|>1$ den Grenzwert $1/|x|^2<1$ haben. Das allgemeine Glied dieser Reihe konvergiert also gegen 0, und sein Inverses geht folglich gegen ∞ (da es positiv ist). Insgesamt erhalten wir, dass der Konvergenzradius der sechsten Potenzreihe gleich 1 ist. •

Abschnitt 12.B, **Aufg. 8**, p. 301 (1.8.2010):

Für die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gelte $a_n\neq 0$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$. Konvergiert die Folge $|a_n/a_{n+1}|$, $n\in\mathbb{N}$ genügend groß, so ist der Grenzwert dieser Folge der Konvergenzradius der Potenzreihe. Dies gilt auch, wenn die Folge (uneigentlich) gegen ∞ konvergiert.

Beweis: Die Koeffizienten a_n der Potenzreihe seien $\neq 0$ für $n\geq n_0$, und die Folge $\Big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big|$, $n\geq n_0$, sei konvergent mit Grenzwert $R\in\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$. Für $x\in\mathbb{C}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\Big| = |x|\Big/\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big| = \frac{|x|}{R}$. Für $|x|<R$ ist dieser Grenzwert <1 und für $|x-a|>R$ ist er >1. Dies erhält man mit leichten Modifikationen auch in den Fällen $R=0$ und $R=\infty$, die eigentlich oben ausgeschlossen sind. Das Quotientenkriterium liefert nun die Behauptung. •

Abschnitt 12.B, **Aufg. 8**, p. 301 (1.8.2010) :

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ ist $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, wo für $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ die Formel als $R = 1/0 = \infty$ und bei unbeschränkter Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ als $R = 1/\infty = 0$ zu lesen ist.

Beweis: Sei $R := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} < \infty$ und $|x-a| > R$, also $\dfrac{1}{|x-a|} < \dfrac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Es folgt $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-a| > 1$ und somit $|a_n(x-a)^n| > 1$ für unendlich viele n. Für diese x ist die Potenzreihe daher sicher nicht konvergent. – Sei nun $|x-a| < R$, also $\dfrac{|x-a|}{R} < 1$. Wir wählen ein $q \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{|x-a|}{R} < q < 1$, also mit $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{R} < \dfrac{q}{|x-a|}$. Es folgt $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-a| < q$ für fast alle n, d.h. $\sqrt[n]{|a_n|\,|x-a|^n} < q$ für fast alle n. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ aber nach dem Wurzelkriterium 6.A, Aufg. 4. •

Abschnitt 12.C, **Aufg. 7a)**, p. 316 (1.1.2011) :

Sei $g = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit $c_0 < 0$ und $c_1, \ldots, c_{n-1} \geq 0$, $c_n > 0$. Dann hat g genau eine positive reelle Nullstelle α. (Diese Nullstelle ist übrigens einfach.)

Beweis: Es ist $g(0) = c_0 < 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ (wegen $c_n > 0$). Nach dem Nullstellensatz 10.C.1 besitzt g also mindestens eine Nullstelle $\alpha > 0$. Da g auf $\mathbb{R}_+^\times$ streng monoton wachsend ist als Summe der Konstanten c_0, der wegen $c_i \geq 0$ monoton wachsenden Funktionen c_ix^i, $i = 1, \ldots, n$, von denen c_nx^n wegen $c_n > 0$ streng monoton wachsend ist, ist α die einzige Nullstelle von g in $\mathbb{R}_+^\times$. (Genau dann ist α eine einfache Nullstelle von g, d.h. hat die Vielfachheit 1, wenn $g'(\alpha) \neq 0$ ist für die Ableitung g' von g, vgl. Abschnitt 13.B, Aufg. 9. In der Tat ist $g'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} i\,c_i\alpha^{i-1} \geq nc_n\alpha^{n-1} > 0$ nach Voraussetzung über die c_i.) •

Abschnitt 12.C, **Aufg. 7b)**, p. 316 (1.1.2011) :

Sei $g = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit $c_0 < 0$ und $c_1, \ldots, c_n \geq 0$. Ferner sei der größte gemeinsame Teiler der Indizes i mit $c_i > 0$ gleich 1. Dann hat jede reelle oder komplexe Nullstelle β von g, die von der Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ von g gemäß Aufg. 7a) verschieden ist, einen Betrag, der größer ist als α.

Beweis: Wegen $g(0) = c_0 < 0$ ist $\beta \neq 0$. Angenommen, es sei $|\beta| \leq \alpha$. Die paarweise verschiedenen Elemente von $\{\, i \mid c_i > 0\}$ seien $i_1, \ldots, i_k$. Wegen $g(\beta) = c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}\beta^{i_j} = 0$ und $g(\alpha) = c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}\alpha^{i_j} = 0$ sowie $-c_0 \in \mathbb{R}_+^\times$ gilt dann:

$$-c_0 = \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}\beta^{i_j} = \Big|\sum_{j=1}^{k} c_{i_j}\beta^{i_j}\Big| \leq \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}|\beta|^{i_j} \leq \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}\alpha^{i_j} = -c_0\,, \quad \text{also} \quad \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}\beta^{i_j} = \sum_{j=1}^{k} |c_{i_j}\beta^{i_j}|\,.$$

Mit 5.A, Aufg. 10 folgt $c_{i_j}\beta^{i_j} = |c_{i_j}\beta^{i_j}| \in \mathbb{R}_+^\times$ für $j = 1, \ldots, k$. Wegen $c_{i_j} \in \mathbb{R}_+^\times$ sind dann auch $\beta^{i_1}, \ldots, \beta^{i_k} \in \mathbb{R}_+^\times$. Die Voraussetzung über die c_i ergibt $\mathrm{ggT}(i_1, \ldots, i_k) = 1$. Das Lemma von Bezout in der Form von 2.D, Aufg. 24 liefert dann die Existenz von Zahlen $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{Z}$ mit $u_1i_1 + \cdots + u_ki_k = \mathrm{ggT}(i_1, \ldots, i_k) = 1$. Damit erhält man

$$\beta = \beta^1 = \beta^{u_1i_1+\cdots+u_ki_k} = \big(\beta^{i_1}\big)^{u_1}\cdots\big(\beta^{i_k}\big)^{u_k} \in \mathbb{R}_+^\times$$

im Widerspruch dazu, dass g nach Aufg. 7a) nur α $(\neq \beta)$ als positive reelle Nullstelle besitzt. •

Ergänzung: Ist allgemeiner $d := \mathrm{ggT}(i_1, \ldots, i_k) \geq 1$, so gilt: Die Nullstellen von g des Betrages α sind $\zeta_d^\nu\alpha$, $0 \leq \nu < d$, und alle diese Nullstellen sind einfach. Ist β eine Nullstelle von g mit $|\beta| \neq \alpha$, so ist $|\beta| > \alpha$ und $\zeta_d^\nu\beta$, $0 \leq \nu < d$, sind Nullstellen von g derselben Vielfachheit (die aber > 1 sein kann).

Dies ergibt sich, indem man das Bewiesene auf $\widetilde{g} := g(x^{1/d})$ anwendet wegen $g(x) = \widetilde{g}(x^d)$. •

Bemerkung: Das Ergebnis dieser Aufgabe lässt sich auch mit Methoden aus Band 2 und dem Satz 16.A.4 von Perron-Frobenius in Band 3 gewinnen. Statt g betrachten wir das Polynom

$$h := c_0^{-1}x^ng(x^{-1}) = x^n + c_0^{-1}c_1x^{n-1} + \ldots + c_0^{-1}c_{n-1}x + c_0^{-1}c_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_i := c_0^{-1}c_{n-i} \le 0$ für $i = 0, \dots, n-1$ und $a_0 = c_0^{-1}c_n < 0$. Genau dann ist $\beta \ne 0$ eine Nullstelle von g, wenn β^{-1} eine Nullstelle von h ist. Nach Band 2, Beispiel 12.A.23 ist h das charakteristische Polynom $h = \chi_{\mathfrak{A}_h}$ der so genannten Begleitmatrix

$$\mathfrak{A}_h := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

von h. Die Eigenwerte dieser Matrix sind nach Band 2, Satz 11.A.5 genau die Nullstellen von h, ihre Koeffizienten sind konstruktionsgemäß nichtnegativ. Der Satz von Perron-Frobenius, also Satz 16.A.4 aus Band 3, besagt nun, dass der Spektralradius $\rho(\mathfrak{A}_h)$ von $\mathfrak{A}_h$ ein Eigenwert dieser Matrix ist. Der Spektralradius einer quadratischen Matrix ist definitionsgemäß das Maximum der Beträge ihrer Eigenwerte. $\rho(\mathfrak{A}_h)$ ist somit eine nichtnegative reelle Nullstelle von h und und wegen $h(0) = a_0 < 0$ daher gleich der einzigen Nullstelle α^{-1} von h in $\mathbb{R}_+^\times$. Für jede Nullstelle β von g ist β^{-1} ein Eigenwert von $\mathfrak{A}_h$. Es folgt $|\beta^{-1}| \le \rho(\mathfrak{A}_h) = \alpha^{-1}$, also $|\beta| \ge \alpha$.

Da die Matrix $\mathfrak{A}_h$ offenbar ergodisch mit Periode $d = \mathrm{ggT}(i_1, \dots, i_k)$ ist, vgl. Band 3, 16.A, Aufg. 14, ergibt sich auch die obige Ergänzung direkt mit den Ergebnissen dieser Aufgabe aus Band 3. •

Abschnitt 12.C, Zusatzbehauptung in **Aufg. 7b)**, p. 316 (1.1.2011):

Jede reelle oder komplexe Nullstelle eines Polynoms $f = a_0 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$, für das $a_0 \ge \cdots \ge a_n > 0$ gilt und für das der größte gemeinsame Teiler der Indizes $i \in \{1, \dots, n+1\}$ mit $a_{i-1} \ne a_i$ gleich 1 ist ($a_{n+1} := 0$), hat einen Betrag > 1.

Beweis: Wir betrachten $g := (x-1)f = -a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} (a_{i-1} - a_i)x^i = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ mit $c_0 := -a_0 < 0$, $c_i := a_{i-1} - a_i \ge 0$ für $i = 1, \dots, n+1$ und $\mathrm{ggT}\{i \mid c_i > 0\} = 1$. Dann sind die Voraussetzungen der Aufgaben 7a) und 7b) erfüllt. Wegen $g(1) = 0$ ist $\alpha := 1$ die einzige nichtnegative Nullstelle von g, und es ist $f(1) = a_0 + \cdots + a_n \ge a_n > 0$. Die von 1 verschiedenen Nullstellen von g sind somit genau die Nullstellen von f. Aus Aufg. 7b) ergibt sich $|\beta| > \alpha = 1$ für jede reelle oder komplexe Nullstelle β von f. •

Abschnitt 12.C, Zusatzbehauptung in **Aufg. 7b)**, p. 316 (1.1.2011):

Sei a_n, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_0 > 0$. Dann hat die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ einen Konvergenzradius ≥ 1, und es ist $f(x) \ne 0$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$. Ferner lässt sich f zu einer stetigen Funktion auf $\overline{\mathrm{B}}(0\,;1) - \{1\}$ fortsetzen, die dort ebenfalls nicht verschwindet, wenn für den Fall, dass $\lim a_n = 0$ ist, der größte gemeinsame Teiler der $n \in \mathbb{N}^*$ mit $a_{n-1} \ne a_n$ gleich 1 ist.

Beweis: Die monoton fallende und nach unten durch 0 beschränkte Folge (a_n) konvergiert gemäß 4.E.2 gegen ein $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gibt es ein n_0 mit $0 \le a_n \le a+1$ für $n \ge n_0$, und bei $|x| < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (absolut) konvergent wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \le \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n x^n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n |x|^n \le \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n x^n| + (a+1)|x|^{n_0}/(1-|x|) < \infty\,.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist also mindestens 1. Analog zur vorstehenden Aufgabe bilden wir nun $g := (x-1)f = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_0 := -a_0 < 0$ und $c_n := a_{n-1} - a_n \ge 0$ für $n \ge 1$. Der Konvergenzradius von g ist wie der von f mindestens 1. Im Punkte 1 konvergiert die g definierende Reihe noch gegen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n = -a$. Sie ist dann auch für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$ (absolut) konvergent wegen $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2a_0 - a < \infty$, definiert also eine in ganz $\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)$ stetige Funktion, vgl. 12.B, Aufg. 6a), die wir ebenfalls mit g bezeichnen. Dann ist auch

$g/(x-1)$ eine in $\overline{\mathrm{B}}(0\,;\,1)-\{1\}$ stetige Funktion, die nach Konstruktion mit f auf $\mathrm{B}(0\,;\,1)$ übereinstimmt. Die Nullstellen von f in $\overline{\mathrm{B}}(0\,;\,1)-\{1\}$ sind genau die Nullstellen von g dort. Sei nun $\beta\neq 1$ eine Nullstelle von f (und folglich von g) in $\mathbb{C}$ mit $|\beta|\le 1$. Wegen $a_0\in\mathbb{R}_+^\times$ erhält man

$$a_0=-c_0=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\beta^n=\Big|\sum_{n=1}^{\infty}c_n\beta^n\Big|\le\sum_{n=1}^{\infty}c_n|\beta|^n\le\sum_{n=1}^{\infty}c_n=a_0-a\,.$$

Bei $a>0$ ist dies nicht möglich. Es bleibt noch der Fall $a=0$ zu betrachten. Ist $|\beta|<1$, so erhält man ebenfalls einen Widerspruch, da dann die letzte der vorstehenden Ungleichungen echt ist, falls nicht $c_n=0$ für alle $n\ge 1$ ist, was wegen $0<a_0=\sum_{n\ge 1}c_n\beta^n$ unmöglich ist.

Sei schließlich $\lim a_n=a=0$ und $\beta\neq 1$ eine Nullstelle von g mit $|\beta|=1$. Dann ist $g(0)=-a_0<0$ und $g(1)=-a=0$. Da alle Funktionen c_nx^n auf $\mathbb{R}_+$ monoton wachsend sind, hat g somit genau eine Nullstelle in $\mathbb{R}_+$, nämlich 1. Es folgt

$$a_0=-c_0=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\beta^n=\Big|\sum_{n=1}^{\infty}c_n\beta^n\Big|\le\sum_{n=1}^{\infty}c_n|\beta|^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n=a_0-a=a_0\,,\quad\text{also}\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n\beta^n=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n\beta^n|\,.$$

Wendet man nun den Beweis der in den Lösungen angegebenen Variante zu Aufg. 10 aus Abschnitt 5.A mit $w_n=c_n\beta^n$ an, so sieht man $c_n\beta^n=|c_n\beta^n|\in\mathbb{R}_+$ für alle $n\ge 1$ und somit $\beta^n\in\mathbb{R}_+$ für alle $n\ge 1$ mit $c_n>0$, d.h. $a_{n-1}\neq a_n$. Gibt es unter diesen n Indizes $n_1,\dots,n_k$ mit $\mathrm{ggT}(n_1,\dots,n_k)=1$, so liefert das Lemma von Bezout in der Form von 2.D, Aufg. 24 die Existenz von Zahlen $u_1,\dots,u_k\in\mathbb{Z}$ mit $u_1n_1+\cdots+u_kn_k=\mathrm{ggT}(n_1,\dots,n_k)=1$. Damit erhält man wegen $\beta^{n_j}\in\mathbb{R}_+$

$$\beta=\beta^1=\beta^{u_1n_1+\cdots+u_kn_k}=\big(\beta^{n_1}\big)^{u_1}\cdots\big(\beta^{n_k}\big)^{u_k}\in\mathbb{R}_+$$

im Widerspruch dazu, dass g nur 1 ($\neq\beta$) als nichtnegative reelle Nullstelle besitzt. •

Als Beispiel zu dieser Aufgabe betrachte man die (Logarithmus-)Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}x^n/n$ in Verbindung mit Satz 12.B.9.

Abschnitt 12.E, Teil von **Aufg. 2**, p. 335 (1.8.2010) :

Man gebe die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ um einen beliebigen Punkt $a\in\mathbb{C}$ an.

Lösung: Mit dem Additionstheorem von $\sin z$ erhält man

$$\begin{aligned}\sin z&=\sin\big(a+(z-a)\big)=\sin a\,\cos(z-a)+\cos a\,\sin(z-a)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin a}{(2n)!}(z-a)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos a}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}.\end{aligned}$$

Mit dem Additionstheorem von $\cos z$ erhält man

$$\begin{aligned}\cos z&=\cos\big(a+(z-a)\big)=\cos a\,\cos(z-a)-\sin a\,\sin(z-a)=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos a}{(2n)!}(z-a)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin a}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 12.E, Variante zu **Aufg. 2**, p. 335 (1.8.2010) :

Man gebe die Potenzreihenentwicklungen der Funktion $\sinh z$ um einen beliebigen Punkt $a\in\mathbb{C}$ an.

Lösung: Mit dem Additionstheorem von $\sinh z$ erhält man

$$\begin{aligned}\sinh z&=\sinh(a+z-a)=\sinh z_0\,\cosh(z-a)+\cosh a\,\sinh(z-a)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh a}{(2n)!}(z-a)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh a}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}\,.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 12.E, Teil von **Aufg. 4**, p. 335 (1.8.2010) :

Man entwickle $e^z \cos z$ in eine Potenzreihe um 0.

Lösung: Mit Hilfe von Polarkoordinaten und der Moivreschen Formeln sieht man

$$\begin{aligned} e^z \cos z &= \frac{1}{2}\big(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\big)\, e^z = \frac{1}{2}\big(e^{(1+\mathrm{i})z}+e^{(1-\mathrm{i})z}\big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{i})^n}{n!}\, z^n\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n}{2\cdot n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big(\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})\big)^n+\big(\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})\big)^n}{2\cdot n!}\, z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}^{\,n}\,\frac{(\cos n\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin n\frac{\pi}{4})+(\cos n\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin n\frac{\pi}{4})}{2\cdot n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}^{\,n}\,\frac{\cos n\frac{\pi}{4}}{n!}\, z^n\,. \end{aligned}$$

•

Abschnitt 12.E, Variante zu **Aufg. 4**, p. 335 (1.8.2010) :

Man entwickle $e^{-z} \sin z$ in eine Potenzreihe um 0.

Lösung: Mit Hilfe von Polarkoordinaten und der Moivreschen Formeln sieht man

$$\begin{aligned} e^{-z} \sin z &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\big)\, e^{-z} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{(-1+\mathrm{i})z}-e^{(-1-\mathrm{i})z}\big) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1+\mathrm{i})^n}{n!}\, z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-\mathrm{i})^n}{n!}\, z^n\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1+\mathrm{i})^n-(-1-\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}\cdot n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big(\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})\big)^n-\big(\sqrt{2}\,\cos\frac{3\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})\big)^n}{2\mathrm{i}\cdot n!}\, z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}^{\,n}\,\frac{(\cos n\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin n\frac{3\pi}{4})-(\cos n\frac{3\pi}{4}-\mathrm{i}\sin n\frac{3\pi}{4})}{2\mathrm{i}\cdot n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}^{\,n}\,\frac{\sin n\frac{3\pi}{4}}{n!}\, z^n\,. \end{aligned}$$

•

Abschnitt 12.E, **Aufg. 6**, p. 336 (1.8.2010) :

Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(x+\mathrm{i}y) = \cos x\, \cosh y - \mathrm{i}\sin x\, \sinh y\,,$$
$$\sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x\, \cosh y + \mathrm{i}\cos x\, \sinh y\,.$$

Insbesondere sind damit für $z = x+\mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, Real- und Imaginärteil von $\cos z$ und $\sin z$ beschrieben. Es folgt $|\cos(x+\mathrm{i}y)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$, $|\sin(x+\mathrm{i}y)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

Lösung: Sei $z := x+\mathrm{i}y$. Unter Verwendung der Eulerschen Formel und von $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$ sieht man

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{-y+\mathrm{i}x}+e^{y-\mathrm{i}x}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)+e^{y}(\cos x-\mathrm{i}\sin x)}{2}\\ &= \frac{(e^{-y}+e^{y})\cos x}{2}+\frac{(e^{-y}-e^{y})\,\mathrm{i}\sin x}{2} = \cos x\,\cosh y - \mathrm{i}\sin x\sinh y\,. \end{aligned}$$

$\cos z = \cos(x+\mathrm{i}y)$ hat also den Realteil $\cos x\, \cosh y$ und den Imaginärteil $-\sin x \sinh y$.

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{-y+\mathrm{i}x}-e^{y-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{-y}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)-e^{y}(\cos x-\mathrm{i}\sin x)}{2\mathrm{i}}\\ &= \frac{(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2}+\frac{(e^{-y}-e^{y})\cos x}{2\mathrm{i}} = \sin x\,\cosh y + \mathrm{i}\cos x\sinh y\,. \end{aligned}$$

$\sin z = \sin(x+\mathrm{i}y)$ hat also den Realteil $\sin x\, \cosh y$ und den Imaginärteil $\cos x \sinh y$.

Man könnte hier auch mit dem Additionstheorem des Kosinus schließen (unter Verwendung von $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$):

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x+\mathrm{i}y) = \cos x\, \cos(\mathrm{i}y) - \sin x\, \sin(\mathrm{i}y) = \cos x\, \cosh(-y) - \sin x\cdot(1/\mathrm{i})\sinh(-y) =\\ &= \cos x\, \cosh y - \mathrm{i}\sin x\, \sinh y\,. \end{aligned}$$

Man könnte hier auch mit dem Additionstheorem des Sinus schließen:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x\, \cos(\mathrm{i}y) + \cos x\, \sin(\mathrm{i}y) = \sin x\, \cosh(\mathrm{i}^2 y) + \cos x\cdot(1/\mathrm{i})\sinh(\mathrm{i}^2 y) =\\ &= \sin x\, \cosh(-y) + \cos x\cdot(1/\mathrm{i})\sinh(-y) = \sin x\, \cosh y + \mathrm{i}\cos x\, \sinh y\,. \end{aligned}$$

•

Abschnitt 12.E, Aufg. 7, p. 336 (1.8.2010):
Für $z,\, w \in \mathbb{C}$ gilt
$$\cosh\,(z+w) = \cosh z\,\cosh w + \sinh z\,\sinh w\,,$$
$$\sinh\,(z+w) = \sinh z\,\cosh w + \cosh z\,\sinh w\,.$$

Beweis: Mit dem Additionstheoremen der e-Funktion bzw. der Funktionen sin und cos erhalten wir:
$$\cosh z\;\cosh w + \sinh z\;\sinh w = \tfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})\,\tfrac{1}{2}(e^w+e^{-w}) + \tfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})\,\tfrac{1}{2}(e^w-e^{-w}) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(e^ze^w+e^ze^{-w}+e^{-z}e^w+e^{-z}e^{-w}) + \tfrac{1}{4}(e^ze^w-e^ze^{-w}-e^{-z}e^w+e^{-z}e^{-w}) = \tfrac{1}{2}(e^ze^w+e^{-z}e^{-w}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(e^{z+w}+e^{-(z+w)}) = \cosh\,(z+w)\,,$$
$$\sinh z\;\cosh w + \cosh z\;\sinh w = \tfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})\,\tfrac{1}{2}(e^w+e^{-w}) + \tfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})\,\tfrac{1}{2}(e^w-e^{-w}) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(e^ze^w+e^ze^{-w}-e^{-z}e^w-e^{-z}e^{-w}) + \tfrac{1}{4}(e^ze^w-e^ze^{-w}+e^{-z}e^w-e^{-z}e^{-w}) = \tfrac{1}{2}(e^ze^w-e^{-z}e^{-w}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(e^{z+w}-e^{-(z+w)}) = \sinh\,(z+w)\,.$$
•

Abschnitt 12.E, Teil von **Aufg. 9**, p. 336 (1.8.2010):
Für $z,\, w \in \mathbb{C}$ gilt
$$\tan\,(z+w) = \frac{\tan z + \tan w}{1-\tan z \tan w}\,,\quad \cot\,(z+w) = \frac{\cot z \cot w - 1}{\cot z + \cot w}\,,$$
falls jeweils beide Seiten der betrachteten Formeln definiert sind.

Beweis: Mit dem Additionstheoremen der der Funktionen sin und cos erhalten wir:
$$\tan\,(z+w) = \frac{\sin\,(z+w)}{\cos\,(z+w)} = \frac{\sin z\,\cos w + \cos z\,\sin w}{\cos z\,\cos w - \sin z\,\sin w} = \frac{\cos z\,\cos w\,(\tan z + \tan w)}{\cos z\,\cos w\,(1-\tan z\,\tan w)} = \frac{\tan z + \tan w}{1-\tan z \tan w}\,,$$
$$\cot\,(z+w) = \frac{\cos\,(z+w)}{\sin\,(z+w)} = \frac{\cos z\,\cos w - \sin z\,\sin w}{\sin z\,\cos w + \cos z\,\sin w} = \frac{\sin z\,\sin w\,(\cot z\,\cot w - 1)}{\sin z\,\sin w\,(\cot w + \cot z)} = \frac{\cot z\,\cot w - 1}{\cot z + \cot w}\,.$$

Abschnitt 12.E, Aufg. 13, p. 336 (1.8.2010):
Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ ist $e^x - 1 \geq xe^{x/2}$.

Beweis: Für $n \geq 1$ gilt $n \leq 2^{n-1}$. Bei $n=1$ sind beide Seiten nämlich gleich 1 und beim Schluss von n auf $n{+}1$ hat man $n{+}1 \leq n{+}n = 2n \leq 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$. Daraus folgt nun $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ und somit $\dfrac{x^n}{n!} \geq \dfrac{x^n}{2^{n-1}(n-1)!}$ wegen $x \geq 0$. Insgesamt ergibt sich so:
$$e^x - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^n n!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!} = xe^{x/2}\,.$$
•

Abschnitt 12.E, Aufg. 14, p. 336 (1.8.2010):
Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $1 - \cos x \leq x^2/2$.

Beweis: Für $|x| > 2$ ist $\tfrac{1}{2}x^2 > 2$ und somit $1 - \tfrac{1}{2}x^2 < -1$. Die Werte von $\cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ sind aber wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ alle ≥ -1. Wir haben also die Ungleichung nur noch im Fall $|x| \leq 2$ zu zeigen. In diesem Fall gilt aber für $m \geq 1$ erst recht $x^2 \leq (4m{+}1)(4m{+}2)$ und somit $1 - \dfrac{x^2}{(4m+1)(4m+2)} \geq 0$. Es folgt
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{x^{4m}}{(4m)!} - \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!}\Big)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{4m}}{(4m)!}\Big(1 - \frac{x^2}{(4m+1)(4m+2)}\Big) \geq 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$
•

Abschnitt 12.E, Variante zu **Aufg. 14**, p. 336 (1.8.2010) :
Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ ist $\sin x \geq x - x^3/6$.

Beweis: Für $x > 4$ ist $\frac{1}{6}x^2 > 2$ und somit $1 - \frac{1}{6}x^2 < -1$, also $x - \frac{1}{6}x^3 < -4$. Die Werte von $\sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ sind aber wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ alle ≥ -1. Wir haben also die Ungleichung nur noch im Fall $x \leq 4$ zu zeigen. In diesem Fall gilt aber für $m \geq 1$ erst recht $x^2 \leq (4m+2)(4m+3)$ und somit $1 - \dfrac{x^2}{(4m+2)(4m+3)} \geq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} - \frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!} \right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)} \right) \geq x - \frac{x^3}{6} \ . \end{aligned}$$

•