

Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 4, 1. Aufl. (Version 2011)

Der folgende Abschnitt wurde aus technischen Gründen im Neudruck 2011 des vierten Bandes nicht berücksichtigt:

4.E Noethersches Theorem

Wie im letzten Abschnitt betrachten wir eine (mindestens dreimal) differenzierbare reelle Mannigfaltigkeit M mit einer (zunächst) zeitunabhängigen (mindestens zweimal) differenzierbaren Lagrange-Funktion $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$. Die differenzierbaren Kurven $\varphi : [a, b] \rightarrow M$, in denen das Wirkungsintegral $\int_a^b L(\varphi, \dot{\varphi}) dt$ stationär ist, erfüllen in einer Karte mit Werten in einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{dt} D_2 L = D_1 L.$$

Wie wir bereits in Beispiel 4.D.1 erwähnten, haben die beiden Seiten einzeln keine von der Karte unabhängige Bedeutung auf der Mannigfaltigkeit M . Allerdings lässt sich $D_2 L$ leicht invariant interpretieren und zwar als Abbildung

$$D_2 L : TM \longrightarrow T^*M$$

des Tangentialbündels in das Kotangentialbündel von M , die überdies fasertreu ist, d.h. $T_P M$ in $T_P^* M$ für jeden Punkt $P \in M$ abbildet.

Zur Beschreibung von $D_2 L$ sei (P, ξ) aus $T_P M$ ein Tangentenvektor im Punkt $P \in M$. Der Tangentialraum $T_{(P, \xi)}(TM)$ enthält in natürlicher Weise den Tangentialraum $T_P M$ als Unterraum. In der Tat induziert die natürliche Bündelprojektion $TM \rightarrow M$ nach Satz 2.B.4 im Punkte (P, ξ) eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_P M \longrightarrow T_{(P, \xi)}(TM) \longrightarrow T_P M \longrightarrow 0,$$

wobei wir den Tangentialraum $T_{(P, \xi)}(T_P M)$ der linearen Faser $T_P M$ wie üblich mit $T_P M$ selbst identifizieren. $D_2 L(P, \xi)$ ist dann einfach die Beschränkung des totalen Differenzials von L auf $T_P M$, d.h. es gilt

$$D_2 L(P, \xi; \eta) = (T_{(P, \xi)} L)(\eta) \in \mathbb{R}$$

für $\eta \in T_P M \subseteq T_{(P, \xi)}(TM)$. Man kann $D_2 L(P, \xi)$ als das totale Differenzial in (P, ξ) der Beschränkung $L|_{T_P M}$ von L auf die Faser $T_P M$ interpretieren. Daher nennt man $D_2 L$ auch die Faserableitung von L oder die Ableitung von L in vertikaler Richtung. Jedes Vektorfeld X auf M definiert die Funktion $D_X L : (P, \xi) \mapsto D_2 L(P, \xi; X(P))$ als Ableitung von L in Richtung X . Ist M eine offene Menge U im $\mathbb{R}$ -Vektorraum V und $L : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, so ergibt sich wie bisher $D_2 L(x, u; v) = (T_{(x, u)} L)(0, v)$, $x \in U$, $u, v \in V$, sowie für ein Vektorfeld $X : x \mapsto (x, X(x))$ auf U :

$$D_X L(x, u) = D_2 L(x, u; X(x)).$$

Die Abbildung $D_2 L : TM \rightarrow T^*M$ bezeichnen wir wie schon in Bd. 3, Bemerkung 10.A.7 als Legendresche Transformation¹⁾ und nennen die Funktion $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$E(P, \xi) := D_2 L(P, \xi; \xi) - L(P, \xi)$$

wie dort die Energie(funktion) zu L .

Ein Diffeomorphismus $F : M \rightarrow M$ heißt eine Symmetrie oder ein Automorphismus des Systems (M, L) , wenn L invariant ist unter TF , d.h. wenn gilt $L = L \circ TF$. Eine Symmetrie F von (M, L) transportiert jede Lösung $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ der Euler-Lagrangeschen Gleichung für L in eine ebensolche Lösung $F \circ \varphi$. Ein differenzierbarer Fluss $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ mit $(s, P) \mapsto \Phi(s; P) = \Phi_s(P)$ heißt ein Fluss aus Automorphismen oder ein automorpher Fluss von (M, L) , wenn Φ_s für jedes $s \in \mathbb{R}$ ein Automorphismus von (M, L) ist. Dann ist L invariant unter den Automorphismen des zugehörigen Flusses $\Phi : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM$ mit $\Phi_s = T\Phi_s$, und das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times TM & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} \times M & \xrightarrow{\Phi} & M \end{array}$$

Mit anderen Worten: L ist konstant auf jeder Flusslinie von $\tilde{\Phi}$, d.h. L ist ein erstes Integral der infinitesimalen Verrückung $\tilde{X} := X_{\tilde{\Phi}} \in \mathfrak{X}(TM)$ zum Fluss $\tilde{\Phi}$: Es ist $D_{\tilde{X}} L = 0$.

¹⁾ In wichtigen Fällen ist $D_2 L$ ein Diffeomorphismus, z.B. im Kontext der klassischen Mechanik.

Das Vektorfeld $\tilde{X}$ lässt sich natürlich direkt aus der infinitesimalen Verrückung $X := X_\Phi$ zum Fluss Φ berechnen: Sei etwa $M = U$ eine offene Menge im $\mathbb{R}$ -Vektorraum V , also $TU = U \times V$ und $T(TU) = (U \times V) \times (V \times V)$. Für $x \in U$ und $u \in V$ ist dann $X(x) = \frac{\partial}{\partial s} \Phi(0; x)$ und

$$\tilde{X}(x, u) = \left(\frac{\partial}{\partial s} \Phi(0; x), \frac{\partial}{\partial s} D_{(0,u)} \Phi(0; x) \right) = (X(x), D_{(0,u)} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(0; x)) = (X(x), D_u X(x)).$$

Insbesondere ist

$$D_{\tilde{X}} L(x, u) = D_1 L(x, u; X(x)) + D_2 L(x, u; D_u X(x))$$

für jede Lagrange-Funktion $L : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$.²⁾

Die Invarianz des Systems (M, L) unter dem Fluss Φ lässt sich – wie gerade gezeigt – allein mit der zugehörigen infinitesimalen Verrückung $X = X_\Phi$ zu Φ beschreiben. Wir sagen daher auch: L ist invariant (oder symmetrisch) bezüglich des Vektorfeldes X , wenn L ein erstes Integral für das oben definierte Vektorfeld $\tilde{X} : TM \rightarrow T(TM)$ auf TM ist, wenn also $D_{\tilde{X}} L = 0$ ist. X heißt dann auch eine infinitesimale oder virtuelle Symmetrie des Systems (M, L) . Man verwechsle die Ableitung $D_{\tilde{X}} L$ nicht mit der Ableitung $D_X L$ von L längs des in trivialer Weise von M nach TM gelifteten Vektorfelds X (vgl. Fußnote 2). Letztere spielt im folgenden Satz eine entscheidende Rolle:

4.E.1 Noethersches Theorem³⁾ Ist das System (M, L) invariant bezüglich des Vektorfeldes X auf M , so ist die Ableitung $D_X L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral für jede Lösung $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ der zu L gehörigen Euler-Lagrangeschen Gleichung, d.h. $D_X L$ ist konstant längs der zugehörigen Zustandskurve $\tilde{\varphi} = (\varphi, \dot{\varphi}) : [a, b] \rightarrow TM$.

Beweis. Wir können annehmen, dass $M = U$ eine offene Menge in einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V ist. Nach Voraussetzung ist $0 = D_{\tilde{X}} L(x, u) = D_1 L(x, u; X(x)) + D_2 L(x, u; D_u X(x))$ für alle $(x, u) \in TU = U \times V$. Erfüllt $\varphi : [a, b] \rightarrow U$ die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{dt} D_2 L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = D_1 L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)),$$

so erhält man mit $D_X L(x, u) = D_2 L(x, u; X(x))$ und der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_X L(\varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{d}{dt} (D_2 L(\varphi, \dot{\varphi}; X(\varphi))) = \left(\frac{d}{dt} D_2 L(\varphi, \dot{\varphi}) \right) (X(\varphi)) + D_2 L(\varphi, \dot{\varphi}) (D_{\dot{\varphi}} X(\varphi)) \\ &= D_1 L(\varphi, \dot{\varphi}; X(\varphi)) + D_2 L(\varphi, \dot{\varphi}; D_{\dot{\varphi}} X(\varphi)) = D_{\tilde{X}} L(\varphi, \dot{\varphi}) = 0. \end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten $q_1, \dots, q_n$ der Mannigfaltigkeit M und den zugehörigen lokalen Koordinaten

$$q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$$

des Tangentialbündels TM lautet das Noethersche Theorem für eine zeitunabhängige Wirkungsfunktion

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) :$$

Ist das autonome System (M, L) invariant unter dem Vektorfeld $X = \sum_{i=1}^n f_i \partial / \partial q_i$, so ist

$$I := D_X L = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

konstant längs jeder Zustandskurve $\tilde{\varphi} = (\varphi, \dot{\varphi})$ zu den Lösungen φ der Euler-Lagrangeschen Differenzialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Das Noethersche Theorem besitzt eine natürliche Verallgemeinerung, die dadurch motiviert ist, dass verschiedene Lagrange-Funktionen durchaus zu denselben stationären Lösungskurven für das Wirkungsintegral $\int_a^b L(\varphi, \dot{\varphi}) dt$ führen können. Dies ist sicherlich dann der Fall, wenn die beiden Lagrange-Funktionen L und $L' = L + df$ sich nur um ein totales Differenzial $df : TM \rightarrow \mathbb{R}$ einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ unterscheiden. Dann ist nämlich

$$\int_a^b L'(\varphi, \dot{\varphi}) dt = \int_a^b L(\varphi, \dot{\varphi}) dt + \int_a^b df(\varphi; \dot{\varphi}) dt = \int_a^b L(\varphi, \dot{\varphi}) dt + f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)),$$

und φ ist genau dann stationär bezüglich L , wenn dies bezüglich L' gilt. Demgemäß heißt ein Diffeomorphismus F von

²⁾ Zur Übung prüfe man direkt ohne den Umweg über die Flüsse, dass der Übergang vom Vektorfeld $X : M \rightarrow TM$ zum Vektorfeld $\tilde{X} : TM \rightarrow T(TM)$, wie er hier lokal mit Karten beschrieben wird, unabhängig von der Wahl der Karten ist. Man verwechsle $\tilde{X}$ nicht mit dem in trivialer Weise nach TM gelifteten Vektorfeld $(P, \xi) \mapsto X(P) \in T_P M \subseteq T_{(P, \xi)}(TM)$, das wir wie schon weiter oben mit X bezeichnen.

³⁾ Dieser Satz und Verallgemeinerungen davon wurden zuerst von Emmy Noether bewiesen, vgl. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II, Math.-Phys. Kl. (1918).

M auf sich eine schwache Symmetrie des Systems (M, L) bzw. L schwach invariant bezüglich F , wenn L und $L \circ (TF)$ sich nur um ein totales Differenzial df unterscheiden. Ist X ein Vektorfeld auf M , so heißt L schwach invariant bzgl. des Vektorfeldes X , wenn $D_{\tilde{X}}L$ ein totales Differenzial dg ist.⁴⁾ Wir erhalten die folgende Variante von 4.E.1:

4.E.2 Korollar Ist L schwach invariant bezüglich des Vektorfeldes X auf M mit $D_{\tilde{X}}L = dg$, so ist $D_X L - g$ ein erstes Integral für das System (M, L) .

Beweis. Wie im Beweis von 4.E.1 hat man

$$\frac{d}{dt} (D_X L(\varphi, \dot{\varphi}) - g(\varphi)) = D_{\tilde{X}} L(\varphi, \dot{\varphi}) - dg(\varphi; \dot{\varphi}) = 0. \quad \bullet$$

Wir wollen den Noetherschen Erhaltungssatz noch auf zeitabhängige Wirkungskfunktionen ausdehnen. In der Regel berücksichtigt man die Zeitabhängigkeit durch Übergang vom Konfigurationsraum M zum erweiterten Konfigurationsraum $M_1 := \mathbb{R} \times M$ mit der Zeit $\mathbb{R}$ als einer orientierten euklidischen affinen Geraden. Dann ist die Zeitfunktion $z: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Komponente. Dies entspricht der Newtonschen Vorstellung von absoluter Zeit und absolutem Ort. Gibt man die Vorstellung vom absoluten Ort auf (hält aber an der Existenz der absoluten Zeit fest), so ist es angemessener, von einer beliebigen Mannigfaltigkeit M_1 mit einer submersiven Zeitfunktion $z: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ auszugehen, man vgl. dazu die elementaren Bemerkungen in Bd. 2, Beispiel 7.A.9. Eine erweiterte Konfigurationskurve φ_1 ist dann ein Schnitt bzgl. z , also eine Kurve $\varphi_1: [a, b] \rightarrow M_1$ mit $z(\varphi_1(t)) = t$ für alle $t \in [a, b]$. Bei Gültigkeit der Anfangsbedingung $z(\varphi_1(a)) = a$ ist dies äquivalent mit $\omega(\varphi_1; \dot{\varphi}_1) = 1$ für $\omega := dz$. Die verallgemeinerte Zustandskurve $(\varphi, \dot{\varphi})$ liegt also stets auf der Hyperfläche (genauer: dem affinen Hyperebenenbündel) $\omega = 1$ des Tangentialbündels TM_1 . Bei $M_1 = \mathbb{R} \times M$ handelt es sich um die Menge der Punkte $(t, 1; P, \xi) \in T(\mathbb{R} \times M) = T\mathbb{R} \times TM = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times TM$ mit $t \in \mathbb{R}$, $(P, \xi) \in TM$, vgl. 4.D, Fußnote 2.

Sei nun $L_1: TM_1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Wirkungskfunktion auf M_1 . Zur Bestimmung der Variationsgleichung für die erweiterte Konfigurationskurve φ_1 sind nur Variationen in den Fasern von z , d.h. virtuelle Verschiebungen $\psi_1: [a, b] \rightarrow TM_1$ von φ_1 mit $\omega(\varphi_1; \psi_1) = 0$ zugelassen. In einer Karte liefert dies nach dem d'Alembertschen Prinzip die Eulersche Gleichung

$$D_1 L_1 - \frac{d}{dt} D_2 L_1 = \lambda \omega$$

längs der verallgemeinerten Zustandskurve $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$. Die Komposition $TM_1 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\omega} T^*M_1$ bezeichnen wir dabei ebenfalls mit ω . Für eine Symmetrie oder einen Automorphismus F_1 des Systems (M_1, z, L_1) gilt nicht nur die Invarianz von L_1 unter TF_1 auf der Hyperfläche $\omega = 1$, sondern auch die Verträglichkeit mit der Zeit z : Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F_1} & M_1 \\ z \downarrow & & \downarrow z \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R} \end{array}$$

mit einem Automorphismus α der Zeit, d.h. einer Translation $\alpha: t \mapsto t + a$. Entsprechend ist ein automorpher Fluss $\Phi_1(s, P)$ für (M_1, z, L_1) definiert. Der dazu gehörende Fluss der Zeit $\mathbb{R}$ hat (notwendigerweise) die Gestalt $(s, t) \mapsto t + as$ mit konstantem $a \in \mathbb{R}$. Solch ein automorpher Fluss lässt sich mit Hilfe seiner infinitesimalen Verrückung X_1 durch

$$D_{\tilde{X}_1} L_1 = 0 \quad \text{auf} \quad \omega = 1 \quad \text{und} \quad \langle X_1, \omega \rangle = D_{X_1} z = a = \text{const.}$$

charakterisieren. Demgemäß sagen wir, L sei schwach invariant unter X_1 , wenn eine Funktion $g_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $D_{\tilde{X}_1} L_1 = dg_1$ auf $\omega = 1$ und wenn $\langle X_1, \omega \rangle = \text{const.}$ ist. In dieser Situation erhalten wir das folgende Noethersche Theorem bei zeitabhängigen Wirkungskfunktionen:

4.E.3 Satz Ist das System (M_1, z, L_1) schwach invariant bezüglich des Vektorfeldes X_1 mit $D_{\tilde{X}_1} L_1 = dg_1$ auf $\omega = dz = 1$ und $a := \langle X_1, \omega \rangle = D_{X_1} z = \text{const.}$, so ist die Funktion $D_{X_1} L_1 - aE_1 - g_1$ konstant längs der verallgemeinerten Zustandskurven $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ des Systems, wo

$$E_1(P_1, \xi_1) = D_2 L_1(P_1, \xi_1; \xi_1) - L_1(P_1, \xi_1)$$

die Energiefunktion auf TM_1 ist.

Beweis. In einem lokalen Koordinatensystem mit Werten in einem Vektorraum V_1 gilt $dg_1(x_1; u_1) = D_{\tilde{X}_1} L_1(x_1, u_1) = D_1 L_1(x_1, u_1; X_1(x_1)) + D_2 L_1(x_1, u_1; D_{u_1} X_1(x_1))$, falls $\omega(x_1; u_1) = 1$ ist. Mit $\omega(\varphi_1; \dot{\varphi}_1) = 1$, $\omega(\varphi_1; X(\varphi_1)) = a$ und der Eulerschen Gleichung ergibt sich

⁴⁾ Ist L invariant bzgl. X , so ist $L + df$ offenbar für jede C^2 -Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ wegen $D_{\tilde{X}} df = d(D_X F)$ schwach invariant bzgl. X .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (D_{X_1} L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) - g_1(\varphi_1)) &= \frac{d}{dt} (D_2 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; X_1(\varphi_1)) - dg_1(\varphi_1; \dot{\varphi}_1)) = \\
&= \left(\frac{d}{dt} D_2 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) \right) (X_1(\varphi_1)) + D_2 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; D_{\dot{\varphi}_1} X_1(\varphi_1)) - dg_1(\varphi_1; \dot{\varphi}_1) \\
&= D_1 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; X_1(\varphi_1)) - \lambda \omega(\varphi_1; X_1(\varphi_1)) - D_1 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; X_1(\varphi_1)) \\
&= -\lambda \omega(\varphi_1; X_1(\varphi_1)) = -\lambda a,
\end{aligned}$$

und für $\frac{d}{dt} E_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (D_2 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; \dot{\varphi}_1) - L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)) &= D_1 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; \dot{\varphi}_1) - \lambda \omega(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) + \\
&+ D_2 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; \ddot{\varphi}_1) - D_1 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; \ddot{\varphi}_1) - D_2 L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; \ddot{\varphi}_1) = -\lambda.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass man in 4.E.3 die Zeit z gar nicht zu kennen braucht, sondern nur ihr nirgends verschwindendes Differenzial $\omega = dz$. Ferner braucht man L_1 nur in einer Umgebung von $\omega = 1$ zu kennen. Haben wir ein autonomes System (M, L) , das schwach invariant ist bezüglich X mit $D_{\tilde{X}} L = dg$, so erhält man das erste Integral $D_X L - g$ aus 4.E.2, indem man 4.E.3 auf $\mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $X_1 = (0, X)$ anwendet. Wählen wir jedoch das Vektorfeld $X_1 = (\partial/\partial t)$, so erhalten wir aus 4.E.3 noch einmal den **Energiesatz**, d.h. die Energie als erstes Integral.

Allgemeiner operiere eine (reelle) Lie-Gruppe G mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf dem zunächst autonomen System (M, L) , d.h. G operiere auf M im Sinne von Definition 3.C.1 und L sei invariant unter der zugehörigen Operation von G auf TM . Dann ist insbesondere L invariant unter den Vektorfeldern der Form X_ξ zu den Einparametergruppen $(t, P) \mapsto (\exp t\xi) P$, $\xi \in \mathfrak{g}$. Wir sagen in dieser Situation, das System (M, L) sei **invariant unter der** (durch $\xi \mapsto X_\xi$) gegebenen **Lie-Algebra-Operation** von $\mathfrak{g}$ auf dem Raum $\mathcal{X}(M)$ der Vektorfelder von M . Nach dem Noetherschen Theorem ist längs jeder Zustandskurve des Systems (M, L) die Funktion $D_\xi L := D_{X_\xi} L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ konstant für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$. *Insgesamt ist die sich daraus ergebende Abbildung $D_{\mathfrak{g}} L : TM \rightarrow \mathfrak{g}^*$ mit $(P, \eta) \mapsto (\xi \mapsto D_\xi L(P, \eta))$ ein erstes Integral des Systems (M, L) mit Werten im Dual $\mathfrak{g}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ von $\mathfrak{g}$.* Man beachte, dass wegen $X_{[\xi, \zeta]} = [X_\xi, X_\zeta]$, vgl. 3.C.5, die Gleichung

$$D_{[\xi, \zeta]} L = D_\zeta D_\xi L - D_\xi D_\zeta L$$

für beliebige $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$ gilt. Ist das **zeitabhängige** System (M_1, z, L_1) invariant unter einer Lie-Algebra-Operation von $\mathfrak{g}$, so ergibt sich aus Satz 4.E.3 das erste Integral $D_{\mathfrak{g}} L_1 - aE_1$ mit Werten in $\mathfrak{g}^*$, wobei $a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ die Linearform $\xi \mapsto \langle (X_1)_\xi, \omega \rangle = D_{(X_1)_\xi} z$ ist und E_1 die Energie des Systems. Bei schwacher Invarianz ist $D_{\widetilde{(X_1)_\xi}} L_1 = dg_\xi$ auf $\omega = 1$ mit Funktionen $g_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$, von denen wir annehmen können, dass $g : \xi \mapsto g_\xi$ linear ist. Ein erstes Integral (wieder mit Werten in $\mathfrak{g}^*$) ist dann $D_{\mathfrak{g}} L_1 - aE_1 - g$.

Die vorstehenden Überlegungen zum Noetherschen Theorem zeigen in typischer Weise, dass bei Symmetriebetrachtungen für Differenzialgleichungen nicht eine (Lie-)Gruppe G globaler Symmetrien die entscheidende Rolle spielt, sondern „nur“ eine (Lie-)Algebra $\mathfrak{g}$ infinitesimaler Symmetrien. Dies war für Sophus Lie ein wichtiger Gesichtspunkt, als er die Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren entwickelte. Wir betrachten einige konkrete Beispiele.

4.E.4 Beispiel (Operation der Galilei-Gruppe · Klassische Erhaltungssätze der Mechanik) Wir erinnern an die Galileische Beschreibung unserer Raum-Zeit-Welt E (vgl. Bd. 2, Beispiel 7.A.9): E ist ein 4-dimensionaler affiner Raum mit einer surjektiven affinen Zeitabbildung $z : E \rightarrow T$, wobei der Zeit-Raum T eine orientierte affine Gerade ist. Der Kern V_S des linearen Anteils $z_0 : V \rightarrow V_T$ mit $V := V(E)$ und $V_T := V(T)$ ist der Raum der raumartigen Vektoren. Er trägt ein Skalarprodukt, das die Metrik von V_S bestimmt. V_T identifizieren wir nach Wahl einer in die Zukunft weisenden Basis von V_T mit $\mathbb{R}$. Man vergleiche hierzu Bd. 2, loc. cit. und Bd. 2, Beispiel 13.A.12. Ist überdies ein Zeitzursprung festgelegt, so können wir sogar $T = \mathbb{R}$ annehmen.

Ein Automorphismus f von E heißt eine (metrische) **Galilei-Transformation** von E . Es handelt sich dabei um eine Affinität $f : E \rightarrow E$, die eine Translation $f_T : T \rightarrow T$ der Zeit induziert und deren linearer Anteil f_0 auf V_S eine orthogonale Transformation induziert. Wählt man eine Basis v_0, v_1, v_2, v_3 von $V := V(E)$ derart, dass v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis von V_S ist, so ist die Affinität f von E genau dann eine Galilei-Transformation, wenn die Matrix von f_0 bzgl. v_0, v_1, v_2, v_3 die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & & & \\ b & & \mathfrak{A} & \\ c & & & \end{pmatrix}$$

hat mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und einer orthogonalen Matrix $\mathfrak{A} \in O_3(\mathbb{R})$, vgl. auch Bd. 2, 8.A, Aufg. 25. Wir bezeichnen

die Gruppe dieser (metrischen) Galilei-Transformationen als die (metrische) Galilei-Gruppe G von E . Sie ist eine abgeschlossene Unter-Lie-Gruppe der Lie-Gruppe $A(E)$ aller Affinitäten von E , die die Gruppe $T(E) = V$ der Translationen umfasst. Es ergibt sich eine exakte Sequenz $0 \rightarrow V \rightarrow G \rightarrow G_0 \rightarrow 1$ von Gruppen, wobei G_0 die Untergruppe der linearen Anteile $f_0 \in GL(V)$ der $f \in G$ ist.⁵⁾ Insbesondere ist G das semidirekte Produkt

$$V \rtimes G_0 \subseteq V \rtimes GL(V) = A(E).$$

Da G_0 nach obiger Beschreibung eine 6-dimensionale (abgeschlossene) Lie-Untergruppe von $GL(V)$ ist, ist die Galilei-Gruppe G eine 10-dimensionale Lie-Gruppe. Sie hat genau zwei Zusammenhangskomponenten, die durch die beiden Zusammenhangskomponenten von $O(V)$ bestimmt werden. Die Zusammenhangskomponente der Identität besteht aus den eigentlichen Galilei-Transformationen und werde mit G^+ bezeichnet.⁶⁾

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G ist eine Unter-Lie-Algebra der Lie-Algebra $\mathfrak{a}(E)$ von $A(E)$, vgl. 3.B, Aufg. 4. Der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow V \rightarrow G \rightarrow G_0 \rightarrow 1$$

von Lie-Gruppen entspricht die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow V \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_0 \rightarrow 0$$

der zugehörigen Lie-Algebren. Zeichnen wir noch einen Zukunftsvektor $v_0 \in V$ der Zeitlänge 1, d.h. mit $z_0(v_0) = 1$ aus, wählen wir also – physikalisch gesehen – eine Schar von Beobachtern mit Relativgeschwindigkeit 0 und (konstanter) Vierergeschwindigkeit v_0 aus, so ist $V = \mathbb{R}v_0 \oplus V_S$, und z_0 identifiziert $\mathbb{R}v_0$ mit $V_T = \mathbb{R}$. Zeichnet man in dieser Schar einen festen Beobachter aus, d.h. eine Gerade $h = \mathbb{R}v_0 + O$ in E , so liefert die Isomorphie $h \times V_S \rightarrow E$ mit $(P, x) \mapsto x + P$ eine Einbettung von $O(V_S)$ in G und damit von $\mathfrak{o}(V_S)$ in $\mathfrak{g}$, die mit der Einbettung von $\mathfrak{o}(V_S)$ in $\mathfrak{g}_0$ auf Grund der Zerlegung $V = \mathbb{R}v_0 \oplus V_S$ verträglich ist.⁷⁾

Schließlich erwähnen wir die exakte Sequenz $0 \rightarrow G_T \rightarrow G \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 1$, die von dem surjektiven Homomorphismen von G auf die Gruppe $\mathbb{R} = V_T$ der Translationen von T herrührt. G_T ist also der Normalteiler derjenigen Galilei-Transformationen, die die Zeit fest lassen. Es resultiert eine entsprechende exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathfrak{g}_T \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$ der Lie-Algebren und eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathbb{R}v_0 \oplus \mathfrak{g}_T$. Physikalische Gesetze in der Galileischen Raum-Zeit-Welt E können nur dann universelle Bedeutung haben, wenn sie invariant unter der Galilei-Gruppe G sind (wobei man darüber diskutieren kann, ob uneigentliche Symmetrien zuzulassen sind).

Betrachten wir nun ein nicht notwendig zeitunabhängiges mechanisches System (M, L) .⁸⁾ Die (absolute) Zeit $z: E \rightarrow T$ induziert eine Zeit $z: M \rightarrow T$, und die Operation von G auf E wird in der Regel eine natürliche Operation von G auf M oder zumindest der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G auf $\mathcal{X}(M)$ induzieren, die mit der Operation von G auf T vermöge z verträglich ist. Ist $\omega = dz$ und ist $v_0 \in V \subseteq \mathfrak{g}$ eine Vierergeschwindigkeit mit $z_0(v_0) = 1$, so hat man also $a|_{\mathfrak{g}_T} = 0$ und $a(v_0) = 1$ für die durch $a(\xi) := \langle X_\xi, \omega \rangle$ definierte Linearform $a: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$.

Wenn das mechanische System (M, z, L) schwach invariant bezüglich der Operation von $\mathfrak{g}$ ist, sprechen wir von einem abgeschlossenen mechanischen System. Für solche Systeme gilt nach 4.E.3:

4.E.5 Energie-Impuls-Erhaltungssatz. Sei (M, z, L) ein abgeschlossenes mechanisches System mit der Gesamtenergie E und mit $D_{\tilde{X}_\xi} L = dg_\xi$ auf $dz = \omega = 1$. Die Zuordnung $g: \xi \rightarrow g_\xi$ sei linear auf $\mathfrak{g}$. Dann ist die Funktion

$$D_{\mathfrak{g}} L - aE - g$$

auf TM ein erstes Integral mit Werten in $\mathfrak{g}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Insbesondere ist $D_{\mathfrak{g}_T} L - g$ wegen $a(\mathfrak{g}_T) = 0$ ein erstes Integral mit Werten in $\mathfrak{g}_T^*$.

⁵⁾ G_0 ist hier also nicht die Zusammenhangskomponente der Identität von G .

⁶⁾ Man vergleiche die Galilei-Gruppe G mit der ebenfalls 10-dimensionalen (isochronen) Poincaré-Gruppe eines affinen Minkowski-Raums der Dimension 4 (Bd. 2, Abschn. 16.B).

⁷⁾ Einen vollen Schnitt zu $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_0$ und damit eine Zerlegung $\mathfrak{g} = V_S \oplus \mathfrak{g}_0$ erhält man übrigens, wenn man auf h noch einen Punkt auszeichnet.

⁸⁾ Wir unterdrücken hier den Index 1 in $M = M_1$, den wir bislang in einer solchen Situation benutzt haben.

Bedenkt man, dass $\mathfrak{g}$ die Dimension 10 hat, so ist das erste Integral aus 4.E.5 nach Wahl einer Basis von $\mathfrak{g}$ mit nicht weniger als 10 ersten Integralen mit Werten in $\mathbb{R}$ äquivalent (die allerdings nicht voneinander unabhängig zu sein brauchen).

Unterräume U von $\mathfrak{g}$ liefern spezielle erste Integrale: Wählt man für U den Raum $V_S \subseteq \mathfrak{g}_T$ der räumlichen Translationen und identifiziert man über das auf V_S gegebene Skalarprodukt den Dualraum V_S^* mit V_S , so ist

$$D_{V_S} L : TM \rightarrow V_S.$$

der gewöhnliche Impuls.

Ist die Weltlinie eines Beobachters $h = \mathbb{R}v_0 + O \subseteq E$ ausgezeichnet, so liefert die zugehörige, oben beschriebene Einbettung $\mathfrak{o}(V_S) \subseteq \mathfrak{g}_T$ einen Impuls mit Werten in $\mathfrak{o}(V_S)^*$, der sich mittels einer Orientierung von V_S folgendermaßen beschreiben lässt: Zunächst identifiziert man die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(V_S)$ über das Vektorprodukt in V_S mit V_S , vgl. Bd. 2, 18.D., Aufg. 20, und dann $\mathfrak{o}(V_S)^*$ mit V_S^* , also ebenfalls mit V_S . Insgesamt ergibt sich so der sogenannte Drehimpuls

$$D_{\mathfrak{o}(V_S)} L : TM \rightarrow V_S.$$

Der Unterraum $V_S \oplus \mathfrak{o}(V_S)$ von $\mathfrak{g}$ ist 6-dimensional. Jedes 3-dimensionale Komplement dazu in $\mathfrak{g}$ liefert eine volle Beschreibung des „Impulses“ $D_{\mathfrak{g}_T} L : TM \rightarrow \mathfrak{g}_T^*$. Es lässt sich im Allgemeinen nicht so kanonisch angeben.

Ist das System invariant (und nicht nur schwach invariant) unter den infinitesimalen Translationen von V_S bzw. den infinitesimalen Drehungen aus $\mathfrak{o}(V_S)$, so gelten der Impuls(erhaltung)satz bzw. der Drehimpuls(erhaltung)satz. Der Energie(erhaltung)satz $E = \text{const.}$ gilt, falls für die Vierergeschwindigkeit v_0 des Beobachters die volle Invarianzbedingung $D_{\tilde{X}_{v_0}} L = 0$ erfüllt ist (was in der Regel der Fall sein wird).

Schließlich erwähnen wir, dass auch die (schwache) Invarianz bezüglich noch kleinerer Untergruppen von G bzw. Unter-Lie-Algebren von $\mathfrak{g}$ wertvolle Erhaltungssätze liefern kann. Beispielsweise erhält man bei Vorgabe eines Beobachters h aus der Invarianz bezüglich der Gruppe der Drehungen um eine feste Achse $\mathbb{R}v_1$ mit $v_1 \in V_S$, $\|v_1\| = 1$ die Konstanz der Drehimpulskomponente bezüglich $\mathbb{R}v_1 \subseteq V_S = \mathfrak{o}(V_S)$.

4.E.6 Beispiel Wir setzen das letzte Beispiel fort und betrachten konkreter ein System von r Massenteilchen in der 4-dimensionalen Galileischen Raum-Zeit-Welt, die wir mit Hilfe eines Beobachters $h = \mathbb{R}v_0 + O$ mit $h \times V_S$ identifizieren. Der verallgemeinerte Konfigurationsraum M ist dann ohne Zwangsbedingungen eine offene Menge in $h \times V_S^r$ und bei Berücksichtigung von Zwangsbedingungen eine Untermannigfaltigkeit davon. Von der Lagrange-Funktion nehmen wir an, dass sie in einer Umgebung von TM in $T(h \times V_S^r) = (h \times V_S^r) \times (\mathbb{R}v_0 \times V_S^r)$ definiert ist. Ferner fixieren wir eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 für den Raum V_S der räumlichen Translationen von E , die wir gleichzeitig zur Definition einer Orientierung auf V_S benutzen. Ist dann M invariant unter den infinitesimalen Translationen aus V_S , d.h. sind die Vektorfelder $x = (0, x, \dots, x) \in \mathbb{R}v_0 \times V_S$ mit $x \in V_S$ tangentiell an M , so ist der Impuls für das System (M, L) definiert und offenbar gleich

$$D_{V_S} L = \sum_{\rho=1}^r \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\rho i}} v_i,$$

wo $\partial/\partial \dot{x}_{\rho i}$ die Ableitung in Richtung des Tangentenvektors $(0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, v_i, \dots, 0)$ aus $(\mathbb{R}v_0 \times V_S^r) \times (\mathbb{R}v_0 \times V_S^r)$ ist, bei dem v_i an der $(r + \rho + 2)$ -ten Stelle steht. Ist nur die infinitesimale Translation zu dem festen Vektor $x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \in V_S$ tangentiell an M , so ist wenigstens noch der Impuls in Richtung x

$$\langle x, D_{V_S} L \rangle = \sum_{\rho=1}^r \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\rho i}}$$

auf TM definiert.

Zur Bestimmung des Drehimpulses bemerken wir als erstes, dass bei der Identifikation von V_S mit $\mathfrak{o}(V_S)$ einer Winkelgeschwindigkeit $\Omega \in V_S$ das Vektorfeld $X_\Omega : x \mapsto \Omega \times x$ auf V_S entspricht und folglich das Vektorfeld $(t, v_0, x_1, \dots, x_r) \mapsto (0, \Omega \times x_1, \dots, \Omega \times x_r)$ auf $h \times V_S^r$. Setzen wir voraus, dass alle diese

Felder tangentiell an M sind, so ist der Gesamtdrehimpuls auf M definiert und offenbar gleich (vgl. Bd. 3, Beispiel 16.B.8)

$$D_{\mathfrak{o}(V_S)}L = \sum_{\rho=1}^r x_\rho \times \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\rho i}} v_i \right).$$

Ist M nur invariant gegenüber der Rotation um eine feste Achse $\mathbb{R}\Omega \subseteq V_S$, so ist wenigstens noch der Drehimpuls bezüglich der Winkelgeschwindigkeit Ω definiert, nämlich durch

$$\langle \Omega, D_{\mathfrak{o}(V_S)}L \rangle = \sum_{\rho=1}^r \left\langle \Omega, x_\rho \times \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\rho i}} v_i \right) \right\rangle = \sum_{\rho=1}^r \text{Det} \begin{pmatrix} \Omega_1 & x_{\rho 1} & \partial L / \partial \dot{x}_{\rho 1} \\ \Omega_2 & x_{\rho 2} & \partial L / \partial \dot{x}_{\rho 2} \\ \Omega_3 & x_{\rho 3} & \partial L / \partial \dot{x}_{\rho 3} \end{pmatrix}.$$

Die Energie des Systems ist gleich

$$\sum_{\rho=1}^r \left(\dot{x}_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} + \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\rho i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\rho i}} \right) - L,$$

wo $\partial/\partial \dot{x}_0$ die Ableitung in Richtung $(0, 0, \dots, 0; v_0, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{R}v_0 \times V_S^r) \times (\mathbb{R}v_0 \times V_S^r)$ bezeichnet. $\partial L/\partial \dot{x}_0$ wird in der Regel verschwinden.

Hat die Lagrange-Funktion die spezielle Gestalt

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^r m_\rho \|\dot{x}_\rho\|^2 - U(x_1, \dots, x_r),$$

so ist L genau dann invariant bzgl. der infinitesimalen Translation mit dem Vektor $x \in V_S$, wenn die Richtungsableitung $\langle x, \sum_{\rho=1}^r \text{grad}_\rho U \rangle$ verschwindet. Dabei bezeichnet $\text{grad}_\rho U$ den Gradienten des partiellen totalen Differenzials von U nach der ρ -ten Komponente von V_S^r . In diesem Fall bekommen wir die Impuls-komponente

$$\langle x, \sum_{\rho=1}^r m_\rho \dot{x}_\rho \rangle = \langle x, m \dot{S} \rangle$$

als erstes Integral. $m = \sum_{\rho=1}^r m_\rho$ ist dabei die Gesamtmasse und $S := \frac{1}{m} \sum_{\rho=1}^r m_\rho x_\rho$ der Schwerpunkt des Systems. Die x -Komponente der Schwerpunkts-geschwindigkeit ist also konstant. Entsprechend ist L genau dann invariant bzgl. einer infinitesimalen Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , wenn gilt:

$$\sum_{\rho=1}^r \langle \Omega \times x_\rho, \text{grad}_\rho U \rangle = 0.$$

Dies ergibt als erstes Integral die Drehimpulskomponente

$$\langle \Omega, \sum_{\rho=1}^r x_\rho \times m_\rho \dot{x}_\rho \rangle = \sum_{\rho=1}^r \langle \Omega \times x_\rho, m_\rho \dot{x}_\rho \rangle.$$

Die Invarianzeigenschaft von U gegenüber Translationen bzw. Rotationen sind sehr natürliche Bedingungen. Sie sind sicherlich dann erfüllt, wenn U nur von den Abständen der Masseteilchen abhängt. In diesem Fall ist U sogar gegenüber allen Galilei-Transformationen invariant. (Dies gilt jedoch im Allgemeinen nicht für die kinetische Energie $\frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^r m_\rho \|\dot{x}_\rho\|^2$.)

Betrachten wir schließlich noch die Invarianz gegenüber denjenigen Galilei-Transformationen, deren linearer Anteil auf V_S die Identität ist, also die Form

$$\Gamma_w : tv_0 + v \mapsto tv_0 + v + tw$$

haben mit der „Relativgeschwindigkeit“ $w = \Gamma_w v_0 - v_0 \in V_S$ bzgl. v_0 . Nach Wahl eines Zeitnullpunktes O für den Beobachter h identifiziert sich $E = h \times V_S$ mit $\mathbb{R} \times V_S$ und z mit der Projektion $(t, x) \mapsto t$ von $\mathbb{R} \times V_S$ auf $\mathbb{R}$. Ferner ist dann die lineare Gruppe der Γ_w , $w \in V_S$, kanonisch in G eingebettet. Zur Einparametergruppe $s \mapsto \Gamma_{sw}$ gehören die Vektorfelder

$$\begin{aligned} X(t; x_1, \dots, x_r) &= (0; tw, \dots, tw) \in \mathbb{R} \times V_S^r, \\ \tilde{X}(t; x_1, \dots, x_r; 1; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r) &= (0; tw, \dots, tw; 0; \tau w, \dots, \tau w) \in (\mathbb{R} \times V_S^r) \times (\mathbb{R} \times V_S^r). \end{aligned}$$

Es ist also

$$D_{\tilde{X}}L = \sum_{\rho=1}^r \langle w, \tau m_{\rho} \dot{x}_{\rho} + t \operatorname{grad}_{\rho} U \rangle = \tau \langle w, \sum_{\rho=1}^r m_{\rho} \dot{x}_{\rho} \rangle + t \langle w, \sum_{\rho=1}^r \operatorname{grad}_{\rho} U \rangle.$$

Die Invarianzbedingung $D_{\tilde{X}}L = 0$ für $dz = dt = \tau = 1$ ist in diesem Fall nicht zu erwarten. Gilt aber $\langle w, \sum_{\rho=1}^r \operatorname{grad}_{\rho} U \rangle = 0$, so hat man die schwache Invarianzbedingung

$$D_{\tilde{X}}L = d(\langle w, \sum_{\rho=1}^r m_{\rho} x_{\rho} \rangle) = d(m \langle w, S \rangle)$$

für $\tau = 1$, wobei wie oben $m = \sum m_{\rho}$ die Gesamtmasse und $S = \frac{1}{m} \sum m_{\rho} x_{\rho}$ der Schwerpunkt des Systems ist. Mit 4.E.3 bekommt man nun das erste Integral

$$\langle w, t \sum_{\rho=1}^r m_{\rho} \dot{x}_{\rho} \rangle - m \langle w, S \rangle = \langle w, m(t\dot{S} - S) \rangle,$$

d.h. die Konstanz von $t\dot{y} - y$ für $y = \langle w, S \rangle$, woraus wieder die Konstanz der w -Komponente $\dot{y} = \langle w, \dot{S} \rangle$ der Schwerpunktschwindigkeit folgt, die wir bereits oben unter derselben Voraussetzung hergeleitet haben.

4.E.7 Beispiel Einfache Beispiele zum Noetherschen Theorem erhält man auf folgende Weise: Der Konfigurationsraum M sei eine offene Menge U in einem Vektorraum V . Die Lagrangefunktion $L : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sei konstant in Richtung $v_0 \in V$, d.h. die Richtungsableitung $(D_1)_{v_0}L$ sei identisch 0. Dann ist das System (M, L) offenbar invariant gegenüber der infinitesimalen Translation mit v_0 . Das Noethersche Theorem besagt, dass der „Impuls $(D_2)_{v_0}L$ in Richtung v_0 “ ein erstes Integral ist. Dies ergibt sich natürlich auch unmittelbar aus der Eulerschen Gleichung $(d/dt) D_2L = D_1L$. Dabei ist ganz wesentlich, dass das Vektorfeld $X = v_0$ konstant ist. Für ein beliebiges Feld X auf U mit $(D_1)_XL = 0$ ist $(D_2)_XL$ in der Regel kein erstes Integral. Interpretiert man die Richtungsableitung $(D_1)_{v_0}$ nach Wahl einer Basis von V als partielle Ableitung nach einer der Variablen q_0 , so bedeutet $(D_1)_{v_0}L = \partial L / \partial q_0 = 0$, dass L von q_0 nicht abhängt. Solche Variablen nennt man auch *zyklische Variablen*.

Ist V euklidisch mit der Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ und $x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ als den zugehörigen Koordinatenfunktionen auf TU , so haben D_1L und D_2L die Gradientenfelder $\operatorname{grad}_1 L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} v_i$ bzw. $\operatorname{grad}_2 L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} v_i$ und der obige Impulserhaltungssatz lautet: *Ist $v_0 \in V$ ein Vektor mit $\langle v_0, \operatorname{grad}_1 L \rangle = 0$, so ist der verallgemeinerte Impuls $\langle v_0, \operatorname{grad}_2 L \rangle$ in Richtung v_0 ein erstes Integral.* Man interpretiere das Brechungsgesetz aus Bd. 3, Beispiel 10.B.2 unter diesem Gesichtspunkt.

Für einen Massenpunkt in einem 3-dimensionalen orientierten euklidischen Vektorraum V , der sich in einem rotationssymmetrischen Zentralfeld bewegt, ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2 - U(\|x\|)$$

invariant gegenüber linearen Drehungen, und der Drehimpuls $x \times m \dot{x}$ ist ein erstes Integral. Es handelt sich also um eine ebene Bewegung, die bei $x \times \dot{x} \neq 0$ in der zum Drehimpulsvektor orthogonalen Ebene stattfindet (und bei $x \times \dot{x} = 0$ auf der festen Geraden $\mathbb{R}x$). Ferner ist $\frac{1}{2} \|x \times \dot{x}\|$ die konstante Flächengeschwindigkeit (vgl. Bd. 3, Beispiel 4.A.11). Der Energiesatz liefert zusätzlich $E = \frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2 + U(\|x\|) = \text{const.}$

Ist etwas allgemeiner

$$L = \frac{1}{2} m(\|x\|) \|\dot{x}\|^2 - U(\|x\|)$$

eine Lagrange-Funktion, bei der m vom Zentrumsabstand $\|x\|$ abhängen darf, so liefern Energie- und Drehimpulssatz die Konstanz von

$$\frac{1}{2} m(\|x\|) \|\dot{x}\|^2 + U(\|x\|) \quad \text{und} \quad x \times m(\|x\|) \dot{x}.$$

Aus der Konstanz des Drehimpulses folgt wieder, dass es sich um eine ebene Bewegung handelt und dass der Betrag

$$m(\|x\|) \|x\| \|\dot{x}\| \sin \angle(x, \dot{x})$$

konstant ist. Bei $U = 0$ haben wir diese Aussage ebenfalls schon in Bd. 3, Beispiel 10.B.2 bewiesen und als *Strahlgesetz* bezeichnet.