Skriptum zur Vorlesung

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Gordon Wassermann

akademisches Jahr 2003–2004[1]

[1]aus TEX neu übersetzt im September 2007, jetzt mit Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, buchgerechter Seitenzählung und verbesserter Einbindung der Bilder.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Was ist Funktionalanalysis?

Analysis hat sich in der Mathematik eingebürgert als ein Sammelbegriff für die so genannte Infinitesimalrechnung (im Wesentlichen die Differential- und Integralrechnung) und die daraus entstandenen Theorien. Ihren Ursprung nahm sie in der Theorie der reellen Zahlen, nicht primär als arithmetischer oder algebraischer Rechenbereich, sondern mit Bezug auf ihre mikroskopische Struktur, in der Näherung, Konvergenz und momentane Veränderungsgeschwindigkeiten reeller Größen eine prägende Rolle spielen. Die wichtigsten Probleme, mit denen die Analysis sich in ihrer Geburtsstunde zu beschäftigen hatte, waren die Bestimmung von Tangenten zu geometrischen Figuren, die Berechnung von Inhalten (Flächen und Volumina) krummer Figuren, und die Lösung von aller Art von Aufgaben, in denen die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Teilchens eine Rolle spielten.

Diese Theorie beschränkte sich nicht nur auf den reellen Zahlenbereich, sondern erfuhr auf ganz natürliche Weise Erweiterungen zu mehrdimensionalen euklidischen Räumen $\mathbf{R}^n$, auch in ihrer Eigenschaft als natürlicher Wohnort der mathematischen Physik, und später zu $\mathbf{C}$ oder zu mehrdimensionalen komplexen Räumen und schließlich zu geometrischen Gebilden (Mannigfaltigkeiten), die nur im Kleinen so aussehen wie $\mathbf{R}^n$ oder $\mathbf{C}^n$, aber die alleine schon deshalb doch für die Methoden der Differential- und Integralrechnung zugänglich sind.

Die „klassische“ Analysis widmet ihre Aufmerksamkeit einzelnen Funktionen oder Abbildungen auf $\mathbf{R}^n$, der Bestimmung ihrer Eigenschaften und der Durchführung wichtiger Berechnungen mit ihnen, sowie das Auffinden von Einzelfunktionen, die gewünschte Merkmale aufweisen, oder die gewisse analytisch formulierte Gleichungen (Differential- oder Integralgleichungen) erfüllen. Analysis ist aber keine leichtes Gebiet und stößt deshalb sehr schnell an Grenzen, die ein weiteres Vorkommen zumindest stark erschweren.

Schon in ihren Anfängen wird die Analysis erst durch ein Zusammenwirken der ganz verschiedenartigen Strukturen ermöglicht, die die reellen Zahlen aufweisen, speziell der algebraischen oder arithmetischen Struktur (die Grundrechenarten) mit der topologischen Struktur (Konvergenz), eine Zusammenarbeit, die direkt sichtbar ist in der gängigen Definition der Ableitung einer differenzierbaren Funktion als Grenzwert von Differenzenquotienten.

Die Funktionalanalysis ist der sehr gelungene Versuch, die Grenzen, an die die klassische Analysis stößt, zu durchbrechen, in dem das schon in Ansätzen vorhandene Zusammenspiel der algebraischen, topologischen und analytischen Strukturen der reellen Zahlen und ihrer Verallgemeinerungen weiter ausgebaut wird zu einer geschlossenen Theorie, in der die Methoden und Erkenntnisse mehrerer zunächst unverwandter Grundgebiete der Mathematik kombiniert werden, um die Probleme der Analysis von mehreren Ecken gleichzeitig zu beleuchten und neue Klarheit zu bringen.

Der Grundsatz dieser Theorie liegt in einer alten Erkenntnis: Analysis ist schwierig zum Teil deshalb, weil jeder isoliert gesehene Gegenstand der Analysis eine Seltenheit ist und deshalb schwer zu packen ist. Schon die genaue Angabe einer speziellen Funktion oder einer speziellen wichtigen Zahl ist ohne Näherungsmethoden in der Analysis fast nie möglich. Aber seltene oder exotische Gegenstände kann man „einkesseln“ und ergreifbar machen, wenn man sie nicht als losgelösten Einzelgegenstand betrachtet, sondern eingebettet in einer Umgebung oder Klasse ähnlicher Gegenstände untersucht.

Eigenschaften, die ein einzelner Gegenstand fast nie hat, können in einer solchen Klasse trotzdem häufig oder zwangsweise vorkommen (man denke zum Beispiel an eine Lotterie oder an eine Gewinnverlosung, an der ein Bekannter teilnimmt — dass, sagen wir, ausgerechnet Tante Hilde den ausgelosten Porsche gewinnt, wäre sehr überraschend, aber dass *irgendjemand* den Hauptpreis gewinnen wird, ist ganz sicher, wenn das Spiel nicht getürkt ist). Dieses „Stabilisieren“ eigensinnigen Verhaltens durch Betrachtung seines Umfelds macht es leichter zu untersuchen.

Ein ähnlicher Gedanke motiviert die Funktionalanalysis. Ihr Gegenstand sind nicht einzelne Funktionen und ihre analytischen Eigenschaften, sondern *Funktionenfamilien* und ihr Verhalten. Sobald man nicht mehr einzelne Funktionen betrachtet, sondern Räume aufgebaut aus vielen Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften, treten neue Strukturen ins Spiel. Meistens sind die untersuchten Funktionenfamilien abgeschlossen unter Addition und Multiplikation (zumindest unter Streckung, also Multiplikation mit Konstanten) und bilden somit einen Vektorraum oder eine $\mathbf{R}$-Algebra, und diese *algebraischen* Bereiche kann man nun mit den Mitteln der linearen Algebra untersuchen.

Das alleine erweist sich immer noch als sehr schwierig, weil die so entstehenden Vektorräume unendlichdimensional sind. Aber weil die Elemente dieser Vektorräume reell- oder komplexwertige Funktionen sind, bringen sie als Mitgift in die Ehe mit der Algebra automatisch auch eine topologische Struktur mit. Man kann auf verschiedene Weisen den „Abstand“ zweier solcher Funktionen messen und somit die Funktionenvektorräume mit einer metrischen Struktur versehen, die auf ihnen eine Topologie bestimmt. Diese erlaubt die Anwendung von Konvergenzsätzen und anderen topologischer Methoden, um die Funktionenräume in den Griff zu bekommen. Zum Beispiel „zähmen“ metrische und topologische Eigenschaften wie Beschränktheit oder Kompaktheit die Unendlichdimensionalität der Funktionenräume und machen es in vielen Fällen möglich, sie wie endlichdimensionale Vektorräume zu behandeln.

Die Topologie erlaubt auch sinnvolle Einschränkungen der Vielzahl der linearen Abbildungen zwischen den unendlichdimensionalen Funktionenräumen. Da die Funktionenräume nicht nur Vektorräume sind, sondern auch eine Topologie tragen, sind die „richtigen“ Abbildungen zwischen ihnen solche, die beide Strukturen respektieren, also *stetige* lineare Abbildungen (stetig bezüglich der Topologie der Funktionenräume).

Diese von der Doppelstruktur bedingte Einschränkung wirft neue kritische Fragen auf (gibt es denn überhaupt interessante stetige lineare Abbildungen, und wenn ja, wie viele?), aber ihre (glücklicherweise positive) Beantwortung erzeugt auch neue sehr reichhaltige mathematische Theorien, die die Grundlage der Funktionalanalysis bilden.

Wie Sie an dieser Beschreibung erkennen können, ist die Vorgehensweise der Funktionalanalysis wesentlich abstrakter, als die Methoden der „klassischen“ Analysis, die Sie aus den Anfängervorlesungen kennen. Das hat zunächst den Nachteil, dass das intuitive Verständnis oft versagt und man manchmal nicht so genau und nicht so unmittelbar begreift, was die Objekte, die man untersucht, in der „wirklichen“ Welt bedeuten. Aber die vielen Anwendungen, die die Funktionalanalysis in der Physik und anderen mit der Natur verbundenen Wissensgebiete hat, zeigen ganz klar, *dass* sie etwas in der konkreten, natürlichen Welt bedeuten.

Wenn man das begriffen und akzeptiert hat, kann man die vielen Vorteile würdigen, die die Funktionalanalysis bietet. Da sie Funktionenfamilien ganzheitlich untersucht, haben ihre Ergebnisse von Haus aus eine gewisse Allgemeinheit. Und die Abstraktheit der Methoden und Betrachtungsweise erlaubt eine sehr produktive Kreativität in der Ausdehnung und Verallgemeinerung der Grundbegriffe der Analysis.

Mit diesen Methoden kann man neue Objekte konstruieren, die in der klassischen Analysis gar nicht existieren können, aber trotzdem Anwendungen haben bei der Lösung klassischer Probleme, auch und gerade wenn diese Probleme innerhalb der klassischen Analysis überhaupt nicht lösbar sind.

Ein sehr wichtiges Beispiel ist die Theorie der ***Distributionen***, auch ***verallgemeinerte Funktionen*** genannt. Distributionen sind Dinge, die man integrieren kann, d.h., die ein wohlbestimmtes endliches Integral besitzen, obwohl sie als normale Funktionen mit reellen oder sonstartigen Werten nicht realisierbar sind. Ihre Existenz verdanken Sie nur dem Begriff des Integrals als stetiger linearer Operator auf einem Funktionenbereich, und den Wirkungsbereich dieses Operators kann man einfach problemlos auf „Nichtfunktionen“ ausdehnen. Diese Nichtfunktionen können dann überall auftreten, wo normale Funktionen auftreten, solange man sich nur mit den Integralen dieser Funktionen befasst und nicht mit ihren Werten an einzelnen Stellen.

So können Differentialgleichungen, die klassisch gar keine Lösungen besitzen, trotzdem Distributionslösungen haben, und Sätze über die Lösungen von Differentialgleichungen sind dann auf einmal auch auf solche Differentialgleichungen anwendbar, wo sie es vorher eben nicht waren, oder sind vielleicht sogar erst dann richtig formulierbar, wenn man die Distributionslösungen mit einbezieht!

Wenn Ihnen das ein bisschen wie schwarze Magie vorkommt, dann dürfen Sie nicht vergessen, dass die Mathematik sich schon seit sehr langer Zeit auf ähnliche Weise erweitert, und dass Ihnen manche Begriffe ganz geläufig und unproblematisch vorkommen, die eine ähnliche Geschichte haben und für die Mathematiker früherer Zeiten zwar nützlich, aber ganz unheimlich und schwer zu verdauen waren — ein klassisches Beispiel sind die komplexen Zahlen, die algebraische Gleichungen lösen, die keine reellen Lösungen besitzen, und die einfach formulierbare und allgemein gültige Sätze über die Existenz und die Anzahl der Wurzeln eines Polynoms erlauben, die im Bereich der reellen Zahlen nur in einer sehr komplizierten und unbefriedigenden Fassung überhaupt möglich wären. Das Wort „imaginär“ in Verbindung mit komplexen Zahlen zeugt heute noch davon, dass diese Zahlen mehrere Jahrhunderte lang benutzt wurden (zum Beispiel schon in der berühmten Cardanschen Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung), bevor man wirklich bereit war, ihre Existenz zu akzeptieren.

In Zusammenfassung kann man die Funktionalanalysis beschreiben als die Verschmelzung algebraischer, topologischer und analytischer Methoden zur Untersuchung stetiger linearer Abbildungen auf Funktionenräumen. Die reiche Grundstruktur macht dies zu einer sehr leistungsfähigen und produktiven Theorie, von der wir in dieser Vorlesung und ihrer Fortsetzung im kommenden Sommersemester die wichtigsten Elemente kennen lernen wollen.

Wir geben noch einen kurzen Überblick über die geplanten Themen.

Die Grundobjekte der Funktionalanalysis sind topologische Vektorräume, insbesondere solche, wo die Topologie eine metrische Topologie ist (bestimmt durch eine Abstandsfunktion), und unter diesen sind von besonderer Wichtigkeit die normierten Vektorräume, darunter die Banachräume und die Hilberträume, in denen die Norm von einem inneren Produkt stammt. Die Objekte dieser Vektorräume sind aber in vielen Fällen reellwertige Funktionen — wie erhält man für solche Funktionen eine geeignete Abstandsfunktion, eine Norm oder ein inneres Produkt?

Diese Strukturen kann man auf verschiedene Weisen einführen, aber eines der geeignetesten Werkzeuge dafür ist das Integral und speziell das Lebesguesche Integral, da es auf viel mehr Funktionen anwendbar ist und viel stärkere und schönere Eigenschaften hat, als das Riemannsche Integral. Da mir nicht klar ist, wie gefestigt Ihre Kenntnisse darüber aus den Anfängervorlesungen sind, beginnen wir mit einem kurzen Abschnitt über das Lebesguesche Integral, seine Konstruktion und seine wichtigsten Eigenschaften.

Es folgt eine Einführung in die Theorie der normierten Vektorräume und anschließend eine erste Untersuchung von stetigen linearen Abbildungen auf ihnen. Hier machen wir die Bekanntschaft mit drei wichtigen Grundprinzipien der Funktionalanalysis: der Satz von Hahn-Banach über die Existenz von stetigen linearen Funktionalen (Elementen des Dualraums), das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gewisser Funktionenfamilien, und das Prinzip der offenen Abbildung, das besagt, dass die Bilder offener Mengen unter surjektiven stetigen linearen Abbildungen zwischen Banachräumen wieder offen sind.

Als wichtiges Beispiel für Banachräume und Hilberträume betrachten wir dann die $\mathcal{L}^p$-Räume integrierbarer Funktionen.

Wenn man normierte Vektorräume studieren will, dann erweist es sich als geschickt, ihre *Dualräume* zu betrachten, und der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass sie eine etwas reichere Struktur haben, als die Räume, deren Dual sie sind. Von Natur aus tragen sie eine Normtopologie, aber sie haben auch zwei weitere wichtige Topologien, die deshalb so nützlich sind, weil sie mehr kompakte Teilmengen zulassen als die Normtopologie und Kompaktheit ein hilfreicher Ersatz für Endlichkeit ist in der Theorie der unendlichdimensionalen topologischen Vektorräume. Ein Kapitel wird sich den drei Dualraumtopologien und ihren Anwendungen widmen.

Es folgt ein Abschnitt über Hilberträume, die eine auch für die Anwendungen sehr wichtige Spezialisierung der Banachräume bilden.

Im Sommersemester befassen wir uns mit linearen Operatoren (stetigen Endomorphismen) auf Banach- und Hilberträumen, mit Banachalgebren, und schließlich als eines der wichtigsten und faszinierendsten Themen der Funktionalanalysis mit der Spektraltheorie von Operatoren auf Hilberträumen und mit dem Spektraldarstellungssatz für hermitesche Operatoren. Hierbei wird das Integral stetiger Funktionen auf $\mathbf{R}$ bezüglich einer monotonen Schar von Projektionsoperatoren definiert und gezeigt, dass man hermitesche Operatoren durch ein solches Integral über das Spektrum des Operators darstellen kann.

Dieser kurze Umriss der angepeilten Themen ist natürlich sehr skizzenhaft und es lässt sich noch nicht genau sagen, ob wir in der vorhandenen Zeit diese Themen alle eingehend behandeln können oder ob die Grenze zwischen Winter- und Sommersemester genau dort liegen wird, wo wir sie hier gesetzt haben. Betrachten Sie diese Themenauflistung als eine kleine Orientierungshilfe, bevor es auf die Reise geht, aber ohne Anspruch auf Vollständigkeit und Pünktlichkeit des Fahrplans.

Nach dieser Beschreibung der „Struktur“ der Funktionalanalysis und der anschließenden Themenvorausschau mögen Sie vielleicht Bedenken haben, ob Sie die Voraussetzungen zum Verständnis der Vorlesung mit sich bringen. Deshalb ein kurzes Wort zu den nötigen Vorkenntnissen: am Wichtigsten sind gründliche Kenntnisse—auf dem Niveau der Anfängervorlesungen—über die reelle Analysis und die lineare Algebra. Einige Themen, die dort vorgekommen sein sollten, werden hier trotzdem wiederholt, weil das Wissen darüber erfahrungsgemäß nicht so fest „sitzt“ (speziell gilt das für die Lebesgue Integration, die ein Grundhilfsmittel der Funktionalanalysis ist und die deshalb gut verstanden sein muss—um das sicherzustellen, behandeln wir sie auf eine hoffentlich zugängliche Weise als einführendes Kapitel 0 der Vorlesung).

Auch die Topologie spielt, wie sie gesehen haben, eine sehr prominente Rolle überall in der Funktionalanalysis und es ist deshalb sehr wichtig, dass Sie zumindest die relevanten Grundbegriffe der Topologie kennen. Aber keine Angst! Die Kenntnisse aus den Anfängervorlesungen sind fast ausreichend, und da wo sie es nicht sind und wo wir an einzelnen Stellen fortgeschritteneres Wissen brauchen, werden wir die nötigen topologischen Themen selber in der Vorlesung aufarbeiten. Es ist also nicht erforderlich, eine Vorlesung über Topologie besucht zu haben.

Was Sie kennen sollten sind die elementaren Begriffe der Topologie und ein paar der einfachsten Sätze über sie. Sie sollten wissen, was ein topologischer Raum ist, was offene und abgeschlossene Mengen in einem topologischen Raum sind, was stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind, und was kompakte Mengen sind, und sie sollten mit den Grundeigenschaften dieser Begriffe vertraut sein. Die Definitionen werden wir der Vollständigkeit halber im Skript erwähnen, aber wir werden sie nicht groß erklären und wir werden uns nicht lange darüber aufhalten können. Dennoch, alles Notwendige, was über diesen einfachen Rahmen hinausgeht, werden wir selbstverständlich in der Vorlesung nachholen—das wird ohnehin nicht viel sein. Die Topologie dürfte also für niemanden ein Hindernis sein, die jetzige Vorlesung zu verstehen.

Somit kann ich Sie beruhigen—wer die Anfängervorlesungen gut überstanden hat ist bestens gerüstet für den Besuch der *Funktionalanalysis*.

Dieses Skriptum bietet Ihnen eine genaue Vorlage zum Verständnis der Vorlesung, aber wenn Sie später oder schon während der Vorlesung Ihre Kenntnisse vertiefen wollen und ein bisschen weiter blicken wollen, als es in der beschränkten Zeit einer Vorlesung möglich ist, mögen Ihnen die folgenden Empfehlungen eine Hilfe sein bei der Suche nach passender Ergänzungsliteratur:

Literatur

[1] Friedrich Hirzebruch und Winfried Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis.* Spektrum-Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996. ISBN 3-86025-429-4

[2] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* Springer Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 4., überarbeitete Auflage, 2002.

[3] Reinhold Meise und Dietmar Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis.* vieweg studium Aufbaukurs Mathematik 62. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1992.

[4] Harro Heuser. *Funktionalanalysis.* B. G. Teubner, Stuttgart, 3., neubearbeitete und erweiterte Auflage, 1992.

[5] Peter D. Lax. *Functional Analysis.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.

[6] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear Operators.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. Ein dreibändiges klassisches Standardwerk der Funktionalanalysis, Erstveröffentlichung 1957.

[7] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1991.

[8] Y. M. Berezansky, Z. G. Sheftel and G. F. Us. *Functional Analysis Vol. I.* Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996. Ein sehr ausführliches Buch, das auch die Lebesgue Integration mit allen Einzelheiten im Haupttext (und nicht nur im Anhang) behandelt. Übersetzt aus dem Russischen.

Die gewählte, offensichtlich nicht alphabetische Anordnung der Literaturliste gibt nur meine ganz flüchtige Einschätzung darüber wieder, welche Bücher sich am Besten für Studierende als Begleittext zur Vorlesung eignen.

Die Bücher, die weiter unten in der Liste stehen, sind hervorragende Lehrbücher, und sie stehen nur deshalb an letzter Stelle, weil sie entweder zu umfangreich sind, um daraus gut zu lernen (aber dafür sich bestens als Nachschlagewerke eignen), oder weil sie einzelne Themen anders betonen oder in einer anderen Reihenfolge präsentieren, als wir es in dieser Vorlesung tun werden.

Einige dieser Bücher sind klassische Werke, die in keiner Literaturliste über Funktionalanalysis fehlen dürften, aber die zum Teil schon ein halbes Jahrhundert alt sind. Am anderen Ende der Skala liegt das Buch von Peter Lax, das das große Wirkungsfeld der Funktionalanalysis sehr breit abdeckt und viele aktuelle Themen behandelt, für die wir in unserer Vorlesung leider keine Zeit haben werden. Dieses Buch ist, wie man am Veröffentlichungsdatum sieht, ganz auf dem neuesten Stand, und der Autor kennt sich hervorragend aus, da er selber viel zur Entwicklung der modernen Funktionalanalysis beigetragen hat.

Kapitel 0

Das Lebesgue Integral

Wie schon erklärt wurde, befasst sich die Funktionalanalysis mit *Funktionenräumen*, also mit Mengen aus vielen reellwertigen Funktionen, meistens versehen mit einer Struktur eines normierten Vektorraumes, so dass arithmetische Operationen mit den Funktionen ausgeführt werden können, aber auch alle Operationen auf diesen Mengen, zu deren Definition Konvergenzbetrachtungen oder topologische Eigenschaften nötig sind.

Zu solchen Operationen gehören die Differentiation aber auch die Integration, das „Aufsummieren" von in der Regel unendlich vielen Funktionen, wobei ein endliches Ergebnis erzielt wird, indem man jeden einzelnen Summanden im Wesentlichen mit einem „infinitesimalen" Gewicht zählt; diese Wirkung erreicht man, indem man die Summe als einen Grenzwert von endlichen Summen erhält mit einer wachsender Anzahl von Summanden aber immer kleiner werdender Gewichtung der einzelnen Summanden.

Das Integral ist ein besonders wichtiges und nützliches Werkzeug in der Funktionalanalysis. Ein Grund dafür ist, dass es benutzt werden kann, um eine „große" Menge von Funktionen durch eine einzige Funktion (nämlich durch ein Integral über diese Menge) zu charakterisieren und somit fassbar zu machen. Als einer der klassischen linearen Operatoren der Analysis ist das Integral auch besonders geeignet für Betrachtungen mit den aus der linearen Algebra stammenden Methoden der Funktionalanalysis. Und schließlich können Integrale dafür benutzt werden, um zumindest Pseudonormen auf Funktionenvektorräumen zu definieren um sie zu topologisieren, weshalb viele wichtige Beispiele der Funktionalanalysis mit Hilfe von Integralen konstruiert werden.

Zwar ist die Integration Thema der Anfängervorlesungen, und Kenntnisse darüber werden in den meisten Büchern über Funktionalanalysis deshalb nicht vermittelt, sondern einfach vorausgesetzt. Aber in den ersten Semestern wird zunächst das sogenannte Riemannsche Integral, die klassische Integralkonstruktion, bevorzugt — wir brauchen aber eine modernere, Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts von Henri Lebesgue eingeführte Integralkonstruktion, die wesentlich allgemeiner anwendbar ist und *viel* schönere Eigenschaften als das Riemann Integral hat (bis auf den Nachteil, dass seine Definition zunächst etwas undurchsichtiger erscheint). Auch das Lebesgue Integral ist Stoff der Anfängervorlesung Analysis, allerdings meistens erst gegen Schluss des dreisemestrigen Zyklus, mit der aus diesem Umstand resultierenden Gefahr, dass diese Inhalte vielleicht nicht gründlich dargestellt oder von den Studenten nicht ganz sicher aufgenommen werden konnten.

Damit das Verständnis der jetzigen Vorlesung über Funktionalanalysis nicht an Kenntnislücken über dieses unerlässliche Hilfsmittel leidet, möchte ich also als „Kapitel 0“ vor dem Beginn des eigentlichen Vorlesungsstoffs eine *schnelle* Wiederholung der Definition und der wichtigsten Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals einschieben.

Obwohl wir bald einen allgemeineren Rahmen benötigen, betrachten wir zur Motivation der Definition die einfache und klassische Situation einer reellwertigen Funktion f, definiert auf einem abgeschlossenen Intervall $A := [a, b]$ in $\mathbf{R}$. Wie schon erwähnt, soll das Integral von f über dieses Intervall eine Art Summe von allen Werten der Funktion auf dem Intervall darstellen, wobei eine Gewichtung dafür sorgt, dass die Summe endlich bleibt.

Sehr vereinfacht gesehen soll jeder Wert mit seiner „Häufigkeit“ unter den Werten gewichtet werden, d.h., er soll so stark gezählt werden, wie die Größe des Bereichs, auf dem er angenommen wird. Das darf man natürlich nicht ganz wörtlich nehmen, denn in der Regel gibt es unendlich viele verschiedene Werte, von denen jeder vielleicht nur einmal angenommen wird. Aber der Gedanke, der hinter dieser Vorstellung steckt, kann präzisiert und vor allem praktisch realisiert werden, in dem man das Integral durch endliche Summen annähert.

Zu diesem Zweck zerlegt man das Intervall A in endlich viele kleine Teilbereiche $A_1, \ldots, A_n$, auf denen f *nahezu konstant* ist. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei c_i der approximative Wert von f auf A_i und sei μ_i die Größe von A_i. Die Summe $\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$ ist dann eine Näherung zu dem Integral $\int_A f$. Wenn man Glück hat, konvergieren diese Annäherungen tatsächlich zu einem Grenzwert, wenn die Abweichungen von f zu einer geeigneten Konstante auf den Teilbereichen gegen 0 geht, und man sagt dann, dass f auf A ***integrierbar*** ist und ein Integral besitzt.

Um das hier beschriebene Programm auszuführen, sind zwei nicht unbedingt einfache Aufgaben zu lösen: man muss Teilbereiche A_i ausfindig machen, auf denen f fast konstant ist, und man muss die Größe dieser Teilbereiche bestimmen oder messen können.

Die zweite Aufgabe erscheint zunächst schwieriger, und der klassische, Riemannsche Ansatz zur Konstruktion des Integrals wählt deshalb einen Zugang, der diese Aufgabe zähmt und einfach macht: die Teilgebiete A_i werden als *Teilintervalle* $[a_i, b_i]$ gewählt, und die Größe eines solchen Teilintervalls ist einfach seine Länge $d_i := b_i - a_i$. Dass f auf diesen Teilintervallen nahezu konstant gemacht werden kann wird durch eine natürlich wirkende und deshalb auch zunächst leicht zu akzeptierende Zusatzvoraussetzung erreicht, nämlich, dass f stetig sei (gewisse leichte Abschwächungen dieser Forderung sind noch zulässig).

Aber es stellen sich schnell einige gravierende Nachteile dieser Konstruktion heraus. Es gibt viele nicht allzu exotische nichtstetige Funktionen, für die man ein Integral „erraten“ kann — ein Standardbeispiel ist die charakteristische Funktion χ der irrationalen Zahlen auf $[0, 1]$. Weil es überabzählbar viele irrationale Zahlen gibt (wo χ den Wert 1 annimmt) und nur abzählbar viele rationale Zahlen (wo χ Null ist), ist im Verhältnis der Größen der Anteil des Intervalls, auf dem χ Null ist, eben 0, und der Anteil, wo χ den Wert Eins annimmt, ist 1, so dass χ das gleiche Integral 1 haben sollte, wie die konstante Funktion 1. Aber das Riemannsche Integral von χ ist gar nicht definiert, d.h., die Riemannsche Konstruktion ist auf diese Funktion nicht anwendbar und führt zu keinem eindeutigen Ergebnis, weil die Funktion auf keinem Teilintervall „nahezu konstant“ ist.

Ein weiterer Nachteil findet sich in den topologischen Eigenschaften, d.h., in dem Konvergenzverhalten des Riemann Integrals, die für die Funktionalanalysis ja gerade sehr wichtig sind. Das Riemann Integral ist zwar ein stetiger linearer Operator auf Funktionenräumen aus integrierbaren Funktionen, aber nur wenn der Abstand zweier Funktionen gemessen wird durch die *maximale* Abweichung ihrer Werte an der gleichen Stelle. Anders gesagt, damit die Integrale einer konvergenten Folge von Funktionen gegen das Integral der Grenzfunktion konvergieren, müssen beim Riemann Integral im Allgemeinen sehr starke Voraussetzungen erfüllt sein, nämlich die *gleichmäßige* Konvergenz der Funktionenfolge. Das ist für funktionalanalytische Anwendungen eine sehr unangenehme Einschränkung.

In seiner 1902 erschienenen Dissertation hat Henri Lebesgue eine neue Integraldefinition vorgeschlagen, die diese Nachteile nicht oder nur sehr abgemildert aufweist. Das wesentliche Merkmal seiner Idee ist, dass sie die Bedeutung der zwei für die Definition eines Integrals zu lösenden Aufgaben umkehrt. Für die *erste* Aufgabe — Bereiche zu finden, auf denen der Integrand f nahezu konstant ist — wird eine einfaches Verfahren gewählt, und obwohl mit Mühen verbunden gelingt es trotzdem, für die zweite Aufgabe — der Bestimmung der Größe dieser Bereiche — eine brauchbare und befriedigende Lösung zu finden.

Für die Definition des Lebesgueschen Integrals einer, sagen wir beschränkten Funktion $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$, mit Werten in einem Intervall $B := [c, d]$, wird nicht der *Definitionsbereich* A in Teilintervalle zerlegt, sondern der *Wertebereich* B wird in Intervalle $B_i := [c_i, d_i]$ kleiner Länge zerlegt. Auf den Urbildern $A_i := f^{-1}(B_i)$ ist f dann automatisch „nahezu konstant".

Nun können diese Teilbereiche A_i schon sehr kompliziert aussehen, und eine relativ komplizierte Konstruktion (die wir später genauer beschreiben) ist nötig, um ihre Größe μ_i zu bestimmen. Der Aufwand lohnt sich aber, weil bedingt durch diese Art der Konstruktion nur sehr schwache Voraussetzungen über f noch erforderlich sind, damit das Integral existiert. Auch stellt sich heraus, dass das Lebesguesche Integral im Umgang mit konvergenten Funktionenfolgen sehr viel „genügsamer" ist als das Riemannsche.

Die Lebesguesche Größenmessung für Teilmengen von $\mathbf{R}$ lässt sich zunächst sogar für beliebige Teilmengen durchführen, aber es stellt sich heraus, dass die Ergebnisse manchmal als „unsinnig" anzusehen sind, weil wichtige und natürliche Eigenschaften nicht erfüllt werden (z.B., dass die Größe sich additiv verhält bezüglich disjunkter Vereinigung von Mengen). Aus diesem Grund darf man bei der Lebesgueschen Integralkonstruktion als Teilbereiche A_i nur solche Mengen zulassen, denen eine in obiger Bedeutung sinnvolle Größe zugeordnet wird (man nennt solche Mengen ***messbar***). Das sind aber praktisch alle Mengen, die einem im mathematischen Alltagsleben unterkommen, insbesondere alle offenen Mengen, alle abgeschlossenen Mengen, und alle Mengen, die aus solchen durch abzählbare Vereinigung und Differenzbildung zu konstruieren sind. Dementsprechend sind auch alle halbwegs vernünftigen Funktionen im Lebesgueschen Sinne integrierbar — die Ausnahmen sind sehr exotisch.

Wir haben in dieser kurzen Motivation für das Lebesguesche Integral die Situation einer reellwertigen Funktion auf einem Intervall in $\mathbf{R}$ als Illustration benutzt, aber die Lebesguesche Definition lässt sich für andere, sehr viel abstraktere Definitionsbereiche anwenden und wir wollen sie auch in entsprechender (und entsprechend abstrakter) Allgemeinheit formulieren — alles, was man dazu braucht, ist ein System von Mengen, für die eine sich wohl verhaltende Größen- oder Volumenfunktion existiert. Den Illustrationsspezialfall werden wir dann einfach als ein Beispiel für eine solche Struktur besprechen.

Wir beginnen jetzt mit der genauen Beschreibung des Lebesgue Integrals. Die Grunddefinitionen und nichttriviale Beweisschritte und Begründungen werden wir dabei natürlich angeben, aber die Darstellung wird nicht so gründlich sein wie später beim Hauptstoff der Funktionalanalysis und einfache Beweisdetails werden wir in diesem Vorkapitel gerne dem Leser (oder Hörer) überlassen.

Als erstes wollen wir festlegen, wie die für die Konstruktion des Integrals notwendige Familie von „Mengen mit wohlbestimmtem Volumen“ aussehen muss.

Definition 0.1 Sei X eine Menge. Eine ***σ-Algebra*** auf X ist eine Familie

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt:

a) $X \in \mathcal{R}$;

b) für je zwei Mengen M und $N \in \mathcal{R}$ ist auch die mengentheoretische Differenz $M \setminus N \in \mathcal{R}$;

c) jede *abzählbare* Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ gehört zu $\mathcal{R}$.

Die Elemente von $\mathcal{R}$ nennen wir die ***messbaren Mengen*** der σ-Algebra $\mathcal{R}$ (denn dies sind die Mengen, für die wir gleich eine Volumenfunktion einführen werden).

Ein ***messbarer Raum*** ist ein Paar $(X, \mathcal{R})$, wo X eine Menge und $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X ist.

Bemerkung 0.2 Sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum. Aus den drei Eigenschaften 0.1 a)–c) ist klar, dass auch $\emptyset \in \mathcal{R}$, dass Komplemente von Mengen aus $\mathcal{R}$ zu $\mathcal{R}$ gehören, und dass abzählbare *Durchschnitte* von Elementen von $\mathcal{R}$ noch zu $\mathcal{R}$ gehören.

Beispiele 0.3 Sei X eine Menge.

a) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra auf X.

b) Die Familie $\{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra auf X.

Diese Beispiele sind natürlich nicht besonders interessant, aber wir werden bald weitere kennen lernen.

Bemerkung und Definition 0.4 Sei X eine Menge.

Sei S eine beliebige *Familie von σ-Algebren auf X* (d.h., S ist eine Menge, und jedes Element von S ist eine σ-Algebra auf X). Man prüft sehr leicht nach, dass auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{\mathcal{R} \in S} \mathcal{R}$$

der σ-Algebren in S wieder die Eigenschaften 0.1 a)–c) erfüllt und somit eine σ-Algebra ist.

Hieraus folgt nach dem üblichen einfachen Argument, dass es zu jeder Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine *kleinste* $\mathcal{A}$ umfassende σ-Algebra auf X gibt, nämlich den Durchschnitt aller σ-Algebren auf X, die $\mathcal{A}$ enthalten.

Wir nennen diese σ-Algebra ***die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra auf*** X und bezeichnen sie mit $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Definition 0.5 Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{T}$ die Topologie von X, d.h., die Familie der offenen Mengen von X. Die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra auf X heißt die Familie der ***Borelmengen*** von $(X, \mathcal{T})$.

Uns interessiert auch speziell der Fall, wo $X = \mathbf{R}$ oder $X = \mathbf{R}^n$ mit der Standardtopologie. In diesem Fall wird die σ-Algebra der Borelmengen schon von den offenen Kreisscheiben in X erzeugt (im Falle von $\mathbf{R}$ also von den offenen Intervallen), weil bekanntlich jede offene Menge in $\mathbf{R}^n$ sich als eine abzählbare Vereinigung von offenen Kreisscheiben schreiben lässt.

Die Abschlusseigenschaften einer σ-Algebra sind abgestimmt auf die gewünschten Eigenschaften, die eine Volumenfunktion erfüllen soll. Diese geben wir gleich an, nachdem wir ein paar relevante Begriffe eingeführt haben.

Konvention 0.6 Wir werden gleich Funktionen betrachten, die Werte in den ***erweiterten reellen Zahlen***

$$\mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

oder später sogar in $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ annehmen, also neben reellen Werten auch die Werte ∞ oder $-\infty$.

Deshalb wollen wir hier folgende konventionelle Rechenregeln für unendliche Werte in Kombination mit beliebigen Werten $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ vereinbaren:

$$-\infty \le c \le \infty \tag{0.1a}$$
$$c + \infty = \infty + c = \infty \qquad (c \neq -\infty) \tag{0.1b}$$
$$c + (-\infty) = -\infty + c = -\infty \qquad (c \neq \infty) \tag{0.1c}$$
$$c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty \qquad (c > 0) \tag{0.1d}$$
$$c \cdot \infty = \infty \cdot c = -\infty \qquad (c < 0) \tag{0.1e}$$
$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \tag{0.1f}$$

$\infty + (-\infty)$ und $-\infty + \infty$ sind nicht definiert. Produkte mit $-\infty$ berechnen wir nach der Regel $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = -(c \cdot \infty)$.

Definition 0.7 Sei X eine Menge und sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X. Wir betrachten im Folgenden Funktionen

$$f\colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\}\,.$$

Eine solche Funktion heißt

a) ***positiv***, wenn $f(M) \geq 0$ für alle $M \in \mathcal{R}$ (nach Konvention 0.6 ist auch $\infty \geq 0$);

b) ***additiv***, wenn für je zwei *disjunkte* Mengen M und $N \in \mathcal{R}$ gilt

$$f(M \cup N) = f(M) + f(N);$$

c) σ***-additiv***, wenn für jede abzählbare Familie $\{\, M_i \mid i \in \mathbf{N}\,\}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{R}$ gilt

$$f\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} f(M_i).$$

Lemma 0.8 *Sei X eine Menge und sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X. Sei*

$$f\colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\}$$

eine positive Funktion.

a) Wenn f additiv ist, und wenn $M \subseteq N \in \mathcal{R}$, dann ist

$$f(M) \leq f(N) \tag{0.2}$$

*(wir sagen dazu, f ist **monoton**) und es gilt*

$$f(N) - f(M) = f(N \setminus M), \tag{0.3}$$

sofern die linke Seite definiert, also nicht $\infty - \infty$ ist.

b) Wenn f additiv ist und nicht nur den Wert ∞ annimmt, dann ist $f(\emptyset) = 0$.

c) Wenn f additiv ist, und wenn A und $B \in \mathcal{R}$ (nicht unbedingt disjunkt), dann ist

$$f(A \cup B) \leq f(A) + f(B). \tag{0.4}$$

(Durch Induktion erhält man eine entsprechende Formel für beliebige endliche Vereinigungen.)

d) Wenn f σ-additiv ist, dann ist f auch additiv.

e) Sei

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$$

eine aufsteigende Folge von Mengen aus $\mathcal{R}$ und sei

$$E := \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i.$$

Wenn f σ-additiv ist, dann ist

$$f(E) = \sup_{i \in \mathbf{N}} f(E_i). \tag{0.5}$$

f) Sei

$$\{\, C_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$$

eine beliebige abzählbare Familie von Mengen aus $\mathcal{R}$ und sei

$$C := \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Wenn f σ-additiv ist, dann ist

$$f(C) \leq \sum_{i=0}^{\infty} f(C_i). \tag{0.6}$$

g) Sei

$$D_0 \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots$$

eine absteigende Folge von Mengen aus $\mathcal{R}$ und sei

$$D := \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i.$$

Wenn f σ-additiv ist und wenn $f(D_0) < \infty$, dann ist

$$f(D) = \inf_{i \in \mathbf{N}} f(D_i). \tag{0.7}$$

Beweis. a): $f(N) = f\big(M \overset{\mathrm{D}}{\cup} (N \setminus M)\big) = f(M) + f(N \setminus M)$. Der zweite Summand ist nichtnegativ und (0.2) und (0.3) folgen unmittelbar.

b) folgt sofort aus (0.3) mit $M = N$ für eine beliebige Menge $M \in \mathcal{R}$ mit $f(M) < \infty$.

c): $f(A \cup B) = f\big(A \overset{\mathrm{D}}{\cup} (B \setminus A)\big) = f(A) + f(B \setminus A) \leq f(A) + f(B)$ nach Teil a).

d): Sei f σ-additiv. Wenn f nur den Wert ∞ annimmt ist f sicher additiv. Also können wir annehmen, es gibt eine Menge $K \in \mathcal{R}$ mit $f(K) < \infty$.

An der Familie $\{\, M_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ mit $M_0 := K$ und $M_i := \emptyset$ für jedes $i > 0$ sieht man aus der σ-Additivität, dass $f(\emptyset) = 0$.

Nun seien M und N zwei disjunkte Mengen aus $\mathcal{R}$. Mit der Familie $\{\, M_i' \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ mit $M_0' = M$, $M_1' = N$ und $M_i' := \emptyset$ für jedes $i > 1$ schließt man dann aus der σ-Additivität von f, dass $f(M \cup N) = f(M) + f(N)$.

e): Sei $\tilde{E}_0 := E_0$ und für jedes $i \geq 1$ sei $\tilde{E}_i := E_i \setminus E_{i-1}$.

Weil die Mengen E_i eine monoton aufsteigende Folge bilden, sind die $\tilde{E}_i$ disjunkt. Offensichtlich ist

$$E_k = \bigcup_{i=0}^{k} \tilde{E}_i$$

für jedes $k \in \mathbf{N}$, und deshalb ist

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \tilde{E}_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k = E.$$

Weil die $\tilde{E}_i$ disjunkt sind, haben wir

$$f(E_k) = \sum_{i=0}^{k} f(\tilde{E}_i)$$

und

$$f(E) = \sum_{i=0}^{\infty} f(\tilde{E}_i) = \sup_{k \in \mathbf{N}} f(E_k)$$

(denn die Summe einer nichtnegativen Reihe ist das Supremum ihrer Partialsummen).

f): Dies folgt sofort aus c) und aus e) mit $E_i = \bigcup_{k=0}^{i} C_k$.

g) folgt, wegen der Endlichkeit von $f(D_0)$, sofort aus Teil e) und der Tatsache, dass die $D_0 \setminus D_i$ eine monoton aufsteigende Folge von Mengen bilden mit

$$D_0 \setminus D = \bigcup_{i=0}^{\infty} (D_0 \setminus D_i),$$

so dass

$$
\begin{aligned}
f(D_0) - f(D) = f(D_0 \setminus D) &= \sup_{i \in \mathbf{N}} f(D_0 \setminus D_i) \\
&= \sup_{i \in \mathbf{N}} \big(f(D_0) - f(D_i) \big) = f(D_0) - \inf_{i \in \mathbf{N}} f(D_i).
\end{aligned}
$$

■

Definition 0.9 Sei X eine Menge und sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X. Eine ***Maßfunktion*** oder kürzer und prägnanter ein ***Maß*** auf $\mathcal{R}$ ist eine positive σ-additive Funktion

$$\mu \colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \},$$

so dass

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{0.8}$$

Ein ***Maßraum*** ist ein Tripel $(X, \mathcal{R}, \mu)$, wo X eine Menge ist, $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X ist, und μ ein Maß auf $\mathcal{R}$ ist.

Bemerkung 0.10 In Lemma 0.8 d) und b) haben wir gesehen, dass jede positive σ-additive Funktion, die nicht nur unendliche Werte annimmt, automatisch (0.8) erfüllt und eine Maßfunktion ist.

Ein Maß soll man verstehen als eine Volumen- oder Inhaltsfunktion, die angibt, wie „groß“ eine Menge ist. Diese Größe soll nie negativ sein (oder was auf's gleiche hinausläuft, bei Mengeninklusionen soll sie sich monoton verhalten) und bei disjunkten Vereinigungen von Mengen soll die Größe der Vereinigung die Summe der Größen der einzelnen vereinigten Mengen sein — diese Eigenschaft lässt sich nur für *abzählbare* Summen sinnvoll formulieren und deshalb verlangen wir „nur“, dass eine Maßfunktion σ-additiv sein soll.

Beispiele 0.11 a) Sei X eine beliebige Menge, sei $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X)$, und für $A \subseteq X$ sei $\mu(A)$ die Anzahl der Elemente von A. Dann ist μ ein Maß auf $\mathcal{R}$.

b) Sei X eine beliebige Menge, sei $\mathcal{S} = \{ X, \emptyset \}$, sei $c \geq 0$ eine beliebige Zahl und sei $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(X) = c$. Dann ist μ ein Maß auf $\mathcal{S}$.

c) Sei X eine beliebige Menge, sei $\mathcal{T}$ eine beliebige σ-Algebra auf X und sei $\mu(A) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{T}$. Dann ist μ ein Maß auf $\mathcal{T}$.

Diese Beispiele sind weder besonders interessant noch besonders nützlich. Die wichtigste σ-Algebra, die wir kennen, ist die Familie der Borelmengen auf $\mathbf{R}^n$, und auf dieser σ-Algebra wollen wir jetzt ein nichttriviales Maß konstruieren, das ***Lebesguesche Maß***, das für Mengen, für deren Volumen wir schon eine Vorstellung haben, nämlich für Quader, mit dem Standardvolumen übereinstimmt und deshalb besonders natürlich ist. Unser Maß wird zusätzlich die ebenfalls sehr naheliegende Voraussetzung erfüllen, invariant unter Translationen von Mengen zu sein, und man kann zeigen, dass die beiden genannten Eigenschaften es eindeutig charakterisieren; es ist also in diesem Sinne ein kanonisches Maß auf der Borel σ-Algebra.

Definition 0.12 Wir betrachten zunächst ***offene Intervalle***

$$(a, b) := \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \}$$

in $\mathbf{R}$, wobei $a < b$ beliebige reelle Zahlen sein können, aber wir auch zulassen, dass $a = -\infty$ und dass $b = \infty$ sein darf (d.h., auch Strahlen und ganz $\mathbf{R}$ zählen als Intervalle). Die ***Länge*** eines offenen Intervalls $A := (a, b)$ definieren wir wie üblich als

$$L(A) := b - a. \tag{0.9}$$

Diese Länge ist immer positiv, und ist ∞ genau dann, wenn einer (oder beide) der Endpunkte des Intervalls unendlich sind.

Sei nun $n \geq 0 \in \mathbf{N}$. Ein ***(offener) Quader*** Q in $\mathbf{R}^n$ ist ein kartesisches Produkt

$$Q := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \tag{0.10}$$

von offenen Intervallen, und wir definieren seinen ***Inhalt*** als die Zahl

$$I(Q) := \prod_{i=1}^{n} L(A_i). \tag{0.11}$$

Die Faktorintervalle A_i in (0.10) nennen wir die ***Kanten*** des Quaders Q.

Aus technischen Gründen wollen wir auch die leere Menge zu den offenen Quadern zählen, mit leeren Kanten und mit $I(\emptyset) := 0$.

Mit Hilfe des Inhalts können wir nun die Größen beliebiger Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ abschätzen.

Bemerkung und Definition 0.13 Die Konstruktion, die wir gleich ausführen, ist auch für andere Inhaltsfunktionen anwendbar als die hier definierte. Im Moment geht es uns um die Definition des Lebesgueschen Standardmaßes auf $\mathbf{R}^n$, aber für spätere Anwendungen kann es durchaus sinnvoll sein, leichte Abwandlungen in Definition 0.12 zuzulassen.

Zum Beispiel erhält man eine nützliche verallgemeinerte Inhaltsfunktion, wenn man anstelle der oben benutzten euklidischen Länge die Größe eines Intervalls (a, b) durch das Wachstum einer fest vorgegebenen monoton steigende Funktion $\alpha\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ erklärt. Die neue Definition der Längenfunktion lautet dann $L(a, b) := \alpha(b) - \alpha(a)$.

Wenn α nicht stetig ist, kann man dadurch erreichen, dass im Gegensatz zum Lebesgueschen Maß einzelne Punkte positives Maß erhalten; wenn α auf $\mathbf{R}$ beschränkt ist kann man dadurch erreichen, dass Strahlen oder ganz $\mathbf{R}$ endliches Maß erhalten.

Auch den Begriff des Intervalls und des Quaders kann man abändern, zum Beispiel in dem man mit halboffenen oder mit beliebigen (und nicht nur offenen) Intervallen arbeitet.

Im folgenden Aufbau des Lebesgueschen Maßes auf den Borelmengen gehen wir weiterhin vom Standardinhalt aus, aber man soll sich bewusst sein, dass die gleiche Konstruktion auch in einem allgemeineren Kontext durchgeführt werden kann (wobei dann einige der bewiesenen Eigenschaften nicht mehr gelten und angepasst werden müssen; es wird leicht zu erkennen sein, an welchen Stellen das passieren kann).

Definition 0.14 Sei n eine natürliche Zahl und sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$.

Sei $\mathcal{U}$ die Familie aller abzählbaren Überdeckungen von A durch offene Quader; ein typisches Element von $\mathcal{U}$ ist eine abzählbare Familie

$$\mathcal{Q} = \{\, Q_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$$

von offenen Quadern Q_i (die auch leer sein können), so dass

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i.$$

Für eine solche Familie $\mathcal{Q} = \{\, Q_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ definieren wir den ***Gesamtinhalt*** der Familie als

$$I(\mathcal{Q}) := \sum_{i=0}^{\infty} I(Q_i).$$

Wir definieren das ***äußere Maß*** von A als

$$\mu^*(A) := \inf_{\mathcal{Q} \in \mathcal{U}} I(\mathcal{Q}) = \inf_{\mathcal{Q} = \{\, Q_i \,\} \in \mathcal{U}} \sum_{i=0}^{\infty} I(Q_i). \tag{0.12}$$

In anderen Worten, wir *schätzen* die Größe von A, in dem wir es mit offenen Quadern überdecken und die Inhalte dieser Quader aufsummieren.

Diese Schätzungen sind meistens zu groß, da die Quader sich im Allgemeinen überlappen, aber wir betrachten alle möglichen (effizienten und ineffizienten) abzählbaren Quaderüberdeckungen von A, und wir nehmen das Infimum aller Schätzungen als die gemessene Größe von A.

Bemerkung 0.15 Weil der Inhalt eines Quaders immer ≥ 0 ist, folgt aus einem Standardsatz der Analysis, dass der Gesamtinhalt $I(\mathcal{Q})$ einer abzählbaren Familie $\mathcal{Q} = \{\, Q_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ von offenen Quadern nicht von der Reihenfolge abhängt, in der man die Q_i aufzählt.

Wenn $\mathcal{Q}_j$ (für $j \in \mathbf{N}$) abzählbar viele abzählbare Familien von offenen Quadern sind, dann ist ihre Vereinigung $\mathcal{Q} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{Q}_j$ auch eine abzählbare Familie von offenen Quadern, die wegen der gerade genannten Tatsache einen wohldefinierten Gesamtinhalt hat, und für diesen gilt, wieder nach Standardsätzen über Doppelreihen mit nichtnegativen Gliedern, dass

$$I(\mathcal{Q}) = \sum_{j=0}^{\infty} I(\mathcal{Q}_j). \tag{0.13}$$

In Definition 0.14 sind erfreulicherweise keine Einschränkungen auf A nötig, um das äußere Maß zu definieren (d.h., das Verfahren liefert immer eine Zahl oder ∞ als Größe von A), aber leider stellt sich heraus, dass μ^* nur fast, aber nicht ganz, die Eigenschaften eines Maßes hat. Daran erkennt man, dass das Verfahren für manche Mengen nicht wirklich funktioniert und die gelieferte Zahl nicht immer sinnvoll ist.

μ^* hat aber zumindest folgende schöne Eigenschaften.

Lemma 0.16 *a)* μ^* *ist positiv, d.h., für jedes* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *ist* $\mu^*(A) \geq 0$.

b) μ^* *ist monoton, d.h., wenn* $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}^n$, *dann ist* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

c) μ^* *ist translationsinvariant, d.h., wenn* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *und wenn für einen festen Vektor* $c \in \mathbf{R}^n$ *gilt*

$$B = \{\, x + c \mid x \in A \,\},$$

dann ist $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

d) μ^* *ist abzählbar subadditiv, d.h., wenn* $\{\, A_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ *eine abzählbare Familie von Teilmengen von* $\mathbf{R}^n$ *ist, dann ist*

$$\mu^*\Bigl(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Bigr) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i). \tag{0.14}$$

e) Für jede abzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ gilt $\mu^*(A) = 0$.
Insbesondere ist $\mu^*(\emptyset) = 0$.

f) Wenn $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ ein offener Quader ist, dann ist $\mu^*(Q) = I(Q)$.

Beweis. a) ist klar aus der Definition von μ^*, da der Inhalt jedes offenen Quaders positiv ist.

b) ist klar aus der Definition von μ^*, da jede abzählbare Überdeckung von B durch Quader auch eine Überdeckung von A ist.

c) folgt sofort aus der offensichtlichen Tatsache, dass die Länge eines Intervalls translationsinvariant ist, und somit der Inhalt eines Quaders auch. Die Quaderüberdeckungen von B sind c-Translate von Quaderüberdeckungen von A und haben somit den gleichen Gesamtinhalt.

d): Um (0.14) zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) < \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon.$$

Nach Definition von μ^* gibt es für jedes $i \in \mathbf{N}$ eine abzählbare offene Quaderüberdeckung $\mathcal{Q}_i$ von A_i mit $\mu^*(A_i) \le I(\mathcal{Q}_i) < \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^{i+1}$.

Die Vereinigung $\mathcal{Q}$ der Überdeckungen $\mathcal{Q}_i$ ist eine abzählbare offene Quaderüberdeckung von $A := \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ und aus Bemerkung 0.15 Formel (0.13) erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu^*(A) \le I(\mathcal{Q}) &= \sum_{i=0}^{\infty} I(\mathcal{Q}_i)\\ &< \sum_{i=0}^{\infty}\big(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\big) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon,\end{aligned}$$

was wir beweisen wollten.

e): Wir beweisen die Behauptung, indem wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare offene Quaderüberdeckung $\mathcal{Q}$ von A finden mit $I(\mathcal{Q}) \le \varepsilon$.

Wenn $A = \{\, a_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ abzählbar unendlich ist, so sei $\alpha_i = \sqrt[n]{\varepsilon/2^{i+1}}$ für jedes $i \in \mathbf{N}$ und sei Q_i der offene Quader zentriert auf a_i mit Kantenlänge α_i in jeder der n Koordinatenrichtungen. Die Q_i bilden eine abzählbare offene Quaderüberdeckung $\mathcal{Q}$ von A, und

$$I(\mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^{\infty} I(\mathcal{Q}_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon, \tag{0.15}$$

wie gewünscht.

Wenn A endlich ist, so verfahren wir wie oben nur für die endlich vielen vorhandenen Punkten von A, und wir erhalten eine *endliche* offene Quaderüberdeckung $\mathcal{Q}$ von A mit der Ungleichung $I(\mathcal{Q}) < \varepsilon$, da wir in (0.15) die geometrische Reihe nicht ganz summieren müssen.

In jedem Fall folgt aber $\mu^*(A) = 0$.

f): Obwohl die Aussage einleuchtend ist, ist der Beweis nicht so einfach wie es erscheinen mag.

Man muss tatsächlich zeigen, dass die Überdeckung eines Quaders durch sich selber als einzige Überdeckungsmenge die effizienteste ist, und dass eine Überdeckung durch mehrere kleinere Quader nicht zu einem kleineren Gesamtinhalt führen kann. Das ist natürlich leicht zu glauben, aber erstaunlich schwer genau zu begründen, denn ein sauberer Beweis erfordert zunächst unangenehme und „fummelige" Argumente, um abzählbare Überdeckungen durch endliche zu ersetzen, und für die anschließende Abschätzung des Gesamtinhalts weitere langwierige Betrachtungen mit Durchschnitten der Überdeckungsquader, die sich auch bei endlichen Überdeckungen immer noch recht kompliziert überlappen können.

Da der Beweis sehr technisch und von der Methodik her nicht besonders interessant ist, verzichten wir darauf, ihn hier anzugeben, aber wir werden dieses Problem in der Übungsstunde besprechen. ■

Beispiel 0.17 Leider kann man, auch wenn die A_i disjunkt sind, in (0.14) das Ungleichheitszeichen $\leq$ nicht generell durch ein Gleichheitszeichen ersetzen.

Dafür gibt es ein einfaches Beispiel. Auf dem Intervall $(0, 1)$ definiere man eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch die Vorschrift: $x \sim y$ genau dann, wenn $y - x \in \mathbf{Q}$. Man prüft leicht nach, dass dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist. Aus jeder $\sim$-Äquivalenzklasse wähle man genau *eine* reelle Zahl und man bilde die Menge $A \subseteq (0, 1)$ der gewählten Zahlen (dies erfordert eine Anwendung des Auswahlaxioms der Mengenlehre).

Sei C die abzählbare Menge $\mathbf{Q} \cap (-1, 1)$ und für jedes $r \in C$ sei

$$A_r := r + A = \{\, r + x \mid x \in A \,\}\,.$$

Aus der Tatsache, dass keine zwei Elemente von A eine rationale Differenz haben folgt, dass die A_r disjunkt sind. Sei

$$B := \bigcup_{r \in C} A_r = \bigcup_{r \in C} (r + A) \subseteq (-1, 2)$$

Weil A jede $\sim$-Äquivalenzklasse schneidet, besitzt jedes Element von $(0, 1)$ eine rationale Differenz zu (genau) einem Element von A, und diese rationale

Differenz, als Differenz von zwei Zahlen in $(0,1)$, liegt im Bereich $(-1,1)$, also in C. Es folgt, dass

$$(0,1) \subseteq B \subseteq (-1,2). \tag{0.16}$$

Weil μ^* translationsinvariant ist, hat $\mu^*(A_r)$ für alle $r \in C$ den gleichen Wert m.

Angenommen, μ^* ist σ-additiv. Weil die A_r disjunkt sind, wäre dann $\mu^*(B)$ die Summe von abzählbar vielen Summanden m, also 0, wenn $m = 0$, oder ∞, wenn $m > 0$.

Aber weder das eine noch das andere ist möglich, denn aus (0.16) und Lemma 0.16 f) und b) folgt $1 = \mu^*(0,1) \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(-1,2) = 3$.

Also kann μ^* für die exotischen Mengen A_r nicht σ-additiv sein.

Dieses Beispiel ist leicht auf $\mathbf{R}^n$ übertragbar und es zeigt sogar, dass es neben μ^* auch keine anders definierte translationsinvariante Maßfunktion geben kann, die für alle Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ erklärt ist und die für Quader Q den natürlichen Wert $I(Q)$ annimmt.

Um aus dem äußeren Maß eine σ-additive Maßfunktion zu machen, müssen wir also einige Mengen für nicht messbar erklären. Folgende Bedingung, zugeschnitten auf die Additivität, sondert aber eine genügend große Klasse von messbaren Mengen heraus:

Definition 0.18 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt ***Lebesgue-messbar***, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ gilt

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M). \tag{0.17}$$

Hilfssatz 0.19 *Seien M und N Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ mit $M \cap N = \emptyset$, und M sei Lebesgue-messbar. Dann ist*

$$\mu^*\big(P \cap (M \cup N)\big) = \mu^*(P \cap M) + \mu^*(P \cap N) \tag{0.18}$$

für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbf{R}^n$.

Beweis. Dies folgt sofort aus (0.17) mit $A := P \cap (M \cup N)$, da $A \cap M = P \cap M$ und $A \setminus M = P \cap N$ (weil M und N disjunkt sind). ∎

Korollar 0.20 *Sei $\{ M_i \mid i \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare Familie von disjunkten Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ und sei P eine beliebige Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Dann ist*

$$\mu^*\left(P \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(P \cap M_i). \tag{0.19}$$

Insbesondere ist μ^* σ-additiv auf Lebesgue-messbaren Mengen (dazu nehme $P = X$).

Beweis. Für endliche disjunkte Vereinigungen von Lebesgue-messbaren Mengen (also wenn wir in (0.19) die Vereinigung links und die Summe rechts nur bis $i = k \in \mathbf{N}$ und nicht bis ∞ laufen lassen) folgt die Behauptung durch eine einfache Induktion aus Hilfssatz 0.19.

Weil μ^* monoton ist haben wir für jedes $k \in \mathbf{N}$ also

$$\mu^*\Big(P \cap \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\Big)\Big) \geq \mu^*\Big(P \cap \Big(\bigcup_{i=0}^{k} M_i\Big)\Big) = \sum_{i=0}^{k} \mu^*(P \cap M_i),$$

woraus folgt für $k \to \infty$, dass

$$\mu^*\Big(P \cap \Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\Big)\Big) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(P \cap M_i).$$

Die Relation $\leq$ ist aber die Aussage von Lemma 0.16 d). Also gilt die Gleichheit. ■

Lemma 0.21 *Die Familie $\mathcal{M}$ aller Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ ist eine σ-Algebra und die Einschränkung*

$$\mu := \mu^*|\mathcal{M}$$

*des äußeren Maßes auf diese σ-Algebra ist ein nichttriviales Maß, genannt das **Lebesgue Maß** auf $\mathbf{R}^n$.*

Beweis. Für jede Menge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ist $A \cap \mathbf{R}^n = A$ und $A \setminus \mathbf{R}^n = \emptyset$. Da $\mu^*(\emptyset) = 0$, erfüllt $M = \mathbf{R}^n$ offensichtlich (0.17) für jedes A und gehört somit zu $\mathcal{M}$.

Wenn M und N Lebesgue-messbare Mengen sind, dann ist die Differenz $M \setminus N$ Lebesgue-messbar. Dazu sei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Wir bemerken zunächst, dass nach den Regeln der Mengenlehre

$$\begin{aligned}
&\big(A \setminus (M \setminus N)\big) \cap N = A \cap N, \\
&\big(A \setminus (M \setminus N)\big) \setminus N = A \setminus (M \cup N) = (A \setminus M) \setminus N = (A \setminus N) \setminus M \qquad \text{und} \\
&\qquad A \cap (M \setminus N) = (A \setminus N) \cap M.
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung dieser Identitäten und der Tatsache, dass die Mengen M und N Lebesgue-messbar sind können wir nun leicht nachprüfen, dass

$$\begin{aligned}
&\mu^*\big(A \cap (M \setminus N)\big) + \mu^*\big(A \setminus (M \setminus N)\big) \\
&\qquad = \mu^*\big((A \setminus N) \cap M\big) + \mu^*\big(A \setminus (M \setminus N)\big) \\
&\qquad = \mu^*\big((A \setminus N) \cap M\big) \\
&\qquad\qquad + \mu^*\Big(\big(A \setminus (M \setminus N)\big) \setminus N\Big) + \mu^*\Big(\big(A \setminus (M \setminus N)\big) \cap N\Big) \\
&\qquad = \mu^*\big((A \setminus N) \cap M\big) + \mu^*\big((A \setminus N) \setminus M\big) + \mu^*(A \cap N) \\
&\qquad = \mu^*(A \setminus N) + \mu^*(A \cap N) \\
&\qquad = \mu^*(A),
\end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

Nun folgt sofort, dass $\emptyset = \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^n$ Lebesgue-messbar ist und dass für je zwei Lebesgue-messbare Mengen M und N auch

$$M \cup N = \mathbf{R}^n \setminus \big((\mathbf{R}^n \setminus M) \setminus N\big)$$

Lebesgue-messbar ist. Hieraus folgt noch, dass $\mathcal{M}$ unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist.

Nun sei $\{\, M_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ eine abzählbare Familie von Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbf{R}^n$; wir zeigen, dass $M := \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ Lebesgue-messbar ist.

Dabei können wir annehmen, dass die M_i disjunkt sind; wenn nicht, ersetzen wir jedes M_i durch

$$M_i' := M_i \setminus \bigcup_{k<i} M_k,$$

und diese Mengen sind immer noch Lebesgue-messbar, sind disjunkt, und haben die gleiche Vereinigung wie die M_i.

Sei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbf{R}^n$.

Wenn $\mu^*(A \cap M) = \infty$, gilt (0.17) automatisch, da wegen der Monotonizität auch $\mu^*(A) = \infty$.

Wenn $\mu^*(A \cap M)$ endlich ist, so gilt Gleichung (0.19) und für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir ein $k \in \mathbf{N}$, so dass

$$\mu^*(A \cap M) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A \cap M_i) \le \sum_{i=0}^{k} \mu^*(A \cap M_i) + \varepsilon = \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{i=0}^{k} M_i\Big) + \varepsilon.$$

Da aber $\bigcup_{i=0}^k M_i$ Lebesgue-messbar ist, gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{i=0}^k M_i\Big) + \mu^*\Big(A \setminus \bigcup_{i=0}^k M_i\Big) \\ &\geq \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{i=0}^k M_i\Big) + \mu^*(A \setminus M) \\ &\geq \mu^*(A \cap M) - \varepsilon + \mu^*(A \setminus M)\end{aligned}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Also ist

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \setminus M).$$

Die Relation $\leq$ erhalten wir aus Lemma 0.16 d). D.h., die Gleichheit gilt und M ist Lebesgue-messbar.

Wir haben also gezeigt, dass die Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ bilden.

Korollar 0.20 (mit $P = \mathbf{R}^n$) zeigt, dass μ^* auf $\mathcal{M}$ σ-additiv ist; da μ^* ohnehin positiv ist, ist es ein Maß auf $\mathcal{M}$. Diese Maßfunktion ist nicht trivial, da nach Lemma 0.16 f) jeder offene Quader nichtverschwindendes endliches Maß hat. ■

Wir wollen gleich zeigen, dass die Borelmengen Lebesgue-messbar sind, so dass wir unser Ziel erreicht haben, ein nichttriviales Maß auf den Borelmengen zu definieren.

Vorher betrachten wir aber einen Begriff, der in der ganzen Maßtheorie gerade wegen seiner Bedeutung, verschwindend klein zu sein, eine sehr *große* Rolle spielt.

Definition 0.22 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum. Eine ***Nullmenge*** (oder genauer, eine ***μ-Nullmenge***) ist eine Menge $N \in \mathcal{R}$, für die gilt $\mu(N) = 0$.

Lemma 0.23 *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum.*

a) Seien $M \subseteq N \in \mathcal{R}$. Wenn N eine Nullmenge ist, dann ist auch M eine Nullmenge.

b) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen aus $\mathcal{R}$ ist wieder eine Nullmenge.

c) Sei N eine μ-Nullmenge und sei A eine beliebige Menge aus $\mathcal{R}$. Dann ist

$$\mu(A \setminus N) = \mu(A) = \mu(A \cup N).$$

Beweis. a) gilt, weil μ positiv und nach Lemma 0.8 a) monoton ist.

b) gilt, weil μ σ-additiv ist.

c): Nach Teil a) sind $A \cap N$ und $N \setminus A$ Nullmengen, und wir haben

$$\mu(A) = \mu\big((A \setminus N) \overset{\mathrm{D}}{\cup} (A \cap N)\big) = \mu(A \setminus N) + \mu(A \cap N) = \mu(A \setminus N)$$

und

$$\mu(A \cup N) = \mu\big(A \overset{\mathrm{D}}{\cup} (N \setminus A)\big) = \mu(A) + \mu(N \setminus A) = \mu(A).$$

■

Teil c) des soeben bewiesenen Lemmas ist eine typische Eigenschaft von Nullmengen, die sich in ähnlicher Form an vielen anderen Stellen in der Maß- und Integrationstheorie wiederfindet — alle numerischen Funktionen in der Maßtheorie (darunter auch Integrale von Funktionen) sind unempfindlich gegen Änderungen auf Nullmengen und behalten bei solchen „kleinen“ Störungen ihren Wert bei.

Nullmengen sind also in diesem Sinne „vernachlässigbar“. Gerade das macht diesen Begriff sehr wichtig.

Hier noch eine Instanz dieses Prinzips.

Lemma 0.24 *a) Jede Teilmenge $N \subseteq \mathbf{R}^n$, für die gilt $\mu^*(N) = 0$, ist Lebesgue-messbar und ist somit eine Nullmenge des Lebesgue-Maßes auf der σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.*

b) Seien A und B Teilmengen vom $\mathbf{R}^n$, so dass für die symmetrische Differenz $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ gilt

$$\mu^*(A \triangle B) = 0.$$

Dann ist A genau dann Lebesgue-messbar, wenn B Lebesgue-messbar ist.

(In anderen Worten, eine Lebesgue-messbare Menge bleibt messbar, wenn man sie um eine Nullmenge des äußeren Maßes verändert.)

Beweis. a): Sei N eine Menge mit $\mu^*(N) = 0$ und sei $A \subseteq \mathbf{R}^n$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Weil μ^* monoton und subadditiv ist haben wir

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \setminus N) \leq \mu^*(N) + \mu^*(A) = 0 + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Also gilt überall die Gleichheit und N ist Lebesgue-messbar.

b): Sei A Lebesgue-messbar. Aus der Voraussetzung folgt $\mu^*(A \setminus B) = \mu^*(B \setminus A) = 0$; also sind diese Mengen Lebesgue-messbar und damit auch

$$\big(A \setminus (A \setminus B)\big) \cup (B \setminus A) = (B \cap A) \cup (B \setminus A) = B.$$

Die andere Richtung folgt entsprechend. ■

Lemma 0.25 *Sei $n \geq 1 \in \mathbf{N}$. Jede Borelmenge in $\mathbf{R}^n$ ist Lebesgue-messbar. Also ist das Lebesgue Maß auch ein nichttriviales Maß auf der σ-Algebra der Borelmengen von $\mathbf{R}^n$.*

Beweis. Wir beginnen den Beweis, indem wir einige spezielle Teilmengen vom $\mathbf{R}^n$ betrachten.

Sei $1 \leq k \leq n$ und sei $t \in \mathbf{R}$. Wir setzen

$$H_t^k := \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_k > t \,\}\,.$$

Die Mengen dieser Form, für verschiedene k und t, nennen wir ***obere offene Halbräume*** in $\mathbf{R}^n$.

Sei Q ein offener Quader in $\mathbf{R}^n$ mit Kanten $A_i = (a_i, b_i)$ von Länge $L_i = b_i - a_i$. Sei

$$L := \prod_{i \neq k} L_i,$$

so dass $I(Q) = (b_k - a_k)L$.

Wir setzen

$$Q^+ := Q \cap H_t^k \qquad \text{und} \qquad Q^- := Q \setminus H_t^k.$$

Wenn $t \leq a_k$, dann ist $Q^+ = Q$ und $Q^- = \emptyset$. Wenn $t \geq b_k$, dann ist $Q^+ = \emptyset$ und $Q^- = Q$. Wenn $t \in (a_k, b_k)$, dann ist

$$Q^+ = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1} \times (t, b_k) \times A_{k+1} \times \cdots \times A_n$$

ein offener Quader mit $I(Q^+) = (b_k - t)L$. Leider ist

$$Q^- = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1} \times (a_k, t] \times A_{k+1} \times \cdots \times A_n$$

in diesem Fall kein offener Quader, aber für jedes $\delta > 0$ finden wir um Q^- einen offenen Quader

$$Q^\delta := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1} \times \big(a_k, t + \frac{\delta}{L}\big) \times A_{k+1} \times \cdots \times A_n$$

mit $I(Q^\delta) = (t - a_k)L + \delta$.

Man beachte, dass $Q \subseteq Q^+ \cup Q^\delta$ und dass

$$I(Q^+) + I(Q^\delta) = I(Q) + \delta. \tag{0.20}$$

Nun sei B eine beliebige Teilmenge von $\mathbf{R}^n$ und sei $\mathcal{Q} = \{\, Q_j \mid j \in \mathbf{N} \,\}$ eine abzählbare offene Quaderüberdeckung von B mit endlichem Gesamtinhalt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und für jedes $j \in \mathbf{N}$ sei $\delta_j := \varepsilon/2^{j+1}$.

Da die Q_j eine offene Quaderüberdeckung von B bilden, bilden die nichtleeren $Q_j^+ = Q_j \cap H_t^k$ eine abzählbare offene Quaderüberdeckung $\mathcal{Q}^+$ von $B \cap H_t^k$, und die nichtleeren $Q_j^- = Q_j \setminus H_t^k$ (für $t \notin A_k$) oder $Q_j^{\delta_j} \supseteq Q_j^-$ (für $t \in A_k$) bilden eine abzählbare offene Quaderüberdeckung $\mathcal{Q}^-$ von $B \setminus H_t^k$, wobei aus den Definitionen dieser Quader und aus (0.20) leicht folgt, dass für die Gesamtinhalte gilt

$$I(\mathcal{Q}) \leq I(\mathcal{Q}^+) + I(\mathcal{Q}^-) \leq I(\mathcal{Q}) + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_j = I(\mathcal{Q}) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = I(\mathcal{Q}) + \varepsilon.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap H_t^k) + \mu^*(B \setminus H_t^k) \leq \mu^*(B) + \varepsilon,$$

und mittelbar, weil dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap H_t^k) + \mu^*(B \setminus H_t^k),$$

in anderen Worten, dass H_t^k Lebesgue-messbar ist.

Jeder ***untere offene Halbraum***

$$G_t^k := \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_k < t \,\}$$

ist die abzählbare Vereinigung der Lebesgue-messbaren Mengen

$$\mathbf{R}^n \setminus H_r^k = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_k \leq r \,\}$$

für $r \in \mathbf{Q}$, $r < t$, und ist somit selber Lebesgue-messbar.

Jeder offene Quader lässt sich schreiben als ein endlicher Durchschnitt von Mengen H_t^k und G_t^k und ist somit Lebesgue-messbar.

Und jede offene Teilmenge U von $\mathbf{R}^n$ ist bekanntlich eine abzählbare Vereinigung von offenen Quadern (z.B. der in U enthaltenen offenen Quadern, deren Kanten rationale Endpunkte haben). Somit ist jede offene Menge Lebesgue-messbar.

Da die σ-Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen die kleinste σ-Algebra ist, die die offenen Mengen enthält, ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, d.h., jede Borelmenge ist Lebesgue-messbar. ■

Die Umkehrung gilt übrigens nicht, denn es gibt Nullmengen, die nicht Borelmengen sind. Allerdings ist jede Lebesgue-messbare Menge die Vereinigung einer Borelmenge und einer Nullmenge, d.h. sie unterscheidet sich von einer Borelmenge höchstens durch eine Nullmenge. Auf diese Tatsache wollen wir hier nicht näher eingehen.

Jetzt wollen wir uns unserem eigentlichen Ziel in diesem Kapitel zuwenden: die Definition eines vernünftigen und leistungsfähigen Integralbegriffs für reellwertige Funktionen auf $\mathbf{R}^n$ oder allgemeiner auf einem Maßraum.

Wir haben angedeutet, dass das klassische Riemann Integral einige signifikante Nachteile hat und (insbesondere bezüglich Konvergenz) nicht alle Eigenschaften aufweist, die wir brauchen.

Die Lebesguesche Idee, Funktionen über eine Aufteilung ihres Wertebereichs (anstelle ihres Definitionsbereichs) zu approximieren, verlangt eine Möglichkeit, beliebige Teilmengen des Definitionsbereichs einer Funktion (wo die Funktion nahezu konstant ist) auszumessen. Zu diesem Zweck haben wir Maßräume eingeführt und ein intuitiv korrektes und nichttriviales Maß, nämlich das Lebesguesche Maß, für Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ konstruiert.

Mit dieser Vorbereitung haben wir das größte Hindernis zur Realisierung des Lebesgueschen Integrals überwunden und das Integral wird sich nun schnell und einfach einführen lassen. Die Konstruktion können wir für Funktionen auf beliebigen Maßräumen durchführen — für das eigentliche Lebesgue Integral müssen wir dann nur spezialisieren auf die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbf{R}^n$.

Es gibt nur einen winzigen Wermutstropfen — wir waren nicht in der Lage, *allen* Teilmengen vom $\mathbf{R}^n$ ein Maß zuzuordnen und es bleibt uns nichts anderes übrig, als diesen Tropfen zu schlucken, denn wir wissen inzwischen, dass der genannte Idealfall *prinzipiell* nicht möglich ist. Also werden wir auch nicht in der Lage sein, *jede* Funktion auf $\mathbf{R}^n$ zu integrieren, aber die Klasse der Funktionen, für die das Integral erklärt ist, obwohl geringfügig eingeschränkt, beinhaltet alle „nützlichen" oder natürlich auftretenden Funktionen und ist in diesem Sinne sicher groß genug.

Hier ist die Einschränkung, die wir hinnehmen müssen:

Definition 0.26 Sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum.

Eine Funktion

$$f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\} \cup \{\,-\infty\,\}$$

heißt ***meßbar*** (bezüglich $\mathcal{R}$), wenn für jede Borelmenge $B \subseteq \mathbf{R}$ gilt

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{R} \tag{0.21}$$

und wenn

$$f^{-1}\big(\{\,\infty\,\}\big) \in \mathcal{R} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\big(\{\,-\infty\,\}\big) \in \mathcal{R}. \tag{0.22}$$

Wenn $X = \mathbf{R}^n$ und wenn $\mathcal{R}$ die σ-Algebra der Borelmengen ist, sagen wir auch, dass f ***Borel-messbar*** ist, und wenn $\mathcal{R}$ die σ-Algebra $\mathcal{M}$ der Lebesgue-messbaren Mengen ist, dann nennen wir f eine ***Lebesgue-messbare*** Funktion.

Lemma 0.27 *Sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum und f eine Funktion*

$$X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

a) Für jede Zahl $c \in \mathbf{R}$ ist

$$f^{-1}\big((c, \infty]\big) = \{x \in X \mid f(x) > c\} \in \mathcal{R};$$

b) Für jede Zahl $c \in \mathbf{R}$ ist

$$f^{-1}\big([-\infty, c)\big) = \{x \in X \mid f(x) < c\} \in \mathcal{R};$$

c) Für jede Zahl $c \in \mathbf{R}$ ist

$$f^{-1}\big([c, \infty]\big) = \{x \in X \mid f(x) \geq c\} \in \mathcal{R};$$

d) Für jede Zahl $c \in \mathbf{R}$ ist

$$f^{-1}\big([-\infty, c]\big) = \{x \in X \mid f(x) \leq c\} \in \mathcal{R};$$

e) f ist messbar.

Beweis. Sei $\mathcal{S}$ die Familie der Teilmengen A von $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, für die gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{R}$.

Weil das Urbildnehmen unter einer Funktion mit allen Mengenoperationen $\cup$, $\cap$ und $\setminus$ vertauschbar ist und weil $f^{-1}\big(\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}\big) = X$, ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Hieraus folgt a) $\iff$ d) (weil die Strahlen in a) und in d) Komplemente zueinander sind). Aus dem gleichen Grund gilt b) $\iff$ c).

Nun sehen wir, dass a) $\implies$ b), weil a) $\implies$ d) und weil jeder Strahl $[-\infty, c)$ eine abzählbare Vereinigung der Strahlen $[-\infty, r]$ für $r < c$, $r \in \mathbf{Q}$ ist.

Und b) $\implies$ a), weil b) $\implies$ c) und weil jeder Strahl $(c, \infty]$ eine abzählbare Vereinigung der Strahlen $(r, \infty]$ für $r > c$, $r \in \mathbf{Q}$ ist.

Also, wenn irgendeine der Bedingungen a)– d) gilt, gelten alle.

In diesem Fall gilt aber auch e), denn jedes offene Intervall $(a, b) \subseteq \mathbf{R}$ ist Durchschnitt von zwei offenen Strahlen

$$(a, \infty] \cap [-\infty, b).$$

Deshalb gehören die offenen Intervalle und somit auch alle Borelmengen zu $\mathcal{S}$. Und die Mengen $\{\infty\}$ und $\{-\infty\}$ gehören auch zu $\mathcal{S}$ als abzählbarer Durchschnitt der Mengen $(k, \infty]$ bzw. $[-\infty, k)$ für $k \in \mathbf{N}$.

Umgekehrt, wenn e) gilt, gelten a)– d) weil die Strahlen in diesen Bedingungen jeweis Vereinigung einer Borelmenge mit einer der Mengen $\{\infty\}$ oder $\{-\infty\}$ sind. ■

Für das *Nachprüfen* der Eigenschaft, dass eine Funktion messbar ist, ist es natürlich am bequemsten, eine der Bedingungen a)– d) zu verwenden.

Korollar 0.28 *Jede stetige Funktion*

$$f \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

ist Lebesgue-messbar.

Beweis. Für jedes $c \in \mathbf{R}$ ist $f^{-1}\big((c, \infty]\big) = f^{-1}\big((c, \infty)\big)$ offen, also eine Borelmenge, also Lebesgue-messbar. Da f somit Bedingung 0.27 a) für die σ-Algebra $\mathcal{R} = \mathcal{M}$ erfüllt, ist f Lebesgue-messbar. ■

Die Klasse der messbaren Funktionen ist unter einer ganzen Reihe algebraischer und topologischer Operationen abgeschlossen, die wir gleich auflisten werden. Zur Vorbereitung erinnern wir kurz an eine nützliche Zerlegung reellwertiger Funktionen als Differenz zweier positiver Funktionen und an die bekannte einfache Methode, eine Menge als eine Funktion aufzufassen.

Definition 0.29 Sei X eine Menge und sei

$$f \colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

eine Funktion mit Werten in den erweiterten reellen Zahlen. Wir definieren den ***positiven Anteil*** f_+ und den ***negativen Anteil*** f_- von f durch

$$\begin{aligned} f_+(x) &:= \max\big(f(x), 0\big) \\ f_-(x) &:= \max\big(-f(x), 0\big) \end{aligned} \tag{0.23}$$

für jedes $x \in X$.

Beide Funktionen $f_\pm$ sind natürlich ≥ 0 und es gilt

$$f = f_+ - f_- \qquad \text{und} \qquad |f| = f_+ + f_-. \tag{0.24}$$

Definition 0.30 Sei X eine Menge und A eine Teilmenge von X. Die ***charakteristische Funktion*** von A ist die Funktion $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0,1\} \subseteq \mathbf{R}$ mit

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A; \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases} \tag{0.25}$$

Man nennt sie auch die ***Indikatorfunktion*** von A, weil sie mit dem Wert 1 anzeigt, welche Elemente von X zu A gehören.

Bemerkung 0.31 Folgende Rechenregeln für charakteristische Funktionen sind offensichtlich:

a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

b) Wenn A und B disjunkt sind, dann ist $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$;

c) $\chi_{X\setminus A} = 1 - \chi_A$.

Lemma 0.32 *Sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum. Wir betrachten im Folgenden Funktionen $X \longrightarrow \mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ (ohne dass wir diese Angabe jedesmal explizit wiederholen).*

Alle arithmetischen oder Grenzwertoperationen auf diesen Funktionen sind punktweise (also auf den Werten an jeder einzelnen Stelle ausgeführt) zu verstehen.

a) Jede konstante Funktion ist messbar.

b) Sei $A \subseteq X$. Die charakteristische Funktion χ_A ist messbar genau dann, wenn $A \in \mathcal{R}$.

c) Sei f eine messbare Funktion. Dann ist auch $-f$ messbar.

d) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen. Dann sind die Funktionen $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar.

e) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine punktweise konvergente (evtl. an manchen Stellen gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergierende) Folge von messbaren Funktionen. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar.

f) Seien f und g messbare Funktionen. Dann sind auch $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ messbar.

g) Sei f eine messbare Funktion. Dann sind auch f_+, f_- und $|f|$ messbar.

h) Sind f und g messbare Funktionen, die nie an einer Stelle die Werte ∞ und $-\infty$ annehmen, so ist auch die Summe $f+g$ messbar.

i) Sind f und g messbare Funktionen, so ist auch das Produkt fg messbar.

Beweis. a): Wenn f konstant ist, dann ist $f^{-1}(B)$ sogar für *jede* Teilmenge B von $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ entweder X oder $\emptyset$ und damit in $\mathcal{R}$. Also ist f messbar.

b): Die Funktion χ_A ist messbar genau dann, wenn für jedes $c \in \mathbf{R}$ die Menge $\chi_A^{-1}\big((c,\infty]\big)$ messbar ist.

Diese Menge ist X wenn $c < 0$, sie ist A wenn $0 \le c < 1$, und sie ist leer wenn $c \ge 1$. Da X und $\emptyset$ *immer* messbar sind, ist χ_A messbar genau dann, wenn A messbar ist.

c): Für jedes $c \in \mathbf{R}$ ist $(-f)^{-1}\big((c,\infty]\big) = f^{-1}\big([-\infty,-c)\big) \in \mathcal{R}$.

d): Sei $c \in \mathbf{R}$.

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n(x) > c \iff \exists m \in \mathbf{N} : f_m(x) > c \iff x \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} f_n^{-1}\big((c,\infty]\big).$$

Diese Menge ist nach Voraussetzung eine abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen und somit messbar. Also ist $\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n$ messbar.

Mit Teil c) folgt sofort, dass auch

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbf{N}}(-f_n)$$

messbar ist.

Da

$$\limsup_{n\in\mathbf{N}} f_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{m\ge n} f_m \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\in\mathbf{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{m\ge n} f_m,$$

sind auch $\limsup_{n\in\mathbf{N}} f_n$ und $\liminf_{n\in\mathbf{N}} f_n$ messbar.

e) folgt aus d), da wenn die Folge konvergiert $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$.

f): $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ sind Supremum und Infimum der Folge mit $f_0 := f$, $f_n := g$ für alle $n > 0$.

g): f_+ ist das Maximum der messbaren Funktionen f und 0, f_- ist das Maximum der messbaren Funktionen $-f$ und 0, und $|f| = \max(f,-f)$.

h): Sei $c \in \mathbf{R}$. Für $x \in X$ ist

$$\begin{aligned}(f+g)(x) > c &\iff f(x) > c - g(x)\\ &\iff \exists r \in \mathbf{Q} : f(x) > r > c - g(x)\\ &\iff \exists r \in \mathbf{Q} : \big(f(x) > r \land g(x) > c - r\big).\end{aligned}$$

Also ist

$$(f+g)^{-1}\big((c,\infty]\big) = \bigcup_{r\in\mathbf{Q}} \Big(f^{-1}\big((r,\infty]\big) \cap g^{-1}\big((c-r,\infty]\big)\Big)$$

und dies ist eine abzählbare Vereinigung von endlichen Durchschnitten von messbaren Mengen, also selber messbar für jedes c. Deshalb ist $f+g$ eine messbare Funktion.

i): Zunächst nehmen wir an, $f \geq 0$ und $g \geq 0$. Für $c < 0$ ist $(fg)(x) > c$ für jedes $x \in X$. Für $c \geq 0$ ist

$$(fg)(x) > c \iff \exists r > 0 \in \mathbf{Q} : \big(f(x) > r \wedge g(x) > \frac{c}{r}\big).$$

Also ist

$$(fg)^{-1}\big((c,\infty]\big) = \bigcup_{r>0\in\mathbf{Q}} \Big(f^{-1}\big((r,\infty]\big) \cap g^{-1}\big((c/r,\infty]\big)\Big)$$

und dies ist nach Voraussetzung eine abzählbare Vereinigung von endlichen Durchschnitten von messbaren Mengen, also selber messbar. Also ist fg eine messbare Funktion, wenn f und g nichtnegativ und messbar sind.

Für beliebige messbare Funktionen f und g sind also die vier Produkte $f_\pm g_\pm$ messbar, und fg lässt sich zerlegen als $fg = f_+g_+ - f_-g_+ - f_+g_- + f_-g_-$ und ist somit auch messbar. ■

Definition 0.33 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei E eine Eigenschaft von Punkten von X. Wir sagen, E gilt ***fast überall*** (und wir schreiben als Abkürzung „E f.ü.“), wenn $\{\, x \in X \mid \neg E(x) \,\}$ eine μ-Nullmenge ist.

Insbesondere, wenn Y eine Menge ist, so nennen wir zwei Funktionen f und $g\colon X \longrightarrow Y$ ***fast überall gleich*** oder ***äquivalent***, wenn ihre Werte sich nur auf einer Nullmenge von X unterscheiden.

Hierfür können wir wie oben

$$f = g \text{ f.ü.}$$

schreiben, aber da wir diese Situation häufig betrachten müssen, benutzen wir dafür auch die lesbarere Alternativnotation

$$f \sim g.$$

Bemerkung 0.34 Sei $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ und seien $f \sim g$ zwei Funktionen

$$\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\, \infty \,\} \cup \{\, -\infty \,\},$$

die sich nur auf einer Menge von äußerem Maß 0 unterscheiden.

Wenn f Lebesgue-messbar ist, dann ist auch g Lebesgue-messbar.

Denn für jedes $c \in \mathbf{R}$ ist

$$f^{-1}\big((c,\infty]\big) \bigtriangleup g^{-1}\big((c,\infty]\big) \subseteq \{\, x \in X \mid f(x) \neq g(x) \,\}\,,$$

und weil die rechte Seite eine μ^*-Nullmenge ist, ist es die symmetrische Differenz auf der linken Seite auch. Nach Lemma 0.24 b) ist also $f^{-1}\big((c,\infty]\big)$ genau dann Lebesgue-messbar, wenn $g^{-1}\big((c,\infty]\big)$ Lebesgue-messbar ist. Daraus folgt die Behauptung.

Wir wollen jetzt endlich das Integral einführen. Für einfache Funktionen, nämlich für solche, die nur endlich viele Werte annehmen, gibt es nur *eine* vernünftige Definition, und der allgemeine Fall lässt sich auf ganz unkomplizierte Weise daraus ableiten.

Allerdings gehen wir dabei nicht genau den Weg, den wir in der Einleitung dieses Kapitels angedeutet hatten, und der darin bestand, eine Funktion f durch stückweise konstante Funktionen zu approximieren und das Integral von f als *Limes* der Integrale dieser einfachen Funktionen zu definieren.

Wir erreichen das gleiche Ziel schneller und bequemer, und vor allem ganz ohne der bei Grenzwertprozessen sonst autretenden technischen Schwierigkeiten, wenn wir f nur von unten abschätzen und den Limesübergang so durch ein Supremum ersetzen. Explizite Fehlerabschätzungen sind dann nicht nötig.

Definition 0.35 Sei X eine Menge. Eine ***Treppenfunktion*** (manche sagen dazu auch ***einfache Funktion***) auf X ist eine Funktion $s\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt.

Sind $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ diese Werte, und ist $A_i := s^{-1}\big(\{\, c_i \,\}\big)$ für jedes $i \in \{\, 1, \ldots, k \,\}$, so ist offensichtlich

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}.$$

Als Alternativdefinition können wir also sagen, eine ***Treppenfunktion*** ist eine endliche $\mathbf{R}$-Linearkombination von charakteristischen Funktionen (denn jede endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen nimmt nur endlich viele Werte an).

Lemma 0.36 *Sei $(X,\mathcal{R})$ ein messbarer Raum und sei $s\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Treppenfunktion, die die Werte $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ annimmt.*

s ist genau dann messbar, wenn die Mengen $A_i := s^{-1}\big(\{\, c_i \,\}\big)$ für $1 \le i \le k$ messbar sind.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Die Mengen $\{ c_i \}$ sind abgeschlossen in $\mathbf{R}$, also Borelmengen. Wenn s messbar ist, sind ihre Urbilder messbare Mengen.

„$\Leftarrow$“: Wenn die Mengen A_i messbar sind, sind ihre charakteristischen Funktionen χ_{A_i} messbare Funktionen. Als Linearkombination von diesen Funktionen ist auch s messbar, nach Lemma 0.32 a), i) und h). ■

Definition 0.37 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $s\colon X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ eine *nichtnegative* messbare Treppenfunktion auf X. Sei E eine messbare Teilmenge von X. Wir definieren das ***Integral von s über E*** als

$$I_E(s) := \sum_{c \in s(X)} c\mu\Big(s^{-1}(\{ c \}) \cap E\Big). \tag{0.26}$$

Da s nur endlich viele Werte annimmt, ist dies eine endliche Summe.

Die Maße der Mengen, wo s einen bestimmten Wert annimmt, können unendlich sein; in diesem Fall benutzen wir für die Auswertung von (0.26) die Rechenkonventionen 0.6, insbesondere $0 \cdot \infty = 0$ und $c \cdot \infty = \infty$ für jedes $c > 0$.

Dieser einfache Integralbegriff für Treppenfunktionen hat schöne Eigenschaften:

Bemerkung 0.38 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $E \in \mathcal{R}$. Sei s eine nichtnegative messbare Treppenfunktion auf X.

a) Offensichtlich ist $I_E(s) \geq 0$, und genau dann ist $I_E(s) = 0$, wenn $\{ x \in E \mid s(x) > 0 \}$ eine Nullmenge ist.

b) Sei $A \in \mathcal{R}$. Für die charakteristische Funktion gilt offenbar $I_E(\chi_A) = \mu(A \cap E)$.

c) $I_E(s)$ ist eine σ-additive Funktion von $E \in \mathcal{R}$. D.h., wenn $\{ E_i \mid i \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare Familie von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{R}$ ist und wenn

$$E := \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i,$$

dann ist

$$I_E(s) = \sum_{i=0}^{\infty} I_{E_i}(s). \tag{0.27}$$

Das ist klar aus (0.26) und der σ-Additivität von μ.

d) Für eine endliche nichtnegative Linearkombination messbarer charakteristischer Funktionen χ_{A_i} gilt

$$I_E\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{A_i}\Big) = \sum_{i=1}^{k} c_i\mu(A_i \cap E). \tag{0.28}$$

Dies ist nicht so trivial, wie es aussieht, denn obwohl die Linearkombination von charakteristischen Funktionen eine Treppenfunktion ist, ist der Ausdruck auf der rechten Seite nicht unbedingt der gleiche Ausdruck wie in der Definition des Integrals dieser Treppenfunktion. Denn in (0.28) müssen die Koeffizienten c_i nicht alle verschieden sein, und die A_i dürfen sich überlappen; d.h., die Mengen A_i sind nicht unbedingt die Urbilder einzelner Werte der Treppenfunktion $t := \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{A_i}$.

Wir müssen (0.28) also wirklich beweisen. Sei Λ die Potenzmenge von $\{\,1,\dots,k\,\}$ und für jedes $\lambda \in \Lambda$, also für jede Menge von Indizes zwischen 1 und k, sei

$$A_\lambda := \bigcap_{i\in\lambda} A_i \cap \bigcap_{j\in\{\,1,\dots,k\,\}\setminus\lambda} (X \setminus A_j).$$

Entsprechend sei

$$c_\lambda := \sum_{i\in\lambda} c_i;$$

dies ist der Wert von t auf A_λ.

Die A_λ sind alle disjunkt, $A_\lambda \subseteq A_i$ wenn $i \in \lambda$, $A_\lambda \cap A_i = \emptyset$ wenn $i \notin \lambda$, und die A_λ überdecken X. Aus diesem Grund ist jedes A_i somit die disjunkte Vereinigung der A_λ mit $i \in \lambda$.

Alle Werte c von t sind Summen von einigen c_i und kommen somit unter den c_λ vor. Folglich ist $t^{-1}\big(\{\,c\,\}\big)$ die disjunkte Vereinigung der A_λ mit $c_\lambda = c$.

Die A_λ bilden also eine gemeinsame Verfeinerung der A_i und der Urbilder der verschiedenen Werte der Treppenfunktion t, und dies erlaubt nun folgenden Vergleich der zwei verschiedenen Ausdrücke für das Integral dieser Treppenfunktion:

$$\begin{aligned}
I_E(s) &= \sum_{c\in s(X)} c\mu\Big(s^{-1}\big(\{\,c\,\}\big)\cap E\Big) \\
&= \sum_{c\in s(X)} c \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ c_\lambda=c}} \mu(A_\lambda\cap E) \\
&= \sum_{c\in s(X)} \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ c_\lambda=c}} c_\lambda\mu(A_\lambda\cap E) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda\mu(A_\lambda\cap E) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in\lambda} c_i\Big)\mu(A_\lambda\cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ i\in\lambda}} c_i\mu(A_\lambda\cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ i\in\lambda}} \mu(A_\lambda\cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i\mu(A_i\cap E)
\end{aligned}$$

wie behauptet.

Gleichung (0.28) bietet sich an als Alternativdefinition des Integrals einer nichtnegativen Treppenfunktion, die ja eine Linearkombination von charakteristischen Funktionen ist, aber dieser Beweis zeigt, dass man doch etwas Mühe aufbringen muss, um zu zeigen, dass das eine Wohldefinition wäre.

e) Seien s und t nichtnegative messbare Treppenfunktionen auf X und seien a und $b \geq 0 \in \mathbf{R}$. Dann ist

$$I_E(as+bt) = aI_E(s) + bI_E(t). \tag{0.29}$$

In anderen Worten, I_E verhält sich linear bezüglich nichtnegativer Linearkombinationen von Treppenfunktionen. Insbesondere ist I_E additiv.

Dies folgt sofort aus Teil d), wenn man s und t als nichtnegative Linearkombination von messbaren charakteristischen Funktionen schreibt.

f) Seien $s \leq t$ nichtnegative messbare Treppenfunktionen auf X. Dann ist $t - s$ eine nichtnegative messbare Treppenfunktion und aus (0.29) folgt leicht

$$I_E(t - s) = I_E(t) - I_E(s). \tag{0.30}$$

Insbesondere, weil die linke Seite nichtnegativ ist, ist

$$I_E(s) \leq I_E(t), \tag{0.31}$$

d.h., I_E ist monoton auf der Menge der nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen.

Definition 0.39 (Lebesgue Integral) Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ eine messbare Funktion. Sei $E \in \mathcal{R}$.

Wenn $f \geq 0$ setzen wir

$$\int_E f\, d\mu := \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ messbare} \\ \text{Treppenfunktion}}} I_E(s). \tag{0.32}$$

Man beachte: die einzige nichtnegative Treppenfunktion ≤ 0 ist die Funktion 0 mit $I_E(0) = 0$, so dass $\int_E 0\, d\mu = 0$.

Für beliebige messbare Funktionen f setzen wir

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f_+\, d\mu - \int_E f_-\, d\mu. \tag{0.33}$$

Für positive Funktionen f ist dies der gleiche Wert wie in (0.32), denn $f_- = 0$ und somit $\int_E f_-\, d\mu = 0$, wie oben erklärt.

Wir nennen $\int_E f\, d\mu$ das ***Lebesgue Integral*** von f über E bezüglich des Maßes μ.

Es ist *nicht definiert*, wenn $\int_E f_+\, d\mu = \int_E f_-\, d\mu = \infty$, aber in allen anderen Fällen hat es einen wohlbestimmten Wert, eventuell ∞ oder $-\infty$.

Wir nennen f ***Lebesgue integrierbar*** oder ***summierbar*** auf E, wenn $\int_E f\, d\mu$ endlich ist, also wenn $\int_E f_+\, d\mu$ und $\int_E f_-\, d\mu$ beide endlich sind.

Die Menge aller Lebesgue integrierbarer Funktionen auf X bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}^1(X).$$

(Der Sinn des Exponenten 1 wird sich erst bei einer späteren Definition erschließen. Vorerst betrachte man ihn einfach als einen Teil der Notation.)

Bemerkung 0.40 Genauso wie nichtmessbare Mengen im $\mathbf{R}^n$ trotzdem ein wohldefiniertes äußeres Maß besitzen, könnten wir ohne weiteres Definition 0.39 auch für *nichtmessbare* Funktionen anwenden, denn nur für die in der Definition auftretenden Treppenfunktionen ist es wirklich wichtig, dass sie messbar sind, damit I_E erklärt ist; an keiner Stelle geht die Messbarkeit des Integrandes f ein.

Trotzdem verzichten wir auf diese Erweiterung des Integrals zu einer größeren Klasse von Funktionen, denn der Wert des Integrals einer nichtmessbaren Funktion hat genauso wenig Sinn und trägt genauso wenig richtige Information über die Funktion, wie es der Fall ist für das äußere Maß einer nicht Lebesgue-messbaren Menge.

Die Grundeigenschaften des Lebesgue Integrals sind aus der Definition und den Eigenschaften des Integrals einer Treppenfunktion nicht schwer herzuleiten:

Satz 0.41 *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum, sei $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ eine messbare Funktion und sei $E \in \mathcal{R}$.*

a) Wenn f eine nichtnegative Treppenfunktion ist, dann ist $\int_E f\,d\mu = I_E(f)$.

b) $\int_E f\,d\mu = \int_E \chi_E \cdot f\,d\mu = \int_X \chi_E \cdot f\,d\mu$.

Hieraus folgt insbesondere, dass zwei messbare Funktionen, die auf E übereinstimmen, das gleiche Integral über E haben.

c) Wenn $f \geq 0$ oder wenn f integrierbar ist (auf X), dann ist $\int_E f\,d\mu$ eine σ-additive Funktion von $E \in \mathcal{R}$.

In anderen Worten, wenn $\{E_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ eine abzählbare Familie von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{R}$ ist und wenn

$$E := \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i,$$

dann ist

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f\,d\mu. \tag{0.34}$$

Im integrierbaren Fall ist die linke Seite endlich und die rechte Seite konvergiert (sogar absolut).

Im Fall $f \geq 0$ kann die linke Seite ∞ sein und die rechte Seite gegen ∞ divergieren.

d) *Wenn E eine Nullmenge ist, dann ist* $\int_E f\,d\mu = 0$.

e) *Wenn* $f \equiv 0$ *auf* E*, dann ist* $\int_E f\,d\mu = 0$.

f) *Wenn* $f \geq 0$ *auf* E*, dann ist* $\int_E f\,d\mu \geq 0$ *und ist* $= 0$ *genau dann, wenn* $\{\, x \in E \mid f(x) > 0 \,\}$ *eine Nullmenge ist.*

g) *Für jedes* $a \in \mathbf{R}$ *ist* $\int_E af\,d\mu = a\int_E f\,d\mu$.

h) *Wenn* g *eine weitere messbare Funktion* $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\} \cup \{\,-\infty\,\}$ *ist und wenn* $f \leq g$ *auf* E*, dann ist* $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$.

i) *Wenn* f *integrierbar ist auf* E*, dann ist* f *auf jeder messbaren Teilmenge* A *von* E *integrierbar.*

j) f *ist genau dann auf* E *integrierbar, wenn* $|f|$ *integrierbar ist auf* E*, und in diesem Fall ist* $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu$.

k) *Sei* g *eine weitere messbare Funktion* $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\} \cup \{\,-\infty\,\}$.

Wenn f *integrierbar ist auf* E *und wenn* $|g| \leq |f|$ *auf* E*, dann ist auch* g *auf* E *integrierbar.*

l) *Wenn* g *eine weitere messbare Funktion* $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\} \cup \{\,-\infty\,\}$ *ist und* $f \sim g$*, dann ist* $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$.

Beweis. a): Wenn f eine nichtnegative messbare Treppenfunktion ist, dann folgt sofort aus der Monotonizität von I_E, Bemerkung 0.38 f), dass $I_E(f)$ gleich dem Supremum der $I_E(s)$ ist über alle nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen $s \leq f$, und dies ist $\int_E f\,d\mu$ weil $f \geq 0$.

b): Es reicht, die Behauptung für f_+ und f_- zu beweisen. Also können wir annehmen, dass $f \geq 0$.

Für die charakteristische Funktion χ_A einer messbaren Menge A folgt sofort aus Bemerkung 0.38 b), dass $I_E(\chi_A) = I_E(\chi_E \cdot \chi_A) = I_X(\chi_E \cdot \chi_A) = \mu(E \cap A)$.

Wegen Bemerkung 0.38 d) und der Linearität des Treppenfunktionintegrals, Bemerkung 0.38 e), folgt die entsprechende Beziehung

$$I_E(s) = I_E(\chi_E \cdot s) = I_X(\chi_E \cdot s) \tag{0.35}$$

für beliebige nichtnegative messbare Treppenfunktionen s.

Ist s eine solche Treppenfunktion mit $s \leq f$, so ist offenbar $\chi_E \cdot s \leq \chi_E \cdot f$.

Umgekehrt, wenn t eine nichtnegative messbare Treppenfunktion ist mit $t \leq \chi_E \cdot f$, so ist $t \equiv 0$ außerhalb von E und deshalb $t = \chi_E \cdot t$, und $t \leq f$, da $\chi_E \cdot f \leq f$.

Aus diesen Bemerkungen und aus (0.35) folgt, dass die Menge der $I_E(s)$ für nichtnegative messbare Treppenfunktionen $s \leq f$ gleich der Menge der $I_E(t)$ für nichtnegative messbare Treppenfunktionen $t \leq \chi_E \cdot f$ ist, und für diese letzteren gilt sogar $I_E(t) = I_X(t)$.

Daraus folgt sofort die Behauptung über die Lebesgue Integrale von f und $\chi_E \cdot f$.

Wenn g eine zweite messbare Funktion ist und $f \equiv g$ auf E, dann ist $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$ weil $\chi_E \cdot f = \chi_E \cdot g$.

c): Wir nehmen zuerst an, dass $f \geq 0$. Sei $\{\, E_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$ eine abzählbare Familie von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{R}$ und sei E ihre Vereinigung.

Für jede nichtnegative messbare Treppenfunktion $s \leq f$ ist nach Bemerkung 0.38 c)

$$I_E(s) = \sum_{i=0}^{\infty} I_{E_i}(s) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f\,d\mu,$$

also ist

$$\int_E f\,d\mu \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f\,d\mu.$$

Für die umgekehrte Ungleichung, sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $k \in \mathbf{N}$. Für jedes $i \leq k$ können wir eine nichtnegative messbare Treppenfunktion $s_i^\varepsilon \leq f$ finden mit

$$I_{E_i}(s_i^\varepsilon) \geq \int_{E_i} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{k+1}.$$

Sei $s^\varepsilon := \max\{\, s_i^\varepsilon \mid 0 \leq i \leq k \,\} \leq f$. Dies ist auch eine messbare nichtnegative Treppenfunktion.

Weil $I_M(s^\varepsilon)$ eine positive σ-additive Funktion von M ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\int_E f\,d\mu \geq I_E(s^\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} I_{E_i}(s^\varepsilon) &\geq \sum_{i=0}^{k} I_{E_i}(s^\varepsilon) \geq \sum_{i=0}^{k} I_{E_i}(s_i^\varepsilon) \\
&\geq \sum_{i=0}^{k} \Big(\int_{E_i} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{k+1} \Big) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{k} \int_{E_i} f\,d\mu \Big) - \varepsilon
\end{aligned}$$

Weil dies für jedes $k \in \mathbf{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist

$$\int_E f\,d\mu \geq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f\,d\mu.$$

Das beweist c) für den Fall, wo $f \geq 0$.

Für eine allgemeine messbare Funktion f sind f_+ und $f_- \geq 0$, und ihre Integrale $\int_M f_+ \, d\mu$ und $\int_M f_- \, d\mu$ sind nach dem schon Gezeigten σ-additiv in M, natürlich positiv, also auch additiv und monoton.

Wenn f auf X integrierbar ist, dann sind $\int_X f_+ \, d\mu$ und $\int_X f_- \, d\mu$ endlich. Wegen der Monotonizität sind auch die entsprechenden Integrale über E endlich und die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f_+ \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f_- \, d\mu = \int_E f_- \, d\mu$$

konvergieren.

Deshalb konvergiert auch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \Bigl(\int_{E_i} f_+ \, d\mu - \int_{E_i} f_- \, d\mu \Bigr)$$

gegen

$$\Bigl(\sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f_+ \, d\mu \Bigr) - \Bigl(\sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f_- \, d\mu \Bigr) = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu = \int_E f \, d\mu,$$

und zwar absolut, weil die Konvergenz der (positiven) Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f_+ \, d\mu$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f_- \, d\mu$ ja absolut ist und eine Differenz von absolut konvergenten Reihen wieder absolut konvergiert.

Damit haben wir c) auch im integrierbaren Fall bewiesen.

d): Dies ist klar aus der Definition des Integrals und der Tatsache, dass nach Bemerkung 0.38 a) $I_E(s) = 0$ für jede nichtnegative messbare Treppenfunktion s auf der Nullmenge E.

e): Nach Teil b) ist $\int_E f \, d\mu = \int_E 0 \, d\mu = 0$, letzteres weil 0 die einzige nichtnegative Treppenfunktion ≤ 0 ist und $I_E(0) = 0$.

f): $\int_E f \, d\mu \geq 0$ ist klar aus der Definition des Integrals für nichtnegative Integranden.

Wenn $N := \{\, x \in E \mid f(x) > 0 \,\}$ eine Nullmenge ist, so ist wegen der σ-Additivität

$$\int_E f \, d\mu = \int_N f \, d\mu + \int_{E \setminus N} f \, d\mu,$$

und der erste Summand ist 0 nach Teil d), der zweite Summand ist 0 nach Teil e).

Wenn N keine Nullmenge ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $N_\varepsilon := \{\, x \in E \mid f(x) > \varepsilon \,\}$ keine Nullmenge ist, denn N ist die Vereinigung der abzählbaren aufsteigenden Folge von messbaren Mengen $N_{1/k}$ für $k \in \mathbf{N}$, und wenn alle $N_{1/k}$ Nullmengen wären, hätten wir nach Lemma 0.8 e)

$$\mu(N) = \sup_{k\in\mathbf{N}} \mu(N_{1/k}) = \sup_{k\in\mathbf{N}} 0 = 0.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ mit $\mu(N_\varepsilon) > 0$ und sei s die Treppenfunktion $\varepsilon\chi_{N_\varepsilon}$. Wir haben $s \leq f$ und deshalb

$$\int_E f\,d\mu \geq I_E(s) = \varepsilon\mu(N_\varepsilon \cap E) = \varepsilon\mu(N_\varepsilon) > 0.$$

$\int_E f\,d\mu$ ist also genau dann 0, wenn N eine Nullmenge ist.

g): Wenn $f \geq 0$ und wenn $a \geq 0 \in \mathbf{R}$, so sind die nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen $t \leq af$ genau die Funktionen der Form as, wo s eine nichtnegative messbare Treppenfunktion $\leq f$ ist.

Da nach Bemerkung 0.38 e) $I_E(as) = aI_E(s)$, folgt

$$\int_E af\,d\mu = a\int_E f\,d\mu \tag{0.36}$$

wenn $a \geq 0$ und $f \geq 0$.

Wenn f eine beliebige messbare Funktion ist aber $a \geq 0$, dann ist $(af)_+ = af_+$ und $(af)_- = af_-$ und (0.36) für f_+ und f_- überträgt sich, nach der Definition von $\int_E f\,d\mu$ als $\int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu$, auch auf f.

Aus $(-f)_+ = f_-$ und $(-f)_- = f_+$ folgt $\int_E -f\,d\mu = -\int_E f\,d\mu$.

Damit können wir den allgemeinen Fall von (0.36) sofort auf den Fall für positive Koeffizienten zurückführen und schließen, dass (0.36) sogar für beliebige Koeffizienten $a \in \mathbf{R}$ gilt.

h): Zuerst betrachten wir den Fall nichtnegativer Funktionen.

Wenn $0 \leq f \leq g$ auf ganz X, dann ist die Behauptung sofort klar, weil es, etwas salopp gesagt, mehr Treppenfunktionen $\leq g$ als $\leq f$ gibt.

Wenn $0 \leq f \leq g$ nur auf E, dann ist $0 \leq \chi_E \cdot f \leq \chi_E \cdot g$ auf ganz X und unter Verwendung von Teil b) erhalten wir $\int_E f\,d\mu = \int_E \chi_E \cdot f\,d\mu \leq \int_E \chi_E \cdot g\,d\mu = \int_E g\,d\mu$.

Im allgemeinen Fall folgt aus $f \leq g$ auf E, dass $f_+ \leq g_+$ und $g_- \leq f_-$ auf E, womit $\int_E f_+\,d\mu \leq \int_E g_+\,d\mu$, $\int_E f_-\,d\mu \geq \int_E g_-\,d\mu$ und somit

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu \leq \int_E g_+\,d\mu - \int_E g_-\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

i): Zu zeigen ist, dass wenn $\int_E f_+\,d\mu$ und $\int_E f_-\,d\mu$ endlich sind, dann sind auch $\int_A f_+\,d\mu$ und $\int_A f_-\,d\mu$ endlich.

Das folgt sofort aus h) und b), denn $\chi_A \cdot f_\pm \le \chi_E \cdot f_\pm$. Alternativ kann man die Tatsache anwenden, dass $\int_M \, d\mu$ eine σ-additive und somit monotone Funktion von M ist, für nichtnegative Integranden.

j): Eine Richtung ist einfach. Wenn $|f|$ auf E integrierbar ist, dann folgt aus $|f| = f_+ + f_- \ge f_\pm \ge 0$ und Teil h), dass

$$\int_E f_\pm \, d\mu \le \int_E |f| \, d\mu < \infty,$$

und f ist integrierbar auf E.

Für die andere Schlussrichtung, sei $P := \{ x \in E \mid f(x) \ge 0 \}$ und sei $M := \{ x \in E \mid f(x) < 0 \}$.

Auf P ist $|f| = f_+ = f$ und auf M ist $|f| = f_- = -f$.

Wenn f auf E integrierbar ist, dann ist es auch auf P und M integrierbar und wir haben

$$\int_E |f| \, d\mu = \int_P |f| \, d\mu + \int_M |f| \, d\mu = \int_P f_+ \, d\mu + \int_M f_- \, d\mu < \infty,$$

so dass $|f|$ auf E integrierbar ist.

Ferner gilt die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \left| \int_P f \, d\mu + \int_M f \, d\mu \right| = \left| \int_P f_+ \, d\mu - \int_M f_- \, d\mu \right| \\ &\le \left| \int_P f_+ \, d\mu \right| + \left| \int_M f_- \, d\mu \right| = \int_P f_+ \, d\mu + \int_M f_- \, d\mu \\ &= \int_P |f| \, d\mu + \int_M |f| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

k) Wenn f integrierbar ist auf E, so gilt nach j) und h), dass

$$0 \le \int_E |g| \, d\mu \le \int_E |f| \, d\mu < \infty.$$

Also ist $|g|$ integrierbar auf E, somit auch g.

l): Sei $N = \{ x \in X \mid f(x) \ne g(x) \}$ und sei $B := E \cap N$ und $G := E \setminus N$.

Weil B eine Nullmenge ist, ist

$$\int_B f \, d\mu = 0 = \int_B g \, d\mu$$

nach Teil d).

Nach Definition von N und G ist $f = g$ auf G, also nach Teil b)

$$\int_G f \, d\mu = \int_G g \, d\mu.$$

Nun folgt sofort aus der σ-Additivität des Integrals, dass

$$\int_E f\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \int_G f\,d\mu = \int_B g\,d\mu + \int_G g\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

■

Eine wichtige und bekannte Eigenschaft des Integrals, die hier überraschenderweise fehlte, ist die Linearität bezüglich des Integranden. Wir haben davon zwar einen Teil bewiesen, aber wir haben noch nicht gezeigt, dass das Integral die Addition von Funktionen respektiert. Die Schwierigkeit, gerade diese einleuchtende Eigenschaft zu beweisen, ist der Preis den wir für eine einfache und bequeme Integraldefinition zahlen müssen.

Um doch noch zum Ziel zu kommen, werden wir zunächst die Konvergenzeigenschaften des Integrals untersuchen und einige Sätze beweisen, die ohnehin von sehr großer Bedeutung sind und eine der großen Vorteile der Lebesgue Integration über die Riemann Integration darstellen.

Um die Aussagen zu vereinfachen werden wir im Folgenden als Integrationsbereich für Funktionen auf einem Maßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ immer ganz X unterstellen, aber die Sätze gelten genauso für Integrale über einen Teilraum E, denn wenn wir die Integranden f durch $\chi_E \cdot f$ ersetzen, können wir Integrale über E zu Integralen über ganz X erweitern.

Satz 0.42 (Beppo Levi) *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum, sei*

$$0 \le f_0 \le f_1 \le \dots$$

eine monoton steigende Folge von messbaren Funktionen $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, und sei $f := \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Dann ist f messbar und

$$\int_X f\,d\mu = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu. \tag{0.37}$$

Beweis. f ist messbar nach Lemma 0.32 d). Wegen der Monotonizität des Integrals ist $\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu$ für jedes n, also ist auch

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu.$$

Für die andere Richtung betrachten wir eine reelle Zahl c mit $0 < c < 1$. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$X_n := \{\, x \in X \mid cf(x) \le f_n(x) \,\}.$$

Weil $f_n \le f_{n+1}$ für jedes n, ist auch $X_n \le X_{n+1}$ für jedes n und die X_n bilden eine monoton steigende Folge von Mengen.

An jeder Stelle $x \in X$ ist entweder $f(x) = 0$ und dann $cf(x) = 0 \le f_n(x)$ für jedes n, oder $f(x) > 0$ und dann gilt, weil $c < 1$, dass $cf(x) < f(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n$, so dass es ein $n \in \mathbf{N}$ geben muss mit $cf(x) \le f_n(x)$. Wir haben damit gezeigt, dass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = X.$$

Aus der Definition von X_n folgt, dass

$$\int_{X_n} cf\,d\mu \le \int_{X_n} f_n\,d\mu \le \int_X f_n\,d\mu \le \sup_{m\in\mathbf{N}} \int_X f_m\,d\mu.$$

Weil das Integral der nichtnegativen Funktion cf eine positive σ-additive Mengenfunktion ist, gilt nach Lemma 0.8 e)

$$c\int_X f\,d\mu = \int_X cf\,d\mu = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{X_n} cf\,d\mu \le \sup_{m\in\mathbf{N}} \int_X f_m\,d\mu.$$

Das gilt für jedes positive $c < 1$, also ist

$$\int_X f\,d\mu \le \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_X f_n\,d\mu$$

und mit der schon bewiesenen anderen Richtung haben wir die Gleichheit. ■

Der Satz von Beppo Levi wird auch der **Lebesgue Satz über monotone Konvergenz** genannt.

Lemma 0.43 *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ eine messbare Funktion mit $f \ge 0$.*

Dann gibt es eine aufsteigende Folge $0 \le s_0 \le s_1 \le s_2 \le \dots$ von nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen, so dass

$$f = \sup_{n\in\mathbf{N}} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

und so dass

$$\int_X f\,d\mu = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_X s_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} I_X(s_n).$$

Beweis. Für jede rationale Zahl $r > 0$ setzen wir

$$A_r := \{\, x \in X \mid f(x) \ge r \,\}$$

und wir definieren t_r als die Treppenfunktion $r\chi_{A_r}$.

Weil f messbar ist, ist A_r eine messbare Menge und somit ist t_r eine messbare Funktion, so definiert, dass $0 \leq t_r \leq f$.

Die rationalen Zahlen > 0 sind abzählbar; sei r_0, r_1, r_2, ... eine Abzählung, und für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$s_n = \sup \{ t_{r_k} \mid k \leq n \} .$$

Dann ist auch s_n eine nichtnegative messbare Treppenfunktion $\leq f$. (Es ist eine Treppenfunktion, weil es nur die endlich vielen Werte r_0, ... , r_n annehmen kann.)

Nach Definition ist $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ und $f = \sup_{n \in \mathbf{N}} s_n$, denn für jedes $x \in X$ und für jede positive rationale Zahl $r \leq f(x)$ gibt es eine Zahl $n \in \mathbf{N}$ mit $r = r_n$, und $r \leq s_n(x) \leq f(x)$.

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt nun, dass

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_X s_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\mu.$$

■

Lemma 0.44 *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und seien f und g messbare Funktionen $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \} \cup \{ -\infty \}$, entweder beide nichtnegativ oder beide integrierbar. Dann ist*

$$\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \tag{0.38}$$

Insbesondere ist $f + g$ integrierbar, wenn f und g integrierbar sind.

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall $f \geq 0$ und $g \geq 0$.

Dann gibt es nach Lemma 0.43 monoton steigende Folgen $\{ s_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ und $\{ t_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ von nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen mit

$$f = \lim_{n \to \infty} s_n \qquad \text{und} \qquad g = \lim_{n \to \infty} t_n,$$

für die gilt

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} I_X(s_n) \qquad \text{und} \qquad \int_X g \, d\mu = \lim_{n \to \infty} I_X(t_n).$$

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei $u_n := s_n + t_n$. Die u_n bilden offensichtlich auch eine monoton steigende Folge von nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen und

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} u_n = \lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (s_n + t_n) = \lim_{n \to \infty} s_n + \lim_{n \to \infty} t_n = f + g.$$

Weil s_n, t_n und u_n nichtnegative messbare Treppenfunktionen sind, folgt aus Bemerkung 0.38 e), dass

$$I_X(u_n) = I_X(s_n) + I_X(t_n).$$

Nach dem Satz von Beppo Levi ist also

$$\begin{aligned}\int_X f + g\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X u_n\,d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} I_X(u_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(I_X(s_n) + I_X(t_n)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} I_X(s_n) + \lim_{n\to\infty} I_X(t_n) \\ &= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.\end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere, wenn $\int_X f\,d\mu$ und $\int_X g\,d\mu$ endlich sind, dass dann auch $\int_X f + g\,d\mu$ endlich ist.

Nun betrachten wir den Fall, wo f und g auch negative Werte annehmen können aber integrierbar sind.

Dann ist auch $f + g$ integrierbar. Denn $|f|$ und $|g|$ sind integrierbar nach Satz 0.41 j), und sind nichtnegativ. Aus der schon bewiesenen Behauptung für nichtnegative Funktionen und der Ungleichung $|f+g| \le |f| + |g|$ folgt

$$\int_X |f+g|\ d\mu \le \int_X |f| + |g|\ d\mu = \int_X |f|\ d\mu + \int_X |g|\ d\mu < \infty.$$

Also ist $|f+g|$ integrierbar, somit auch $f+g$.

Wir können $f+g$ auf zwei Weisen in positive und negative Anteile zerlegen:

$$\begin{aligned} f+g &= f_+ - f_- + g_+ - g_- \\ f+g &= (f+g)_+ - (f+g)_- \end{aligned} \tag{0.39}$$

und aus der Gleicheit der rechten Seiten folgt

$$f_+ + g_+ + (f+g)_- = (f+g)_+ + f_- + g_-.$$

Weil hier alle Summanden nichtnegativ sind, folgt aus dem ersten Teil des Beweises

$$\int_X f_+\,d\mu + \int_X g_+\,d\mu + \int_X (f+g)_-\,d\mu = \int_X (f+g)_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu + \int_X g_-\,d\mu$$

und alle Summanden sind endlich, weil f, g und $f+g$ integrierbar sind.

Durch Rückumformung dieser Gleichung für die Integrale zur Gestalt und zur Aufteilung von (0.39) erhält man nun wie gewünscht

$$\begin{aligned}\int_X f+g\,d\mu &= \int_X (f+g)_+\,d\mu - \int_X (f+g)_-\,d\mu\\ &= \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu + \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu\\ &= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.\end{aligned}$$

■

Wir untersuchen weiter die Konvergenzeigenschaften des Lebesgue Integrals. Hier ein nützlicher Hilfssatz:

Lemma 0.45 (Fatou) *Sei $(X,\mathcal{R},\mu)$ ein Maßraum und sei $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen $X \longrightarrow \mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$.*

Dann ist

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu. \tag{0.40}$$

Beweis. Für jedes $m\in\mathbf{N}$ sei

$$\iota_m := \inf\{f_n \mid n\ge m\}.$$

Die ι_m bilden eine monoton steigende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen und

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{m\in\mathbf{N}} \iota_m.$$

Ferner, für jedes $n\ge m$ ist $\iota_m\le f_n$ und somit $\int_X \iota_m\,d\mu \le \int_X f_n\,d\mu$. Also gilt für jedes $m\in\mathbf{N}$

$$\int_X \iota_m\,d\mu \le \inf_{n\ge m}\int_X f_n\,d\mu.$$

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt nun

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_X \sup_{m\in\mathbf{N}}\iota_m\,d\mu = \sup_{m\in\mathbf{N}}\int_X \iota_m\,d\mu&\\ \le \sup_{m\in\mathbf{N}}\inf_{n\ge m}\int_X f_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.&\end{aligned}$$

■

Das Fatou Lemma hilft uns, den zweiten (neben dem Satz von Beppo Levi) wichtigen Konvergenzsatz für Lebesgue Integrale zu beweisen, den

Satz 0.46 (Lebesguescher Grenzwertsatz) *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\{ f_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen $f_n \colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \} \cup \{ -\infty \}$. Sei*

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Es gebe eine integrierbare Funktion $g \colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \}$, so dass

$$|f_n| \leq g \tag{0.41}$$

für jedes $n \in \mathbf{N}$.

Dann sind f und alle f_n integrierbar und

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu. \tag{0.42}$$

Beweis. Als Grenzwert einer Folge messbarer Funktionen ist auch f messbar, und Gleichung (0.41) überträgt sich auch auf f, d.h., $|f| \leq g$.

Jedes f_n ist integrierbar, weil $\int_X |f_n| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty$. Aus dem gleichen Grund ist f integrierbar.

Nach Lemma 0.44 sind die Funktionen $g \pm f$ integrierbar, und die Funktionen $h_n := g - f_n \geq 0$ und $k_n := g + f_n = g - (-f_n) \geq 0$ sind nichtnegative integrierbare Funktionen mit

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \liminf_{n\to\infty} h_n = g - f \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} k_n = \liminf_{n\to\infty} k_n = g + f.$$

Nun folgt aus dem Fatou Lemma und Lemma 0.44 über die Additivität des Integrals, dass

$$\begin{aligned}\int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \int_X g - f \, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu \\ = \liminf_{n\to\infty} (\int_X g \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu) &= \int_X g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_X g \, d\mu + \int_X f \, d\mu = \int_X g + f \, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} k_n \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X k_n \, d\mu \\ = \liminf_{n\to\infty} (\int_X g \, d\mu + \int_X f_n \, d\mu) &= \int_X g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.\end{aligned}$$

Bereinigt man den Term $\int_X g \, d\mu$ aus diesen Gleichungen, so erhält man

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Da aber für jede Folge gilt $\liminf \leq \limsup$, haben wir hier die Gleichheit, und die Folge $\left\{ \int_X f_n \, d\mu \right\}$ konvergiert tatsächlich gegen $\int_X f \, d\mu$. ■

Der Lebesguesche Grenzwertsatz wird auch der **Lebesguesche Satz über die dominierte Konvergenz** genannt.

Dieser Satz ist wesentlich stärker als die Konvergenzsätze für die Riemannsche Integration, wo gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{ f_n \}$ erforderlich ist. Hier reicht punktweise Konvergenz und die Existenz einer integrierbaren Schranke für die Funktionen der Folge.

Bemerkung 0.47 In den vergangenen Sätzen werden oft Voraussetzungen gemacht, dass gewisse Funktionen nichtnegativ sein sollen, dass eine Funktion durch eine andere dominiert wird, oder dass eine Folge von Funktionen punktweise gegen eine andere Funktion konvergiert.

Alle diese Sätze bleiben richtig, wenn diese Voraussetzungen nur fast überall *erfüllt sind.*

Denn es kommen nie mehr als abzählbar viele Instanzen dieser Bedingungen vor, da die Folgen (wenn es um Folgen geht) ja auch nur abzählbar viele Glieder haben. D.h., wenn die Bedingungen fast überall gelten, ist die Menge, auf die mindestens einer der Bedingungen verletzt wird, immer noch eine Nullmenge, und wenn man alle Funktionen dahin gehend abändert, dass man sie auf dieser Menge gleich 0 setzt, so gelten für die veränderten Funktionen alle Voraussetzungen wirklich überall. Da aber nach Satz 0.41 l) die Änderung der Funktionen auf einer Nullmenge alle Integrale unverändert lässt, gelten die Sätze auch für die ursprünglichen Funktionen, die die Voraussetzungen nicht ganz erfüllt haben.

Dies ist, wie schon erwähnt, ein sehr wichtiges Prinzip der Maßtheorie, und in vielen Lehrbüchern werden die Sätze auch gleich „richtig“ formuliert, so dass die Voraussetzungen nur fast überall verlangt werden. Wir haben das nicht gemacht, damit die Beweise verständlich und unkompliziert bleiben, aber die Ergebnisse werden wir sehr wohl in dieser allgemeineren Form anwenden wollen.

Bisher haben wir die Integrationstheorie für Funktionen einer Variablen beschrieben, also für Funktionen, die auf einem einzelnen Maßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ definiert sind und die bezüglich des dort vorgegebenen einzelnen Maßes μ integriert werden. Manchmal ist es auch nötig, Funktionen in mehreren Variablen zu betrachten (d.h., Funktionen definiert auf einem kartesischen Produkt von Maßräumen) und Mehrfachintegrale zu betrachten, bei denen die Funktionen nacheinander bezüglich der verschiedenen Richtungen im Produkt und bezüglich der verschiedenen Maße integriert werden.

Die Aussage des bekannten ***Satzes von Fubini*** ist, dass die *Reihenfolge* der einzelnen Integrationen im Mehrfachintegral unkritisch ist und keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Wir wollen den Beweis dieses und eines verwandten Satzes kurz skizzieren, wozu eine gewisse begriffliche Vorbereitung erforderlich ist. Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Fall von zwei Variablen und Doppelintegralen—der allgemeine Fall lässt daraus durch Induktion leicht entwickeln.

Definition 0.48 Seien $(X, \mathcal{R})$ und $(Y, \mathcal{S})$ messbare Räume. Wir wollen das kartesische Produkt $X \times Y$ mit einer Produkt σ-Algebra versehen und so zu einem messbaren Raum machen.

Ein ***Rechteck*** in $X \times Y$ ist eine Teilmenge der Gestalt $M \times N$, wo $M \in \mathcal{R}$ und $N \in \mathcal{S}$. Die Mengen M und N heißen die ***Seiten*** des Rechtecks $M \times N$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{R} * \mathcal{S}$ die σ-Algebra auf $X \times Y$, die von allen Rechtecken erzeugt wird.

Dann ist $(X \times Y, \mathcal{R} * \mathcal{S})$ ein messbarer Raum, genannt das ***Produkt*** der messbaren Räume $(X, \mathcal{R})$ und $(Y, \mathcal{S})$.

Definition 0.49 Seien $(X, \mathcal{R})$ und $(Y, \mathcal{S})$ messbare Räume und sei E eine Teilmenge von $X \times Y$.

Für jeden Punkt $x \in X$ definieren wir den ***x-Schnitt*** von E als die Menge

$$E_x := \{\, y \in Y \mid (x, y) \in E \,\} \subseteq Y$$

und für jeden Punkt $y \in Y$ definieren wir den ***y-Schnitt*** von E als die Menge

$$E^y := \{\, x \in X \mid (x, y) \in E \,\} \subseteq X.$$

Entsprechend, wenn f eine Abbildung von $X \times Y$ in eine dritte Menge Z ist, so definieren wir für jeden Punkt $x \in X$ den ***x-Schnitt*** von f als die Abbildung $f_x \colon Y \longrightarrow Z$ gegeben durch

$$f_x(y) := f(x, y) \quad \text{für jedes } y \in Y,$$

und wir definieren für jeden Punkt $y \in Y$ den ***y-Schnitt*** von f als die Abbildung $f^y \colon X \longrightarrow Z$ gegeben durch

$$f^y(x) := f(x, y) \quad \text{für jedes } y \in Y.$$

Man beachte, dass E_x und E^y Teilmengen der Faktorräume Y bzw. X sind, nicht Teilmengen von $X \times Y$, und f_x und f^y sind auch auf den Faktorräumen definierte Abbildungen und nicht Abbildungen auf dem Produktraum $X \times Y$.

f_x ist im Wesentlichen die Einschränkung von f auf die achsenparallele Ebene $\{x\}\times Y$ und E_x ist im Wesentlichen der Durchschnitt von E mit dieser Ebene, nur dass wir die festgelegte Koordinate x nicht mehr mitschreiben. Entsprechendes gilt für die y-Schnitte.

Bemerkung 0.50 Die Schnitte sind verträglich mit den elementaren mengentheoretischen Operationen.

D.h., wenn $(X,\mathcal{R})$ und $(Y,\mathcal{S})$ messbare Räume sind und wenn E, F sowie E_n für $n\in\mathbf{N}$ Teilmengen von $X\times Y$ sind, und wenn $f\colon X\times Y\longrightarrow Z$ eine Abbildung in einen weiteren Raum Z ist und C eine Teilmenge von Z ist, so gilt für jedes $x\in X$ und für jedes $y\in Y$:

$$\begin{aligned}
(X\times Y)_x &= Y &&\text{und}& (X\times Y)^y &= X;\\
\emptyset_x &= \emptyset &&\text{und}& \emptyset^y &= \emptyset;\\
(E\cup F)_x &= E_x\cup F_x &&\text{und}& (E\cup F)^y &= E^y\cup F^y;\\
(E\cap F)_x &= E_x\cap F_x &&\text{und}& (E\cap F)^y &= E^y\cap F^y;\\
(E\setminus F)_x &= E_x\setminus F_x &&\text{und}& (E\setminus F)^y &= E^y\setminus F^y;\\
\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big)_x &= \bigcup_{n=0}^{\infty}(E_n)_x &&\text{und}& \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big)^y &= \bigcup_{n=0}^{\infty}(E_n)^y;\\
\big(f^{-1}(C)\big)_x &= (f_x)^{-1}(C) &&\text{und}& \big(f^{-1}(C)\big)^y &= (f^y)^{-1}(C);
\end{aligned}\tag{0.43}$$

und für jede Funktion $g\colon Z\longrightarrow W$ (wo W eine weitere Menge ist) gilt

$$(g\circ f)_x = g\circ f_x \qquad\text{und}\qquad (g\circ f)^y = g\circ f^y. \tag{0.44}$$

Aus der letzten Bedingung folgen viele nützliche Spezialisierungen, z.B., wenn f reellwertig ist haben wir

$$\begin{aligned}
(f_+)_x &= (f_x)_+ &&\text{und}& (f_+)^y &= (f^y)_+,\\
(f_-)_x &= (f_x)_- &&\text{und}& (f_-)^y &= (f^y)_-,\\
|f|_x &= |f_x| &&\text{und}& |f|^y &= |f^y|, \quad\text{usw.}
\end{aligned}\tag{0.45}$$

Die Beweise sind trivial.

Es gibt folgende nützliche Beziehung zwischen den σ-Algebren $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ und der σ-Algebra $\mathcal{R}*\mathcal{S}$.

Lemma 0.51 *Seien $(X,\mathcal{R})$ und $(Y,\mathcal{S})$ messbare Räume und sei E eine Teilmenge von $X\times Y$.*

Wenn $E\in\mathcal{R}*\mathcal{S}$, dann ist $E_x\in\mathcal{S}$ für jedes $x\in X$ und$E^y\in\mathcal{R}$ für jedes $y\in Y$.

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage; die zweite geht genauso.

Dazu betrachten wir die Familie

$$\mathcal{F} := \{\, F \subseteq X \times Y \mid F_x \in \mathcal{S} \text{ für jedes } x \in X \,\}.$$

Die Aussage, die wir beweisen wollen, behauptet einfach, dass

$$\mathcal{R} * \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F},$$

und das werden wir jetzt zeigen.

Weil $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, kann man sofort aus Bemerkung 0.50 schließen, dass $X \times Y \in \mathcal{F}$, dass Differenzen von zwei Mengen aus $\mathcal{F}$ zu $\mathcal{F}$ gehören, und dass abzählbare Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{F}$ wieder zu $\mathcal{F}$ gehören, kurz, dass $\mathcal{F}$ ein σ-Algebra ist.

Ist $M \times N$ ein Rechteck in $X \times Y$, so ist $(M \times N)_x$ gleich N, wenn $x \in M$, und ist leer sonst, aber auf jeden Fall gehört es zu $\mathcal{S}$. Also enthält $\mathcal{F}$ alle Rechtecke.

Weil $\mathcal{R} * \mathcal{S}$ die von den Rechtecken erzeugte σ-Algebra ist, aber $\mathcal{F}$ eine die Rechtecke enthaltende σ-Algebra ist, gilt wie behauptet $\mathcal{R} * \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$. ∎

Die Aussage von Lemma 0.51 in leicht zu merkender Form: Schnitte von messbaren Mengen sind messbar. Die gleiche Aussage gilt für messbare Funktionen:

Lemma 0.52 *Seien $(X, \mathcal{R})$ und $(Y, \mathcal{S})$ messbare Räume und sei*

$$f \colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\, \infty \,\} \cup \{\, -\infty \,\}$$

eine messbare Funktion (bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{R} * \mathcal{S}$).

Dann ist f_x eine messbare Funktion auf Y bezüglich $\mathcal{S}$ für jedes $x \in X$ und f^y ist eine messbare Funktion auf X bezüglich $\mathcal{R}$ für jedes $y \in Y$.

Beweis. Nach Lemma 0.27 ist eine Funktion genau dann messbar, wenn für jedes $c \in \mathbf{R}$ das von ihr bestimmte Urbild der Menge $(c, \infty]$ messbar ist.

Die Behauptung folgt nun sofort aus Lemma 0.51 und Gleichung (0.43) in Bemerkung 0.50. Denn wenn f messbar ist, dann ist für jedes $c \in \mathbf{R}$ die Menge $f^{-1}\big((c, \infty]\big)$ messbar. Also ist auch für jedes $x \in X$ die Menge

$$(f_x)^{-1}\big((c, \infty]\big) = \Big(f^{-1}\big((c, \infty]\big)\Big)_x$$

messbar in Y, und f_x ist deshalb messbar.

Entsprechend ist für jedes $y \in Y$ die Menge

$$(f^y)^{-1}\big((c, \infty]\big) = \Big(f^{-1}\big((c, \infty]\big)\Big)^y$$

messbar in X, und f^y ist somit messbar. ■

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Maße auf zwei messbaren Räumen zu einem Produktmaß auf ihrem kartesischen Produkt kombinieren kann. Das geht allerdings nur, wenn die Faktorräume „klein genug“ sind (bezüglich ihrer Maße).

Definition 0.53 Ein Maßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ heißt ***endlich***, wenn $\mu(X) < \infty$. In diesem Fall sagen wir auch, das Maß μ ist ***endlich***.

Ein Maßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ heißt ***σ-endlich***, wenn X sich als abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen von endlichem Maß schreiben lässt. In diesem Fall sagen wir auch, das Maß μ ist ***σ-endlich***.

Endliche Maßräume sind natürlich auch σ-endlich, aber bei einem σ-endlichen Maßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ kann $\mu(X) = \infty$ sein.

Beispiel 0.54 Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, sei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbf{R}^n$ und sei $\mathcal{M}$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbf{R}^n$. Sei μ das Lebesgue Maß auf $\mathbf{R}^n$.

a) Sei $E \subseteq \mathbf{R}^n$ eine beschränkte messbare Menge (***beschränkt*** heißt, es gibt einen Quader Q, dessen Kanten endliche Intervalle (a_i, b_i) sind, mit $E \subseteq Q$).

   Für eine beliebige σ-Algebra $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$ auf $\mathbf{R}^n$ setzen wir
   $$\mathcal{R}_E := \{\, M \cap E \mid M \in \mathcal{R} \,\}\,;$$
   dies ist eine σ-Algebra auf E. Sei μ_E die Einschränkung des Lebesgue Maßes μ auf $\mathcal{R}_E$.

   Dann ist μ_E ein Maß auf $\mathcal{R}_E$ und $(E, \mathcal{R}_E, \mu_E)$ ist ein endlicher Maßraum, denn $\mu_E(E) \leq \mu(Q) < \infty$.

   Insbesondere sind $(E, \mathcal{B}_E, \mu_E)$ und $(E, \mathcal{M}_E, \mu_E)$ endliche Maßräume.

b) $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$ und $(\mathbf{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ sind σ-endliche Maßräume. Denn wir können $\mathbf{R}^n$ als eine abzählbare Vereinigung von beschränkten Quadern schreiben (z.B., aller Quader, deren Kanten ganzzahlige Endpunkte haben).

Wenn $(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume sind, dann wollen wir auf der σ-Algebra $\mathcal{R} * \mathcal{S}$ ein „Produktmaß“ λ konstruieren, das Rechtecken $M \times N$ das natürliche Maß $\lambda(M \times N) = \mu(M)\nu(N)$ zuordnet.

Ein solches Maß lässt sich mit einigem technischen Aufwand direkt definieren. Einfacher und geschickter ist es, über einen scheinbaren Umweg zu gehen und nicht das Produktmaß, sondern nur das Integral einer beliebigen Funktion bezüglich dieses Maßes zu konstruieren und zu untersuchen. Das zugrunde liegende Maß erhält man dann durch Integration charakteristischer Funktionen.

Satz 0.55 *Seien $(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei*

$$f\colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

eine bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{R} * \mathcal{S}$ messbare nichtnegative Funktion.

Sei $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$ eine messbare Teilmenge von $X \times Y$. Wir definieren Funktionen $\alpha_E\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ und $\beta_E\colon Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$\alpha_E(x) := \int_{E_x} f_x \, d\nu \quad \text{für jedes } x \in X$$

und

$$\beta_E(y) := \int_{E^y} f^y \, d\mu \quad \text{für jedes } y \in Y.$$

(Die Integrale sind definiert, weil Schnitte von messbaren Funktionen und Mengen wieder messbar sind und weil die Integranden nichtnegativ sind.)

Dann ist α_E eine messbare nichtnegative Funktion auf X und β_E ist eine messbare nichtnegative Funktion auf Y, und es gilt

$$\int_X \alpha_E \, d\mu = \int_Y \beta_E \, d\nu. \tag{0.46}$$

Beweis. Sei $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$. Wir sagen, eine nichtnegative messbare Funktion f ist ***E-gut***, wenn die Behauptung des Satzes für die Funktion f und die Menge E erfüllt ist.

Da wir die Aussage des Satzes jetzt für mehrere verschiedene Funktionen vergleichen wollen, ergänzen wir wo nötig die Notation für die Funktionen α_E und β_E, indem wir die betrachtete Funktion f als Exponent dazuschreiben—wir schreiben also zur Unterscheidung α_E^f und β_E^f, wenn in einem Ausdruck oder in einer Gleichung die Funktionen α_E oder β_E für mehrere f's vorkommen.

Wir nehmen zuerst an, μ und ν seien *endliche* Maße.

Sei

$$\mathcal{F} := \{ f\colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ ist beschränkt, } \geq 0, \\ \text{und } E\text{-gut für jedes Rechteck } E \},$$

und sei

$$\mathcal{G} := \{\, g \in \mathcal{F} \mid fg \in \mathcal{F} \text{ für alle } f \in \mathcal{F} \,\}\,.$$

Wir bemerken, dass $\mathcal{F}$ nicht leer ist und die konstante Funktion 1 enthält. Sei nämlich $E = M \times N$ ein Rechteck (mit $M \in \mathcal{R}$ und $N \in \mathcal{S}$). Für jedes $x \in X$ ist

$$E_x = (M \times N)_x := \begin{cases} N, & \text{wenn } x \in M; \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Deshalb ist

$$\alpha_E^1(x) := \int_{E_x} 1\, d\mu = \begin{cases} \nu(N), & \text{wenn } x \in M; \\ \nu(\emptyset) = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h., $\alpha_E^1 = \nu(N)\chi_M$ und dies ist eine messbare Funktion mit

$$\int_X \alpha_E^1\, d\mu = \int_X \nu(N)\chi_M\, d\mu = \nu(N)\mu(M). \tag{0.47}$$

Auf die gleiche Weise sieht man, dass $\beta_E^1 = \mu(M)\chi_N$ und dies ist eine messbare Funktion mit

$$\int_Y \beta_E^1\, d\mu = \int_Y \nu(M)\chi_N\, d\mu = \mu(M)\nu(N).$$

Das ist das gleiche Ergebnis und deshalb ist die Funktion 1 E-gut für jedes Rechteck E.

Also gehört 1 zu $\mathcal{F}$, und somit offensichtlich auch zu $\mathcal{G}$.

Weil die Maße μ und ν endlich sind, ist jeder Schnitt einer beschränkten messbaren Funktion integrierbar und die Integrale der Schnitte sind beschränkt, so dass die Funktionen α_E und β_E reellwertig und beschränkt sind. Das heißt, beim Nachprüfen der Zugehörigkeit einer Funktion f zu $\mathcal{F}$ haben wir es mit Funktionen α_E^f und β_E^f zu tun, die nie den Wert ∞ annehmen und die wenn sie messbar sind auch integrierbar sind.

Aus den Eigenschaften des Integrals nichtnegativer oder integrierbarer Funktionen, insbesondere der Linearität, der Monotonizität und der Konvergenzeigenschaften, ist es klar, dass jede Linearkombination von E-guten Funktionen mit positiven Koeffizienten wieder E-gut ist, dass eine nichtnegative Differenz zweier E-guter Funktionen wieder E-gut ist, und dass jeder Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge von E-guten Funktionen wieder E-gut ist, wenn die Folge monoton steigt oder wenn sie durch eine Funktion h dominiert wird, deren Schnitte alle integrierbar sind und für die die Funktionen α_E^h und β_E^h integrierbar sind. Jede konstante Funktion h erfüllt diese Eigenschaft.

Das bedeutet, dass $\mathcal{F}$ unter den genannten algebraischen Operationen abgeschlossen ist und dass der Limes einer gleichmäßig beschränkten punktweise konvergenten Folge aus $\mathcal{F}$ wieder zu $\mathcal{F}$ gehört, und daraus folgt leicht, dass das Gleiche auch für $\mathcal{G}$ gilt. Der Grenzwert g einer gleichmäßig beschränkten punktweise konvergenten Folge $\{ g_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\mathcal{G}$ gehört insbesondere wieder zu $\mathcal{G}$, weil für jedes $f \in \mathcal{F}$ gilt $fg = \lim_{n\to\infty} fg_n$, und die Folge $\{ fg_n \}$ wird gleichmäßig beschränkt durch das Produkt der Schranke von f und der gleichmäßigen Schranke der g_n.

Ferner ist klar aus der Definition von $\mathcal{G}$, dass endliche Produkte von Funktionen aus $\mathcal{G}$ wieder zu $\mathcal{G}$ gehören.

Wir betrachten jetzt die Familie

$$\mathcal{T} := \{ C \in \mathcal{R} * \mathcal{S} \mid \chi_C \in \mathcal{G} \} .$$

Man beachte, dass für jede messbare Menge $C \subseteq X \times Y$ und jede messbare nichtnegative Funktion $f\colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$ die Schnitte von $\chi_C f$ gegeben sind durch

$$(\chi_C f)_x = \chi_{C_x} f_x \qquad \text{und} \qquad (\chi_C f)^y = \chi_{C^y} f^y$$

für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$.

Deshalb gilt für jede Menge $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$, dass

$$\begin{aligned}\alpha_E^{\chi_C f}(x) = \int_{E_x} (\chi_C f)_x \, d\nu = \int_{E_x} \chi_{C_x} f_x \, d\nu \\ = \int_{C_x \cap E_x} f_x \, d\nu = \int_{(C\cap E)_x} f_x \, d\nu = \alpha_{C\cap E}^f(x)\end{aligned}$$

für jedes $x \in X$. Entsprechend ist

$$\beta_E^{\chi_C f} = \beta_{C\cap E}^f .$$

Hieraus folgt, dass $\chi_C f$ genau dann E-gut ist, wenn f $(C \cap E)$-gut ist. Denn erstens, von den Funktionen $\alpha_E^{\chi_C f}$ und $\alpha_{C\cap E}^f$, die ja gleich sind, ist die erste genau dann messbar, wenn die zweite es ist. Das Gleiche gilt für $\beta_E^{\chi_C f}$ und $\beta_{C\cap E}^f$.

Und zweitens, die linken Seiten der beiden Gleichungen

$$\int_X \alpha_E^{\chi_C f} \, d\mu = \int_X \alpha_{C\cap E}^f \, d\mu \qquad \text{und} \qquad \int_Y \beta_E^{\chi_C f} \, d\nu = \int_Y \beta_{C\cap E}^f \, d\nu \qquad (0.48)$$

stimmen genau dann überein, wenn die rechten Seiten übereinstimmen. Das beweist die Behauptung.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $\mathcal{T} = \mathcal{R} * \mathcal{S}$. Dazu zeigen wir, dass $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra ist, die jedes Rechteck enthält; da $\mathcal{R} * \mathcal{S}$ von den Rechtecken erzeugt wird und da $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R} * \mathcal{S}$, reicht das, um die Gleichheit zu beweisen.

Wenn D und E Rechtecke sind, so ist auch $D \cap E$ ein Rechteck, wie man leicht sieht.

Für jedes $f \in \mathcal{F}$ ist $\chi_D f$ nichtnegativ, messbar und beschränkt, und weil f nach Voraussetzung $(D \cap E)$-gut ist, ist $\chi_D f$ nach der oben bewiesenen Äquivalenz E-gut für jedes Rechteck E, und gehört somit auch zu $\mathcal{F}$.

Dies gilt insbesondere für $f \equiv 1$. Das bedeutet, χ_D selber gehört zu $\mathcal{F}$, somit auch zu $\mathcal{G}$, und das Rechteck D gehört zu $\mathcal{T}$.

Weil ganz $X \times Y$ ein Rechteck ist, ist $X \times Y \in \mathcal{T}$.

Ist C eine beliebige Menge aus $\mathcal{T}$, so ist auch $(X \times Y) \setminus C \in \mathcal{T}$, denn $\chi_{(X \times Y) \setminus C} = 1 - \chi_C \geq 0$ ist eine nichtnegative Differenz von zwei Funktionen aus $\mathcal{G}$ und gehört deshalb zu $\mathcal{G}$.

Für je zwei Mengen C und D aus $\mathcal{T}$ ist auch $C \cap D \in \mathcal{T}$, weil $\chi_{C \cap D} = \chi_C \chi_D$ als Produkt von zwei Elementen von $\mathcal{G}$ zu $\mathcal{G}$ gehört.

Daraus folgt, dass $C \setminus D = C \cap \big((X \times Y) \setminus D\big) \in \mathcal{T}$.

Weil $\chi_{C \cup D} = \chi_C + \chi_D - \chi_{C \cap D} \geq 0$ auch zu $\mathcal{G}$ gehört, haben wir $C \cup D \in \mathcal{T}$. Also ist $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen.

Sei nun $\{ C_i \mid i \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare Familie von Mengen aus $\mathcal{T}$ und sei $C := \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$. Für jedes $i \in \mathbf{N}$ sei $D_i := \bigcup_{j=0}^{i} C_j$.

Die D_i gehören zu $\mathcal{T}$ und bilden eine monoton steigende Folge von messbaren Mengen mit Vereinigung C. Deshalb ist $\{ \chi_{D_i i} \}_{i \in \mathbf{N}}$ eine monoton steigende, durch 1 gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen aus $\mathcal{G}$ und ihr Grenzwert

$$\chi_C = \sup_{i \in \mathbf{N}} \chi_{D_i}$$

gehört zu $\mathcal{G}$. Damit ist $C \in \mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

Wir haben wie versprochen bewiesen, dass $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra ist, die alle Rechtecke enthält, und es folgt $\mathcal{T} = \mathcal{R} * \mathcal{S}$.

Diese Aussage können wir auf Gewinn bringende Weise umformen. Sie besagt unter anderem, dass für jede messbare Menge in $X \times Y$, insbesondere auch für jeden Durchschnitt $C \cap E$ zweier messbarer Mengen, die charakteristische Funktion $\chi_{C \cap E} = \chi_C \chi_E$ bezüglich jedes Rechtecks gut ist und deshalb $(X \times Y)$-gut ist. Aber das ist gleichbedeutend damit, dass χ_C E-gut ist.

Nun betrachten wir für eine beliebige messbare Menge $E \subset X \times Y$ die Familie $\mathcal{E}$ aller E-guten Funktionen. Diese Familie enthält alle messbaren charakteristischen Funktionen. Da sie unter Linearkombination mit nichtnegativen Koeffizienten abgeschlossen ist, enthält sie alle messbaren Treppenfunktionen. Und da sie unter Konvergenz monoton steigender Funktionenfolgen abgeschlossen ist, enthält sie auf Grund von Lemma 0.43 alle messbaren nichtnegativen Funktionen auf $X \times Y$.

Das beweist die allgemeine Gültigkeit des Satzes im Falle, wo μ und ν *endliche* Maße sind.

Wenn μ und ν nur σ-endlich sind, dann können wir X schreiben als die Vereinigung einer abzählbaren Folge $\{ X_i \}_{i \in \mathbf{N}}$ von messbaren Teilmengen endlichen Maßes, und indem wir jede Menge in der Folge notfalls ersetzen durch ihre Vereinigung mit ihren (endlich vielen) Vorgängern, die auch noch endliches Maß hat, können wir erreichen, dass die Folge monoton ist, also dass $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$.

Entsprechend können wir Y schreiben als die Vereinigung einer abzählbaren aufsteigenden Folge $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$ von messbaren Mengen mit $\nu(Y_i) < \infty$.

Sei f eine nichtnegative messbare Funktion auf $X \times Y$. Für jedes $i \in \mathbf{N}$ sei $Z_i := X_i \times Y_i$ und sei $f_i := \chi_{Z_i} f$.

Der Satz gilt für Teilmengen E von $Z_i = X_i \times Y_i$, weil X_i und Y_i von endlichem Maß sind.

Das heißt, für jede messbare Teilmenge $E \subseteq X \times Y$ ist f zumindest $E \cap Z_i$-gut für jedes i, oder gleichbedeutend, $f_i = \chi_{Z_i} f$ ist E-gut für jedes i.

Die χ_{Z_i} bilden eine monoton steigende Folge und ihr Supremum ist 1, weil die Vereinigung der Z_i ganz $X \times Y$ ist. Also bilden die f_i eine monoton steigende Folge mit Supremum f. Weil jedes f_i E-gut ist, ist auch f E-gut, und das beweist den Satz im σ-endlichen Fall. ■

Notation 0.56 Die Integrale $\int_X \alpha_E \, d\mu$ und $\int_Y \beta_E \, d\nu$ in Gleichung (0.46) in Satz 0.55 entstehen ja durch zweimaliges Integrieren, zunächst der Schnitte der Funktion f, um die einzelnen Werte der Funktionen α_E und β_E zu bestimmen, und anschließend die Integration dieser Hilfsfunktionen.

Dieser Hergang findet seinen Niederschlag in der Notation, denn meistens nennt man die Funktionen α_E und β_E nicht mit diesem Namen, sondern schreibt die Integrale in Gleichung (0.46) gleich als Doppelintegrale hin. D.h., für $\int_X \alpha_E \, d\mu$ schreibt man meist

$$\iint_E f \, d\nu \, d\mu$$

und für $\int_Y \beta_E \, d\mu$ schreibt man meist

$$\iint_E f \, d\mu \, d\nu.$$

Andere Varianten sind

$$\iint_E f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{bzw.} \quad \iint_E f(x,y)\,dx\,dy.$$

Wenn man den Hilfsfunktionen α_E oder β_E einen Namen geben will, schreibt man meist

$$\iint_E f(x,y)\,dy \text{ für } \alpha_E(x) \qquad \text{und} \qquad \iint_E f(x,y)\,dx \text{ für } \beta_E(y).$$

Lemma und Definition 0.57 *Seien $(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Wir definieren eine Funktion*

$$\lambda\colon \mathcal{R} * \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\}$$

durch die Vorschrift

$$\lambda(E) := \iint_E 1\,d\mu\,d\nu = \iint_E 1\,d\nu\,d\mu \tag{0.49}$$

für jedes $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$.

*λ ist ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{R} * \mathcal{S}$, genannt das **Produktmaß** der Maße μ und ν. Man bezeichnet das Produktmaß oft mit $\mu \times \nu$.*

Für jede nichtnegative messbare Funktion $f\colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\}$ und für jede Menge $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$ ist

$$\int_E f\,d\lambda = \iint_E f\,d\mu\,d\nu = \iint_E f\,d\nu\,d\mu. \tag{0.50}$$

Für Rechtecke $M \times N \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$ gilt

$$\lambda(M \times N) = \mu(M)\nu(N) \tag{0.51}$$

und λ ist das einzige Maß auf $\mathcal{R} * \mathcal{S}$ mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Die Integrale in (0.49) sind definiert und die beiden Integrale sind gleich nach der Aussage von Satz 0.55.

Um zu zeigen, dass λ ein Maß ist, verwenden wir die Formulierung

$$\lambda(E) = \iint_E 1\,d\nu\,d\mu = \int_X \alpha_E\,d\mu$$

in der Notation von Satz 0.55.

Für jedes $x \in X$ ist hier

$$\alpha_E(x) = \int_{E_x} 1\,d\nu = \nu(E_x)$$

und weil die Schnitte der Menge E nach Bemerkung 0.50 die Mengenoperationen respektieren, ist jeder Wert von α_E wie das Maß ν eine positive σ-additive Mengenfunktion.

Das gilt auch für $\int_X \alpha_E \, d\mu$. Es ist nichtnegativ, weil α_E eine nichtnegative messbare Funktion ist. Und es ist σ-additiv in E, denn sei $\{ A_i \mid i \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare Familie von disjunkten messbaren Mengen und sei A ihre Vereinigung. Weil jeder Wert von α_E eine σ-additive Funktion von E ist, gilt

$$\alpha_A = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{A_i}.$$

Weil die Partialsummen dieser Reihe eine monoton steigende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen mit Supremum α_A bilden, können wir aus dem Satz von Beppo Levi schließen, dass

$$\lambda(A) = \int_X \alpha_A \, d\mu = \int_X \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_X \alpha_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_i).$$

D.h., λ ist σ-additiv und ist somit ein Maß.

Wir haben im Beweis von Satz 0.55, Gleichung (0.47), den Wert des Doppelintegrals $\iint_E 1 \, d\nu \, d\mu = \int_X \alpha_E \, d\mu$ für ein Rechteck $E = M \times N$ explizit als $\mu(M)\nu(N)$ berechnet (die dortige Berechnung ist auch ohne die Annahme, dass die Maße endlich sind, gültig).

Weil sich jeder der Räume X und Y als abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen von endlichem Maß schreiben lässt, kann man $X \times Y$ als die Vereinigung der Produkte aller (abzählbar vielen) Paare dieser Mengen schreiben, also als eine abzählbare Vereinigung von Rechtecken endlichen Maßes bezüglich λ. Deshalb ist λ σ-endlich.

Für die Eindeutigkeitsaussage und zum Beweis der Beziehung (0.50) benutzen wir den gleichen Trick, wie im Beweis von Satz 0.55 für den Nachweis der Existenz und Gleichheit der Doppelintegrale in den beiden Integrationsreihenfolgen.

Sei

$$\omega \colon \mathcal{R} * \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \}$$

ein Maß, so dass $\omega(M \times N) = \mu(M)\nu(N)$ für jedes Rechteck $M \times N$. Wir wollen zeigen, dass $\lambda = \omega$ und wir wollen zeigen, dass Integrale bezüglich ω oder λ sich als Doppelintegrale berechnen lassen.

Sei $f \colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \}$ eine nichtnegative messbare Funktion und sei $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$. In diesem Beweis sagen wir, f sei ***E-gut***, wenn

$$\int_E f \, d\omega = \iint_E f \, d\nu \, d\mu. \tag{0.52}$$

Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{ f : X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \} \mid f \geq 0 \text{ ist messbar und} \\ E\text{-gut für jedes Rechteck } E \in \mathcal{R} * \mathcal{S} \}.$$

Nach Voraussetzung gehört die konstante Funktion 1 zu $\mathcal{F}$, weil für jedes Rechteck $E = M \times N$ gilt

$$\int_E 1 \, d\omega = \omega(E) = \mu(M)\nu(N) = \lambda(E) = \iint_E 1 \, d\nu \, d\mu.$$

Sei

$$\mathcal{G} := \{ g \in \mathcal{F} \mid fg \in \mathcal{F} \text{ für alle } f \in \mathcal{F} \}.$$

Aus der Definition ist klar, dass endliche Produkte von Funktionen aus $\mathcal{G}$ wieder zu $\mathcal{G}$ gehören.

Wir betrachten jetzt die Familie

$$\mathcal{T} := \{ C \in \mathcal{R} * \mathcal{S} \mid \chi_C \in \mathcal{G} \}.$$

Seien C und $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$ und sei f eine nichtnegative messbare Funktion $X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \}$.

Wie wir schon im Beweis von Satz 0.55 auf Seite 53 begründet und in (0.48) festgehalten haben, folgt aus den Eigenschaften von Schnitten und aus Satz 0.41 b), dass

$$\iint_E \chi_C f \, d\nu \, d\mu = \iint_{C \cap E} f \, d\nu \, d\mu.$$

Aus Satz 0.41 b) schließen wir ferner, dass

$$\int_E \chi_C f \, d\omega = \int_{X \times Y} \chi_E \chi_C f \, d\omega = \int_{X \times Y} \chi_{C \cap E} f \, d\omega = \int_{C \cap E} f \, d\omega.$$

Ein Vergleich der linken Seiten beider Gleichungen und ein Vergleich der rechten Seiten zeigt, dass $\chi_C f$ genau dann E-gut ist, wenn f $(C \cap E)$-gut ist.

Wir zeigen jetzt wieder, dass $\mathcal{T} = \mathcal{R} * \mathcal{S}$, indem wir zeigen, dass $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra ist, die jedes Rechteck enthält.

Wenn D und E Rechtecke sind, so ist auch $D \cap E$ ein Rechteck. Jedes $f \in \mathcal{F}$ ist nach Definition dieser Familie $(D \cap E)$-gut, und somit ist $\chi_D f$ nach der eben gemachten Bemerkung E-gut für jedes Rechteck E. Also ist $\chi_D f \in \mathcal{F}$. Das gilt auch für $f \equiv 1$, so dass χ_D selber zu $\mathcal{F}$ gehört.

Also ist $\chi_D \in \mathcal{G}$ für jedes Rechteck D, und deshalb gehören alle Rechtecke zu $\mathcal{T}$.

Weil ganz $X \times Y$ ein Rechteck ist, ist $X \times Y \in \mathcal{T}$.

Das Integral und das Doppelintegral in Gleichung (0.52) sind linear in f (bezüglich Linearkombinationen mit positiven Koeffizienten, oder Differenzen, die eine nichtnegative Funktion ergeben) und sind verträglich mit monotoner und dominierter Konvergenz, und deshalb ist klar, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ unter diesen Operationen abgeschlossen sind.

Wenn $C \in \mathcal{T}$, so ist auch $(X \times Y) \setminus C \in \mathcal{T}$, weil $\chi_{(X\times Y)\setminus C} = 1 - \chi_C \in \mathcal{G}$ als nichtnegative Differenz von zwei Funktionen aus $\mathcal{G}$.

Für je zwei Mengen C und D aus $\mathcal{T}$ ist $C \cap D \in \mathcal{T}$, weil $\chi_{C\cap D} = \chi_C \chi_D \in \mathcal{G}$ als Produkt von zwei Funktionen aus $\mathcal{G}$.

Also ist auch $C \setminus D = C \cap \big((X \times Y) \setminus D\big) \in \mathcal{T}$.

Weil $\chi_{C\cup D} = (\chi_C + \chi_D) - \chi_{C\cap D} \in \mathcal{G}$, haben wir $C \cup D \in \mathcal{T}$.

Also ist $\mathcal{T}$ abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen, und für eine abzählbare Vereinigung $C := \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$ von Mengen aus $\mathcal{G}$ ist χ_C das Supremum der aufsteigenden Folge der (in $\mathcal{G}$ liegenden) charakteristischen Funktionen der Mengen $D_j := \bigcup_{i=0}^{j} C_i \in \mathcal{T}$ und gehört als Konsequenz des Satzes von Beppo Levi zu $\mathcal{G}$.

Folglich gehört jede abzählbare Vereinigung aus $\mathcal{T}$ wieder zu $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ ist also eine σ-Algebra, die alle Rechtecke enthält, womit $\mathcal{T} = \mathcal{R} * \mathcal{S}$.

In anderen Worten, $\mathcal{F}$ enthält *jede* messbare charakteristische Funktion; damit auch jede positive Linearkombination von solchen Funktionen, das heißt jede nichtnegative messbare Treppenfunktion; und schließlich das Supremum jeder monoton aufsteigenden Folge von nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen, nach Lemma 0.43 also jede nichtnegative messbare Funktion.

Jede nichtnegative messbare Funktion f ist also E-gut für jedes Rechteck E, insbesondere auch für das Rechteck $X \times Y$.

Wenn nun $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$ *kein* Rechteck ist, dann ist f trotzdem E-gut, denn $\chi_E f$ ist messbar und nichtnegativ und somit $X \times Y$-gut, und das ist, wie wir gesehen haben, gleichbedeutend damit, dass f selber $E \cap (X \times Y) = E$-gut ist.

Das zeigt, dass Gleichung (0.52) für jede messbare Funktion f und jede messbare Menge E gilt.

Für $f \equiv 1$ ist die linke Seite $\omega(E)$ und die rechte Seite ist nach Definition $\lambda(E)$. Also ist $\omega = \lambda$ und λ ist somit eindeutig.

Jetzt können wir auf der linken Seite der allgemeinen Gleichung (0.52) das Maß ω durch λ ersetzen und erhalten so die Gleichheit der beiden äußeren Terme in Integrationsformel (0.50); die Gleichheit der beiden Doppelintegrale wurde ja schon als Gleichung (0.46) in Satz 0.55 bewiesen. ■

Die letzten beiden Sätze haben das Produktmaß definiert und gezeigt, dass man Integrale nichtnegativer Funktionen bezüglich dieses Maßes als Doppelintegrale ausrechnen kann. Jetzt ist es nicht mehr weit bis zum berühmten und grundlegenden Satz von Fubini über integrierbare Funktionen auf Produkträumen.

Er wird sich bequemer formulieren lassen nach einer kurzen Bemerkung über die Behandlung nur *fast überall definierter* Funktionen.

Bemerkung und Konvention 0.58 Wir haben bisher an mehreren Stellen gesehen, dass die maßtheoretischen Eigenschaften einer Funktion (z.B., Messbarkeit und Integrierbarkeit) Invarianten von der $\sim$-Äquivalenzklasse der Funktion sind, d.h., ihr Zustand ändert sich nicht, wenn man die Funktion auf einer Nullmenge abändert. Das Gleiche gilt nach Satz 0.41 l) für das Integral der Funktion, falls es existiert.

Die wirklichen Gegenstände der Integrationstheorie sind also nicht messbare Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen, und alle nur von den Äquivalenzklassen abhängenden Begriffe und Operationen lassen sich sinnvoll definieren und anwenden auch für Funktionen, die nur *fast überall* definiert sind.

Ist $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und $N \subseteq X$ eine Nullmenge, und ist

$$f\colon X \setminus N \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

eine Funktion, die nur auf dem Komplement von N definiert ist, so können wir f zu ganz X erweitern, indem wir ihr auf N einen beliebigen konstanten Wert zuordnen. Diese Erweiterung ist genau dann auf X messbar, wenn die ursprüngliche Funktion auf $X \setminus N$ messbar war.

Insbesondere, wenn f auf $X \setminus N$ messbar ist, *lässt* sie sich zu einer messbaren Funktion auf ganz X erweitern. In diesem Fall hat jede messbare Erweiterung von f (und nicht nur die konstant erweiterten) die Eigenschaft, genau dann auf X integrierbar zu sein, wenn f auf $X \setminus N$ integrierbar ist; auch hängt der Wert des Integrals nicht von der Wahl der Erweiterung ab, solange sie messbar ist.

Aus diesem Grund führen wir ab sofort die Sprachkonvention ein, dass wenn wir von Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ sprechen, wir auch Funktionen meinen, die nur fast überall definiert sind.

Es ist trotzdem sinnvoll zu fragen, ob eine solche Funktion auf X messbar oder auf einer messbaren Teilmenge $E \subseteq X$ integrierbar ist — wir verstehen das dann in obigem wohldefinierten Sinn als die Messbarkeit einer beliebigen konstanten Erweiterung oder die Integrierbarkeit über E einer beliebigen messbaren Erweiterung von f zu einer Funktion definiert auf dem ganzen Raum.

Auch haben fast überall definierten Funktionen ein wohldefiniertes Integral auf E, wenn sie dort integrierbar sind — wir berechnen es als das Integral einer beliebigen messbaren Erweiterung von f.

Für die Integrale fast überall definierter Funktionen gelten auch alle bisher bewiesenen Sätze, wenn man Relationen als fast überall geltend versteht und algebraische Operationen oder Grenzwertübergänge nur dort ausführt, wo alle beteiligten Funktionen definiert sind. Da in jedem Fall höchstens abzählbar viele fast überall definierte Funktionen beteiligt sind, ist die Menge, wo mindestens eine nicht definiert ist, schlimmstenfalls eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen, also selber eine Nullmenge, und das Ergebnis der Operation ist wieder eine fast überall definierte Funktion.

Wir können immer ohne Schaden die beteiligten Funktionen jeweils auf einer Nullmenge so abändern, dass die Operationen global ausführbar sind und die Relationen global stimmen, und die Ergebnisse unterscheiden sich nicht von denen, die man mit den nur fast überall definierten Operanden erzielt.

In Zukunft werden wir die Möglichkeit, dass Funktionen auf einer Nullmenge nicht definiert sein könnten, meistens nicht explizit erwähnen, aber sie ist immer hinzuzudenken, auch wenn wir die Aussagen so formulieren, als wären alle zur Rede stehenden Funktionen an allen Stellen definiert.

Satz 0.59 (Fubini) *Seien $(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei $\lambda = \mu \times \nu$ das Produktmaß auf $\mathcal{R} * \mathcal{S}$.*

Sei $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$ eine messbare Teilmenge von $X \times Y$ und sei

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \} \cup \{ -\infty \}$$

eine messbare Funktion, die auf E integrierbar ist.

Dann ist f_x integrierbar auf E_x für fast alle $x \in X$ und f^y ist integrierbar auf E^y für fast alle $y \in Y$.

Die fast überall definierte Funktion $\alpha_E : X \longrightarrow \mathbf{R}$ mit

$$\alpha_E(x) := \int_{E_x} f_x \, d\nu \quad \text{(wenn } f_x \text{ integrierbar ist auf } E_x\text{)}$$

ist integrierbar auf X, die fast überall definierte Funktion $\beta_E : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ mit

$$\beta_E(y) = \int_{E^y} f^y \, d\mu \quad \text{(wenn } f^y \text{ integrierbar ist auf } E^y\text{)}$$

ist integrierbar auf Y, und es gilt

$$\int_E f \, d\lambda = \int_X \alpha_E \, d\mu = \int_Y \beta_E \, d\nu. \tag{0.53}$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $f \geq 0$.

Dann wissen wir aus Satz 0.55 und Lemma 0.57, dass alle Schnitte f_x und f^y messbar und nichtnegativ sind, dass wir α_E und β_E durch die Integration der Schnitte überall definieren können und das wir auf diese Weise messbare Funktionen erhalten (die aber unendliche Werte annehmen können), und dass Gleichung (0.53) gilt.

Weil f auf E integrierbar ist, ist $\int_E f\,d\lambda$ endlich, und deshalb bilden die Unendlichkeitsstellen von α_E und β_E jeweils eine messbare Nullmenge (denn wenn zum Beispiel α_E auf einer Menge U positiven Maßes den Wert ∞ annimmt, so ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Funktion $n\chi_U$ eine messbare Treppenfunktion $\leq \alpha_E$, und die Integrale $n\mu(U)$ dieser Treppenfunktionen sind unbeschränkt, ihr Supremum ist also ∞, und $\int_{X\times Y} f\,d\lambda = \int_X \alpha_E\,d\mu$ kann nicht endlich sein; entsprechend argumentiert man für β_E).

Also nehmen $\alpha_E(x) = \int_{E_x} f_x\,d\nu$ und $\beta_E(y) = \int_{E^y} f^y\,d\mu$ fast überall endliche Werte an. Aber ein endlicher Wert ist gleichbedeutend damit, dass der entsprechende Schnitt integrierbar ist—dieses gilt somit fast überall.

Die Funktionen α_E und β_E sind integrierbar weil sie nichtnegativ sind und weil ihre Integrale, nach Gleichung (0.53) gleich $\int_E f\,d\lambda$, endlich sind. Damit sind alle Behauptungen bewiesen im Fall $f \geq 0$.

Wenn f nicht nur positive Werte annimmt, so können wir den schon bewiesenen Fall anwenden auf die positiven und negativen Anteile f_+ und f_- von f (man erinnere sich, dass $f = f_+ - f_-$).

Die Funktion f ist genau dann auf E integrierbar, wenn f_+ und f_- auf E integrierbar sind, und in diesem Fall sind $\alpha_E^{f_\pm}$ und $\beta_E^{f_\pm}$ messbare, fast überall endliche integrierbare Funktionen, deren Integrale über X bzw. Y das Integral $\int_E f_\pm\,d\lambda$ ergeben.

Offenbar ist

$$\alpha_E^f = \alpha_E^{f_+} - \alpha_E^{f_-}$$

und weil die Terme auf der rechten Seite fast überall endlich sind, ist α_E^f fast überall definiert und endlich, und das bedeutet, dass f_x für fast alle $x \in X$ auf E_x integrierbar ist.

Weil $\alpha_E^{f_+}$ und $\alpha_E^{f_-}$ auf X integrierbar sind, ist auch α_E^f auf X integrierbar, und wie behauptet ist

$$\int_X \alpha_E^f\,d\mu = \int_X \alpha_E^{f_+}\,d\mu - \int_X \alpha_E^{f_-}\,d\mu = \int_E f_+\,d\lambda - \int_E f_-\,d\lambda =: \int_E f\,d\lambda.$$

Die Aussage für die Schnitte f^y und β_E folgt auf ähnliche Weise. ∎

Notation 0.60 Auch die beiden Integrale $\int_X \alpha_E \, d\mu$ und $\int_Y \beta_E \, d\nu$ in Gleichung (0.53) im Satz von Fubini schreibt man in der Regel als Doppelintegrale $\iint_E f \, d\nu \, d\mu$ oder $\iint_E f(x,y) \, dy \, dx$ bzw. $\iint_E f \, d\mu \, d\nu$ oder $\iint_E f(x,y) \, dx \, dy$, ohne sich viel darum zu kümmern, wie der Integrand der äußeren Integration definiert ist, wenn das innere Integral nicht existiert.

Diese Freiheit gibt uns Konvention 0.58.

Der Satz von Fubini besagt, dass man das Integral einer Funktion bezüglich eines Produktmaßes als ein Doppelintegral ausrechnen kann, *wenn man weiß, dass die Funktion bezüglich des Produktmaßes tatsächlich integrierbar ist.* Hier ist eine Falle verborgen, denn um den Satz anzuwenden, reicht es zunächst nicht, die Doppelintegrale auszurechnen und auf Endlichkeit zu prüfen—wenn der Integrand nicht auf dem Produktmaßraum integrierbar ist, sagt der Satz von Fubini gar nichts aus.

In dieser Hinsicht ergänzt der folgende Satz den Satz von Fubini und räumt die erwähnten Bedenken aus, denn er besagt, dass man doch an Hand der Doppelintegrale nicht nur den Wert des Produktraumintegrals bestimmen kann, *falls* er existiert, sondern auch prüfen kann, *ob* er existiert.

Satz 0.61 (Tonelli) *Seien $(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei $\lambda = \mu \times \nu$ das Produktmaß auf $\mathcal{R} * \mathcal{S}$.*

Sei $E \in \mathcal{R} * \mathcal{S}$ eine messbare Teilmenge von $X \times Y$ und sei

$$f \colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \} \cup \{ -\infty \}$$

eine messbare Funktion, so dass die (überall auf X definierte) Funktion

$$\gamma_E(x) := \int_{E_x} |f_x| \, d\nu$$

auf X integrierbar ist.

Dann ist f auf E integrierbar bezüglich des Produktmaßes.

Natürlich gilt diese Aussage auch mit vertauschten Rollen für die Faktoren X und Y.

Beweis. Nach Definition der Integrierbarkeit ist zu zeigen, dass f_+ und f_- auf E integrierbar sind, also dass ihr Integral endlich ist.

$\gamma_E(x)$, gegeben durch das Integral $\int_{E_x} |f_x| \, d\nu$, ist für jedes $x \in X$ als Wert in $\mathbf{R} \cup \{ \infty \}$ definiert, weil der Integrand eine nichtnegative messbare Funktion ist.

Aus dem gleichen Grund sind auch die Funktionen

$$\alpha_E^{f_\pm}(x) := \int_{E_x} (f_\pm)_x \, d\nu$$

überall auf X definiert, und weil $0 \leq f_\pm \leq |f|$, ist offensichtlich

$$0 \leq \alpha_E^{f_\pm}(x) \leq \gamma_E(x)$$

für jedes $x \in X$.

Weil γ_E nach Voraussetzung auf X integrierbar ist, sind es $\alpha_E^{f_\pm}$ auch.

Nach Lemma 0.57 erfüllen die nichtnegativen messbaren Funktionen $f_\pm$ die Beziehung

$$\int_E f_\pm \, d\lambda = \iint_E f_\pm \, d\nu \, d\mu = \int_X \alpha_E^{f_\pm} \, d\mu < \infty.$$

Also sind f_+ und f_- auf E integrierbar und wir sind fertig. ■

Bisher haben wir eine sehr standardmäßige, man kann fast sagen „gutbürgerliche“ Lebesguesche Integrationstheorie präsentiert, in der alle Funktionen reellwertig sind und alle Mengen nichtnegative Maße haben.

Die einzige Forschheit, die wir uns bisher erlaubt haben, war die Integration von Funktionen mit variablem Vorzeichen, und schon dazu war ein Zwischenschritt notwendig, denn ohne Komplikationen lässt sich das Integral nur für nichtnegative Funktionen definieren. Für den allgemeinen Fall mussten wir den Integranden in seine positiven und negativen Anteile zerlegen.

Aber dieser Schritt zeigt vor, wie man die Integration leicht auch auf andere, allgemeinere Situationen erweitern kann.

Eine Erweiterung, die sofort gelingt, ist die Integration komplexwertiger Funktionen. Die Definitionen sind sehr einfach.

Definition 0.62 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei

$$f\colon X \longrightarrow \mathbf{C}$$

eine Funktion.

Wir nennen f eine ***messbare*** komplexwertige Funktion auf X, wenn ihr Realteil $\operatorname{Re} f$ und ihr Imaginärteil $\operatorname{Im} f$ messbare reellwertige Funktionen sind.

Wir nennen f ***integrierbar*** auf einer messbaren Teilmenge $E \subseteq X$, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ auf E integrierbar sind, und in diesem Fall definieren wir

$$\int_E f \, d\mu := \int_E \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f \, d\mu. \tag{0.54}$$

Diese Erweiterung betraf die Funktionswerte, aber wir können uns auch eine größere Freiheit bei den Werten der *Maße* erlauben. Obwohl es zuerst etwas „naturwidrig“ anmutet, gibt es durchaus Verwendungen für ***signierte Maße***, die manchen Mengen einen negativen Inhalt zuordnen. Und es gibt eine enge Beziehung zwischen dieser Idee und dem Integral signierter Funktionen, die uns vorzeigt, wie man es machen kann.

Diese enge Beziehung besteht in einer uns eigentlich schon bekannten fast treuen Übersetzung zwischen Maßen und Funktionen, die wir jetzt als Abschluss zu dieser Einführung über die Lebesgue Integration untersuchen wollen und deren einfachere Richtung durch folgende Bemerkung beschrieben wird:

Bemerkung 0.63 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\}$ eine nichtnegative messbare Funktion.

Für jede Menge $E \in \mathcal{R}$ setzen wir

$$\nu(E) := \int_E f\, d\mu. \tag{0.55}$$

Die Aussagen von Satz 0.41 f), c) und d) für $E = \emptyset$ besagen, dass ν ein Maß auf $\mathcal{R}$ ist.

Diese einfache Bemerkung suggeriert eine Methode, um Maße zu erhalten, die auch negative Werte annehmen—man lasse in Bemerkung 0.63 einfach die Einschränkung $f \geq 0$ weg.

Das würde sofort viele Beispiele von signierten Maßen liefern, aber es ließe noch die Frage offen, wie allgemein diese Beispiele wären. Diese Frage wird noch verständlicher, wenn wir sie für die nichtnegativen Maße stellen: welche Maße ν auf $\mathcal{R}$ kann man durch eine Anwendung von Formel (0.55) aus μ gewinnen? Gibt es welche, die man so nicht erhalten kann?

Teil d) von Satz 0.41 liefert zumindest eine Einschränkung, der ν unterliegt: wenn E eine μ-Nullmenge ist, dann ist $\int_E f\, d\mu$ auch 0 und deshalb sind μ-Nullmengen auch ν-Nullmengen.

Wir werden aber sehen, dass dies die einzige wesentliche Einschränkung auf die durch (0.55) definierten Maße ist.

Um diese Fragen auch für Integrale von Funktionen mit Werten beliebigen Vorzeichens behandeln zu können, wollen wir uns als Nächstes ein bisschen detaillierter mit der Struktur signierter Maße befassen.

Definition 0.64 Sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum. Ein ***signiertes Maß*** auf $\mathcal{R}$ ist eine σ-additive Funktion

$$\nu\colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\} \cup \{\,-\infty\,\},$$

die höchstens einen der Werte ∞ und $-\infty$ annimmt, und die nicht nur unendliche Werte annimmt.

ν heißt ***endlich***, wenn ν weder den Wert ∞ noch den Wert $-\infty$ annimmt.

ν heißt ***positiv***, wenn ν keine negativen Werte annimmt. Das ist gleichbedeutend damit, dass ν ein Maß (im herkömmlichen Sinn) ist.

Ein ***signierter Maßraum*** ist ein Tripel $(X, \mathcal{R}, \nu)$, wo X eine Menge ist, $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X ist und ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{R}$ ist.

Definition 0.65 Sei $(X, \mathcal{R}, \nu)$, ein signierter Maßraum und sei $E \in \mathcal{R}$. Die Menge E heißt

$$\left.\begin{array}{r} \textbf{\textit{positiv}} \\ \textbf{\textit{eine Nullmenge}} \\ \textbf{\textit{negativ}} \end{array}\right\}, \text{ wenn } \nu(B) \begin{cases} \geq 0 \\ = 0 \\ \leq 0 \end{cases} \text{für jede messbare Menge } B \subseteq E.$$

Eine messbare Menge E, die eine dieser drei Eigenschaften besitzt, nennen wir eine ***signierte Menge*** mit Vorzeichen $+$, 0 oder $-$, je nachdem welche der Eigenschaften für sie gilt.

Man beachte, dass Nullmengen auch positiv und negativ sind, und dass es bei signierten Maßen *nicht ausreicht, dass* $\nu(E) = 0$, damit eine Menge E eine Nullmenge ist. Auch jede (messbare) *Teilmenge* von E muss Maß 0 haben!

Bemerkung 0.66 Sei $(X, \mathcal{R}, \nu)$, ein signierter Maßraum.

a) Die positiven Teilmengen von X, die negativen Teilmengen von X und die Nullmengen bilden jeweils einen ***σ-Ring*** (das ist eine nichtleere Familie von Teilmengen, die abgeschlossen ist unter Mengendifferenzen und abzählbaren Vereinigungen—sie unterscheidet sich von einer σ-Algebra nur dadurch, dass sie nicht den ganzen Raum X enthalten muss).

   Diese Behauptung ist klar, denn jede messbare Teilmenge einer signierten Menge ist signiert mit dem gleichen Vorzeichen.

   Deshalb hat eine Differenz $E \setminus D$ von signierten Mengen mit gleichem Vorzeichen als Teilmenge von E auch dieses Vorzeichen.

   Eine abzählbare Vereinigung von Mengen E_i mit gleichem Vorzeichen lässt sich durch Differenzenbildung umschreiben als eine Vereinigung von disjunkten Mengen E_i', die Teilmengen der E_i sind und somit auch dieses Vorzeichen haben. Aus der σ-Additivität von ν folgt leicht, dass auch die Vereinigung E der E_i (oder E_i') das gleiche Vorzeichen hat (denn jede Teilmenge $B \subseteq E$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $B \cap E_i' \subseteq E_i'$).

b) Die leere Menge ist eine Nullmenge, denn nach Definition 0.64 gibt es eine messbare Menge A mit $\nu(A)$ endlich, und weil $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ folgt aus der σ-Additivität von ν, dass $\nu(\emptyset) = 0$ (natürlich gilt das auch für jede Teilmenge von $\emptyset$!).

c) ν ist nicht nur σ-additiv, sondern auch additiv, denn wir können jedes Paar von disjunkten messbaren Mengen M und N durch leere Mengen zu einer abzählbaren disjunkten Familie ergänzen. Weil ν σ-additiv ist und weil $\nu(\emptyset) = 0$, folgt dann $\nu(M \cup N) = \nu(M) + \nu(N)$, weil alle anderen Summanden in der Reihe für $\nu(M \cup N \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots)$ Null sind. Man vergleiche den Beweis von Lemma 0.8 d).

Satz 0.67 (Hahn Zerlegung) *Sei X eine Menge, sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X und sei ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{R}$. Dann lässt sich X zerlegen als die disjunkte Vereinigung*

$$X = E \overset{D}{\cup} F$$

von zwei messbaren Mengen, so dass E positiv ist und F negativ ist.

Eine solche Zerlegung nennt man eine ***Hahn Zerlegung*** von X.

Beweis. Nach Definition eines signierten Maßes nimmt ν nicht beide Werte $+\infty$ und $-\infty$ an. Wir nehmen an, der Wert $+\infty$ wird nicht angenommen (andernfalls ersetze ν durch $-\nu$; dadurch vertauschen sich zwar die Eigenschaften positiv und negativ, aber signierte Mengen bleiben signiert und eine Hahn Zerlegung bleibt eine Hahn Zerlegung, nur mit anderen Vorzeichen).

Es gibt immer positive Teilmengen von X, denn nach Bemerkung 0.66 b) ist $\emptyset$ eine Nullmenge, also auch positiv. Sei

$$\lambda := \sup \{ \nu(A) \mid A \in \mathcal{R} \text{ ist positiv} \}.$$

Dann gibt es eine Folge $\{ E_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ von positiven Mengen mit $\lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = \lambda$. Sei

$$E := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Dann ist E positiv, weil die positiven Mengen einen σ-Ring bilden.

Auf diesem σ-Ring ist ν positiv und σ-additiv und deshalb auch monoton, und da $E_n \subseteq E$ für jedes n, haben wir

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) \leq \nu(E) \leq \lambda.$$

Also ist $\nu(E) = \lambda$.

Insbesondere, da ν nie den Wert ∞ annimmt ist λ endlich.

Wir wissen schon, dass E eine positive Menge ist, und wir behaupten, dass $F := X \setminus E$ eine negative Menge ist (damit wäre der Satz bewiesen).

F kann keine *positive* Menge P enthalten mit $\nu(P) > 0$, weil sonst $E \cup P$ positiv wäre und wir hätten

$$\nu(E \cup P) = \nu(E) + \nu(P) > \nu(E) = \lambda,$$

in Widerspruch zur Wahl von λ (man beachte, dass P und E disjunkt sind, weil $P \subseteq F$).

Um zu zeigen, dass F negativ ist, müssen wir zeigen, dass es *überhaupt* keine messbare Menge $A \subseteq F$ gibt mit $\nu(A) > 0$. Angenommen, es gäbe doch eine solche Menge A.

Durch Induktion über n konstruieren wir jetzt parallel eine absteigende Folge $\{ A_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ von messbaren Teilmengen von $A \subseteq F$ und eine Folge $\{ B_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ von *disjunkten* messbaren Teilmengen $B_n \subseteq A_n$, so dass $\nu(A_n) > 0$ und $\nu(B_n) < 0$ für jedes n.

Um die Induktion zu beginnen setzen wir $A_0 := A$.

Wenn $A_n \subseteq F$ schon definiert ist und $\nu(A_n) > 0$, dann kann A_n nicht positiv sein, also gibt es messbare Mengen $B \subseteq A_n$ mit $\nu(B) < 0$.

Sei

$$a_n := \inf \{ \nu(B) \mid B \in \mathcal{R} \text{ und } B \subseteq A_n \} < 0$$

und sei

$$b_n := \max\Bigl(\frac{a_n}{2}, -1\Bigr) < 0.$$

Man wähle nun eine messbare Menge $B_n \subseteq A_n$ mit $\nu(B_n) < b_n$; wir haben $\nu(B_n) < 0$, wie gewünscht.

Um die Induktion fortzusetzen, setze

$$A_{n+1} := A_n \setminus B_n.$$

Weil ν additiv ist, folgt aus den Induktionsvoraussetzungen $\nu(A_n) > 0$ und $\nu(B_n) < 0$, dass

$$\nu(A_{n+1}) = \nu(A_n) - \nu(B_n) > 0,$$

so dass die Induktion mit A_{n+1} tatsächlich fortgesetzt werden kann.

Es ist klar aus dieser Konstruktion, dass die A_n eine absteigende Folge bilden und dass $B_n \subseteq A_n$ aber $B_n \cap A_{n+1} = \emptyset$, woraus folgt, dass jedes B_n zu allen seinen Nachfolgern disjunkt ist und somit die Mengen B_n insgesamt paarweise disjunkt sind.

Sei

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq A.$$

Aus der Konstruktion sieht man leicht durch Induktion, dass

$$A_n = A - \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k$$

für jedes n, und daraus folgt sofort, dass

$$A \setminus B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Weil die B_n disjunkt sind, ist

$$\nu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n) < \sum_{n=0}^{\infty} b_n < 0, \tag{0.56}$$

und aus der Additivität von ν folgt ferner

$$\nu(A) = \nu(A \setminus B) + \nu(B).$$

Da die linke Seite nach Annahme positiv ist, kann die rechte Seite keinen Summanden $-\infty$ haben, und deshalb ist insbesondere

$$\nu(B) > -\infty.$$

Also konvergieren die Reihen in Gleichung (0.56) (die nur negative Summanden haben). Daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Für große n ist also $b_n > -1$ und deshalb $b_n = a_n/2$. Also konvergieren auch die a_n gegen 0.

Wir haben

$$\nu(A \setminus B) = \nu(A) - \nu(B) > \nu(A) > 0.$$

Ferner, weil für jedes n die Menge A_n keine messbaren Teilmengen C besitzt mit $\nu(C) < a_n$, kann auch $A \setminus B$ keine solche Teilmengen enthalten. Weil dies für jedes n gilt und weil die a_n negative Zahlen sind mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, kann $A \setminus B$ keine Teilmengen C enthalten mit $\nu(C) < 0$. Das besagt, dass $A \setminus B$ eine positive Menge ist.

Dies widerspricht der Feststellung, dass F keine positiven Teilmengen positiven Maßes enthalten kann.

Also war die Annahme falsch, dass F eine Teilmenge A positiven Maßes besitzt, und wir haben damit gezeigt, dass $F = X \setminus E$ eine negative Menge ist. E und F bilden die gesuchte Hahn Zerlegung von X. ■

Bemerkung 0.68 Sei X eine Menge, sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X und sei ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{R}$.

Die Hahn Zerlegung von X ist eindeutig „bis auf Nullmengen". Das bedeutet genauer, dass wenn

$$X = E \overset{\mathrm{D}}{\cup} F = E' \overset{\mathrm{D}}{\cup} F'$$

zwei verschiedene Hahn Zerlegungen von ν sind, dann sind die symmetrischen Differenzen $E \bigtriangleup E'$ und $F \bigtriangleup F'$ Nullmengen.

Denn $E \setminus E' = E \cap F' = F' \setminus F$ und $E' \setminus E = E' \cap F = F \setminus F'$. Diese Mengendifferenzen lassen sich also als einen Durchschnitt einer positiven mit einer negativen Menge schreiben.

Jeder solche Durchschnitt D ist automatisch eine Nullmenge, weil jedes $C \subseteq D$ gleichzeitig Teilmenge einer positiven und einer negativen Menge ist und deshalb gleichzeitig gilt $\nu(C) \geq 0$ und $\nu(C) \leq 0$.

Definition 0.69 (Jordan Zerlegung) Sei X eine Menge, sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X und sei ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{R}$. Sei

$$X = E \overset{\mathrm{D}}{\cup} F$$

eine Hahn Zerlegung für ν.

Wir definieren zwei Maße $\nu_\pm$ auf $\mathcal{R}$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \nu_+(A) &:= \nu(A \cap E) \\ \nu_-(A) &:= -\nu(A \cap F) \end{aligned} \tag{0.57}$$

für jedes $A \in \mathcal{R}$.

Man prüft leicht nach, dass ν_+ und ν_- positive Maße sind und dass

$$\nu = \nu_+ - \nu_- . \tag{0.58}$$

Die Zerlegung (0.58) nennt man die ***Jordan Zerlegung*** von ν.

Die Jordan Zerlegung ist eindeutig und ist unabhängig von der Wahl der Hahn Zerlegung für ν, denn für eine andere Hahn Zerlegung ändern sich die Mengen $A \cap E$ und $A \cap F$ in (0.57) nur durch Nullmengen, die Werte von ν und somit von $\nu_\pm$ bleiben also bestehen.

Lemma und Definition 0.70 *Sei X eine Menge, sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X und sei ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{R}$. Wir sagen, dass ein positives Maß μ das signierte Maß ν* ***dominiert****, wenn für jede Menge $A \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\mu(A) \geq |\nu(A)| . \tag{0.59}$$

Mit Hilfe der Jordan Zerlegung konstruieren wir aus ν ein positives Maß

$$|\nu| := \nu_+ + \nu_-, \tag{0.60}$$

*das wir die **Gesamtschwankung** von ν nennen.*

Dieses Maß dominiert ν und ist dadurch charakterisiert, dass es das kleinste *ν dominierende positive Maß ist.*

Beweis. Dass ν von $|\nu|$ dominiert wird, sieht man sofort aus der Dreiecksungleichung, denn für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt

$$|\nu(A)| = |\nu_+(A) - \nu_-(A)| \leq |\nu_+(A)| + |\nu_-(A)| = \nu_+(A) + \nu_-(A) = |\nu|(A).$$

Wir müssen noch zeigen, dass $|\nu|$ das kleinste Maß ist, das ν dominiert.

Sei $X = E \overset{\mathrm{D}}{\cup} F$ eine Hahn Zerlegung für ν. Aus der definierenden Gleichung (0.57) für $\nu_\pm$ ist klar, dass E eine ν_- Nullmenge ist und dass F eine ν_+ Nullmenge ist. Folglich ist $|\nu| = \nu = \nu_+$ auf Teilmengen von E und $|\nu| = -\nu = \nu_-$ auf Teilmengen von F.

Hieraus ist klar, dass für messbare Teilmengen C von E *oder* F gilt $0 \leq |\nu|(C) = \pm\nu(C)$ und somit

$$|\nu|(C) = |\nu(C)|. \tag{0.61}$$

Wenn μ ein beliebiges ν dominierendes Maß ist und A eine messbare Menge, so erhalten wir auf Grund von (0.61), dass

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \cap E) + \mu(A \cap F) \\ &\geq |\nu(A \cap E)| + |\nu(A \cap F)| \\ &= |\nu|(A \cap E) + |\nu|(A \cap F) = |\nu|(A). \end{aligned}$$

In anderen Worten, $\mu \geq |\nu|$, wie behauptet. ■

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir jetzt zu der Frage zurück, welche Maße man als Integrale von geeigneten Funktionen bezüglich eines vorgegebenen Maßes erhalten kann. Aber wir können die Frage jetzt allgemein behandeln und müssen uns nicht auf nichtnegative Funktionen beschränken.

Eine Eigenschaft, die ein durch das Integral definiertes Maß erfüllen muss, haben wir schon auf Seite 65 in Anschluss an Bemerkung 0.63 erwähnt:

Definition 0.71 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{R}$.

Wir sagen ν ist ***absolut stetig*** bezüglich μ, oder kürzer ***μ-stetig***, wenn jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist. Wir schreiben in diesem Fall

$$\nu \ll \mu.$$

Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass für jede messbare Menge E mit $\mu(E) = 0$ auch gilt $\nu(E) = 0$.

Die Äquivalenz beider Formulierungen ist nicht tautologisch, denn damit E eine Nullmenge bezüglich des signierten Maßes ν ist, reicht es nicht, dass nur $\nu(E) = 0$; auch alle messbaren Teilmengen C von E müssen ν-Maß 0 haben.

Das tun sie aber, wenn E eine μ-Nullmenge ist und die einfachere Formulierung gilt, denn μ ist als positives Maß monoton, und somit hat jede messbare Teilmenge $C \subseteq E$ automatisch $\mu(C) = 0$ und somit $\nu(C) = 0$.

Bemerkung 0.72 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum, sei λ ein Maß auf $\mathcal{R}$ und sei ν ein signiertes Maß auf $\mathcal{R}$.

a) Wenn $\lambda \ll \mu$ und wenn $\nu \ll \lambda$, dann ist $\nu \ll \mu$; der Nachweis ist trivial.

b) ν, ν_+ und ν_- sind alle $|\nu|$-stetig.

   Denn sei $A \in \mathcal{R}$. Wenn $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$, dann ist $\nu_+(A) = \nu_-(A) = 0$ weil ν_+ und ν_- positive Maße sind, und daraus folgt auch $\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A) = 0$.

c) $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn $|\nu| \ll \mu$.

   Die Richtung „$\Leftarrow$“ folgt sofort aus b) und a) mit $\lambda = |\nu|$. Für die andere Richtung sei $\nu \ll \mu$, und sei $X = E \cup F$ eine Hahn Zerlegung für ν. Wenn A eine μ-Nullmenge ist, dann ist A eine ν-Nullmenge und daraus folgt, dass

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap E) = 0 \qquad \text{und} \qquad \nu_-(A) = -\nu(A \cap F) = 0.$$

   Also ist $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$.

Satz 0.73 (Radon-Nikodym) *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei ν ein positives Maß auf $\mathcal{R}$ mit $\nu \ll \mu$.*

Dann existiert eine nichtnegative messbare Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz $\sim$, so dass für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu. \tag{0.62}$$

Beweis. Bevor wir mit dem Kern des Beweises beginnen, wollen wir uns überzeugen, dass es reicht, den Satz zu beweisen im Fall wo μ ein endliches Maß ist.

Denn schreibe $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ als abzählbare Vereinigung von messbaren Teilmengen mit $\mu(X_i) < \infty$. Auf die übliche Weise kann man erreichen, dass die X_i disjunkt sind (wenn das nicht von vornherein so ist, ersetze man jedes X_i durch $X_i \setminus \bigcup_{j<i} X_j$ und die neuen Mengen sind disjunkt und haben kleineres und insbesondere immer noch endliches Maß).

Wenn der Satz von Radon-Nikodym für endliche Maßräume gilt, so gibt es für jedes $i \in \mathbf{N}$ eine Funktion $f_i \colon X_i \longrightarrow \mathbf{R}$, so dass

$$\nu(A_i) = \int_{A_i} f_i \, d\mu$$

für jede messbare Teilmenge $A_i \subseteq X_i$.

Definiere $f \colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ durch die Vorschrift $f(x) := f_i(x)$ für das nach Annahme eindeutig bestimmte i mit $x \in X_i$.

Aus der σ-Additivität von ν und vom Integral als Funktion des Integrationsbereiches folgt, dass für jede Menge $A \in \mathcal{R}$ gilt

$$\nu(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(A \cap X_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A \cap X_i} f_i \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A \cap X_i} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu,$$

wie gewünscht.

Auch die Eindeutigkeitsaussage gilt für jeden σ-endlichen Maßraum, wenn sie für endliche Maßräume gilt. Denn sei g eine zweite nichtnegative messbare Funktion $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \}$, so dass für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$.

Sei

$$N := \{ x \in X \mid f(x) \neq g(x) \} .$$

Wenn die Eindeutigkeitsaussage für endliche Maßräume gilt, dann ist $\mu(N \cap X_i) = 0$ für jedes $i \in \mathbf{N}$ (da $\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$ für jede messbare Teilmenge A von X_i), und weil μ σ-additiv ist haben wir

$$\mu(N) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(N \cap X_i) = 0,$$

d.h., $f = g$ fast überall auf X.

Wir können also jetzt annehmen, dass $\mu(X) < \infty$.

Für jede reelle Zahl $\alpha \geq 0$ betrachten wir das signierte Maß

$$\nu_\alpha := \nu - \alpha\mu.$$

Man beachte, dass ν_α zwar den Wert ∞ annehmen kann, aber weil ν positiv und μ endlich ist, kann es nie den Wert $-\infty$ annehmen. ν_α ist also tatsächlich ein signiertes Maß auf X.

Wir suchen eine Funktion f, die (0.62) erfüllt. Zwar stehen uns die Werte von f nicht direkt zur Verfügung, aber wir können zumindest mit Hilfe der

ν_α weitgehend einschränken, wie eine solche Funktion aussehen kann, denn für jede solche Funktion f und für jede messbare Menge A gilt

$$\nu_\alpha(A) = \int_A f\,d\mu - \int_A \alpha\,d\mu = \int_A f - \alpha\,d\mu$$

und dieses Integral ist immer ≤ 0, wenn $f \leq \alpha$ auf A, und ist immer ≥ 0, wenn $f \geq \alpha$ auf A.

In anderen Worten, auch wenn wir f noch nicht kennen, können wir aus der Hahn Zerlegung von ν_α ablesen, wo $f \leq \alpha$ und wo $f \geq \alpha$. Diese Idee führt dann direkt zur Konstruktion einer geeigneten Funktion f.

Für jedes $\alpha \geq 0$ sei

$$X = E_\alpha \overset{\mathrm{D}}{\cup} F_\alpha$$

eine Hahn Zerlegung für das signierte Maß ν_α. Man beachte, dass $\nu_0 = \nu$ ein positives Maß ist, und für diesen speziellen Wert von α wollen wir $E_0 = X$ und $F_0 = \emptyset$ wählen.

Wir definieren $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$f(x) := \sup\{\, \alpha \geq 0 \in \mathbf{Q} \mid x \in E_\alpha \,\}\,. \tag{0.63}$$

Offensichtlich ist $f \geq 0$.

Hier ist eine andere nützliche Beschreibung von f. Für jedes rationale $\alpha \geq 0$ setze

$$s_\alpha := \alpha \chi_{E_\alpha};$$

dies ist eine messbare Treppenfunktion und hat den Wert α auf E_α und den Wert 0 außerhalb E_α. Daraus ist sofort klar, dass

$$f = \sup_{\alpha \geq 0 \in \mathbf{Q}} s_\alpha.$$

Als das Supremum einer abzählbaren Familie von messbaren Funktionen ist f also messbar.

Um das Integral von f zu berechnen ersetzen wir die Familie $\{\, s_\alpha \,\}$ durch eine monoton steigende Folge. Dazu sei $0 = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine mit der Zahl 0 beginnende Abzählung von $\mathbf{Q} \cap [0, \infty)$, und für jedes $i \in \mathbf{N}$ setze

$$t_i := \max\{\, s_0, s_1, \ldots, s_i \,\}\,.$$

Die t_i bilden eine monoton steigende Folge von messbaren Treppenfunktionen mit $f = \lim\limits_{i\to\infty} t_i$, und nach dem Satz von Beppo Levi ist

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_A t_i\,d\mu$$

für jede messbare Menge A.

Nach Definition, und weil wir 0 als α_0 gewählt haben, nimmt t_i höchstens die endlich vielen Werte α_j für $0 \le j \le i$ an, jeweils auf einer Teilmenge D_j von E_{α_j}, und es gilt

$$X = \bigcup_{j=0}^{i} D_j.$$

Sei $A \in \mathcal{R}$. Für jedes einzelne j ist $D_j \subseteq E_{\alpha_j}$ und deshalb ist

$$\begin{aligned}\nu(A \cap D_j) - \int_{A \cap D_j} t_i \, d\mu &= \nu(A \cap D_j) - \int_{A \cap D_j} \alpha_j \, d\mu \\ &= \nu(A \cap D_j) - \alpha_j \mu(A \cap D_j) = \nu_{\alpha_j}(A \cap D_j) \ge 0,\end{aligned}$$

denn E_{α_j} war ja positiv für ν_{α_j}.

Wenn wir diese Ungleichungen für j von 0 bis i summieren finden wir $\nu(A) - \int_A t_i \, d\mu \ge 0$ oder

$$\nu(A) \ge \int_A t_i \, d\mu$$

für jedes $i \in \mathbf{N}$, und daraus folgt

$$\nu(A) \ge \int_A f \, d\mu \tag{0.64}$$

für jede messbare Menge A.

Wir müssen zeigen, dass in (0.64) immer die Gleichheit gilt.

Sie gilt auf jeden Fall, wenn $\int_A f \, d\mu = \infty$, denn dann muss auch die linke Seite unendlich sein. Wenn also die Gleichheit nicht immer gilt, dann versagt sie für eine Menge P, für die $\int_P f \, d\mu$ endlich ist.

Wir werden unsere weiteren Betrachtungen auf P einschränken.

Aus der Endlichkeit von $\int_P f \, d\mu$ folgt, dass auch

$$\int_A f \, d\mu < \infty \tag{0.65}$$

für jede messbare Teilmenge $A \subseteq P$.

Deshalb ist

$$\lambda(A) := \nu(A) - \int_A f \, d\mu$$

definiert (da nicht von der Form $\infty - \infty$) für jedes A in der σ-Algebra

$$\mathcal{R}_P := \{ A \in \mathcal{R} \mid A \subseteq P \},$$

und diese Zuordnung bildet eine σ-additive und wegen (0.64) positive Mengenfunktion, für die offensichtlich gilt $\lambda(\emptyset) = 0$. In anderen Worten, λ ist ein (vielleicht unendliches) Maß auf $\mathcal{R}_P$.

Nach Annahme ist $\lambda(P) > 0$ und weil $f \geq 0$ ist auch $\nu(P) > 0$ und deshalb $\mu(P) \neq 0$ (da $\nu \ll \mu$).

Sei
$$\beta := \frac{\lambda(P)}{\mu(P)} > 0$$
und sei γ eine rationale Zahl mit $0 < \gamma < \beta$.

Sei κ das auf $\mathcal{R}_P$ definierte signierte Maß $\lambda - \gamma\mu$ und sei $P = Q \cup R$ eine Hahn Zerlegung dafür. Wir haben
$$0 = \lambda(P) - \beta\mu(P) < \lambda(P) - \gamma\mu(P) = \kappa(P) = \kappa(Q) + \kappa(R),$$
und weil $\kappa(R) \leq 0$ ist $\kappa(Q) > 0$, somit auch $\nu(Q) > 0$, und wegen der μ-Stetigkeit von ν dann auch $\mu(Q) > 0$.

Wir werden jetzt einen Widerspruch herleiten, indem wir zeigen, dass f fast überall auf Q den Wert ∞ annimmt, sodaß $\int_Q f\,d\mu = \infty$ entgegen der Feststellung (0.65).

Dazu zeigen wir durch Induktion über n, dass für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Menge
$$Q_n^- := \{\, x \in Q \mid f(x) < n\gamma \,\}$$
eine μ-Nullmenge ist.

Man beachte, dass nach Definition von f genau dann $f(x) < n\gamma$, wenn es eine rationale Zahl α mit $0 \leq \alpha < n\gamma$ gibt, so dass $x \notin E_\alpha$, oder gleichbedeutend, so dass $x \in F_\alpha$. Wir können also schreiben
$$Q_n^- = Q \cap \bigcup_{\substack{\alpha \in \mathbf{Q} \\ 0 \leq \alpha < n\gamma}} F_\alpha = \bigcup_{\substack{\alpha \in \mathbf{Q} \\ 0 \leq \alpha < n\gamma}} (Q \cap F_\alpha).$$

Für $n = 0$ ist $Q_0^- = \emptyset$ weil $f \geq 0$. Das liefert den Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbf{N}$ beliebig, so dass $\mu\big(Q_n^-\big) = 0$.

Wir setzen
$$Q_n^+ := Q \setminus Q_n^- = \{\, x \in Q \mid f(x) \geq n\gamma \,\}$$
und für jede nichtnegative rationale Zahl $\alpha < n\gamma$ betrachten wir die Menge
$$S_\alpha := Q_n^+ \cap F_{\alpha+\gamma}.$$

Weil dies eine Teilmenge von $F_{\alpha+\gamma}$ ist, ist $\nu(S_\alpha) - (\alpha + \gamma)\mu(S_\alpha) \leq 0$.

Wenn $\mu(S_\alpha) > 0$, dann ist

$$\begin{aligned}
\kappa(S_\alpha) &= \nu(S_\alpha) - \int_{S_\alpha} f\,d\mu - \gamma\mu(S_\alpha) \\
&\le \nu(S_\alpha) - \int_{S_\alpha} n\gamma\,d\mu - \gamma\mu(S_\alpha) \\
&= \nu(S_\alpha) - (n\gamma + \gamma)\mu(S_\alpha) \\
&< \nu(S_\alpha) - (\alpha + \gamma)\mu(S_\alpha) \le 0
\end{aligned}$$

in Widerspruch zur Tatsache, dass $Q \supseteq S_\alpha$ eine positive Menge für κ war.

Also ist $\mu(S_\alpha) = 0$.

Damit ist auch die abzählbare Vereinigung von Nullmengen

$$Q_n^- \cup \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\le\alpha<n\gamma}} S_\alpha$$

eine μ-Nullmenge.

Wir können diese Menge auch schreiben als

$$\begin{aligned}
Q_n^- \cup \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\le\alpha<n\gamma}} S_\alpha &= Q_n^- \cup \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\le\alpha<n\gamma}} (Q_n^+ \cap F_{\alpha+\gamma}) \\
&= Q_n^- \cup \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\le\alpha<n\gamma}} (Q \cap F_{\alpha+\gamma}) \qquad \text{(weil } Q \setminus Q_n^+ \subseteq Q_n^-\text{)} \\
&= \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\le\alpha<n\gamma}} (Q \cap F_\alpha) \cup \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\le\alpha<n\gamma}} (Q \cap F_{\alpha+\gamma}) \\
&= \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\le\alpha<(n+1)\gamma}} (Q \cap F_\alpha) \\
&= Q_{n+1}^-.
\end{aligned}$$

Also ist $\mu(Q_{n+1}^-) = 0$ und das beweist den Induktionsschritt.

Weil jedes Q_n^- eine μ-Nullmenge ist, ist die Menge

$$Q^- := \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n^-$$

insgesamt eine μ-Nullmenge, und auf dem Komplement $Q^+ := Q \setminus Q^-$ ist $f \ge n\gamma$ für jedes $n \in \mathbf{N}$, also $f \equiv \infty$.

Wir haben $\mu(Q^+) = \mu(Q) > 0$. Folglich ist $\int_{Q^+} f \, d\mu = \infty$, in Widerspruch zu (0.65).

Also gilt doch die Gleichheit in (0.64).

Wir müssen noch die Eindeutigkeitsaussage beweisen. Sei g eine zweite nichtnegative messbare Funktion $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \}$, so dass für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$.

Auf der Menge

$$K := \{ x \in X \mid f(x) < g(x) \}$$

kann f keine unendlichen Werte annehmen, und deshalb ist $g - f$ dort überall definiert und > 0.

Die Idee, die sich jetzt aufdrängt, ist aus der Gleichheit der Integrale von f und g zu schließen, dass $\int_K g - f \, d\mu = 0$, woraus die Äquivalenz von f und g auf K folgen würde.

Leider muss man hier etwas aufpassen, denn obwohl f auf K nur endliche Werte annimmt und obwohl $\mu(K)$ endlich ist, kann es trotzdem vorkommen, dass $\nu(K) = \int_K f \, d\mu = \infty$, und dann könnte man aus der Tatsache, dass $\int_K f \, d\mu = \int_K g \, d\mu = \infty$ überhaupt keine Schlüsse über den Wert von $\int_K g - f \, d\mu$ ziehen.

Wir müssen also dafür sorgen, dass nicht nur die Funktion f sondern auch die vorkommenden Integrale endlich sind, und das verkompliziert den Beweis geringfügig. Wir gehen wie folgt vor.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$K_n := \{ x \in K \mid f(x) \leq n \} .$$

Weil f dort beschränkt ist, ist

$$\nu(K_n) = \int_{K_n} f \, d\mu \leq \int_{K_n} n \, d\mu = n\mu(K_n) < \infty$$

und weil aus diesem Grund f und somit auch g integrierbar auf K_n sind können wir nun schließen, dass

$$0 = \nu(K_n) - \nu(K_n) = \int_{K_n} g \, d\mu - \int_{K_n} f \, d\mu = \int_{K_n} g - f \, d\mu.$$

Teil f) von Satz 0.41 besagt, dass $\{ x \in K_n \mid (g - f)(x) > 0 \}$ eine μ-Nullmenge ist. Diese Menge ist aber ganz K_n (nach Definition von K) und somit ist $\mu(K_n) = 0$.

Weil f auf K endlich ist, ist K die Vereinigung der K_n und weil dies abzählbar viele messbare Mengen sind haben wir

$$\mu(K) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(K_n) = 0.$$

Entsprechend ist $G := \{ x \in X \mid g(x) < f(x) \}$ eine Nullmenge.

f und g sind genau auf $K \cup G$ verschieden; dies ist eine Nullmenge und somit ist $f \sim g$. ∎

Der gerade bewiesene Satz bezieht sich auf nichtnegative messbare Funktionen, deren Integral immer definiert ist aber unendlich sein kann. Wie bei vielen Sätzen über die Lebesgue Integration gibt es noch eine Variante des Satzes, die sich auf signierte aber integrierbare Funktionen bezieht (und entsprechend auf signierte aber endliche Maße).

Satz 0.74 (Radon-Nikodym) *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei ν ein endliches signiertes Maß auf $\mathcal{R}$ mit $\nu \ll \mu$.*

Dann existiert eine integrierbare Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \} \cup \{ -\infty \}$, eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz $\sim$, so dass für jedes $A \in \mathcal{R}$ gilt

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu. \tag{0.66}$$

Beweis. Sei $X = E \cup F$ eine Hahn Zerlegung von X. Auf messbaren Teilmengen von E ist $\nu \geq 0$ und auf messbaren Teilmengen von F ist $-\nu \geq 0$.

Nach Satz 0.73 gibt es messbare nichtnegative Funktionen

$$f_p\colon E \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \} \qquad \text{und} \qquad f_m\colon F \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \infty \},$$

eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz, so dass

$$\nu(A) = \int_A f_p \, d\mu \quad \text{für jedes messbare } A \subseteq E$$

und

$$-\nu(B) = \int_B f_m \, d\mu \quad \text{für jedes messbare } B \subseteq F.$$

Da ν endlich ist, sind f_p und f_m integrierbar.

Weil E und F disjunkt sind und ihre Vereinigung X ist, haben f_p und $-f_m$ eine eindeutig bestimmte gemeinsame Erweiterung zu einer Funktion f auf X mit $f|E = f_p$ und $f|F = -f_m$.

Da $f_p \geq 0$ und $-f_m \leq 0$ ist es klar, dass $f_+ = f_p$ auf E und $f_+ \equiv 0$ auf F, und dass $f_- \equiv 0$ auf E und $f_- = f_m$ auf F. Insbesondere sind f_+ und f_- integrierbar auf X und somit ist f integrierbar.

Wie verlangt geben die Integrale von f das signierte Maß ν wieder, denn

$$\int_A f \, d\mu = \int_{A\cap E} f \, d\mu + \int_{A \cap F} f \, d\mu =$$
$$\int_{A\cap E} f_p \, d\mu - \int_{A\cap F} f_m \, d\mu = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap F) = \nu(A)$$

für jede messbare Teilmenge A von X.

Angenommen, g ist eine weitere Funktion $X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ mit $\nu(A) = \int_A g\, d\mu$ für jede messbare Menge A.

Insbesondere gilt $\nu(A) = \int_A g\, d\mu = \int_A f_p\, d\mu$ für jede messbare Teilmenge A von E, und aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 0.73 folgt, dass

$$g|E \sim f_p = f|E.$$

Die gleiche Betrachtung für Teilmengen A von F zeigt, dass

$$g|F \sim -f_m = f|F.$$

Die Funktionen g und f unterscheiden sich also nur auf der Vereinigung einer μ-Nullmenge $\subseteq E$ mit einer μ-Nullmenge $\subseteq F$, d.h. insgesamt nur auf einer μ-Nullmenge in X, und wir haben $f \sim g$.

Die Funktion f ist also eindeutig bis auf Äquivalenz. ■

Definition 0.75 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei ν ein positives oder ein endliches signiertes Maß auf $\mathcal{R}$ mit $\nu \ll \mu$.

Die Funktion f, als dessen Integral ν darstellbar ist, und dessen fast eindeutige Existenz von den Radon-Nikodym Sätzen garantiert wird, nennt man die ***Radon-Nikodymsche Ableitung*** von ν bezüglich μ, und man notiert sie oft mit

$$\frac{d\nu}{d\mu}.$$

Die Motivation für diese Notation liegt in der Tatsache, dass für jede messbare Teilmenge A von X gilt

$$\int_A 1\, d\nu = \int_A d\nu = \int_A f\, d\mu,$$

so dass man rein formal schreiben kann $d\nu = f\, d\mu$; beide Seiten haben das „gleiche Integral".

Mit Hilfe der Radon-Nikodymschen Ableitung kann man eine Version des Substitutionssatzes für die Lebesguesche Integration formulieren. Darauf wollen wir jetzt nicht näher eingehen.

Kapitel 1

Normierte Vektorräume

In diesem Abschnitt wollen wir mit der eigentlichen Funktionalanalysis beginnen und die Gegenstände einführen, die das Hauptuntersuchungsobjekt dieser Theorie bilden—wie in der Einleitung erklärt, handelt es sich dabei um gewisse Vektorräume von Funktionen, und diese Funktionenräume tragen neben der algebraischen Struktur auch eine mit ihr harmonisierende topologische Struktur.

Die Funktionalanalysis interessiert sich für beide Strukturen gleichzeitig und stützt sich in ihren Methoden auf die Wechselwirkung zwischen diesen Strukturen. Gerade das macht das Wesen und die enorme Leistungsfähigkeit funktionalanalytischer Betrachtungen aus.

Die Gegenstände der Funktionalanalysis sind also ***topologische Vektorräume***. Aber die Topologien, die auftreten, sind meistens von einer ganz speziellen Art—fast immer sind es so genannte metrische Topologien, bestimmt durch eine Entfernungsfunktion, und diese Entfernungsfunktion stammt in der Regel von einer ***Norm***, also von einer Längenfunktion für Vektoren.

Oft verlangt man zusätzliche Eigenschaften, die die Funktionenräume, die man im Sinn hat, auch erfüllen, und die in der Folge angenehme und nützliche Konsequenzen haben.

Eine solche Eigenschaft, die man häufig voraussetzt, ist dass die Norm ***vollständig*** ist, d.h., dass Cauchyfolgen konvergieren, so dass der Vektorraum keine „Lücken“ hat. Normierte Vektorräume mit dieser Eigenschaft nennt man ***Banachräume*** nach dem polnischen Mathematiker Stefan Banach (1892-1945), der sie eingeführt hat und der einer der wichtigsten Begründer der modernen Funktionalanalysis war. Es lohnt sich, Banachs Lebensgeschichte zu lesen—er war ein brillianter aber sehr exzentrischer Mensch, der nie eine Prüfung abgelegt hat (weil er eine sehr starke Abneigung dagegen hatte) und der den Großteil seiner Arbeitszeit im Café verbrachte.

Wichtig ist auch die spezielle Klasse der Banachräume, in der die Norm von einem inneren Produkt stammt—Banachräume von dieser Gestalt nennt man ***Hilberträume***.

Im jetzigen Kapitel 1 werden wir diese und weitere wichtige Klassen von topologischen Vektorräumen einführen und ihre Grundeigenschaften und Grundstruktur erläutern, wobei wir neben den Vektorräumen unser Augenmerk auch auf die stetigen linearen Abbildungen zwischen ihnen richten werden.

In der Regel werden diese Betrachtungen sich auf die oben genannten normierten Vektorräume beziehen, und nicht auf abstrakte und „anonyme" topologische Vektorräume. Trotzdem beginnen wur unsere Untersuchung mit dem allgemeinen Fall, um einige einfache Grundsätze zu besprechen, die in allen topologischen Vektorräumen gelten.

An die wichtigen Begriffe und Definitionen aus der Topologie erinnern wir als Vorbereitung nur ganz kurz.

Definition 1.1 Sei X eine Menge. Eine ***Topologie*** auf X ist eine Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, genannt die ***offenen Mengen*** der Topologie, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

a) Die Mengen $\emptyset$ und X sind offen (also gehören zu $\mathcal{T}$);

b) jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen;

c) jeder *endliche* Durchschnitt von offenen Mengen ist offen.

Ein ***topologischer Raum*** ist eine Paar $(X, \mathcal{T})$, wo X eine Menge ist und wo $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist. (Aus Bequemlichkeitsgründen spricht man oft nur von dem „topologischen Raum X" und erwähnt die Topologie $\mathcal{T}$ nicht explizit, wenn es klar ist oder nicht spezifiziert werden muss, mit welcher Topologie X versehen ist.)

Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

Sei $x \in X$. Wir sagen, f ist ***stetig bei*** x, wenn es für jede offene Menge $V \in \mathcal{S}$ um $f(x)$ eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ um x gibt, so dass

$$f(U) \subseteq V \tag{1.1}$$

oder gleichbedeutend, so dass $U \subseteq f^{-1}(V)$.

Wir nennen f ***stetig auf*** X oder schlicht ***stetig***, wenn f stetig bei x ist für jedes $x \in X$.

Die erste Stetigkeitsbedingung nennt man manchmal ***lokale Stetigkeit bei*** x und die zweite nennt man zur Unterscheidung ***globale Stetigkeit***.

Bemerkung 1.2 Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

f ist genau dann stetig auf X, wenn für jedes $V \in \mathcal{S}$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Diese Bedingung ist einfacher und eleganter als die Bedingung für globale Stetigkeit aus Definition 1.1 und sie ist die übliche Definition der Stetigkeit in Lehrbüchern über Topologie. Aber sie verschleiert die Beziehung zur lokalen Stetigkeit ein wenig.

Beweis. Wenn alle Urbilder offener Mengen unter f wieder offen sind, dann ist die Bedingung für Stetigkeit bei x aus Definition 1.1 für jedes $x \in X$ und für jedes V offen um $f(x)$ erfüllt, wenn wir $U = f^{-1}(V)$ wählen.

Umgekehrt, wenn die Bedingung für lokale Stetigkeit aus Definition 1.1 überall auf X erfüllt ist, und wenn V offen ist in Y, so gibt es zu jedem $x \in f^{-1}(V)$ eine offene Menge U_x um x mit $U_x \subseteq f^{-1}(V)$.

Die Vereinigung dieser Mengen U_x für alle $x \in f^{-1}(V)$ ist offensichtlich gleich $f^{-1}(V)$ und ist offen in X nach Axiom 1.1 b) ∎

Bemerkung 1.3 Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ und $(Z, \mathcal{R})$ topologische Räume und seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.

Sei $x \in X$. Wenn f stetig ist bei x und wenn g stetig ist bei $f(x)$, dann ist $g \circ f$ stetig bei x. Das prüft man sehr leicht aus der Definition der lokalen Stetigkeit nach.

Eine andere wichtige und noch einfachere Tatsache, ist dass die Identitätsabbildung id_X eines jeden topologischen Raumes X stetig ist (global).

Manchmal ist es bequemer, in einem topologischen Raum mit den Komplementen der offenen Mengen zu arbeiten:

Definition 1.4 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt ***abgeschlossen*** genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Die Bedingungen 1.1 a)–c) übersetzen sich in entsprechende Bedingungen für die abgeschlossenen Mengen, die wir hier nicht extra aufführen wollen, aber die wir bei Bedarf ohne weitere Erklärung anwenden werden.

Weil das Urbildnehmen unter einer Abbildung mit der Komplementenbildung vertauschbar ist, können wir in der Bedingung für Stetigkeit aus Bemerkung 1.2 das Wort „offen“ überall durch „abgeschlossen“ ersetzen (das erweist sich manchmal als nützlich):

Bemerkung 1.5 Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

f ist genau dann stetig, wenn für jede *abgeschlossene* Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist in X.

Wir brauchen noch den Begriff eines „Isomorphismus" der topologischen Struktur. Die Definition ist klar:

Definition 1.6 Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

Wir nennen f einen ***Homöomorphismus,*** wenn f bijektiv ist, und wenn sowohl f wie auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ stetig sind.

Es ist wichtig zu bemerken, dass anders als in der Algebra, die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Abbildung nicht automatisch stetig sein muss; deshalb wird das in Definition 1.6 extra gefordert.

Definition 1.1 des topologischen Raumes ist sehr abstrakt und man versteht zunächst ihre Intention und ihren Sinn nicht so recht. Topologie ist in Wirklichkeit nicht die Theorie der topologischen Räume, sondern die *Theorie der stetigen Abbildungen*, und die Begriffe einer Topologie und eines topologischen Raumes sind das, was sich herauskristallisiert, wenn man versucht, die Stetigkeit in „reiner Form" ohne weiter Hilfsstrukturen wie Entfernungen und dergleichen mathematisch zu erfassen.

Auch dann kommt man nicht sofort auf die heute gebräuchliche Definition einer Topologie, sondern diese erhält man als besonders elegante Formulierung erst durch Aufpolieren einer zwar abstrakten aber naiveren, direkteren aber viel komplizierteren Variante, die es erlaubt ohne Entfernungsmessung von Nachbarschaftsverhältnissen und Umgebungen zu sprechen, so dass man den Begriff der Stetigkeit in seinem Ursinn, dass „benachbarte Punkte benachbarte Bilder haben," mathematisch exakt formulieren kann.

Um die abstrakte Definition zu erhellen und „schluckbarer" zu machen, wollen wir die Beziehung zwischen der Stetigkeit auf abstrakten topologischen Räumen und der klassischen ε-δ Version der Stetigkeit für Funktionen auf dem $\mathbf{R}^n$ verdeutlichen durch Betrachtung eines wichtigen Spezialfalls, der zudem in der Funktionalanalysis fast der Normalfall ist, und in dem die Stetigkeit sich noch auf klassische Weise formulieren lässt.

Was man dazu braucht, ist eine Entfernungsfunktion:

Definition 1.7 Sei X eine Menge. Eine ***Metrik*** auf X ist eine Funktion

$$d\colon X \times X \longrightarrow \mathbf{R},$$

so dass folgendes gilt:

a) Für alle x und $y \in X$ ist $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

b) (***Symmetrie***) Für alle x und $y \in X$ ist $d(x, y) = d(y, x)$.

c) (Die ***Dreiecksungleichung***) Für alle x, y und $z \in X$ ist

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Ein ***metrischer Raum*** ist ein Paar (X, d), wo X eine Menge ist und wo d eine Metrik auf X ist.

In der Funktionalanalysis kommt auch oft folgende Abschwächung dieses Begriffs vor: wenn d alle genannten Eigenschaften hat, außer dass in der „genau dann" Aussage in Bedingung a) nur die Richtung „$\Leftarrow$" gilt, d.h., wenn zwar $d(x, x) = 0$ für jedes x, aber es auch erlaubt ist, dass $d(x, y) = 0$ für *verschiedene* Punkte x und y, dann nennen wir d eine ***Pseudometrik*** und das Paar (X, d) nennen wir einen ***pseudometrischen Raum***.

Beispiele 1.8 a) Aus den Eigenschaften des Absolutbetrags auf $\mathbf{R}$ folgert man sehr leicht, dass

$$d(x, y) := |y - x|$$

eine Metrik auf der reellen Geraden $\mathbf{R}$ ist. Dies ist ein sehr bekanntes und geläufiges Beispiel.

b) Ein wichtiges Beispiel einer Pseudometrik, die keine Metrik ist, erhält man mit Hilfe der Lebesgue Integration.

Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\mathcal{L}^1(X)$ die Menge der integrierbaren reellwertigen Funktionen auf X. Für f und $g \in \mathcal{L}^1(X)$ definiere man

$$d(f, g) := \int_X |g - f| \; d\mu.$$

Man prüft mit den Eigenschaften des Integrals und des Absolutbetrags sehr einfach nach, dass diese Funktion eine Pseudometrik auf $\mathcal{L}^1(X)$ ist, aber sie ist keine Metrik, weil aus $\int_X |g - f| \; d\mu = 0$ nur folgt, dass $|g - f| = 0$ *fast überall*, also dass f und g fast überall gleich sind aber nicht unbedingt an jeder Stelle den gleichen Wert annehmen.

Man kann leicht zeigen, dass die genannte Funktion d eine wohldefinierte richtige Metrik induziert auf der Menge der $\sim$-Aquivalenzklassen integrierbarer Funktionen. Diese Äquivalenzklassen sind ja die wirklichen „Funktionen" der Maß- und Integrationstheorie.

Wir werden zur rechten Zeit noch viele weitere nützliche Beispiele von Metriken kennen lernen, aber im Moment wollen wir einfach einmal sehen, wie man aus einer Metrik eine Topologie konstruieren kann.

Definition 1.9 Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum, sei $x \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Die Menge
$$B_\varepsilon(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \}$$
nennen wir den ***offenen Ball von Radius*** ε oder den ***offenen*** ε***-Ball*** um den Punkt x.

Wenn in einer Betrachtung mehrere Metriken gleichzeitig vorkommen, dann benutzen wir auch manchmal die genauere Notation $B^d_\varepsilon(x)$, um zu präzisieren, bezüglich welcher Metrik der ε-Ball gebildet wird.

Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq X$ ***offen,*** wenn es zu jedem $x \in U$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Es ist nicht sehr schwer nachzuprüfen, dass die Familie der so definierten offenen Mengen in X eine Topologie $\mathcal{T}^d$ bildet, genannt die ***metrische Topologie*** auf X induziert durch die Pseudometrik d. (Auch wenn d nur eine Pseudometrik ist, nennen wir $\mathcal{T}^d$ eine *metrische* und nicht eine pseudometrische Topologie.)

Aus der Dreiecksungleichung folgt leicht, dass jeder offene Ball $B_\varepsilon(x)$ tatsächlich eine offene Menge ist in der Topologie $\mathcal{T}^d$.

Lemma 1.10 *Seien (X, d) und (Y, e) pseudometrische Räume, sei $x \in X$ und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

Genau dann ist f stetig bei x, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass
$$f\big(B^d_\delta(x)\big) \subseteq B^e_\varepsilon\big(f(x)\big).$$
(Diese Bedingung kann man auch so formulieren: wenn $y \in X$ und wenn $d(x, y) < \delta$, dann ist $e\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$. Das ist die klassische Definition der Stetigkeit!)

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f stetig bei x und sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $B^e_\varepsilon\big(f(x)\big)$ eine offene Menge um $f(x)$ und es gibt nach der Definition der lokalen Stetigkeit eine offene Menge $U \ni x$ mit $f(U) \subseteq B^e_\varepsilon\big(f(x)\big)$.

Weil U offen ist, gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass $B^d_\delta(x) \subseteq U$. Das ist die gesuchte Zahl δ.

„$\Leftarrow$“: f erfülle bei x die genannte „ε-δ“ Bedingung. Sei V offen in Y um $f(x)$. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit $B^e_\varepsilon\big(f(x)\big) \subseteq V$ und es gibt zu dieser Zahl ε eine Zahl $\delta > 0$, so dass $f\big(B^d_\delta(x)\big) \subseteq B^e_\varepsilon\big(f(x)\big) \subseteq V$.

Die Menge $B^d_\delta(x)$ ist eine offene Menge um x und hat die von Definition 1.1 der lokalen Stetigkeit verlangte Eigenschaft, dass ihr Bild unter f in V enthalten ist. ■

Aus diesem Lemma sieht man, dass die abstrakt-topologische Definition der Stetigkeit tatsächlich in klassischen Situationen den herkömmlichen

Begriff verkörpert.

Definition 1.11 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen den Raum $(X, \mathcal{T})$ einen ***Hausdorffraum*** oder sagen, X oder die Topologie $\mathcal{T}$ ist ***Hausdorffsch***, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x \neq y$ aus X es disjunkte offene Mengen U und $V \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in U$ und $y \in V$.

Diese Bedingung besagt, dass man jedes Punktepaar durch offene Mengen trennen kann. Die Hausdorff Eigenschaft wird aus diesem Grund ein ***Trennungsaxiom*** genannt.

Bemerkung 1.12 Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum. Die metrische Topologie $\mathcal{T}^d$ auf X ist genau dann Hausdorffsch, wenn d eine Metrik ist.

Denn wenn d keine Metrik ist, dann findet man Punkte $x \neq y$ in X mit $d(x, y) = 0$, und es folgt, dass $y \in B_\varepsilon(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Deshalb liegt y in jeder offenen Menge um x und man kann x und y nicht durch disjunkte offene Mengen trennen.

Wenn aber d eine Metrik ist und wenn $x \neq y \in X$, so ist $d(x, y) > 0$. Wenn $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x, y)$, so folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $B_\varepsilon(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ keine gemeinsame Punkte haben können und deshalb disjunkte offene Mengen um x und y sind.

Bemerkung und Definition 1.13 Sei X eine Menge. Man kann sofort aus Definition 1.1 nachprüfen, dass jeder Durchschnitt von Topologien auf X wieder eine Topologie ist.

Sei nun $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X. Es gibt sicher Topologien, in denen jede Menge aus $\mathcal{B}$ offen ist, denn offensichtlich ist $\mathcal{P}(X)$ selber eine Topologie (genannt die ***diskrete Topologie*** auf X).

Wir setzen

$$\langle \mathcal{B} \rangle := \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ Topologie} \\ \text{mit } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}}} \mathcal{T}. \tag{1.2}$$

Dies ist die *kleinste* Topologie auf X, in der alle Mengen aus $\mathcal{B}$ offen sind.

Bemerkung und Definition 1.14 Angenommen, wir haben nicht nur eine, sondern eine ganze Familie $\mathcal{D}$ von Pseudometriken auf X. Dann können wir die Topologie

$$\mathcal{T}^{\mathcal{D}} := \langle \{ \mathcal{T}^d \mid d \in \mathcal{D} \} \rangle \tag{1.3}$$

bilden.

Diese Möglichkeit, eine Topologie durch mehr als eine Metrik oder Pseudometrik bestimmen zu lassen, wird in der Funktionalanalysis manchmal genutzt. Man beachte, dass in diesem Fall $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ Hausdorffsch sein kann, auch wenn alle $d \in \mathcal{D}$ Pseudometriken sind (es reicht, dass es für jedes Paar $x \neq y \in X$ mindestens *eine* Pseudometrik $d \in \mathcal{D}$ gibt mit $d(x, y) > 0$).

Ein topologischer Begriff, den Sie aus der Anfängervorlesung *Analysis* gut kennen und der auch für die Funktionalanalysis von Bedeutung ist, ist die ***Folgenkonvergenz***. Dieser Begriff spielt in der allgemeinen Topologie nicht so eine wichtige Rolle, weil er zu schwach ist, um beliebige Topologien charakterisieren zu können.[1] Trotzdem erinnern wir an die Definition in der Sprache der Topologie:

Definition 1.15 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $a \in X$. Wir sagen, eine Folge $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus X ***konvergiert gegen*** a, und wir schreiben

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a,$$

wenn es für jede offene Menge $U \ni a$ eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Auch dieser Begriff sieht „klassisch" aus in metrischen Räumen:

Bemerkung 1.16 Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum, sei $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge aus X und sei $a \in X$. Genau dann ist $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ in der metrischen Topologie $\mathcal{T}^d$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ gibt, so dass $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Beweis. Wenn die Folge $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ gegen a konvergiert, und wenn $\varepsilon > 0$, dann ist $B_\varepsilon(a)$ offen um a und es gibt eine Zahl $N \in \mathbf{N}$, so dass für jedes $n \geq N$ gilt $x_n \in B_\varepsilon(a)$ oder in anderen Worten $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Umgekehrt, wenn $d(x_n, a) \to 0$ wie hier als Bedingung angegeben und wenn U offen ist um a, so existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U$ und für diese Zahl ε gibt es ein $N \in \mathbf{N}$, so dass $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist $x_n \in B_\varepsilon(a)$ und somit auch $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. ∎

Bemerkung 1.17 In einem Hausdorffraum, und somit in jedem metrischen Raum, kann eine Folge $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ nicht gegen zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ konvergieren.

Denn es gibt disjunkte offene Mengen U und V um a und b, und weil sie disjunkt sind, kann höchstens eine von ihnen alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten.

[1] In der mengentheoretischen Topologie betrachtet man Verallgemeinerungen der Folgenkonvergenz, nämlich die Konvergenz von ***Netzen*** oder von ***Filtern***. Diese Konvergenzbegriffe sind komplizierter als die Folgenkonvergenz, aber sind dafür in der Lage, die topologische Struktur genau zu erfassen. Es würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, diese verallgemeinerten Konvergenzbegriffe hier behandeln zu wollen.

Definition 1.18 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus X heißt eine ***Cauchyfolge*** (oder man sagt salopp, die Folge ist ***Cauchy***), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ existiert, so dass $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle m und $n \geq N$.

Bemerkung 1.19 Wie in $\mathbf{R}$ gilt auch in metrischen Räumen, dass jede konvergente Folge Cauchy ist.

Der sehr einfache Beweis ist der gleiche, wie in $\mathbf{R}$, und muss hier nicht wiederholt werden; er ist eine simple Anwendung der Dreiecksungleichung.

Wir brauchen noch eine wichtige Konstruktion aus der Topologie, die Produkträume mit einer kanonischen Topologie ausstattet. Das wird uns erlauben, stetige Abbildungen von zwei (oder mehr) Variablen zu betrachten.

Lemma und Definition 1.20 *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume.*

*Die Teilmengen von $X \times Y$ von der Form $U \times V$, wo $U \in \mathcal{T}$ und $V \in \mathcal{S}$, nennen wir **offene Rechtecke**.*

Diese Mengen bilden selber keine Topologie auf $X \times Y$, wie man leicht einsieht, aber die Familie aller Vereinigungen *von offenen Rechtecken bildet eine Topologie, die wir die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ nennen, und die wir etwas ungenau mit $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ notieren wollen.*

Beweis. Der Durchschnitt von zwei offenen Rechtecken ist wieder ein offenes Rechteck, wie man leicht sieht, aber die Vereinigung von zwei Rechtecken muss nicht selber ein Rechteck sein, so dass die Familie der offenen Rechtecke keine Topologie bildet.

Wohl aber die Familie $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$. Die leere Menge ist die Vereinigung der leeren Familie von Rechtecken, und $X \times Y$ ist selber ein offenes Rechteck. Die Familie $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ ist offensichtlich unter Vereinigung abgeschlossen. Wir müssen nur noch zeigen, dass sie unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, und dazu reicht es zu zeigen, dass der Durchschnitt von zwei Mengen aus $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ wieder zu $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ gehört.

Seien

$$U := \bigcup_{i \in I} R_i \qquad \text{und} \qquad V := \bigcup_{j \in J} S_j$$

Vereinigungen von offenen Rechtecken. Dann ist

$$U \cap V = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} R_i \cap S_j$$

und dies ist wieder eine Vereinigung von offenen Rechtecken, gehört also zu $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$. Also bildet diese Familie eine Topologie. ■

Nach dieser schnellen Erinnerung an topologische Grundbegriffe sind wir jetzt in der Lage, die Studienobjekte der Funktionalanalysis einzuführen. Wir werden übrigens im Folgenden einfache Grundsätze aus der Topologie, die jedermann kennt aber die wir hier nicht immer explizit erwähnt oder bewiesen haben, ohne weitere Begründung frei verwenden.

Definition 1.21 Sei $\mathbf{K}$ der Körper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ versehen mit der üblichen Topologie, die Sie aus der Analysis kennen (im Falle von $\mathbf{C}$ ist es die Topologie von $\mathbf{R}^2$). Es handelt sich um die metrische Topologie der euklidischen Entfernung.

Ein ***topologischer Vektorraum*** über $\mathbf{K}$ ist ein $\mathbf{K}$-Vektorraum V versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$, so dass die algebraischen Operationen

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (v,w) &\longmapsto v+w \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbf{K} \times V &\longrightarrow V \\ (a,w) &\longmapsto aw \end{aligned}$$

stetig sind bezüglich der Produkttopologie auf dem Definitionsbereich dieser binären Operationen, also am linken Ende der Pfeile, und der Topologie $\mathcal{T}$ im Zielraum V.

Wenn wir nur von einem „topologischen Vektorraum" sprechen und den Körper $\mathbf{K}$ nicht erwähnen, so sind stillschweigend beide Möglichkeiten $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ gemeint (aber keine anderen Körper).

Beispiele 1.22 Bekanntlich sind die Addition und die Multiplikation der Körper $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ stetige Abbildungen von zwei Variablen, und deshalb sind $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ topologische Vektorräume über sich selber.

Allgemeiner, für $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ sind die endlichdimensionalen Vektorräume $\mathbf{K}^n$ für $n \in \mathbf{N}$ topologische Vektorräume, wenn man sie mit der üblichen, metrischen Topologie der euklidischen Räume $\mathbf{R}^n$ oder $\mathbf{R}^{2n}$ versieht.

Dass die algebraischen Operationen dieser Vektorräume stetig sind, wissen Sie ja aus den Anfängervorlesungen, aber da es sich hier um ***normierte Vektorräume*** handelt, die wir bald genauer besprechen werden, werden wir ohnehin bald einen Beweis der Stetigkeit nachliefern.

Beispiele von unendlichdimensionalen topologischen Vektorräumen können wir nicht ganz so einfach mit den Mitteln der Anfängervorlesungen angeben, und statt hierzu jetzt schon einzelne sehr spezielle Beispiele „herauszupicken", wollen wir ein bisschen warten, bis wir (bald) die geeigneten Mittel besitzen, sie in einen allgemeineren Rahmen zu setzen.

Es sollte aber erwähnt sein, dass endlichdimensionale Vektorräume, die ja alle isomorph zu einem $\mathbf{K}^n$ sind und auf diese Weise eine natürliche Topologie erben, für die Funktionalanalysis den Trivialfall darstellen.

Alle interessanten topologischen Vektorräume der Funktionalanalysis sind unendlichdimensional und erst die Topologie macht es möglich, diese algebraisch undurchsichtigen Vektorräume besser zu verstehen.

Die Kombination aus Topologie und Algebra stattet beide Strukturen auf einem topologischen Vektorraum mit schönen Eigenschaften aus. Sehr angenehm ist folgender Homogenitätssatz, der es erlaubt, die globale Stetigkeit einer linearen Abbildung an nur einem (beliebigen) Punkt nachzuprüfen. Meistens nimmt man als diesen Punkt den Ursprung 0.

Satz 1.23 *Seien V und W topologische Vektorräume und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Sei v_0 ein beliebiger Vektor aus V.*

Genau dann ist f global stetig, wenn f am Punkt v_0 stetig ist.

Beweis. Nur die Richtung „$\Leftarrow$" muss bewiesen werden. Wir nehmen an, f ist stetig bei v_0.

Weil die Addition von V als Funktion von zwei Variablen stetig ist, ist für jeden Festen Vektor $u \in V$ die Addition mit u, also die Funktion $\alpha_u\colon V \longrightarrow V$ mit $\alpha_u(v) = u + v$ für jedes $v \in V$, stetig (wie man aus der Definition der Produkttopologie leicht sieht).

Ferner ist α_u bijektiv, denn man rechnet sofort nach, dass

$$\alpha_u \circ \alpha_{-u} = \alpha_{-u} \circ \alpha_u = \mathrm{id}_V .$$

Da die Umkehrabbildung von der gleichen Form ist, nur mit $-u$ anstelle von u, ist auch sie stetig, und deshalb ist α_u für jedes u ein Homöomorphismus.

Die gleichen Aussagen gelten für die entsprechenden Additionsabbildungen auf W, für die wir die gleiche Notation verwenden, da man anhand des Vektors u erkennen kann, welcher Vektorraum gemeint ist.

Weil f linear ist, gilt für jedes $u \in V$, dass

$$f \circ \alpha_u = \alpha_{f(u)} \circ f.$$

Sei nun $v \in V$ beliebig und sei $u = v_0 - v$. Wir haben dann $\alpha_u(v) = v_0$ und weil α_u überall stetig ist, insbesondere bei v, und f stetig ist bei $\alpha_u(v) = v_0$, ist die Verknüpfung $f \circ \alpha_u = \alpha_{f(u)} \circ f$ stetig bei v.

Somit ist auch $\alpha_{-f(u)} \circ \alpha_{f(u)} \circ f = f$ stetig bei v, was wir zeigen wollten. Die lineare Abbildung f ist also global stetig. ∎

Die wichtigen „strukturtreuen" Abbildungen zwischen zwei topologischen Vektorräumen sind nicht die linearen Abbildungen, sondern die *stetigen* linearen Abbildungen, da sie *beide* Strukturen respektieren. Und stetige lineare Abbildungen können wir jetzt sehr leicht erkennen.

Die stetigen linearen Abbildungen zwischen zwei topologischen Vektorräumen bilden selber einen Vektorraum (und wir werden später sehen, dass in den Spezialfällen, die man mit Vorliebe in der Funktionalanalysis betrachtet, dieser Vektorraum sogar ein topologischer Vektorraum ist).

Definition 1.24 Seien V und W topologische Vektorräume. Wir bezeichnen mit $L(V,W)$ die Menge

$$L(V,W) := \{\, f\colon V \longrightarrow W \mid f \text{ linear und stetig} \,\}.$$

Weil die algebraischen Operationen von W stetig sind, ist es klar, dass jede Summe von zwei stetigen linearen Abbildungen und jedes skalare Vielfache einer stetigen linearen Abbildung wieder stetig und natürlich auch linear ist. Also ist $L(V,W)$ selber ein Vektorraum über $\mathbf{K}$.

Ein wichtiger Spezialfall ist gegeben, wenn W der topologische Vektorraum $\mathbf{K}$ ist. In diesem Fall nennen wir $L(V,\mathbf{K})$ den ***Dualraum*** von V und wir benutzen dafür die spezielle Notation

$$V^* := L(V,\mathbf{K}).$$

Sie sind dem Dualraum eines Vektorraums auch in der Anfängervorlesung *Lineare Algebra* begegnet, aber dort kam die Stetigkeit nicht ins Spiel. Wir werden sehen, dass für die endlich-dimensionalen Vektorräume, die dort die Regel waren, es keinen wesentlichen Unterschied zwischen der jetzigen und der damaligen Definition gibt, aber im unendlichdimensionalen Fall ist der jetzt eingeführte Dualraum nicht der Gleiche, wie der rein algebraisch definierte.

Sowie die Algebra eines topologischen Vektorraums die Topologie wie in Satz 1.23 vereinfacht, so wirkt sich die Topologie auch auf die algebraische Struktur aus. Bevor wir das illustrieren können, müssen wir an einen wichtigen Begriff aus der Topologie erinnern:

Bemerkung und Definition 1.25 Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Die „komplementäre Bedingung“ zu Axiom 1.1 b) besagt, dass jeder Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen von X wieder abgeschlossen ist.

Wir setzen

$$\bar{A} := \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ abgeschlossen}}} C.$$

Diese Menge ist abgeschlossen und ist die *kleinste* abgeschlossene Obermenge von A. Wir nennen sie die ***abgeschlossene Hülle*** von A oder manchmal einfach den ***Abschluss*** von A.

Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zu $\bar{A}$, wenn er zu jeder abgeschlossenen Menge um A gehört, oder gleichbedeutend, wenn er zu keinem Komplement einer abgeschlossenen Menge um A gehört, in anderen Worten, zu keiner *offenen* Menge, die A nicht schneidet. Diese Überlegung liefert sofort folgendes einfaches Kriterium für die Zugehörigkeit zu $\bar{A}$:

Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zu $\bar{A}$, wenn jede offene Menge $U \ni x$ die Menge A schneidet.

Bemerkung 1.26 a) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in X, wenn $\bar{A} = A$.

Denn genau dann ist A selber die kleinste abgeschlossene Obermenge von A, wenn A abgeschlossen ist.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$. Dann ist $\bar{A}$ die Menge aller $x \in X$, so dass es eine Folge $\{ a_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ von Elementen aus A gibt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Denn wenn $x \in \bar{A}$, so enthält jede offene Menge um x einen Punkt aus A. Insbesondere finden wir zu jedem $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ einen Punkt $a_n \in A$ mit $a_n \in B_{1/n}(x)$, also so dass $d(a_n, x) < 1/n$. Um auch ein 0-tes Glied in der Folge zu haben setzen wir $a_0 := a_1$. Offensichtlich gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Umgekehrt, wenn es eine gegen x konvergierende Folge aus A gibt, so enthält jede offene Menge um X alle bis auf endlich viele Glieder der Folge und enthält deshalb mindestens ein Element aus A. Das ist die Bedingung dafür, dass $x \in \bar{A}$.

c) Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$. Aus a) und b) folgt, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn der Grenzwert jeder in X konvergenten Folge aus A noch zu A gehört.

Lemma 1.27 *Sei V ein topologischer Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Dann ist auch $\bar{W}$ ein Untervektorraum von V.*

Beweis. Seien v und $w \in \bar{W}$, und sei U eine offene Menge um $v + w$.

Weil die Addition von V stetig ist, ist das Urbild von U unter der Additionsabbildung $+ \colon V \times V \longrightarrow V$ eine offene Menge im Produktraum, also eine Vereinigung von offenen Rechtecken, und es gibt deshalb ein offenes Rechteck $E \times F \ni (v, w)$, so dass

$$v' + w' \in U \qquad \text{für alle } v' \in E \text{ und } w' \in F. \tag{1.4}$$

Weil v und w zu $\bar{W}$ gehören und weil E und F offen sind, sind $E \cap W$ und $F \cap W$ nicht leer. Sei $v' \in E \cap W$ und sei $w' \in F \cap W$.

Der Vektor $v' + w'$ gehört zu W, weil W ein Untervektorraum ist, und er gehört zu U wegen (1.4).

Also ist $U \cap W \neq \emptyset$. Das gilt für jede offene Menge U um $v + w$. Also ist $v + w \in \bar{W}$.

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass jedes skalare Vielfache av von v zu $\bar{W}$ gehört. Die Multiplikation mit a ist stetig, deshalb gibt es zu jeder offenen Menge $U \ni av$ eine offene Menge $E \ni v$ mit $aE \subseteq U$, und weil $v \in \bar{W}$ ist $E \cap W \neq \emptyset$ und somit

$$U \cap W = U \cap aW \supseteq aE \cap aW \supseteq a(E \cap W) \neq \emptyset.$$

Folglich ist $av \in \bar{W}$.

Da $\bar{W}$ unter Addition und Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist, ist es ein Untervektorraum. ■

Die meisten topologischen Vektorräume der Funktionalanalysis haben eine metrische Topologie, und in der Regel stammt die Metrik aus einer algebraischen *Längenfunktion* für Vektoren, d.h., aus einer ***Norm***, die in vielen Fällen die Norm eines ***inneren Produkts*** ist. Wir erinnern kurz an die Definitionen:

Definition 1.28 Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Eine ***Norm*** auf V ist eine Abbildung

$$\| \ \| : V \longrightarrow \mathbf{R},$$

so dass folgende Eigenschaften gelten:

a) Für jedes $v \in V$ ist $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

b) Für jedes $v \in v$ und für jedes $a \in \mathbf{K}$ ist $\|av\| = |a| \, \|v\|$.

c) (Die ***Dreiecksungleichung***) Für je zwei Vektoren v und $w \in V$ ist $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Eine Funktion $\| \ \|$, die alle diese Eigenschaften hat, bis darauf, dass es auch für $v \neq 0$ möglich ist, dass $\|v\| = 0$, nennt man eine ***Halbnorm***.

Man beachte, dass für Normen und Halbnormen die Werte von $\|v\|$ immer reell sind, auch wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Ein ***normierter Vektorraum*** ist ein Vektorraum versehen mit einer Norm, oder etwas formaler, ein Paar $(V, \| \ \|)$, wo V ein Vektorraum ist und $\| \ \|$ eine Norm auf V ist.

Ein Paar $(V, \| \ \|)$, wo V ein Vektorraum ist und $\| \ \|$ nur eine Halbnorm auf V ist, nennen wir einen ***halbnormierten Vektorraum***.

Im Falle, wo auf einem Vektorraum mehrere Normen (oder Halbnormen) gleichzeitig im Spiel sind, schreiben wir ein Index an das Zeichen $\| \ \|$, um die Normen zu unterscheiden. Wo eine Unterscheidung nicht unbedingt nötig ist, benutzen wir immer die Notation $\| \ \|$; dies ist die Standardnotation für Normen.

Wenn mehrere *normierte Vektorräume* gleichzeitig betrachtet werden, sind ihre Normen natürlich verschieden, aber um die Notation einfach und lesbar zu belassen verzichten wir in der Regel auf eine Kennzeichnung des Vektorraums in den Bezeichnungen für die Normen, sondern benutzen für alle die gleiche Standardnotation $\| \ \|$; die Vektoren, die zwischen den Doppelstrichen stehen, besagen ja schon, in welchem Vektorraum wir uns befinden, so dass es zu keiner Verwechslung kommen kann.

Beispiele 1.29 a) Der Betrag $| \ |$ ist eine Norm auf $\mathbf{R}$ oder auf $\mathbf{C}$, betrachtet als ein Vektorraum über sich selber.

b) Auf $\mathbf{R}^n$ ist, wie Sie wissen, die Funktion

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

eine Norm, genannt die ***euklidische Norm.*** Die erforderlichen Eigenschaften weisen wir hier nicht nach, da sie aus den Anfängervorlesungen wohl bekannt sind.

c) Als reeller Vektorraum ist $\mathbf{C}^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$ und wir können deshalb $\mathbf{C}^n$ mit der in Teil b) definierten euklidischen Norm von $\mathbf{R}^{2n}$ versehen. Diese lässt sich auch in komplexen Koordinaten hinschreiben, als

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\| = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^n z_i \bar{z}_i} = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^n |z_i|^2}$$

und an dem letzten Ausdruck sieht man sofort, dass die euklidische Norm auf $\mathbf{C}^n$ auch eine *komplexe* Norm ist (d.h., Bedingung 1.28 b) gilt auch für komplexe Skalare a).

d) Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei V die Menge der $\mathbf{K}$-wertigen integrierbaren Funktionen auf X (wo $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$). Aus den bekannten Eigenschaften des Lebesgue Integrals ist klar, dass V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum ist.

Man beachte, dass auch komplexwertige Funktionen genau dann integrierbar sind, wenn ihr Betrag integrierbar ist, wie man sehr leicht einsieht.

Für jedes $f \in V$ definieren wir

$$\|f\| := \int_X |f| \, d\mu.$$

Es ist sehr einfach nachzuprüfen, dass dies eine *Halbnorm* ist, denn $|\ |$ ist ja eine Norm auf $\mathbf{K}$ und das Integral hängt monoton und linear vom Integranden ab, weshalb die Halbnormeigenschaften des Betrages sich direkt auf $\|\ \|$ übertragen.

Aber $\|\ \|$ ist keine Norm, denn $\|f\| = 0$ auch wenn f nur *fast überall* 0 ist, aber nicht gleich der Nullfunktion ist.

Die euklidische Norm ist nicht die einzige gebräuchliche Norm auf den Räumen $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{C}^n$, aber die Alternativen wollen wir hier nicht näher besprechen, denn wir werden in Korollar 1.45 c) und d) sehen, dass alle Normen auf endlichdimensionalen Vektorräumen für die Zwecke der Funktionalanalysis gleich aussehen.

Beispiel d) kann man zu einer ganzen Schar von Beispielen von halbnormierten Räumen erweitern. Diese Verallgemeinerungen sind so wichtig, dass wir ihnen später ein eigenes Kapitel widmen werden (Kapitel 4).

Normierte Vektorräume sind topologische Vektorräume, denn eine Norm bestimmt immer eine Metrik und diese eine geeignete metrische Topologie:

Lemma und Definition 1.30 *Sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter oder ein halbnormierter Vektorraum. Wir definieren eine Funktion $d\colon V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ durch die Vorschrift*

$$d(v, w) := \|v - w\| . \tag{1.5}$$

*Dann ist d eine Metrik auf V, wenn $\|\ \|$ eine Norm ist, oder eine Pseudometrik, wenn $\|\ \|$ nur eine Halbnorm ist, und mit der metrischen Topologie $\mathcal{T}^d$ (die wir auch die **Normtopologie** von $\|\ \|$ nennen) wird V zu einem topologischen Vektorraum.*

Beweis. Es ist sehr leicht nachzuprüfen, dass d eine (Pseudo)Metrik ist. Bedingung 1.7 a) übersetzt sich vermöge Gleichung (1.5) direkt in Bedingung 1.28 a), und Bedingung 1.7 c) folgt unmittelbar aus Bedingung 1.28 a), da

$$\begin{aligned} d(u, w) = \|u - w\| &= \|u - v + v - w\| \\ &\le \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w) \end{aligned}$$

für alle Vektoren u, v und w.

Die Symmetriebedingung 1.7 b) erhält man aus Bedingung 1.28 b) durch

$$d(v,w) = \|v-w\| = \|(-1)\cdot(w-v)\| = |-1|\,\|w-v\| = \|w-v\| = d(w,v).$$

Es ist noch zu zeigen, dass die metrische Topologie V zu einem topologischen Vektorraum macht.

Wir betrachten zuerst die Addition. Seien v und $w \in V$, sei U eine offene Menge um $v+w$ und sei $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(v+w) \subseteq U$.

Sei

$$E := B_{\varepsilon/2}(v) \qquad \text{und} \qquad F := B_{\varepsilon/2}(w).$$

Wenn $v' \in E$ und $w' \in F$, dann ist

$$\begin{aligned} d(v+w, v'+w') &= \|v+w-v'-w'\| \\ &\le \|v-v'\| + \|w-w'\| = d(v,v') + d(w,w') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist $v'+w' \in B_\varepsilon(v+w) \subseteq U$ für jedes Vektorenpaar (v',w') aus der offenen Menge $E \times F$ um (v,w). Dies zeigt, dass die Addition stetig ist.

Auch die Skalarenmultiplikation ist stetig, wenn wir $\mathbf{K}$ mit der Standardtopologie versehen (die Standardtopologie von $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ ist nichts anderes als die Normtopologie des Betrages).

Dazu sei $a \in \mathbf{K}$ und sei $v \in V$, und wieder sei U eine offene Menge um av und sei $\varepsilon > 0$ eine Zahl, so dass $B_\varepsilon(av) \subseteq U$.

Für jedes $b \in \mathbf{K}$ und $w \in V$ ist

$$\begin{aligned} d(av, bw) &= \|av - bw\| = \|av - aw + aw - bw\| \\ &\le \|av - aw\| + \|aw - bw\| = |a|\,\|v-w\| + |a-b|\,\|w\|\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sei $M = \max\bigl(|a|+1, \|v\|+1\bigr) > 0$ und sei $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2M}, 1)$. Wenn $\|v-w\| < \delta$, dann ist

$$|a|\,\|v-w\| < \frac{M\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

und $\|w\| \le \|v\| + \|w-v\| < \|v\| + \delta \le \|v\| + 1 \le M$.

Wenn außerdem $|a-b| < \delta$, dann ist

$$|a-b|\,\|w\| < \delta M \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Einsetzen dieser Ungleichungen rechts in (1.6) liefert $d(av,bw) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ und somit $bw \in U$, wann immer $(b,w) \in B_\delta(a) \times B_\delta(v)$. Daran sieht man, dass die Multiplikation mit Skalaren stetig ist.

Also ist $(V, \mathcal{T}^d)$ ein topologischer Vektorraum. ■

Bemerkung 1.31 Sei $(V, \| \ \|)$ ein (halb)normierter Vektorraum. Die Funktion $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbf{R}$ ist stetig in der Normtopologie, denn für je zwei Vektoren v und $w \in V$ gilt die Ungleichung

$$\big| \|v\| - \|w\| \big| \leq \|v - w\| \,. \tag{1.7}$$

Beweis. Diese Ungleichung folgt sofort aus

$$\|v\| = \|w + (v - w)\| \leq \|w\| + \|v - w\|$$

(nach der Dreiecksungleichung), woraus wir erhalten, dass

$$\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\| \,.$$

Hier können wir die Rollen von v und w vertauschen, ohne dass die rechte Seite sich ändert.

Also haben wir $\pm(\|v\| - \|w\|) \leq \|v - w\|$ und für eine Wahl des Vorzeichens ist die linke Seite positiv und gleich $\big| \|v\| - \|w\| \big|$. Das liefert Ungleichung (1.7). ■

Definition 1.32 Seien V und W halbnormierte Vektorräume und sei

$$T\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung (in der Funktionalanalysis werden lineare Abbildungen auch oft ***lineare Operatoren*** genannt).

Eine reelle Zahl $C \geq 0$ heißt eine ***Schranke*** für T, wenn für jeden Vektor $v \in V$ gilt

$$\|T(v)\| \leq C \, \|v\| \,. \tag{1.8}$$

Wir nennen T ***beschränkt***, wenn T eine Schranke besitzt, und in diesem Fall definieren wir

$$\|T\| := \inf \{ \, C \geq 0 \in \mathbf{R} \mid C \text{ Schranke für } T \, \} \,. \tag{1.9}$$

Wir nennen $\|T\|$ die ***Operatornorm*** oder schlicht einfach die ***Norm*** von T.

Lemma 1.33 *Seien V, W und Z halbnormierte Vektorräume und seien*

$$T\colon V \longrightarrow W \qquad \text{und} \qquad S\colon W \longrightarrow Z$$

lineare Abbildungen. Dann gilt:

a) *T ist beschränkt genau dann, wenn* $\{ \|T(v)\| \mid v \in V,\ \|v\| \leq 1 \}$ *eine beschränkte Menge ist, und in diesem Fall ist*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{ \|T(v)\| \mid v \in V \text{ und } \|v\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|T(v)\| \mid v \in V \text{ und } \|v\| = 1 \} \end{aligned}$$

(letzteres, falls V *normiert* und $\neq \{ 0 \}$ ist.)

b) *Wenn T beschränkt ist, dann ist $\|Tv\| \leq \|T\| \, \|v\|$ für jedes $v \in V$.*

c) *Wenn S und T beschränkt sind, dann ist $S \circ T$ beschränkt und*

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \, \|T\| .$$

Beweis. a): Wenn $V = \{ 0 \}$, dann ist jede Zahl $C \geq 0$ eine Schranke für T und $\|T\|=0$. Der einzige Wert von $\|Tv\|$ ist auch 0 und somit gilt die Behauptung in diesem Fall. Wir können nun annehmen, dass $V \neq \{ 0 \}$.

Sei

$$A := \Big\{ \big\|T(v)\big\| \mid v \in V \text{ und } \|v\| \leq 1 \Big\}$$

und sei

$$B := \Big\{ \big\|T(v)\big\| \mid v \in V \text{ und } \|v\| = 1 \Big\} .$$

Jede Schranke C von T ist eine obere Schranke zu A und zu B, denn für jedes $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$ gilt

$$\|T(v)\| \leq C \, \|v\| \leq C \cdot 1 = C.$$

Wir wollen zeigen, dass auch die Umkehrung gilt (unter den genannten Voraussetzungen, wenn es um die Menge B geht).

Jede obere Schranke zu A ist auch eine obere Schranke zu $B \subseteq A$.

Wenn $\| \ \|$ auf $V \neq \{ 0 \}$ eine Norm ist, ist B nicht leer, und jede obere Schranke C zu B ist auch eine obere Schranke zu A, denn weil $B \neq \emptyset$ ist

$$C \geq 0 = \big\|T(0)\big\|,$$

und für jedes $v \neq 0$ mit $\|v\| \leq 1$ ist $\|v\| \neq 0$, der Vektor $w := v/\|v\|$ hat offensichtlich Norm 1 und gehört zu B, und somit ist auch hier

$$\big\|T(v)\big\| = \Big\|T\big(\|v\| \, w\big)\Big\| = \big\|\|v\| \, T(w)\big\| = \|v\| \, \big\|T(w)\big\| \leq 1 \cdot C = C.$$

In anderen Worten, wenn die Voraussetzung für den Bezug auf B erfüllt ist, haben A und B die gleichen oberen Schranken, und es reicht jetzt zu zeigen, dass jede obere Schranke C von A eine Schranke von T ist.

Sei $v \in V$.

Wenn $\|v\| = 0$, so ist für jede reelle Zahl r auch $\|rv\| = 0$ und somit $rv \in A$, und weil

$$\big\|T(rv)\big\| = r\big\|T(v)\big\| \leq C$$

für jedes $r \in \mathbf{R}$, kann $\big\|T(v)\big\|$ nur 0 sein und insbesondere ist

$$\big\|T(v)\big\| = 0 \leq C\,\|v\|$$

wie gewünscht.

Wenn $\|v\| \neq 0$, dann hat der Vektor $w := v/\|v\|$ Halbnorm 1 und somit ist $\|T(w)\| \in A$ und $\|T(w)\| \leq C$. Wir rechnen jetzt nach, dass

$$\begin{aligned}\|T(v)\| = \big\|T\big(\|v\|\,w\big)\big\| &= \big\|\|v\|\,T(w)\big\| \\ &= \big|\|v\|\big|\,\|T(w)\| = \|v\|\,\|T(w)\| \leq \|v\| \cdot C.\end{aligned}$$

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass C eine Schranke für T ist.

Jede Schranke für T ist also eine obere Schranke zu A und zu B und umgekehrt (unter den genannten Voraussetzungen für B). Das Supremum von A oder von B ist die kleinste obere Schranke von A oder B und somit auch die kleinste Schranke von T, damit gleichzeitig das Infimum der Schranken von T, also gleich $\|T\|$.

Wir haben hier auch gesehen, dass, wenn T beschränkt ist, $\|T\|$ selber eine Schranke für T ist. Daraus folgt sofort Teil b).

c) lässt sich mit b) direkt nachrechnen. Seien S und T beschränkt. Für jedes $v \in V$ ist

$$\|S \circ T(v)\| \leq \|S\|\,\|T(v)\| \leq \|S\|\,\|T\|\,\|v\|\,;$$

also ist $\|S\|\,\|T\|$ eine Schranke für $S \circ T$ und $\|S \circ T\| \leq \|S\|\,\|T\|$. ■

Satz 1.34 *Seien V und W halbnormierte Vektorräume und sei $T\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.*

T ist genau dann stetig, wenn T beschränkt ist.

Insbesondere ist die Operatornorm für jedes Element von $L(V, W)$ definiert. Sie ist eine Halbnorm auf $L(V, W)$ und $L(V, W)$ ist somit auch ein halbnormierter Vektorraum.

Wenn W normiert ist, d.h., wenn die Halbnorm $\|\ \|$ auf W eine Norm ist, dann ist die Operatornorm eine Norm und nicht nur eine Halbnorm, und $L(V, W)$ ist ein normierter Vektorraum.

Beweis. Wenn T stetig ist, so ist T stetig bei 0 und es gibt eine Zahl $\delta > 0$, so dass $\|T(v)\| < 1$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| < \delta$.

Sei $C := 2/\delta > 0$.

Wenn $\|v\| \leq 1$, dann ist $\left\|\frac{\delta}{2}v\right\| < \delta$ und deshalb ist $\left\|T(\frac{\delta}{2}v)\right\| < 1$.

Also ist

$$\|T(v)\| = \left\|T(C\tfrac{\delta}{2}v)\right\| = \left\|CT(\tfrac{\delta}{2}v)\right\| = C\left\|T(\tfrac{\delta}{2}v)\right\| < C.$$

Somit ist T beschränkt (und C ist eine Schranke für T).

Umgekehrt, wenn T beschränkt ist, sei $\varepsilon > 0$ gegeben und sei δ eine Zahl mit

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

(wenn $\|T\| = 0$ muss δ nur positiv sein). Wenn $\|v\| < \delta$, dann ist

$$\|T(v)\| \leq \|T\|\,\|v\| \leq \|T\|\,\delta < \varepsilon$$

(die letzte Ungleichung ist klar aus der Wahl von δ wenn $\|T\| > 0$, aber ist auch richtig wenn $\|T\| = 0$, da $\varepsilon > 0$).

Das zeigt, dass T stetig ist bei 0. Nach Satz 1.23 ist T dann global stetig.

Da jedes Element von $L(V, W)$ beschränkt ist, ist $\|\ \|$ auf ganz $L(V, W)$ definiert. Es ist einfach, nachzuprüfen, dass $\|\ \|$ die Eigenschaften einer Halbnorm erfüllt:

Aus Lemma 1.33 a) ist klar, dass $\|T\| \geq 0$ für jede lineare Abbildung T, und man sieht auch sofort, dass für die Nullabbildung $T = 0$ gilt $\|T\| = 0$.

Sei $T \in L(V, W)$ und $a \in \mathbf{R}$. Da für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\|(aT)(v)\| = |a|\,\|T(v)\|$, ist es klar aus Lemma 1.33 a) oder direkt aus der Definition der Operatornorm, dass $\|aT\| = |a|\,\|T\|$.

Die Dreiecksungleichung beweist sich genau so einfach mit Lemma 1.33 a). Wenn S und $T \in L(V, W)$ und wenn $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$, dann ist

$$\|(S+T)(v)\| = \|S(v) + T(v)\| \leq \|S(v)\| + \|T(v)\| \leq \|S\| + \|T\|,$$

also ist $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Wenn W ein *normierter* Vektorraum ist und wenn $T \in L(V, W)$ mit $\|T\| = 0$, dann besagt Lemma 1.33 b), dass für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\left\|T(v)\right\| = 0$ und somit $T(v) = 0$.

In diesem Fall muss T also die Nullabbildung sein, und die Operatorhalbnorm ist eine Norm und $L(V, W)$ ist ein normierter Vektorraum. ∎

Definition 1.35 Seien V und W halbnormierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T\colon V \longrightarrow W$ heißt eine ***Isometrie***, wenn für jedes $v \in V$ gilt

$$\big\|T(v)\big\| = \|v\| \,.$$

Für eine Isometrie gilt offensichtlich $\|T\| \leq 1$ und $\|T\| = 1$, falls es Vektoren $v \in V$ gibt mit $\|v\| \neq 0$. Aus Satz 1.34 folgt, dass jede Isometrie stetig ist.

Die Theorie der normierten Vektorräume und der Räume $L(V, W)$ wird erst wirklich interessant, wenn die Räume unendlichdimensional sind, denn für endlichdimensionale Räume bringt die Topologie keine wesentliche Bereicherung der schon vorhandenen Struktur. Um zu zeigen, wie einfach endlichdimensionale Räume sind, müssen wir an einen weiteren wichtigen Begriff aus der Topologie erinnern (der sich ohnehin in der Funktionalanalysis als sehr nützlich erweisen wird).

Definition 1.36 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$.

Eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen von X heißt eine ***Überdeckung*** von A, wenn

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

und sie heißt eine ***offene Überdeckung***, wenn sie eine Überdeckung ist und wenn jede Menge aus $\mathcal{U}$ offen ist.

Eine ***Teilüberdeckung*** einer Überdeckung $\mathcal{U}$ von A ist eine Teilfamilie $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, die auch (oder immer noch) eine Überdeckung von A ist.

Die Teilmenge A heißt ***kompakt***, wenn jede offene Überdeckung von A eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt.

Durch Komplementenbildung lässt sich eine äquivalente Bedingung für Kompaktheit gewinnen, die manchmal bequemer zu verwenden ist. Eine Familie $\mathcal{U}$ ist genau dann eine Überdeckung von A, wenn sie, insgesamt, keinen Punkt von A „auslässt“, also wenn kein Punkt von A zum Komplement aller Mengen aus $\mathcal{U}$ gehört.

Mit diesem Gedanken, und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass eine Menge genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist, können wir die Eigenschaft „kompakt“ auch so charakterisieren:

Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn es für jede Familie $\mathcal{C}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit

$$A \cap \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$$

schon endlich viele Mengen C_1, C_2, ..., C_n aus $\mathcal{C}$ gibt mit

$$A \cap C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset.$$

Wieder anders gesagt: A ist genau dann kompakt, wenn für jede Familie von abgeschlossenen Mengen $\mathcal{D}$, so dass jeder *endliche* Durchschnitt aus $\mathcal{D}$ die Menge A schneidet, auch der Durchschnitt *aller* Mengen aus $\mathcal{D}$ die Menge A noch schneidet.

Was wir hier in einigen Varianten angegeben haben, ist eine Definition der Kompaktheit, die in der abstrakten Sprache der Topologie formuliert ist und die deshalb in jedem topologischen Raum anwendbar ist. Den *Begriff* der Kompaktheit kennen Sie sicher aus der Anfängervorlesung *Analysis*, aber eventuell nur mit anderen, nur in $\mathbf{R}^n$ oder in metrischen Räumen geltenden Definitionen, die nicht immer anwendbar sind aber deren Bedeutung oder Tragweite leichter zu verstehen ist.

Wir erinnern kurz daran und an andere wichtige Tatsachen über kompakte Mengen, aber wir geben die Beweise nur teilweise wieder, da einige von ihnen sehr langwierig sind und wir uns nicht zu lange mit Topologie aufhalten wollen.

Satz 1.37 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $\{ a_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus A eine in A konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis. Wir beweisen nur die Richtung „⇒“ (der Beweis der anderen Richtung ist sehr aufwändig aber nicht besonders interessant).

Sei A kompakt und sei $\{ a_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge aus A. Wir müssen eine konvergente Teilfolge von $\{ a_n \}$ finden.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei E_n die abgeschlossene Hülle der Menge $\{ a_m \mid m \geq n \}$ und sei

$$E := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} E_n.$$

Jeder endliche Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen E_n enthält alle bis auf endlich viele Glieder der Folge $\{ a_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ und trifft also die Menge A. Weil A kompakt ist, ist auch $E \cap A \neq \emptyset$. Sei a ein Element von $E \cap A$.

Jede offene Menge um a, insbesondere jede Menge $B_{1/k}(a)$ für $k \geq 1 \in \mathbf{N}$, trifft jede der Mengen $\{ a_m \mid m \geq n \}$ für $n \in \mathbf{N}$, weil a im Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen dieser Mengen liegt.

Wir konstruieren durch Induktion über k eine monoton steigende Folge $\{ n_k \}_{k \in \mathbf{N}}$ von Indizes, so dass die Teilfolge $\{ a_{n_k} \}_{k \in \mathbf{N}}$ von $\{ a_n \}$ gegen a konvergiert.

Wir setzen $n_0 = 0$, und wenn $n_0, n_1, \ldots, n_k$ schon definiert sind, wählen wir $n_{k+1} > n_k$ so, dass $a_{n_{k+1}} \in B_{1/k}(a)$. Die nach dieser Vorschrift durch Induktion konstruierte Folge von Indizes und die entsprechende Teilfolge von $\{ a_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ haben offenbar die gewünschte Eigenschaft. ∎

Lemma 1.38 *In einem Hausdorffraum (und insbesondere in jedem metrischen Raum) sind kompakte Teilmengen immer abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und sei $A \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Sei $x \notin A$.

Weil X Hausdorffsch ist, finden wir zu jedem $a \in A$ offene Mengen $U_a \ni a$ und $V_a \ni x$ mit $U_a \cap V_a = \emptyset$.

Die Mengen U_a bilden eine offene Überdeckung von A (denn jedes $a \in A$ gehört zur *eigenen* Menge U_a) und diese Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung aus Mengen $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_k}$, weil A kompakt ist.

Sei V der Durchschnitt der entsprechenden Mengen V_{a_i}; als endlicher Durchschnitt von offenen Mengen ist V offen um x, und V ist enthalten in jedem V_{a_i} und somit disjunkt von der Vereinigung der U_{a_i}, also auch von A, da $A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_k}$.

Das bedeutet, dass x nicht zu $\bar{A}$ gehört. Also enthält $\bar{A}$ keine Punkte außerhalb von A, d.h., $\bar{A} = A$ und A ist abgeschlossen. ∎

Definition 1.39 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt ***beschränkt***, wenn die Menge von Zahlen

$$\{ d(a, b) \mid a, b \in A \}$$

beschränkt ist (die kleinste obere Schranke dieser Menge heißt der ***Durchmesser*** $\delta(A)$ von A).

Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass A genau dann beschränkt ist, wenn für einen festen Punkt $x \in X$ (den man beliebig wählen kann) die Menge der Zahlen $d(x, a)$ für $a \in A$ beschränkt ist.

Man beachte, dass die Eigenschaft einer Menge, beschränkt zu sein, *von der Metrik abhängt* und nicht von der Topologie. Es handelt sich nicht um einen wohldefinierten topologischen Begriff, denn zu jeder Metrik d gibt es eine insgesamt beschränkte Metrik

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

mit der gleichen metrischen Topologie.

Lemma 1.40 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede kompakte Teilmenge von X ist beschränkt.*

Beweis. Wenn x leer ist, gilt die Behauptung. Wir können also annehmen $X \neq \emptyset$. Sei $x \in X$.

Sei $A \subseteq X$ kompakt. Die aufsteigende Folge von offenen Bällen $B_n(x)$ für $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ bildet eine offene Überdeckung von X und somit von A, und diese Überdeckung hat, weil A kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung.

Sei $B_N(x)$ die größte der endlich vielen ineinander verschachtelten Mengen dieser Teilüberdeckung. Dann ist $A \subseteq B_N(x)$ und somit ist $d(x, a) < N$ für alle $a \in A$. Die Menge A ist deshalb beschränkt. ■

In den euklidischen Räumen $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$ benutzt man gerne folgende Bedingung für Kompaktheit.

Satz 1.41 (Heine-Borel) *Eine Teilmenge A von $\mathbf{R}^n$ oder $\mathbf{C}^n$ ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist (bezüglich der euklidischen Norm).*

Beweis. Die Richtung „$\Rightarrow$“ gilt in jedem metrischen Raum, wie wir in Lemmata 1.38 und 1.40 gesehen haben.

Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist wesentlich komplizierter und wir verzichten auf die Angabe des Beweises. ■

Wir sammeln noch zwei wichtige Tatsachen über kompakte Mengen:

Bemerkung 1.42 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Der Durchschnitt einer abgeschlossenen Menge mit einer kompakten Menge in X ist immer kompakt.

Beweis. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $K \subseteq X$ kompakt, und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $A \cap K$. Wenn wir sie durch die zusätzliche offene Menge $X \setminus A$ ergänzen, erhalten wir eine offene Überdeckung von K, die wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Aus dieser entfernen wir die Menge $X \setminus A$ (falls sie dazu gehört), die keine Punkte von $A \cap K$ enthält.

Die restlichen endlich vielen Mengen gehören alle zu $\mathcal{U}$ und sie überdecken noch $A \cap K$, so dass $A \cap K$ eine endliche Teilüberdeckung aus $\mathcal{U}$ besitzt. ■

Ein Hauptgrund für die große Bedeutung und Nützlichkeit des Kompaktheitsbegriffs ist die Tatsache, dass diese Eigenschaft unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

Satz 1.43 *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume und sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung.*

Wenn $A \subseteq X$ kompakt ist, dann ist die Bildmenge $f(A)$ kompakt in Y.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist

$$\mathcal{V} := \{\, f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U} \,\}$$

eine offene Überdeckung von $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$ und weil A kompakt ist, enthält sie eine endliche Teilüberdeckung von A durch Mengen $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_k)$.

Jeder Punkt von A gehört also zum Urbild einer der endlich vielen Mengen U_i, und deshalb gehört jeder Punkt von $f(A)$ zu einer der Mengen U_i selber.

D.h., $U_1, \ldots, U_k$ bilden eine endliche Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von $f(A)$, und $f(A)$ ist kompakt. ∎

Lemma 1.44 *Seien V und W normierte Vektorräume und V sei endlichdimensional. Dann ist jede lineare Abbildung $T : V \longrightarrow W$ stetig.*

Beweis. Sei $\{\, v_1, v_2, \ldots, v_n \,\}$ eine Basis von V und für jedes i, $1 \le i \le n$, sei $w_i := T(v_i) \in W$.

Weil V und W topologische Vektorräume sind, sind die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbf{K}^n &\longrightarrow V \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta\colon \mathbf{K}^n &\longrightarrow W \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \end{aligned}$$

stetig (diese Abbildungen sind Verknüpfungen von Ausführungen der stetigen Addition und skalaren Multiplikation der Vektorräume; die Basisvektoren in diesen Ausdrücken sind Konstanten und somit stetig).

Da $T(v_i) = w_i$ und T linear ist, gilt für jedes $a \in \mathbf{K}^n$, dass

$$T\big(\alpha(a)\big) = \beta(a).$$

Sei
$$S := \{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n \mid \|(a_1, \dots, a_n)\| = 1 \}$$
die Einheitssphäre in $\mathbf{K}^n$ (hier ist $\| \ \|$ die euklidische Norm).

Diese Menge ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbf{K}^n$ (sie ist abgeschlossen als Urbild der abgeschlossenen Teilmenge $\{ 1 \} \subseteq \mathbf{R}$ unter der stetigen Abbildung $\| \ \|$). Also ist S kompakt.

Der Koordinatenursprung $(0, \dots, 0)$ gehört nicht zu S, und weil die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, ist $0 \notin \alpha(S)$. Weil α stetig ist, ist die Menge $\alpha(S)$ kompakt und deshalb abgeschlossen (denn V ist ein metrischer Raum und somit Hausdorffsch). Weil 0 im (offenen) Komplement von $\alpha(S)$ liegt, gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ so dass der offene Ball $B_\varepsilon(0) = \{ v \in V \mid \|v\| < \varepsilon \}$ die Menge $\alpha(S)$ nicht trifft. Für jedes $v \in \alpha(S)$ ist also $\|v\| \geq \varepsilon$.

Auch die Menge $\beta(S)$ ist kompakt (in W) und deshalb beschränkt. Es gibt also eine Zahl $M \in \mathbf{R}$ mit $\|w\| \leq M$ für jedes $w \in \beta(S)$.

Nun sei $v \neq 0$ ein beliebiger nichtverschwindender Vektor aus V. Man kann v als $\alpha(x)$ schreiben für einen eindeutig bestimmten Punkt $x \neq 0 \in \mathbf{K}^n$.

Weil $x \neq 0$ gibt es eine positive reelle Zahl c mit $cx = (a_1, \dots, a_n) \in S$ (man nehme $c = 1/\|x\|$).

Wir haben nun $cv = \alpha(cx) \in \alpha(S)$ und somit ist $\|cv\| \geq \varepsilon$, also $\|v\| \geq \varepsilon/c$.

Es ist $cT(v) = T(cv) = \beta(cx) \in \beta(S)$ und deshalb ist $\|cT(v)\| \leq M$, also $\|T(v)\| \leq M/c$.

Aus beiden Abschätzungen haben wir
$$\|T(v)\| \leq \frac{M}{c} = \frac{M}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \leq \frac{M}{\varepsilon} \|v\| .$$
Das gilt für *jedes* $v \neq 0 \in V$ und natürlich auch für $v = 0$. Also ist M/ε eine Schranke für T und T ist beschränkt, also stetig. ∎

Korollar 1.45 *a) Je zwei endlichdimensionale normierte Vektorräume gleicher Dimension sind isomorph als topologische Vektorräume, genauer, sie sind algebraisch isomorph und jeder algebraische Isomorphismus zwischen ihnen ist auch ein Homöomorphismus.*

b) Insbesondere, wenn $n \in \mathbf{N}$, dann ist jeder n-dimensionale normierte Vektorraum isomorph und homöomorph zum normierten Vektorraum $\mathbf{K}^n$ mit der euklidischen Norm.

c) Je zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum bestimmen die gleiche Topologie.

d) *Je zwei Normen* $\| \|_1$ *und* $\| \|_2$ *auf einem endlichdimensionalen Vektorraum sind* ***äquivalent*** *in dem Sinne, dass es Zahlen* C_1 *und* $C_2 \geq 0$ *gibt mit*

$$\|v\|_1 \leq C_1 \|v\|_2 \qquad \textit{und} \qquad \|v\|_2 \leq C_2 \|v\|_1$$

für jedes $v \in V$ *(auch hieraus folgt, dass beide Normen die gleiche Topologie auf* V *bestimmen).*

Beweis. a): Seien V und W normierte Vektorräume der gleichen endlichen Dimension n. Dann gibt es einen algebraischen Isomorphismus $T \colon V \longrightarrow W$. Nach Lemma 1.44 sind T und $T^{-1} \colon W \longrightarrow V$ stetig, also ist T ein Homöomorphismus.

b) folgt sofort aus a).

c) folgt aus der Tatsache, dass $\mathrm{id}_V \colon (V, \| \|_1) \longrightarrow (V, \| \|_2)$ ein algebraischer Isomorphismus und somit ein Homöomorphismus ist (egal wie die Normen aussehen).

Da id_V in beiden Richtungen stetig ist, ist es auch in jeder Richtung beschränkt, und das liefert d). ■

Endlichdimensionale normierte Vektorräume haben viele andere schöne Eigenschaften, die nicht auf den unendlichdimensionalen Fall übertragbar sind, wie wir gleich sehen werden. Zum Beispiel:

Satz 1.46 *Sei* V *ein normierter Vektorraum, sei* $r > 0 \in \mathbf{R}$ *und sei*

$$D_r := \{ v \in V \mid \|v\| \leq r \}$$

der abgeschlossene Ball von Radius r um den Ursprung, und

$$S_r := \{ v \in V \mid \|v\| = r \}$$

die Sphäre von Radius r *um den Ursprung.*

Wenn V *endlichdimensional ist, dann sind* D_r *und* S_r *kompakt in der Normtopologie.*

Beweis. S_r und D_r sind abgeschlossen, da sie die Urbilder der abgeschlossenen Teilmengen $\{ r \}$ bzw. $[0, r]$ von $\mathbf{R}$ sind unter der stetigen Abbildung $\| \|$.

Sei n die Dimension von V, sei $T \colon V \longrightarrow \mathbf{K}^n$ ein Isomorphismus und sei $U = T^{-1} \colon \mathbf{K}^n \longrightarrow V$.

Sei A die Menge S_r oder D_r und setze $C := T(A) = U^{-1}(A)$. Wir haben dann $A = U(C)$.

T ist stetig und somit beschränkt, und es folgt, dass für jedes $v \in A$ gilt $\|T(v)\| \leq \|T\| \|v\| \leq r \|T\|$. Deshalb ist $C = T(A)$ beschränkt in $\mathbf{K}^n$, und als Urbild der abgeschlossenen Menge A unter der stetigen Abbildung U ist C auch abgeschlossen.

Also ist C kompakt. Aber A ist das Bild von C unter der stetigen Abbildung U, und somit ist A kompakt. ■

Lemma 1.47 *Sei V ein normierter Vektorraum. Jeder endlichdimensionale Untervektorraum von V ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei W ein endlichdimensionaler Untervektorraum von V und sei $v \in V$ der Grenzwert einer Folge $\{ w_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus W.

Aus der Konvergenz folgt leicht, dass $\{ w_n \}$ beschränkt ist (denn alle bis auf endlich viele Folgenglieder haben Abstand höchstens 1 zu v und bilden eine beschränkte Menge, und sie bleibt beschränkt, wenn man die restlichen endlich vielen Folgenglieder noch hinzufügt).

Sei $r > 0$ eine Zahl, so dass $\|w_n\| \leq r$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann ist $\{ w_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge im Ball $D_r(W) := \{ w \in W \mid \|w\| \leq r \}$, der kompakt ist, weil W endlichdimensional ist.

Nach Satz 1.37 besitzt $\{ w_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Teilfolge, die in $D_r(W)$ und somit in W konvergiert. Aber schon die ganze Folge, und deshalb auch jede Teilfolge, konvergiert gegen v, und in einem metrischen Raum sind Grenzwerte von Folgen nach Bemerkung 1.17 eindeutig bestimmt. Daraus folgt, dass $v \in W$.

Wir haben gezeigt, dass der Grenzwert jeder in V konvergenten Folge aus W noch zu W gehört. Bemerkung 1.26 c) besagt, dass W dann abgeschlossen ist. ■

Satz 1.48 *Sei V ein unendlichdimensionaler normierter Vektorraum. Dann sind für $r > 0 \in \mathbf{R}$ die abgeschlossenen Bälle*

$$D_r := \{ v \in V \mid \|v\| \leq r \}$$

und die Sphären

$$S_r := \{ v \in V \mid \|v\| = r \}$$

nicht *kompakt in der Normtopologie.*

Beweis. Da D_1 das Bild von D_r unter der stetigen skalaren Multiplikation mit $1/r$ ist, und da S_1 das Bild von S_r unter dieser stetigen Abbildung ist, reicht es zu zeigen, dass D_1 und S_1 nicht kompakt sind.

Dazu konstruieren wir durch Induktion eine Folge $\{ v_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ von Vektoren aus $S_1 \subseteq D_1$, so dass $\|v_m - v_n\| \geq \frac{1}{2}$ für je zwei Vektoren v_m und v_n aus der Folge (mit $m \neq n$).

Als v_0 wählen wir einen beliebigen Vektor aus S_1. Wenn $n \geq 1$ und wenn $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in S_1$ schon gewählt wurden (mit $\|v_i - v_j\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $i \neq j$), so sei W_n der von diesen Vektoren aufgespannte n-dimensionale Untervektorraum von V. Nach Lemma 1.47 ist W_n abgeschlossen in V.

Weil V unendlichdimensional ist, ist $W_n \neq V$. Sei x ein Vektor von V, der nicht zu W_n gehört. Da W_n abgeschlossen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap W_n = \emptyset$. Es folgt, dass

$$d := \inf\{\, \|x - w\| \mid w \in W_n \,\} \geq \varepsilon > 0.$$

Man wähle ein Vektor $u \in W_n$ mit $c := \|x - u\| < 2d$ und man setze $z := x - u \neq 0$ und

$$v_n := \frac{z}{\|z\|} = \frac{z}{c} \in S_1.$$

Für jeden Vektor $w \in W_n$ ist

$$\|z - cw\| = \|x - u - cw\| \geq d$$

(weil $u + cw \in W_n$).

Also ist

$$\|v_n - w\| = \frac{1}{c}\,\|z - cw\| \geq \frac{d}{c} > \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$$

wie gewünscht, für jedes $w \in W_n$ und insbesondere für w gleich einem der Vektoren v_i für $i < n$. Das erweitert die Induktionskonstruktion um einen Schritt.

Durch Induktion erhalten wir Vektoren v_n für alle $n \in \mathbf{N}$, die eine Folge in $S_1 \subseteq D_1$ bilden, in der je zwei Folgenglieder den Abstand mindestens $1/2$ zueinander haben. So eine Folge kann keine konvergente Teilfolge haben, denn keine Teilfolge von ihr ist Cauchy. Also sind S_1 und D_1 nicht kompakt. $\blacksquare$

Zwei wichtige algebraische Operationen sind die Bildung von ***Unterräumen*** und von ***Quotientenräumen***. Diese Operationen lassen sich auch für halbnormierte und für normierte Vektorräume ausführen (mit dem kleinen Wermutstropfen, dass der Quotient manchmal nur halbnormiert ist, auch wenn der Hauptraum eine Norm trägt).

Lemma und Definition 1.49 *Sei $(V, \|\ \|)$ ein halbnormierter Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum.*

a) Die Einschränkung von $\|\ \|$ auf W ist eine Halbnorm auf W, so dass auch W ein halbnormierter Vektorraum ist. Wenn $\|\ \|$ auf V eine Norm ist, dann ist auch die Einschränkung eine Norm.

Die Inklusion $i: W \longrightarrow V$ ist eine Isometrie und insbesondere haben wir $\|i\| = 1$ (wenn $W \neq \{ 0 \}$) und i ist stetig.

b) *Wir definieren eine Funktion*

$$\| \ \| : \frac{V}{W} \longrightarrow \mathbf{R}$$

durch folgende Vorschrift: sei $\alpha \in V/W$ und man schreibe α als die Restklasse $[v] = v + W$ eines Vektors $v \in V$. Wir setzen

$$\|\alpha\| := \inf_{w \in W} \|v + w\| = \inf_{u \in [v]} \|u\| . \tag{1.10}$$

$\| \ \|$ ist eine wohldefinierte Halbnorm auf V/W, und ist genau dann eine Norm, wenn W abgeschlossen ist in V.

Die kanonische Projektion

$$\pi : V \longrightarrow \frac{V}{W}$$

ist stetig und ***offen*** *(d.h., wenn $U \subseteq V$ offen ist, dann ist $\pi(U)$ offen in V/W).*

Wenn $\| \ \|$ eine Norm ist und $V/W \neq \{ 0 \}$, dann gilt $\|\pi\| = 1$.

Beweis. a) ist trivial.

b): Für eine Restklasse $\alpha = [v] \in V/W$ ist $\|\alpha\|$ definiert als das Infimum der Werte der Halbnorm von V auf dieser Restklasse, und es ist klar, dass dieses Infimum nur von der Restklasse α abhängt und nicht von der Wahl des Vektors $v \in \alpha$, der in der definierenden Formel (1.10) erscheint. D.h., $\| \ \|$ ist eine wohldefinierte Funktion auf V/W.

Da die Halbnorm auf V nichtnegativ ist, gilt auch $\|\alpha\| \geq 0$ für jedes $\alpha \in V/W$. Und da die Nullrestklasse $0 + W$ den Vektor 0 mit $\|0\| = 0$ enthält, ist es klar, dass $\|0 + W\| = 0$.

Die skalare Multiplikation auf V/W hat die Eigenschaft, dass für jedes $c \in \mathbf{K}$ und $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} c(v + W) = c[v] := [cv] &= cv + W \\ &= \{ cv + x \mid x \in W \} \\ &= \{ cv + cw \mid w \in W \} \\ &= \{ cu \mid u \in [v] \} , \end{aligned}$$

und aus den Eigenschaften von der Halbnorm auf V folgt

$$\big\|c[v]\big\| = \inf_{x \in c[v]} \|x\| = \inf_{u \in [v]} \|cu\| = \inf_{u \in [v]} |c| \, \|u\| = |c| \inf_{u \in [v]} \|u\| = |c| \, \big\|[v]\big\|.$$

Auch die Dreiecksungleichung ist leicht nachzuprüfen. Seien α und $\beta \in V/W$, und sei $u \in \alpha$ und $v \in \beta$.

Weil $u + v \in \alpha + \beta$, haben wir $\|\alpha + \beta\| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Da dies für jedes $u \in \alpha$ und für jedes $v \in \beta$ gilt, ist

$$\|\alpha + \beta\| \leq \inf_{u\in\alpha} \|u\| + \inf_{v\in\beta} \|v\| = \|\alpha\| + \|\beta\| .$$

Wir haben damit gezeigt, dass $\| \ \|$ eine Halbnorm auf V/W ist.

Nun sei $\alpha = v + W$ eine Restklasse ungleich der Nullrestklasse W (d.h., $v \notin W$). Genau dann ist $\|\alpha\| = 0$, wenn es eine Folge $\{ w_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus W gibt, mit $\lim_{n\to\infty} \|v + w_n\| = 0$. Diese Bedingung ist aber äquivalent dazu, dass $\lim_{n\to\infty} w_n = -v$.

Also ist $\|v + W\| = 0$ genau dann, wenn $-v \in \overline{W}$. Da aber $\overline{W}$ ein Untervektorraum ist, ist das gleichbedeutend damit, dass $v \in \overline{W}$.

Der Quotientenraum V/W enthält also genau dann nichtverschwindende Vektoren mit Halbnorm 0, wenn in V gilt $\overline{W} \setminus W \neq \emptyset$.

In anderen Worten, $\| \ \|$ ist *keine* Norm genau dann, wenn W *nicht* abgeschlossen ist, und ist somit genau dann eine Norm, wenn W abgeschlossen ist.

Als nächstes zeigen wir, dass π eine offene Abbildung ist. Dazu sei U offen in V und sei $\alpha \in \pi(U)$. Wir wählen ein $u \in U$ mit $\alpha = \pi(u)$ und eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(u) \subseteq U$.

Sei $\beta \in B_\varepsilon(\alpha)$, d.h., es sei $\|\beta - \alpha\| < \varepsilon$. Nach der Definition von $\|\beta - \alpha\|$ gibt es einen Vektor $v \in \beta - \alpha$ mit

$$\|\beta - \alpha\| \leq \|v\| < \varepsilon,$$

und wir haben $u + v \in B_\varepsilon(u) \subseteq U$ und $\pi(u + v) = \alpha + \beta - \alpha = \beta$.

Folglich ist $B_\varepsilon(\alpha) \subseteq \pi(U)$. Da es für jedes $\alpha \in \pi(U)$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt mit dieser Eigenschaft ist $\pi(U)$ offen in V/W. Also ist π eine offene Abbildung.

Nun zur Stetigkeit von π. Aus der Definition (1.10) von $\| \ \|$ auf V/W ist klar, dass für jeden Vektor $v \in V$ gilt

$$\big\|\pi(v)\big\| = \big\|[v]\big\| \leq \|v\|$$

und daraus folgt, dass $\|\pi\| \leq 1$ und π somit stetig ist.

Wenn $V/W \neq \{ 0 \}$ und $\| \ \|$ auf V/W eine Norm ist, so finden wir einen Vektor $v \in V$ mit $\big\|\pi(v)\big\| \neq 0$. Nach Definition von $\big\|\pi(v)\big\|$ gibt es in der Restklasse $\pi(v)$ für jedes $\varepsilon > 0$ einen Vektor u mit

$$0 < \big\|\pi(v)\big\| = \big\|\pi(u)\big\| \leq \|u\| \leq (1 + \varepsilon)\big\|\pi(v)\big\| = (1 + \varepsilon)\big\|\pi(u)\big\|$$

(die Gleichheiten gelten, weil ja $\pi(u) = \pi(v)$).

Hieraus folgt aber

$$\frac{\|u\|}{1+\varepsilon} \leq \big\|\pi(u)\big\| \leq \|\pi\|\,\|u\|\,.$$

Weil $\|u\| > 0$ können wir daraus schließen

$$\|\pi\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt ist $\|\pi\| \geq 1$; also gilt $\|\pi\| = 1$. ∎

Folgendes Korollar besagt, dass man durch Quotientenbildung nach den Vektoren von Länge 0 jeden halbnormierten Vektorraum zu einem normierten Vektorraum machen kann, ohne Veränderung der Werte der Norm.

Korollar 1.50 *Sei* $(V, \|\ \|)$ *ein halbnormierter Vektorraum. Sei*

$$W := \{\, v \in V \mid \|v\| = 0 \,\}\,.$$

W ist ein abgeschlossener Untervektorraum von V und es gibt eine wohldefinierte Norm auf dem Quotientenvektorraum V/W, so dass die kanonische Projektion $\pi\colon V \longrightarrow V/W$ eine Isometrie ist.

Beweis. Wenn v und $w \in W$, dann ist für jedes $a \in \mathbf{K}$ auch $av \in W$ weil $\|av\| = |a|\,\|v\| = |a| \cdot 0 = 0$, und aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| = 0 + 0 = 0,$$

so dass auch $\|v + w\| = 0$ und $v + w \in W$. Das zeigt, dass W ein Untervektorraum ist; er ist abgeschlossen als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{\,0\,\}$ unter der stetigen Funktion $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbf{R}$.

Sei $\alpha \in V/W$ und seien u und $v \in \alpha$. Nach Formel (1.7) in Bemerkung 1.31 ist

$$\big|\|v\| - \|u\|\big| \leq \|v - u\| = 0$$

weil $v - u \in W$. Also ist $\|\ \|$ konstant auf jeder Restklasse α.

Die Halbnorm von V bestimmt nach Lemma 1.49 b) eine Norm auf V/W (da W abgeschlossen ist) mit

$$\big\|[v]\big\| = \inf_{u \in [v]} \|u\|$$

für jedes $v \in V$. Weil die Halbnorm von V auf jeder Restklasse konstant ist, ist das Infimum in dieser Formel gleich der Halbnorm jedes Elements der Restklasse.

Also ist $\big\|\pi(v)\big\| = \big\|[v]\big\| = \|v\|$ und π ist eine Isometrie. ■

Eine wichtige metrische Eigenschaft haben wir noch nicht besprochen. Wir wissen, dass in einem metrischen Raum jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Die Analysis in $\mathbf{R}$ und in $\mathbf{R}^n$ ernährt sich wesentlich von der dort geltenden Umkehrung dieser Implikation, und das ist so nützlich, dass wir diese Eigenschaft, die ***Vollständigkeit***, wo immer möglich in den von uns betrachteten metrischen Vektorräumen verlangen wollen.

Wir erinnern kurz an die Definition, an die Grundeigenschaften und an einige wichtige Konstruktionen.

Definition 1.51 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Metrik d heißt ***vollständig***, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt ***vollständig***, wenn die Einschränkung der Metrik d auf A eine vollständige Metrik auf A ist.

Eine Norm $\|\ \|$ auf einem Vektorraum V heißt ***vollständig***, wenn die Normmetrik vollständig ist; in diesem Fall nennt man den normierten Vektorraum $\big(V, \|\ \|\big)$ einen ***Banachraum***.

Beispiel 1.52 Bekanntlich ist die euklidische Metrik auf den euklidischen Räumen $\mathbf{R}^n$ (und entsprechend auch $\mathbf{C}^n$) eine vollständige Metrik.

In anderen Worten, die normierten Vektorräume $\mathbf{K}^n$ (für $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$) sind Banachräume.

Bemerkung 1.53 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede vollständige Teilmenge von X ist abgeschlossen.

Wenn (X, d) vollständig ist, dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von X vollständig.

Beweis. Sei $A \subseteq X$ vollständig und sei $x \in \bar{A}$. Dann gibt es eine Folge aus A, die gegen x konvergiert. Weil sie konvergiert, ist sie eine Cauchyfolge. Weil A vollständig ist, konvergiert diese Folge in A, aber da sie in X nur einen Grenzwert haben kann, ist $x \in A$. Damit ist gezeigt, dass A abgeschlossen ist.

Umgekehrt, wenn (X, d) vollständig ist und wenn $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, so konvergiert jede Cauchyfolge in A gegen einen Grenzwert $x \in X$, da d auf X vollständig ist, aber der Grenzwert muss in A liegen, weil A abgeschlossen ist.

Also konvergiert jede Cauchyfolge aus A in A und A ist vollständig. ■

Bemerkung 1.54 Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Sie konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge hat.

Denn angenommen, die Teilfolge $\{ x_{n_k} \}_{k \in \mathbf{N}}$ konvergiert gegen einen Limes a.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt eine Zahl $N \in \mathbf{N}$, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ für alle n und $m \geq N$, und es gibt eine Zahl $M \in \mathbf{N}$ mit $n_M \geq N$, so dass $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$ für alle $k \geq M$.

Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_M}) + d(x_{n_M}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Also konvergiert $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$.

Die anderer Richtung ist klar.

Lemma 1.55 *a) Jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum ist ein Banachraum.*

b) Jeder abgeschlossene Untervektorraum eines Banachraums ist wieder ein Banachraum.

c) Sei V ein Banachraum und W ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist V/W mit der Quotientennorm ein Banachraum.

d) Sei V ein normierter Vektorraum und sei W ein Banachraum über dem gleichen Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Dann ist $L(V, W)$ mit der Operatornorm ein Banachraum.

e) Der Dualraum eines beliebigen normierten Vektorraums ist immer ein Banachraum.

Beweis. a): Sei V ein n-dimensionaler normierter Vektorraum (wo $n < \infty$) und sei $T \colon V \longrightarrow \mathbf{K}^n$ ein linearer Isomorphismus. T und T^{-1} sind dann automatisch stetig.

Sei $\{ v_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in V. Für alle m und $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\big\| T(v_n) - T(v_m) \big\| = \big\| T(v_n - v_m) \big\| \leq \| T \| \, \| v_n - v_m \|$$

und daraus sieht man, dass auch die Folge $\{ T(v_n) \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{K}^n$ ist.

Diese Folge konvergiert, weil $\mathbf{K}^n$ vollständig ist. Sei $x \in \mathbf{K}^n$ der Grenzwert.

Weil T^{-1} stetig ist, konvergiert die Folge $\left\{ T^{-1}\bigl(T(v_n)\bigr) \right\}_{n\in\mathbf{N}} = \{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ gegen $T^{-1}(x)$, d.h., die ursprüngliche Cauchyfolge konvergiert in V, was zu zeigen war.

(Die bekannte und in jedem topologischen Raum geltende Tatsache, dass eine stetige Abbildung Grenzwerte von konvergenten Folgen in Grenzwerte der Bildfolgen abbilden, ist sehr einfach zu beweisen.)

b) folgt sofort aus Bemerkung 1.53.

c): Sei $\{ \alpha_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in V/W. Wir müssen zeigen, dass sie konvergiert; nach Bemerkung 1.54 reicht es, eine konvergente Teilfolge zu präsentieren. Diese konstruieren wir jetzt durch Induktion, gleichzeitig mit einer Urbildfolge unter π.

Sei $k \in \mathbf{N}$, und für alle $j < k$ seien $n_j \in \mathbf{N}$ und ein Vektor $v_j \in \alpha_{n_j}$ schon gewählt, so dass drei Bedingungen erfüllt sind:

- für alle $m \geq n_j$ ist $\left\|\alpha_m - \alpha_{n_j}\right\| < 2^{-(j+2)}$;
- wenn $j > 0$ ist $n_j > n_{j-1}$
- wenn $j > 0$ ist $\|v_j - v_{j-1}\| < 2^{-j}$.

(wenn $k = 0$ wird nichts vorausgesetzt und dieser Fall ist der Induktionsanfang).

Für den k-ten Schritt der Induktion wählen wir zunächst n_k, so dass die erste der drei Bedingungen erfüllt ist, und wenn $k > 0$ wählen wir es größer als n_{k-1} (was wegen der Cauchy Eigenschaft ja möglich ist).

Wenn $k = 0$ wählen wir einen beliebigen Vektor $v_0 \in \alpha_{n_0}$.

Wenn $k > 0$, dann garantiert die erste Bedingung für $j = k - 1$ und die Wahl von $n_k > n_{k-1}$, dass $\left\|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_{k-1}}\right\| < 2^{-(k+1)}$. Nach der Definition der Norm auf V/W können wir einen Vektor $u_k \in \alpha_{n_k} - \alpha_{n_{k-1}}$ finden mit $\|u_k\| < 2^{-k}$. Wir setzen $v_k := v_{k-1} + u_k$ und haben dann wie gewünscht $\|v_k - v_{k-1}\| = \|u_k\| < 2^{-k}$.

Aus der dritten Bedingung bei der Wahl der Folge $\{ v_k \}_{k\in\mathbf{N}}$ und aus der Dreiecksungleichung folgt, dass die Norm der Differenz zweier Glieder dieser Folge durch die Differenz der entsprechenden Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ majorisiert wird. Weil diese Reihe konvergiert, bilden ihre Partialsummen eine Cauchyfolge und somit bilden die v_k auch eine Cauchyfolge, die in V gegen einen Vektor v konvergiert weil V vollständig ist.

Aus der Stetigkeit von π folgt nun

$$\pi(v) = \lim_{k\to\infty} \pi(v_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k}$$

und wir haben eine konvergente Teilfolge der Folge $\{ \alpha_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ gefunden.

d): Sei $\{ T_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(V, W)$. Für jedes $v \in V$ und für je zwei Zahlen m und $n \in \mathbf{N}$ ist

$$\big\|T_m(v) - T_n(v)\big\| = \big\|(T_m - T_n)(v)\big\| \le \|T_m - T_n\| \, \|v\|$$

und daran sieht man, dass die Folge $\{ T_n(v) \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in W ist und somit konvergiert.

Wir definieren eine Funktion $T \colon V \longrightarrow W$ durch die Vorschrift

$$T(v) := \lim_{n \to \infty} T_n(v)$$

für jedes $v \in V$.

Die algebraischen Operationen von W sind stetig und sind deshalb vertauschbar mit Grenzwertbildung. Daraus folgt, da jedes T_n linear ist, dass auch T eine lineare Abbildung ist.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbf{N}$, so dass für alle m und $n \ge N$ gilt $\|T_m - T_n\| < \varepsilon/2$.

Sei $n \ge N$ und sei $v \in V$ mit $\|v\| \le 1$. Wir haben dann

$$\big\|T_m(v) - T_n(v)\big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach der Definition von T ist $\lim_{m \to \infty} T_m(v) = T(v)$, und es gibt eine Zahl $m \ge N$ (die von v abhängen kann, aber das schadet nicht), so dass

$$\big\|T_m(v) - T(v)\big\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $\big\|T(v) - T_n(v)\big\| < \varepsilon$ für jedes $v \in V$ mit $\|v\| \le 1$. In anderen Worten,

$$\|T - T_n\| \le \varepsilon \quad \text{für jedes } n \ge N. \tag{1.11}$$

Hieraus können wir zunächst schließen, dass T stetig ist, denn T_N ist nach Voraussetzung stetig, $T - T_N$ ist beschränkt und deshalb stetig, und weil $L(V, W)$ ein Vektorraum ist gehört auch $T = (T - T_N) + T_N$ zu $L(V, W)$.

Nun folgt aus (1.11) für beliebige $\varepsilon > 0$, dass $\lim_{n \to \infty} T_n = T$ in der Normtopologie von $L(V, W)$, d.h., die Cauchyfolge $\{ T_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert und $L(V, W)$ ist vollständig.

e) ist eine Spezialfall von d) mit $W = \mathbf{K}$. Wir wissen schon, dass $\mathbf{K}$ ein Banachraum ist, und deshalb ist d) anwendbar. ■

Definition 1.56 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$.

A heißt ***dicht*** in X, wenn $\bar{A} = X$.

A heißt ***nirgends dicht*** in X, wenn $\bar{A}$ keine nichtleere offene Menge von X enthält.

Lemma 1.57 *Seien V ein normierter Vektorraum und W ein Banachraum und sei $U \subseteq V$ ein dichter Untervektorraum. Sei $T \in L(U, W)$.*

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung

$$\tilde{T}\colon V \longrightarrow W$$

mit $\tilde{T}|U = T$, und es gilt $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Beweis. Wenn $V = \{0\}$ ist nichts zu beweisen. Also können wir annehmen, dass $V \neq \{0\}$ und somit auch $U \neq \{0\}$ (da U dicht ist).

Für jedes $v \in V = \overline{U}$ finden wir eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ aus U, die gegen v konvergiert. Diese Folge ist eine Cauchyfolge, und weil T beschränkt ist, ist auch die Bildfolge $\{T(u_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert in W weil W vollständig ist. Wir setzen

$$\tilde{T}(v) := \lim_{n\to\infty} T(u_n).$$

Man beachte, dass dies die *einzige* Möglichkeit ist, eine stetige Erweiterung von T zu konstruieren, und dies bedeutet, dass $\tilde{T}$ auf jeden Fall eindeutig bestimmt ist, falls es die gewünschten Eigenschaften hat.

Wenn $\{u'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine andere gegen v konvergierende Folge aus U ist, so konvergiert die Folge $\{u_n - u'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ gegen 0, und weil T stetig ist, konvergiert auch

$$\{T(u_n - u'_n)\}_{n\in\mathbf{N}} = \{T(u_n) - T(u'_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$$

gegen $T(0) = 0$. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n) = \lim_{n\to\infty} T(u'_n)$$

und $\tilde{T}$ ist wohldefiniert.

Wenn $v \in U$ können wir $u_n := v$ nehmen für jedes $n \in \mathbf{N}$ und wir sehen daran, dass in diesem Fall $\tilde{T}(v) = T(v)$, d.h., $\tilde{T}$ ist eine Erweiterung von T.

Seien v und $v' \in V$, seien a und $b \in \mathbf{K}$, sei $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in U, die gegen v konvergiert, und sei $\{u'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge aus U, die gegen v' konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} au_n + bu'_n = av + bv'$ und nach Definition ist

$$\tilde{T}(av + bv') = \lim_{n\to\infty} T(au_n + bu'_n) = \lim_{n\to\infty} aT(u_n) + bT(u'_n) = a\tilde{T}(v) + b\tilde{T}(v').$$

Also ist $\tilde{T}$ linear.

Sei $v \in V$ mit $\|v\| = 1$, und sei $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine gegen v konvergente Folge aus U. Weil die Norm stetig ist, ist $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 1$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ so dass für $n \geq N$ gilt $\|u_n\| \leq 1 + \varepsilon$.

Daraus folgt wieder

$$\left\|T(u_n)\right\| \leq \|T\| \, \|u_n\| \leq (1+\varepsilon) \, \|T\|$$

für alle $n \geq N$, und somit ist

$$\left\|\tilde{T}(v)\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|T(u_n)\right\| \leq (1+\varepsilon) \, \|T\| \, .$$

Also ist $\left\|\tilde{T}\right\| \leq (1+\varepsilon) \, \|T\|$ für jedes $\varepsilon > 0$ und damit gilt $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$. Insbesondere ist $\tilde{T}$ stetig.

Die Inklusion $i \colon U \longrightarrow V$ ist eine Isometrie und $T = \tilde{T} \circ i$, woraus folgt

$$\|T\| \leq \left\|\tilde{T}\right\| \cdot \|i\| = \left\|\tilde{T}\right\| \cdot 1 = \left\|\tilde{T}\right\|.$$

Mit der anderen Ungleichung haben wir $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$ wie behauptet. ■

Ein normierter Vektorraum, der nicht vollständig ist, lässt sich immer als dichten Unterraum in einen Banachraum einbetten oder zu einem Banachraum erweitern. Dies gilt sogar für metrische Räume allgemein, wenn man die algebraische Struktur und die Normstruktur außer Acht lässt.

Wir wollen hier aber nur die algebraische Version beweisen, weil der Beweis sich effizienter aufschreiben lässt, weil wir ohnehin zeigen müssen, dass die algebraische und Normstruktur, wenn vorhanden, sich auf die Vervollständigung vererben, und weil wir auch hauptsächlich diesen Fall später benötigen.

Satz 1.58 *Sei V ein normierter Vektorraum. Dann gibt es einen Banachraum $\widehat{V}$ und eine lineare Isometrie $i \colon V \longrightarrow \widehat{V}$, eindeutig bestimmt bis auf isometrische Isomorphismen, so dass $i(V)$ dicht ist in $\widehat{V}$.*

Die Isometrie i erlaubt es, V als einen normierten Untervektorraum von $\widehat{V}$ aufzufassen; da V normiert ist, ist jede Isometrie auf V injektiv.

*Der Banachraum $\widehat{V}$ heißt die **Vervollständigung** oder die **Komplettierung** von V.*

Beweis. Folgen in einem Vektorraum kann man gliedweise miteinander addieren oder mit Skalaren multiplizieren, und so erhält man aus V zunächst den $\mathbf{K}$-Vektorraum $F(V)$ aller Folgen $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus V.

Mit der Dreiecksungleichung und den Eigenschaften der Norm bezüglich Multiplikation von Vektoren mit Skalaren prüft man leicht nach, dass eine Linearkombination von Cauchyfolgen wieder eine Cauchyfolge ist. D.h., die Cauchyfolgen in V bilden einen Untervektorraum $CF(V) \subseteq F(V)$.

Auf diesem Vektorraum ist es einfach, zumindest eine Halbnorm einzuführen. Denn wenn $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge ist, dann folgt sofort aus Gleichung (1.7) in Bemerkung 1.31, dass auch die Folge $\{ \|v_n\| \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge ist und in $\mathbf{R}$ konvergiert, weil $\mathbf{R}$ vollständig ist.

Wir setzen

$$\big\|\{ v_n \}\big\| := \lim_{n\to\infty} \|v_n\| \in \mathbf{R}.$$

Diese Zahl ist nichtnegativ, weil alle Glieder der Folge auf der rechten Seite nichtnegativ sind. Die Norm der konstanten Folge 0 ist offensichtlich 0. Für $a \in \mathbf{K}$ ist $\big\|a\{ v_n \}\big\| = |a| \, \big\|\{ v_n \}\big\|$, weil das entsprechende für jedes Folgenglied auf der rechten Seite gilt. Auch die Dreiecksungleichung folgt sofort aus der Tatsache, dass sie für die einzelnen Folgenglieder rechts gilt. Diese Eigenschaften zeigen, dass $\|\ \|$ eine Halbnorm auf dem Vektorraum der Cauchyfolgen ist.

Diese Halbnorm ist keine Norm, aber wir können sie mit Korollar 1.50 zu einer Norm machen. Genau dann ist $\big\|\{ v_n \}\big\| = 0$ für eine Cauchyfolge $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$, wenn $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0$, und das ist gleichbedeutend damit, dass $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, also dass $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine ***Nullfolge*** ist.

Nach Korollar 1.50 bilden die Nullfolgen einen abgeschlossenen Untervektorraum $NF(V)$ des Cauchyfolgenraumes.

Wir definieren $\widehat{V}$ als den normierten Vektorraum $CF(V)/NF(V)$, versehen mit der Quotientennorm. Die Norm einer Klasse in $\widehat{V}$ ist die Norm jeder Cauchyfolge in der Klasse, also der Limes der Norme der Cauchyfolgenglieder.

Wir müssen zeigen, dass $\widehat{V}$ vollständig ist. Da die Projektion π von $CF(V)$ nach $\widehat{V}$ eine Isometrie ist (Korollar 1.50), können wir Restklassen in $\widehat{V}$ durch Repräsentanten in $CF(V)$ ersetzen, und es reicht zu zeigen, dass jede Cauchyfolge in $CF(V)$ konvergiert, oder was nach Bemerkung 1.54 auf das Gleiche hinausläuft, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

Sei also $\{ \varphi_m \}_{m\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $CF(V)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass für jedes $k \in \mathbf{N}$ für alle $m \geq k$ gilt

$$\|\varphi_m - \varphi_k\| \leq 2^{-k-2}.$$

(Da in der ursprünglichen Folge *schließlich* je zwei Glieder diesen Abstand zueinander haben, wählt man das k-te Glied der Teilfolge mit einem so großen Index in der ursprünglichen Folge, dass ab diesem Index höchstens der genannte Abstand zwischen Folgengliedern herrscht.)

Jedes einzelne φ_m ist selber eine Cauchyfolge $\{ v_{mn} \}_{n\in\mathbf{N}}$ in V.

Wir fügen jetzt eine neue Folge $\{ u_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus Abschnitten zusammen, die wir hintereinander den Folgen φ_m entnehmen und in gleicher Lage in die neue Folge einfügen. Diese Folge $\{ u_n \}$ hat dann die Gestalt

$$u_n = v_{m_n n}$$

für eine monoton steigende Folge $\{ m_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ von Indizes, die angeben, aus welchem φ_m wir das n-te Glied der neuen Folge abschreiben.

Das soll nach folgender Regel geschehen. Für jedes m gibt es eine Zahl $N_m \in \mathbf{N}$, so dass für alle n und $r \geq N_m$ gilt

$$\|v_{mr} - v_{mn}\| \leq 2^{-m-1}, \tag{1.12}$$

und weil φ_m nur endlich viele Vorgänger φ_k in der Folge $\{ \varphi_i \}_{i \in \mathbf{N}}$ hat und für diese nach Annahme gilt $\|\varphi_m - \varphi_k\| \leq 2^{-k-2}$, können wir, wenn wir N_m genügend groß wählen, zusätzlich erreichen, dass

$$\|v_{mn} - v_{kn}\| \leq 2^{-k-1} \tag{1.13}$$

für alle $k < m$ (natürlich auch für $k = m$) und für $n \geq N_m$; diese Ungleichung gilt für genügend große Indizes n weil wir ja angenommen haben

$$\|\varphi_m - \varphi_k\| := \lim_{n \to \infty} \|v_{mn} - v_{kn}\| \leq 2^{-k-2}.$$

Wir setzen

$$m_n := \max\bigl(\{ m \leq n \mid m = 0 \text{ oder } n \geq N_m \}\bigr).$$

Offensichtlich ist das eine monoton steigende Folge und sie ist unbeschränkt, denn für jedes $M \in \mathbf{N}$ wird $m_n \geq M$ sobald $n \geq \max(M, N_M)$.

Nach der Definition ist allerdings $m_n \leq n$ für jedes n, und außerdem $N_{m_n} \leq n$.

Wir schreiben in Zukunft φ für die Folge $\{ u_n \}_{n \in \mathbf{N}}$.

Diese Folge ist Cauchy. Denn sei $k \in \mathbf{N}$. Wenn $n \leq r$ so groß sind, dass $m_n \geq k$, dann haben wir

$$\|v_{m_n r} - u_n\| \leq 2^{-m_n-1} \leq 2^{-k-1}$$

nach Bedingung (1.12), da $r \geq n \geq N_{m_n}$, sowie

$$\|u_r - v_{m_n r}\| \leq 2^{-m_n-1} \leq 2^{-k-1},$$

nach Bedingung (1.13), da $m_n \leq m_r$ und $r \geq N_{m_r}$. Nach der Dreiecksungleichung ist also

$$\|u_r - u_n\| \leq 2^{-k-1} + 2^{-k-1} \leq 2^{-k}.$$

Das zeigt, dass $\{ u_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy ist, d.h., $\varphi \in CF(V)$.

Wir zeigen jetzt, dass $\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \varphi$. Wieder sei $k \in \mathbf{N}$ gegeben. Wenn $m \geq k$ und wenn $n \geq \max(m, N_m)$, dann ist $m_n \geq m$ und nach Bedingung (1.13) gilt

$$\|u_n - v_{mn}\| = \|v_{m_n n} - v_{mn}\| \leq 2^{-m-1} \leq 2^{-k-1}.$$

Folglich ist für $m \geq k$ auch

$$\|\varphi - \varphi_m\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_{mn}\| \leq 2^{-k-1}.$$

Das beweist die Konvergenzaussage.

Weil jede Cauchyfolge in $CF(V)$ konvergiert, gilt das Gleiche auch im Quotienten $\widehat{V} = CF(V)/NF(V)$ und $\widehat{V}$ ist vollständig.

Wir müssen noch eine Isometrie $i\colon V \longrightarrow \widehat{V}$ konstruieren, deren Bild dicht ist in $\widehat{V}$.

Die Abbildung $c\colon V \longrightarrow CF(V)$, die jedem Vektor v die konstante Folge $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ mit allen $v_n = v$ zuordnet, ist offensichtlich wohldefiniert (die konstante Folge ist tatsächlich eine Cauchyfolge), linear und eine Isometrie. Wir setzen

$$i := \pi \circ c.$$

Als Verknüpfung von zwei Isometrien ist dies eine Isometrie.

Um zu zeigen, dass $\operatorname{Bild} i$ dicht ist in $\widehat{V}$, reicht es, weil π stetig und surjektiv ist, zu zeigen, dass $\operatorname{Bild} c$ dicht ist in $CF(V)$.

Aber das ist klar, denn sei $\varphi = \{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in V, betrachtet als Element von $CF(V)$. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei $\varphi_n := c(v_n)$.

Es ist $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbf{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und für alle $m \geq N$ gilt $\|v_m - v_n\| < \varepsilon/2$. Daraus folgt

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \lim_{m\to\infty} \|v_m - (\varphi_n)_m\| = \lim_{m\to\infty} \|v_m - v_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Also konvergiert $\{ \varphi_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ gegen φ. Das zeigt, dass jedes $\varphi \in CF(V)$ in der abgeschlossenen Hülle von $\operatorname{Bild} c$ liegt. Also ist $\operatorname{Bild} c$ dicht.

Zum Schluss ist noch die Eindeutigkeit von $\widehat{V}$ zu zeigen. Seien $\widehat{V}_1$ und $\widehat{V}_2$ zwei beliebige Komplettierungen von V und seien $i_j\colon V \longrightarrow \widehat{V}_j$ (für $j = 1, 2$) Isometrien mit dichtem Bild $U_j := i_j(V)$.

Die Isometrie

$$T' := i_2 \circ i_1^{-1}\colon U_1 \longrightarrow \widehat{V}_2$$

hat nach Lemma 1.57 eine eindeutig bestimmte Erweiterung zu einer stetigen linearen Abbildung

$$T\colon \widehat{V}_1 \longrightarrow \widehat{V}_2.$$

T ist eine Isometrie, denn für jedes $w \in \widehat{V}_1$ existiert eine Folge $\{ w_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus $i_1(V)$ mit $\lim_{n\to\infty} w_n = w$. Aus Stetigkeitsgründen gilt

$$\|w\| = \lim_{n\to\infty} \|w_n\|\,,$$
$$T(w) = \lim_{n\to\infty} T(w_n) = \lim_{n\to\infty} T'(w_n),$$

und schließlich

$$\big\|T(w)\big\| = \lim_{n\to\infty} \big\|T'(w_n)\big\| = \lim_{n\to\infty} \|w_n\| = \|w\|$$

wie behauptet.

T ist surjektiv, denn für jedes $u \in \widehat{V}_2$ existiert eine Folge $\{ u_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus $i_2(V) = U_2$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Diese Folge ist natürlich eine Cauchyfolge.

Offensichtlich ist $\operatorname{Bild} T' = \operatorname{Bild} i_2 = U_2$ und wir finden deshalb Vektoren $w_n \in U_1$ mit

$$T(w_n) = T'(w_n) = u_n.$$

Weil T eine Isometrie ist, ist auch $\{ w_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen einen Vektor $w \in \widehat{V}_1$. Weil T stetig ist, ist

$$T(w) = \lim_{n\to\infty} T(w_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = u$$

und das zeigt, dass T surjektiv ist.

Als Isometrie auf dem normierten Vektorraum $\widehat{V}_1$ ist T auch injektiv, also ein Isomorphismus. Da auch

$$T \circ i_1 = T' \circ i_1 = i_2 \circ i_1^{-1} \circ i_1 = i_2,$$

führt der isometrische Isomorphismus T die Einbettung $i_1 \colon V \longrightarrow \widehat{V}_1$ in die Einbettung $i_2 \colon V \longrightarrow \widehat{V}_2$ über. Damit ist alles bewiesen. ■

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem nützlichen Satz über abzählbare Vereinigungen von nirgends dichten Mengen in einem vollständigen metrischen Raum.

Satz 1.59 (Baire) *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $\{ A_i \mid i \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare Familie von nirgends dichten Teilmengen. Dann enthält die Menge*

$$A := \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

keine nichtleere offene Menge.

Beweis. Wir können annehmen, die Mengen A_i sind alle abgeschlossen, denn auch ihre abgeschlossenen Hüllen sind nirgends dicht und wenn $\bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{A_i}$ keine nichtleere offene Menge enthält, kann $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ auch keine enthalten.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es einen Punkt $x \in X$ und eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Wir konstruieren jetzt durch Induktion über $i \in \mathbf{N}$ eine Folge $\{ x_i \}_{i \in \mathbf{N}}$ in X und eine Folge $\{ \varepsilon_i \}_{i \in \mathbf{N}}$ von positiven Zahlen, so dass für jedes i gilt

$$\varepsilon_{i+1} < \frac{\varepsilon_i}{2} \tag{1.14a}$$

$$d(x_i, x_{i+1}) < \frac{\varepsilon_i}{2} \tag{1.14b}$$

$$B_{\varepsilon_{i+1}}(x_{i+1}) \cap A_i = \emptyset. \tag{1.14c}$$

Wir beginnen die Induktion mit $\varepsilon_0 := \varepsilon$ und $x_0 := x$. Keine Bedingung (1.14) bezieht sich nur auf x_0 und ε_0 und deshalb müssen wir diese Bedingungen bei der Wahl von x_0 und ε_0 noch nicht berücksichtigen.

Nun nehmen wir an, $i \geq 0$ und x_j und ε_j sind für alle $j \leq i$ schon gewählt worden, so dass die obigen Bedingungen erfüllt sind.

Weil A_i nirgends dicht ist und somit keine offene Menge enthält, finden wir in dem offenen Ball $B_{\varepsilon_i/2}(x_i)$ einen Punkt x_{i+1}, der nicht in A_i liegt. Dieser Punkt erfüllt (1.14b).

Nach Annahme ist A_i abgeschlossen, und weil $x_{i+1} \notin A_i$ finden wir eine Zahl $\varepsilon_{i+1} > 0$, so dass (1.14c) gilt. Diese Zahl können wir beliebig klein wählen, und wir wählen sie $< \varepsilon_i/2$ um (1.14a) zu erfüllen.

Damit ist der Induktionsschritt erledigt und wir erhalten durch Induktion eine gesamte Folge $\{ x_i \}_{i \in \mathbf{N}}$, so dass die Bedingungen (1.14) gelten.

Sei $i < j \in \mathbf{N}$. Aus Bedingung (1.14a) folgt durch Induktion, dass

$$\varepsilon_j < \frac{\varepsilon_i}{2^{j-i}}.$$

Mit $i = 0$ finden wir insbesondere $\varepsilon_j < \varepsilon/2^j$ für jedes j.

Aus der Dreiecksungleichung und (1.14b) sehen wir, dass $d(x_i, x_j)$ kleiner ist als ε_i mal die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. D.h., für $j > i$ haben wir

$$d(x_i, x_j) < \varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Das zeigt, dass $\{ x_i \}_{i \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da X vollständig ist, konvergiert sie gegen einen Grenzwert a.

Die gleiche Abschätzung wie eben zeigt für jedes $i \in \mathbf{N}$, dass auch

$$d(x_i, a) = \lim_{j\to\infty} d(x_i, x_j) \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{n=i}^{j-1} d(x_n, x_{n+1})$$

$$= \sum_{n=i}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \overset{(1.14b)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^n} = \varepsilon_i.$$

Für $i = 0$ besagt dies, dass $d(x, a) < \varepsilon$ und deshalb $a \in A$.

Aber für jedes $i > 0$ folgt mit (1.14c), dass $a \notin A_{i-1}$. Also gehört a zu keiner der Mengen A_i, obwohl es in ihrer Vereinigung liegt.

Das ist ein Widerspruch und es gibt, anders als angenommen, keine nichtleere offene Teilmenge von A. ■

Kapitel 2

Drei Grundprinzipien der Funktionalanalysis

In Kapitel 1 haben wir eine erste Bekanntschaft gemacht mit den Gegenständen, mit denen sich die Funktionalanalysis hauptsächlich beschäftigt, nämlich mit topologischen Vektorräumen, normierten Vektorräumen, Banachräumen. Wir haben einige nützliche allgemeine Eigenschaften dieser Räume kennen gelernt, Grundkonstruktionen wie Quotientenbildung und Komplettierung mit ihnen durchgeführt, und auch etwas darüber erfahren, wie stetige lineare Abbildungen zwischen diesen Räumen aussehen müssen.

Aber diese erste Bekanntschaft war auch eine äußerst flüchtige. Im Grunde genommen wissen wir praktisch *gar nichts* über stetige lineare Abbildungen, denn die Vektorräume, die wir aus Erfahrung kennen, sind alle endlichdimensional, und wir haben gesehen, dass endlichdimensionale Räume für die Funktionalanalysis eine fast triviale Struktur haben—sie besitzen zwar eine Topologie, aber im endlichdimensionalen Fall ist sie eindeutig bestimmt und unterscheidet nur Vektorräume, die auch algebraisch schon verschieden sind.

Über die funktionalanalytisch interessanten unendlichdimensionalen Räume sind wir im Moment noch völlig im Dunkeln. Das Wenige, das wir speziell über diese Räume erfahren haben (zum Beispiel die Tatsache, das in ihnen der abgeschlossene Einheitsball nicht kompakt ist) lässt uns nicht viel Hoffnung, dass sie eine „angenehme" mathematische Struktur haben oder dass diese Struktur zugänglicher sein könnte, als die undurchsichtige algebraische Struktur unendlichdimensionaler Vektorräume.

Sogar das wichtigste Merkmal jeder mathematischen Theorie, nämlich das Vorhandensein strukturerhaltender Abbildungen, könnte hier fehlen. Für unendlichdimensionale normierte Vektorräume garantiert keines der bisher bewiesenen Ergebnisse die Existenz von stetigen linearen Abbildungen außer solchen von einer speziellen trivialen Art (Nullabbildungen, Inklusionen von

Unterräumen, Projektionen auf Quotienten). Das gilt sogar wenn der Zielraum ganz einfach ist, etwa gleich dem Koeffizientenkörper $\mathbf{K}$. Da die Stetigkeit die algebraischen Eigenschaften stark einschränkt, kann es gut sein, dass es zumindest manchmal nur die genannten trivialen stetigen linearen Abbildungen gibt, und in diesem Fall hätten wir es mit einer leeren Theorie zu tun—wie soll man eine Struktur untersuchen, wenn man sie mit anderen Instanzen dieser Struktur nicht vergleichen kann?

In diesem Kapitel werden wir diese Bedenken ausräumen und zeigen, dass die Theorie der stetigen linearen Abbildungen auf normierten Vektorräumen eine reichhaltige und außerdem eine sehr angenehme, und wegen günstiger Basiseigenschaften leistungsfähige Theorie ist.

Wir beweisen drei wichtige *Grundprinzipien* der Funktionalanalysis. Das erste Prinzip findet seinen Ausdruck im ***Satz von Hahn-Banach*** über die Fortsetzbarkeit linearer Funktionale, ein Satz mit vielen Anwendungen, die wir teils hier, teils in eigenen Abschnitten besprechen werden. Die anderen beiden Prinzipien gelten in Banachräumen und sind Konsequenzen der Vollständigkeit. Es handelt sich um das ***Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*** von Familien stetiger linearer Abbildungen, deren Werte an jedem einzelnen Punkt beschränkt sind (Satz von Banach-Steinhaus), und um das ***Prinzip der offenen Abbildung***, welches besagt, dass surjektive stetige lineare Abbildungen offene Mengen wieder in offene Mengen abbilden.

Wir beginnen mit dem Satz von Hahn-Banach, zu dessen Vorbereitung wir einige Begriffe definieren möchten.

Definition 2.1 Sei V ein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Die Elemente des Dualraumes

$$V^* := L(V, \mathbf{K}),$$

also die stetigen linearen Abbildungen von V in den durch den Betrag normierten Vektorraum $\mathbf{K}$, nennen wir ***stetige lineare Funktionale*** oder ***stetige Linearformen*** auf V.

Wir wollen zeigen, dass V^* nicht $\{0\}$ ist, wenn V ein normierter Vektorraum $\neq 0$ ist, in anderen Worten, dass es auf jedem nichttrivialen normierten Vektorraum nichttriviale stetige lineare Funktionale gibt.

Definition 2.2 Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ (hier muss V keine Topologie tragen—es geht nur um die *algebraische* Struktur).

Ein ***sublineares Funktional*** auf V ist eine Abbildung

$$p \colon V \longrightarrow \mathbf{R}$$

(reellwertig, auch wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), so dass

a) $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ für alle $v \in V$ und für alle $\lambda \geq 0 \in \mathbf{R}$;

b) $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ für alle v und $w \in V$.

Sublineare Funktionale nennen wir manchmal auch sublineare Abbildungen oder wir sagen von einer solchen Abbildung einfach „p ist ***sublinear***“.

Beispiele 2.3 Sei V ein Vektorraum.

a) Jede $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $p\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ ist ein sublineares Funktional.

b) Jede Halbnorm auf V ist ein sublineares Funktional.

Unsere erste Version des Satzes von Hahn-Banach ist ein rein algebraischer Satz, in dem es nicht um Normen oder Topologien geht. Wegen Beispiel 2.3 b) hat er aber topologische Anwendungen!

Satz 2.4 (Satz von Hahn-Banach, algebraisch) *Sei V ein reeller Vektorraum und sei $p\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ ein sublineares Funktional auf V.*

Sei $W \subseteq V$ ein $\mathbf{R}$-Vektorraum und sei $f\colon W \longrightarrow \mathbf{R}$ eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung, so dass für jedes $w \in W$ gilt

$$f(w) \leq p(w).$$

Dann lässt sich f zu einer $\mathbf{R}$-linearen Abbildung $F\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ erweitern mit der Eigenschaft, dass

$$-p(-v) \leq F(v) \leq p(v) \tag{2.1}$$

für jedes $v \in V$.

Beweis. Der Beweis verwendet das Zornsche Lemma—wir konstruieren damit eine maximale Erweiterung von f, die die Abschätzung (2.1) auf ihrem Definitionsbereich erfüllt, und zeigen, dass sie auf ganz V definiert ist.

Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{E} := \{\, (U, g) \mid U &\text{ Untervektorraum von } V \text{ mit } W \subseteq U,\\ &g\colon U \longrightarrow \mathbf{R} \text{ linear mit } \; g|W = f,\\ &\quad - p(-u) \leq g(u) \leq p(u) \text{ für alle } u \in U \,\}\end{aligned}$$

die Familie aller „p-dominierten“ linearen Erweiterungen von f.

Wir ordnen $\mathcal{E}$ durch die Relation

$$(U_1, g_1) \leq (U_2, g_2) :\Longleftrightarrow\; U_1 \subseteq U_2 \text{ und } g_2|U_1 = g_1.$$

Offensichtlich ist dies eine partielle Ordnung, und jede total geordnete Teilfamilie

$$\mathcal{U} = \{\, (U_\lambda, g_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \,\}$$

von $\mathcal{E}$ hat eine obere Schranke (U, g) gegeben durch

$$U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

und

$$g(u) := g_\lambda(u) \text{ für ein beliebiges } \lambda \in \Lambda \text{ mit } u \in U_\lambda.$$

Weil $\mathcal{U}$ total geordnet ist unter der angegebenen Relation $\leq$ sieht man leicht, dass der Wert von $g(u)$ nicht davon abhängt, mit welchem möglichen λ wir $g_\lambda(u)$ bestimmen, und g ist eine wohldefinierte Abbildung $U \longrightarrow \mathbf{R}$.

Wiederum weil $\mathcal{U}$ total geordnet ist, liegen je zwei Vektoren aus U in einem gemeinsamen Untervektorraum U_λ, und weil das entsprechende g_λ linear ist verhält sich g linear auf Linearkombinationen dieser beiden Vektoren. Folglich ist g linear.

Weil jedes g_λ in der Rolle von F die Abschätzung (2.1) auf U_λ erfüllt und weil g als gemeinsame Erweiterung aller g_λ definiert ist, erfüllt auch g diese Ungleichung auf jedem U_λ, also auf ganz U.

Nach Konstruktion ist U ein Obervektorraum jedes U_λ und g ist so definiert, dass $g|U_\lambda = g_\lambda$. Also gilt

$$(U_\lambda, g_\lambda) \leq (U, g)$$

für jedes $\lambda \in \Lambda$, und (U, g) ist eine obere Schranke zu $\mathcal{U}$ in $\mathcal{E}$.

Damit erfüllt $\mathcal{E}$ mit der partiellen Ordnung $\leq$ die Voraussetzungen für das Zornsche Lemma, und das Zornsche Lemma besagt, dass $\mathcal{E}$ ein maximales Element (U, g) besitzt.

Wir werden zeigen, dass $U = V$; dann ist g die gesuchte Erweiterung F von f.

Wenn $U \neq V$, sei $z \in V \setminus U$ und sei

$$Z := U + \mathbf{R}z \supsetneqq U.$$

Jedes Element $v \in Z$ hat eine eindeutige Darstellung

$$v = u + az$$

mit $u \in U$ und $a \in \mathbf{R}$.

Für je zwei Vektoren x und $y \in U$ gilt wegen der Linearität von g und der Sublinearität von p, dass

$$g(x) + g(y) = g(x + y) \leq p(x + y) = p(x - z + z + y) \leq p(x - z) + p(z + y)$$

und deshalb ist

$$g(x) - p(x - z) \leq -g(y) + p(y + z). \tag{2.2}$$

Sei

$$C := \sup \{ g(x) - p(x - z) \mid x \in U \} .$$

Für jedes $u \in U$ gilt dann

$$g(u) - p(u - z) \leq C \leq -g(u) + p(u + z). \tag{2.3}$$

Die linke Ungleichung folgt aus der Definition von C und die rechte Ungleichung folgt aus (2.2) mit u in der Rolle von y und mit der linken Seite ersetzt durch ihr Supremum über alle x.

Wir definieren jetzt eine Funktion $h\colon Z \longrightarrow \mathbf{R}$ durch

$$h(u + az) := g(u) + aC$$

für alle $u \in U$ und $a \in \mathbf{R}$. Weil jedes Element von Z sich auf eindeutige Weise in der Form $u + az$ schreiben lässt ist h wohldefiniert, und h ist offensichtlich $\mathbf{R}$-linear, da g linear ist. Für Vektoren $u \in U$ ist

$$h(u) = h(u + 0 \cdot z) = g(u) + 0 \cdot C = g(u),$$

d.h., h erweitert g.

Wir behaupten, dass

$$-p(-v) \leq h(v) \leq p(v) \tag{2.4}$$

für jedes $v \in \mathbf{Z}$. Das gilt wenn $v \in U$, weil g diese Ungleichung erfüllt und $h|U = g$.

Wenn $v \notin U$, so schreibt sich v als $u + az$ für ein eindeutiges $u \in U$ und ein eindeutiges $a \neq 0 \in \mathbf{R}$. Sei

$$u' := \frac{u}{|a|} \in U.$$

Aus Ungleichung (2.3) folgt, dass

$$g(u') - p(u' - z) \leq C \leq -g(u') + p(u' + z)$$

und wenn wir dies mit $|a| > 0$ multiplizieren und die Linearität von g und Bedingung 2.2 a) für p ausnutzen, finden wir

$$g(u) - p\big(u - |a|\, z\big) \leq |a|\, C \leq -g(u) + p\big(u + |a|\, z\big). \tag{2.5}$$

Wenn $a > 0$, so ist $|a| = a$ und aus der rechten Ungleichung erhalten wir

$$h(v) = g(u) + aC \leq p(u + aC) = p(v);$$

wenn $a < 0$, so ist $-|a| = a$ und aus der linken Ungleichung in (2.5) folgt

$$h(v) = g(u) + aC = g(u) - |a|\, C \leq p(u - |a|\, C) = p(u + aC) = p(v).$$

Also, unabhängig von dem Vorzeichen von a haben wir für jedes $v \in Z$ zumindest die rechte Ungleichung $h(v) \leq p(v)$ in (2.4).

Die linke Ungleichung erhalten wir sofort, wenn wir v durch $-v$ ersetzen (dieser Vektor liegt ja auch in Z). Weil $-h(v) = h(-v) \leq p(-v)$, ist auch $-p(-v) \leq h(v)$.

Damit ist aber gezeigt, dass $(Z, h) \in \mathcal{E}$ und natürlich ist $(Z, h) > (U, g)$. Somit war (U, g) doch nicht maximal in $\mathcal{E}$.

Diesen Widerspruch erhalten wir nur dann nicht, wenn $U = V$. Also gibt es auf ganz V eine Erweiterung F von f, die Bedingung (2.1) erfüllt, und der Satz ist bewiesen. ■

Wenn wir diesen wohlbemerkt rein algebraischen Satz spezialisieren auf den Fall, wo das sublineare Funktional eine Halbnorm ist, so können wir daraus äußerst nützliche topologische und somit funktionalanalytische Konsequenzen ziehen. Wir beginnen mit einem Hilfssatz, der uns unter anderem erlaubt, auch komplexe Vektorräume und komplexwertige lineare Funktionale zu behandeln.

Lemma 2.5 *Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, sei V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum und sei $p\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Halbnorm auf V.*

Sei W ein Untervektorraum von V und sei $f\colon W \longrightarrow \mathbf{K}$ eine $\mathbf{K}$-lineare Abbildung, so dass

$$|f(w)| \leq p(w)$$

für alle $w \in W$. Dann besitzt f eine $\mathbf{K}$-lineare Erweiterung $F\colon V \longrightarrow \mathbf{K}$, so dass

$$|F(v)| \leq p(v)$$

für alle $v \in V$.

Beweis. Wenn $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, so folgt die Behauptung direkt aus Satz 2.4, denn aus der Voraussetzung für f folgt, dass für jedes $w \in W$ gilt

$$f(w) \leq |f(w)| \leq p(w)$$

und Satz 2.4 besagt, dass f eine lineare Erweiterung $F\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ besitzt, so dass

$$-p(-v) \leq F(v) \leq p(v)$$

für alle $v \in V$.

Weil p eine Halbnorm ist, ist $p(-v) = p(v)$, und nun besagt die linke Ungleichung, dass $-F(v) \leq p(-v) = p(v)$, während die rechte besagt, dass $F(v) \leq p(v)$. Die Kombination dieser Ungleichungen liefert

$$|F(v)| \leq p(v)$$

für alle $v \in V$.

Wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, so wenden wir den reellen Fall an auf die $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $\operatorname{Re} f$; sie erfüllt die Voraussetzungen, weil $|\operatorname{Re} f(v)| \leq |f(v)| \leq p(v)$ für jedes $v \in V$, und es gibt deshalb eine $\mathbf{R}$-lineare Erweiterung $F_r \colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ von $\operatorname{Re} f$ mit

$$|F_r(v)| \leq p(v) \tag{2.6}$$

für jedes $v \in V$.

Wir definieren eine komplexwertige Abbildung $F \colon V \longrightarrow \mathbf{C}$ durch

$$F(v) := F_r(v) - iF_r(iv).$$

Da F_r nur reelle Werte annimmt und somit $-iF_r$ nur imaginäre Werte annimmt, ist $\operatorname{Re} F = F_r$.

Die Abbildung F ist offensichtlich $\mathbf{R}$-linear, und weil

$$\begin{aligned} F(iv) &= F_r(iv) - iF_r(i^2 v) = -i^2 F_r(iv) - iF_r(-v) \\ &\qquad = -i^2 F_r(iv) + iF_r(v) = i\bigl(-iF_r(iv) + F_r(v)\bigr) = iF(v) \end{aligned}$$

ist F sogar $\mathbf{C}$-linear.

Nach Konstruktion stimmt $\operatorname{Re} F = F_r$ auf W mit $\operatorname{Re} f$ überein. Aber für eine $\mathbf{C}$-lineare komplexwertige Funktion g folgt aus der Linearität bezüglich i, dass $\operatorname{Im} g(v) = \operatorname{Re}\bigl(-ig(v)\bigr) = \operatorname{Re} g(-iv)$ für jeden Vektor v, und deshalb haben $\mathbf{C}$-lineare Funktionale mit gleichem Realteil auch den gleichen Imaginärteil und stimmen ganz überein.

Es folgt, dass $F|W = f$.

Für jeden Vektor $v \in V$ finden wir eine komplexe Zahl z mit $|z| = 1$, so dass $zF(v) = F(zv) \in \mathbf{R}$ und deshalb

$$zF(v) = F(zv) = \operatorname{Re} F(zv) = F_r(zv).$$

Für jedes $v \in V$ gilt auf Grund von (2.6) und weil p eine Halbnorm ist, dass

$$|F(v)| = |z|\,|F(v)| = |zF(v)| = |F_r(zv)| \leq p(zv) = |z|\,p(v) = p(v).$$

F ist die gesuchte $\mathbf{C}$-lineare Erweiterung von f, und wir sind fertig. ∎

Satz 2.6 (Satz von Hahn-Banach, funktionalanalytisch) *Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei V ein halbnormierter $\mathbf{K}$-Vektorraum. Sei W ein Untervektorraum von V (mit der Halbnorm von V).*

Sei $f \in W^*$. Dann besitzt f eine Erweiterung $F \in V^*$, so dass $\|F\| = \|f\|$.

Beweis. Dieser bedeutende Satz ist ein einfaches Korollar des algebraischen Satzes von Hahn-Banach, oder genauer von dessen Korollar Lemma 2.5.

Wir wenden dieses Lemma an auf die Funktion $p\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ gegeben durch

$$p(v) := \|f\|\,\|v\| \quad \text{für jedes } v \in V.$$

Als konstantes Vielfaches von $\|\ \|$ ist p offensichtlich eine Halbnorm auf V, und nach Lemma 1.33 b) ist

$$\big|f(w)\big| \le \|f\|\,\|w\| = p(w) \quad \text{für jedes } w \in W.$$

Nach Lemma 2.5 gibt es eine $\mathbf{K}$-lineare Abbildung $F\colon V \longrightarrow \mathbf{K}$ mit $F|W = f$, so dass

$$\big|F(v)\big| \le p(v) = \|f\|\,\|v\| \quad \text{für jedes } v \in V.$$

Daraus folgt schon, dass F beschränkt und somit stetig ist, also dass $F \in V^*$, und $\|F\| \le \|f\|$ weil $\|f\|$ eine Schranke für F ist.

Aber die Inklusion $i\colon W \longrightarrow V$ ist eine Isometrie und weil $f = F \circ i$ haben wir

$$\|f\| \le \|F\|\,\|i\| = \|F\| \cdot 1 = \|F\|.$$

Also ist $\|F\| = \|f\|$ wie behauptet. ■

Korollar 2.7 *Sei V ein normierter Vektorraum und sei $v_0 \neq 0 \in V$. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional $f \in V^*$ mit Operatornorm $\|f\| = 1$, so dass $f(v_0) = \|v_0\|$.*

Insbesondere: wenn $V \neq 0$, dann ist $V^* \neq 0$.

Beweis. Sei W der von v_0 aufgespannte eindimensionale Untervektorraum von V und sei $f_0\colon W \longrightarrow \mathbf{K}$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $f_0(v_0) = \|v_0\| \neq 0$. Dann ist $f_0(av_0) = a\,\|v_0\|$ für jedes $a \in \mathbf{K}$. Daraus folgt

$$\big|f_0(av_0)\big| = |a|\,\|v_0\| = \|av_0\|$$

für jeden Vektor $av_0 \in W$. D.h., f_0 ist eine Isometrie und $\|f_0\| = 1$.

Nach Satz 2.6 hat f_0 eine stetige lineare Erweiterung $f \in V^*$ mit der gleichen Operatornorm, also $\|f\| = 1$, und weil f eine Erweiterung von f_0 ist, ist $f(v_0) = f_0(v_0) = \|v_0\|$. ■

Dieses Korollar zeigt, dass Dualräume von normierten Vektorräumen „genügend viele“ lineare Funktionale enthalten, und in der Tat sind die Dualräume ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Erforschung normierter Vektorräume, weil sie die Struktur der ursprünglichen Vektorräume wiederspiegeln aber selber sogar eine reichhaltigere Struktur haben. Dazu gehören, wie wir in einem späteren Kapitel sehen werden, *drei* Topologien, statt nur einer, und insbesondere welche, die „zahmer“ sind als die Normtopologie und nicht ihre unendlichdimensionalen Pathologien aufweisen (wie in Satz 1.48).

Der in seiner Urform algebraische Satz von Hahn-Banach war genau darauf zugeschnitten, den Existenzsatz 2.6 für Erweiterungen von stetigen linearen Funktionalen zu beweisen, indem man die Halbnorm in der Rolle des sublinearen Funktionals einsetzt. Es gibt aber noch andere interessante Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach, zum Beispiel in der auch für die Funktionalanalysis wichtigen Theorie der konvexen Mengen. Auf diese Anwendungen kommen wir in einem späteren Kapitel zurück, um nicht vom Hauptthema des jetzigen Kapitels abgelenkt zu werden, wichtige Grundsätze der Funktionalanalysis an einem Ort zu sammeln.

Das nächste wichtige und anwendungsreiche Prinzip, das wir besprechen möchten, erlaubt es, aus der Beschränktheit der Werte einer Familie von stetigen linearen Operatoren an einzelnen Punkten auf die globale Beschränktheit dieser Familie in $L(V, W)$ zu schließen.

Definition 2.8 Sei V ein normierter Vektorraum. Eine Teilmenge B von V heißt ***beschränkt***, wenn die Menge $\{\, \|v\| \mid v \in B \,\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}$ ist, oder in anderen Worten, wenn

$$\sup_{v \in B} \|v\| < \infty.$$

Man beachte, dass dies gleichbedeutend damit ist, dass B beschränkt ist in der Normmetrik im Sinne von Definition 1.39 (beide Richtungen dieser Äquivalenz folgen sehr einfach aus der Dreiecksungleichung, wie eigentlich schon im zweiten Absatz der damaligen Definition bemerkt wurde).

Satz 2.9 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) *Sei V ein Banachraum und W ein normierter Vektorraum und sei $\mathcal{F} \subseteq L(V, W)$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren, so dass für jedes $v \in V$ die Menge*

$$\{\, \big\|T(v)\big\| \mid T \in \mathcal{F} \,\}$$

in $\mathbf{K}$ beschränkt ist.

Dann ist $\mathcal{F}$ eine beschränkte Teilmenge von $L(V, W)$ (bezüglich der Operatornorm).

Beweis. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$A_n := \left\{ v \in V \mid \|T(v)\| \leq n \text{ für alle } T \in \mathcal{F} \right\}.$$

Für jedes $T \in \mathcal{F}$ ist T und somit auch $\| \ \| \circ T$ stetig und weil

$$A_n = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} (\| \ \| \circ T)^{-1}\big([0, n]\big)$$

ist A_n als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen.

Für je zwei Vektoren v und $w \in A_n$ und je zwei Zahlen s und $t \in \mathbf{R}$ mit $|s| + |t| = 1$ ist auch $sv + tw \in A_n$, weil für jedes $T \in \mathcal{F}$ gilt

$$\begin{aligned} \|T(sv + tw)\| &= \|sT(v) + tT(w)\| \\ &\leq \|sT(v)\| + \|tT(w)\| = |s| \, \|T(v)\| + |t| \, \|T(w)\| \\ &\leq |s| \, n + |t| \, n = \big(|s| + |t|\big)n = n. \end{aligned}$$

Mit $s = -1$ und $t = 0$ schließen wir daraus, dass für jedes $v \in A_n$ auch $-v \in A_n$, d.h., A ist symmetrisch um 0.

Mit $s = t = \frac{1}{2}$ erhalten wir, dass für je zwei Vektoren v und $w \in V$ auch der Mittelwert $(v + w)/2 \in A_n$.

Die Voraussetzung des Satzes besagt, dass

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = V.$$

Insbesondere enthält diese Vereinigung eine nichtleere offene Menge, und aus Satz 1.59 (dem Satz von Baire) folgt, dass mindestens eine der A_n *nicht* nirgends dicht ist, und (da abgeschlossen) eine nichtleere offene Menge und somit einen offenen Ball von positivem Radius enthält.

In anderen Worten, es gibt eine Zahl $m \in N$, einen Vektor $x \in V$ und eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon(x) \subseteq A_m.$$

Weil A_m symmetrisch ist, ist auch $B_\varepsilon(-x) = -B_\varepsilon(x) \subseteq A_m$.

Nun sei $u \in B_\varepsilon(0)$. Dann ist

$$u + x \in B_\varepsilon(x) \subseteq A_m \qquad \text{und} \qquad u - x \in B_\varepsilon(-x) \subseteq A_m$$

und folglich ist auch

$$u = \frac{\big((u + x) + (u - x)\big)}{2} \in A_m.$$

Insbesondere gilt: für jeden Vektor u mit $\|u\| \leq \varepsilon/2$ ist $\|T(u)\| \leq m$ für jedes $T \in \mathcal{F}$.

Daraus folgt durch Skalierung, dass für jeden Vektor u mit $\|u\| \leq 1$ und für jedes $T \in \mathcal{F}$ gilt $\|T(u)\| \leq 2m/\varepsilon$. Nach Lemma 1.33 a) ist

$$\|T\| \leq \frac{2m}{\varepsilon}$$

für alle $T \in \mathcal{F}$. Das zeigt, dass $\mathcal{F}$ beschränkt ist. ∎

Korollar 2.10 *Sei V ein Banachraum und W ein normierter Raum und sei $\{T_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge aus $L(V, W)$, die* punktweise *gegen eine Abbildung $T: V \longrightarrow W$ konvergiert.*

Dann ist T stetig und linear, d.h., $T \in L(V, W)$.

Beweis. Dass T linear ist folgt sofort aus der Stetigkeit der Addition und der skalaren Multiplikation in W. Wir müssen nur zeigen, dass T stetig ist.

Konvergente Folgen in einem metrischen Raum bilden immer eine beschränkte Menge. Deshalb ist für jedes $v \in V$ die Menge $\{T_n(v) \mid n \in \mathbf{N}\}$ beschränkt.

Aus Satz 2.9 folgt, dass die Familie $\{T_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ in $L(V, W)$ beschränkt ist und es gibt somit eine Zahl $C \geq 0 \in \mathbf{R}$, so dass $\|T_n\| \leq C$ für jedes $n \in \mathbf{N}$.

Daraus folgt für jedes $v \in V$, dass $\|T_n(v)\| \leq C\,\|v\|$ und wir haben somit auch

$$\|T(v)\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n(v)\| \leq C\,\|v\|\,.$$

Also ist $\|T\| \leq C$ und T ist beschränkt und folglich stetig. ∎

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit können wir weitere nützliche Konsequenzen ziehen, wenn wir es auf den Dualraum eines gegebenen normierten Vektorraumes anwenden. Zu diesem Zweck erinnern wir an eine schon aus der Anfängervorlesung *Lineare Algebra* bekannte Tatsache über Dualräume, allerdings in einer leicht verstärkten funktionalanalytischen Fassung.

Lemma und Definition 2.11 *Sei V ein normierter Vektorraum. Den Dualraum $(V^*)^*$ des Dualraums von V nennen wir den* ***Bidualraum*** *von V und bezeichnen ihn mit V^{**}.*

Es gibt eine lineare Abbildung $i: V \longrightarrow V^{**}$, genannt die ***kanonische Abbildung****, die definiert wird durch die Vorschrift*

$$\big(i(v)\big)(\alpha) := \alpha(v) \tag{2.7}$$

für jedes $v \in V$ und jedes $\alpha \in V^*$.

Wenn es nötig ist, um die kanonischen Abbildungen mehrerer normierter Vektorräume zu unterscheiden, schreiben wir i_V als präzisere Notation anstelle von i.

Die kanonische Abbildung ist eine Isometrie und insbesondere stetig und injektiv (weil V normiert ist).

Beweis. Es ist nachzuprüfen, dass i nicht nur linear ist, sondern dass für jedes $v \in V$ das Funktional $i(v)$ tatsächlich linear und stetig auf V^* ist und somit wirklich ein Element von V^{**} ist. Und wir müssen natürlich zeigen, dass i eine Isometrie ist.

Die rechte Seite von (2.7) ist offenbar bilinear in α und v. Da sie in α linear ist, ist $i(v)$ tatsächlich ein lineares Funktional auf V, und da sie in v linear ist, ist i zumindest eine lineare Abbildung von V in den *algebraischen* Dualraum von V^*.

Betrachten wir jetzt die topologischen Eigenschaften. Für jedes $\alpha \in V^*$ und jedes $v \in V$ ist

$$\Big\|\big(i(v)\big)(\alpha)\Big\| = \big\|\alpha(v)\big\| \leq \|\alpha\|\,\|v\|\,,$$

woraus folgt, dass $\|v\|$ eine Schranke für das lineare Funktional $i(v)$ ist und somit $\big\|i(v)\big\| \leq \|v\|\,.$

Insbesondere ist $i(v)$ beschränkt und somit ein *stetiges* lineares Funktional, also ein Element des funktionalanalytischen Dualraums V^{**} von V^*.

Korollar 2.7 des Satzes von Hahn-Banach besagt, dass es für jeden Vektor $v \neq 0 \in V$ ein stetiges lineares Funktional $\alpha \in V^*$ gibt mit $\|\alpha\| = 1$ und mit

$$\alpha(v) = \big(i(v)\big)(\alpha) = \|v\| = \|v\|\,\|\alpha\|\,.$$

Es kann also keine kleinere Schranke für $i(v)$ geben als $\|v\|$. Folglich ist $\big\|i(v)\big\| = \|v\|\,.$

Die gleiche Beziehung gilt natürlich auch für $v = 0$, weil dann wegen Linearität auch $i(v) = 0$ und beide Vektoren Norm 0 haben.

Also ist i eine Isometrie. ■

Korollar 2.12 *Sei V ein normierter Vektorraum und sei $B \subseteq V$ eine Teilmenge, so dass $\alpha(B)$ beschränkt ist in $\mathbf{K}$ für jedes $\alpha \in V^*$. Dann ist B beschränkt.*

Beweis. Wir wenden das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 2.9) auf die Familie $i(B) \subseteq V^{**}$ an. Man beachte, dass dieser Satz über stetige lineare Abbildungen definiert auf einem *Banachraum* hier angewendet werden darf, weil der Definitionsbereich V^* der Funktionale in $i(B)$ nach Lemma 1.55 e) tatsächlich ein Banachraum ist, auch wenn V nicht diese Eigenschaft hat.

Die Voraussetzung des jetzigen Korollars besagt (nach Definition der kanonischen Abbildung i), dass die Familie $i(B)$ von linearen Funktionalen auf V^* an jeder Stelle in V^* eine beschränkte Menge von Werten annimmt. Aus Satz 2.9 können wir schließen, dass die Familie $i(B)$ beschränkt ist, und weil i eine Isometrie ist bedeutet das, dass B beschränkt ist in V. ■

Bemerkung und Definition 2.13 Sei V ein normierter Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$, so dass $\alpha(B)$ beschränkt ist in $\mathbf{K}$ für jedes $\alpha \in V^*$, nennen wir ***schwach beschränkt***.

Korollar 2.12 besagt also, dass in einem normierten Raum jede schwach beschränkte Teilmenge beschränkt ist.

Korollar 2.14 *Sei V ein Banachraum und W ein normierter Vektorraum und sei $\mathcal{F} \subseteq L(V,W)$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren, so dass für jedes $v \in V$ und für jedes $\alpha \in W^*$ die Menge*

$$\left\{ \left|\alpha\big(T(v)\big)\right| \mid T \in \mathcal{F} \right\}$$

in $\mathbf{K}$ beschränkt ist.

Dann ist $\mathcal{F}$ eine beschränkte Teilmenge von $L(V,W)$.

Beweis. Für jedes feste $v \in V$ wenden wir zunächst Korollar 2.12 auf die Menge $B_v := \{ T(v) \mid T \in \mathcal{F} \}$ an. Nach der Voraussetzung nimmt jedes linearen Funktional in W^* auf dieser Menge eine beschränkte Menge von Werten an, und wir können daraus schließen, dass B_v eine beschränkte Teilmenge von W ist für jedes $v \in V$.

Daraus folgt direkt mit Satz 2.9, dass $\mathcal{F}$ beschränkt ist. ■

Das dritte Grundprinzip der Funktionalanalysis befasst sich mit den topologischen Eigenschaften surjektiver stetiger Abbildungen zwischen Banachräumen und ist auch eine Konsequenz des Satzes von Baire.

Satz 2.15 (Prinzip der offenen Abbildung) *Seien V und W Banachräume und sei $T\colon V \longrightarrow W$ eine surjektive stetige lineare Abbildung.*

Dann ist T eine offene Abbildung (d.h., T bildet offene Mengen in offene Bilder ab).

Beweis. Um während des Beweises klar zu stellen, in welchem Raum wir uns gerade befinden, notieren wir den Nullvektor mit einem Index, der den Raum angibt, d.h., wir schreiben 0_V für die Null in V und 0_W für den Nullvektor in W.

Die im Beweis vorkommenden offenen Bälle in V und W werden nicht für die beiden Räume verschieden notiert, da am Mittelpunkt erkennbar ist, in welchem Raum der Ball zu verstehen ist.

Wir führen den Beweis in vier Schritten. Die ersten drei Schritte beweisen immer stärker werdende Aussagen über die Bilder von offenen Mengen um 0_V, und erst der letzte Schritt schließt die allgemeine Aussage aus der lokalen Situation um Null.

Schritt I. Sei $U \subseteq V$ offen mit $0_V \in U$. Dann enthält $\overline{T(U)}$ eine nichtleere offene Menge.

Denn es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0_V) \subseteq U$, und weil jeder Vektor $v \in V$ in $nB_\varepsilon(0_V) = B_{n\varepsilon}(0_V)$ liegt sobald $n\varepsilon > \|v\|$, ist

$$V \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nU.$$

Weil T linear und surjektiv ist haben wir

$$W = T(V) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U).$$

Da dies eine nichtleere offene Menge im vollständigen Raum W ist, besagt der Satz von Baire, dass die Mengen $nT(U)$ nicht alle nirgends dicht sein können. Es gibt also ein $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ so dass $\overline{nT(U)}$ eine nichtleere offene Menge enthält.

Die skalare Multiplikation mit $1/n$ ist ein Homöomorphismus und es folgt, dass

$$\overline{T(U)} = \frac{1}{n}\overline{\big(nT(U)\big)}$$

eine nichtleere offene Menge enthält.

Schritt II. Sei $U \subseteq V$ offen mit $0_V \in U$. Dann enthält $\overline{T(U)}$ eine nichtleere offene Menge um 0_W.

Dazu betrachten wir die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \delta\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u - v. \end{aligned}$$

Es ist $\delta(0_V, 0_V) = 0_V \in U$ und weil δ stetig ist, gibt es offene Mengen E und F um 0_V mit

$$E - F := \delta(E \times F) \subseteq U.$$

Wenn wir E und F durch $E \cap F$ ersetzen (welches ja immer noch eine offene Menge um 0_V ist), können wir sogar annehmen, $E = F$.

Nach Schritt I enthält die Menge $\overline{T(E)}$ eine offene Menge um einen ihrer Punkte w. Diese offene Menge trifft auf jeden Fall die Menge $T(E)$ selber und somit können wir w so wählen, dass $w \in T(E)$.

Die Addition mit $-w$ ist ein Homöomorphismus von W in sich, und weil $\overline{T(E)}$ eine offene Menge um w enthält, enthält

$$\overline{T(E)} - w = \overline{T(E) - w}$$

eine offene Menge um $w - w = 0_W$.

Aber

$$T(E) - w \subseteq T(E) - T(E) = T(E - E) \subseteq T(U)$$

und deshalb ist

$$\overline{T(E) - w} \subseteq \overline{T(U)}.$$

Folglich enhält $\overline{T(U)}$ eine offene Menge um 0_W.

Schritt III. Sei $U \subseteq V$ offen mit $0_V \in U$. Dann enthält $T(U)$ eine nichtleere offene Menge um 0_W.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0_V) \subseteq U$. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$\varepsilon_n := \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Nach Schritt II gibt es für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine Zahl $\rho_n > 0$, so dass in W gilt

$$B_{\rho_n}(0_W) \subseteq \overline{T\big(B_{\varepsilon_n}(0_V)\big)}.$$

Weil T beschränkt ist und $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, ist auch $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Sei $w \in B_{\rho_0}(0_W)$. Wir konstruieren jetzt durch Induktion eine Folge $\{\, y_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ in W und eine Folge $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ in V, so dass

a) $\|w - y_n\| < \rho_n$ für jedes $n \in \mathbf{N}$;

b) $T(x_n) = y_n$ für jedes n,

c) $x_0 = 0_V$ und $\|x_n - x_{n-1}\| < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ für jedes $n \geq 1$.

Wir beginnen die Induktion mit den Festlegungen

$$y_0 := 0_W \qquad \text{und} \qquad x_0 := 0_V.$$

Die Definition von y_0 erfüllt Bedingung a) oben, weil $w \in B_{\rho_0}(0_W)$, und die Definition von x_0 erfüllt offensichtlich Bedingungen b) und c).

Wenn $n \geq 0$ und wenn y_k und x_k schon für alle $k \leq n$ im Einklang mit Bedingungen a)–c) gewählt wurden, so ist

$$w - y_n \in B_{\rho_n}(0_W) \subseteq \overline{T\big(B_{\varepsilon_n}(0_V)\big)}$$

und es gibt also einen Vektor $z_n \in B_{\varepsilon_n}(0_V)$, so dass

$$\big\|w - y_n - T(z_n)\big\| < \rho_{n+1}.$$

Wir setzen

$$y_{n+1} := y_n + T(z_n) = T(x_n) + T(z_n) = T(x_n + z_n)$$

und das erfüllt Bedingung a); mit

$$x_{n+1} := x_n + z_n$$

sind nach der Wahl von z_n und der Definition von ε_n Bedingungen b) und c) erfüllt.

Die Induktion können wir fortsetzen, um die ganzen Folgen $\{\, y_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ und $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ zu erhalten.

Aus der ersten der drei Bedingungen ist klar, dass $\lim_{n\to\infty} y_n = w$.

Weil die $\|x_{n+1} - x_n\|$ durch die Glieder einer absolut konvergenten Reihe majorisiert werden, ist aus der Dreiecksungelichung klar, dass $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge ist, die gegen einen Grenzwert x konvergiert, so dass

$$\|x\| = \|x - 0\| = \|x - x_0\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

Es ist

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = w$$

(denn T ist stetig), und $x \in B_\varepsilon(0_V) \subseteq U$.

Also ist $B_{\rho_0}(0_W) \subseteq T(U)$ und das beweist Schritt III.

Schritt IV. Sei $U \subseteq V$ offen. Dann ist $T(U)$ offen in W.

Die Addition mit einem festen Element eines topologischen Vektorraumes ist immer ein Homöomorphismus (da stetig und stetig umkehrbar). Für jedes $v \in U$ ist also die Menge $U - v$ eine offene Menge um 0_V, und nach Schritt III enthält $T(U - v) = T(U) - T(v)$ eine offene Menge E um 0_W. Somit enthält $T(U)$ die offene Menge $E + T(v)$ um $T(v)$.

Da dies für jedes $v \in U$ gilt, enthält $T(U)$ eine offene Menge um jedes seiner Punkte. Als Vereinigung dieser offenen Mengen ist $T(U)$ offen. ■

Korollar 2.16 (Isomorphiesatz von Banach) *Seien V und W Banachräume und sei $T\colon V \longrightarrow W$ eine bijektive stetige lineare Abbildung. Dann ist T ein Banachraumisomorphismus, d.h., auch T^{-1} ist eine stetige lineare Abbildung.*

Beweis. T hat auf jeden Fall eine *lineare* Umkehrabbildung T^{-1} und die Stetigkeit von T^{-1} ist äquivalent zur Bedingung, dass T offen ist. Aber diese Eigenschaft wird von Satz 2.15 garantiert, da T surjektiv ist. ∎

Korollar 2.17 *Seien V und W Banachräume und sei $T\colon V \longrightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

a) T ist injektiv und $T(V)$ ist abgeschlossen;

b) Es gibt eine Zahl $c > 0$ in $\mathbf{R}$ mit $\|T(v)\| \geq c\,\|v\|$ für alle $v \in V$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wenn $T(V)$ abgeschlossen ist im Banachraum W, dann ist $T(V)$ selber ein Banachraum, und als bijektive stetige lineare Abbildung $V \longrightarrow T(V)$ hat T nach dem Banachschen Isomorphiesatz eine stetige Umkehrabbildung T^{-1}.

Weil T^{-1} stetig ist, ist es beschränkt, und wenn C eine Schranke für T^{-1} ist, dann gilt für jeden Vektor $v \in V$, dass

$$\|v\| = \left\|T^{-1}\bigl(T(v)\bigr)\right\| \leq C\|T(v)\|$$

Also ist

$$\|T(v)\| \geq \frac{1}{C}\,\|v\|$$

und b) gilt mit $c = 1/C$.

b) $\Rightarrow$ a) : Aus der Abschätzung folgt auf jeden Fall, dass $\|T(v)\| \neq 0$ wenn $v \neq 0$, und deshalb ist $\operatorname{Ker} T = \{\,0\,\}$ und T ist injektiv.

T ist somit ein algebraischer Isomorphismus auf $T(V)$.

Sei $\{\,w_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $T(V)$ und sei $\{\,v_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ die eindeutig bestimmte Folge in V mit $T(v_n) = w_n$ für jedes $n \in \mathbf{N}$.

Aus der Abschätzung ist klar, dass auch $\{\,v_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge sein muss, und weil V ein Banachraum ist, konvergiert sie gegen einen Grenzwert a. Weil T stetig ist, ist $\lim_{n\to\infty} w_n = T(a)$; insbesondere konvergiert $\{\,w_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ in $T(V)$.

Wir haben damit gezeigt, dass $T(V)$ vollständig ist. Aber eine vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist nach Bemerkung 1.53 immer abgeschlossen. ∎

Es gibt noch eine wichtige Anwendung des Banachschen Isomorphiesatzes und somit des Prinzips der offenen Abbildung, eine Anwendung, die die Stetigkeit einer Abbildung durch die Abgeschlossenheit ihres Graphen charakterisiert.

Definition 2.18 Seien X und Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Der ***Graph*** von f ist die Menge

$$\Gamma(f) := \big\{ \big(x, f(x)\big) \mid x \in X \big\} \subseteq X \times Y.$$

Man beachte: wenn X und Y Vektorräume sind und wenn f linear ist, dann ist $\Gamma(f)$ ein Untervektorraum von $X \oplus Y$, wie man leicht nachprüft.

Wenn X und Y topologische Räume sind, so nennen wir die Abbildung f ***abgeschlossen***, wenn ihr Graph $\Gamma(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraumes $X \times Y$ ist.

Bemerkung 2.19 Seien $(V, \| \ \|_1)$ und $(W, \| \ \|_2)$ zwei normierte Vektorräume.

Die auf dem Vektorraum $V \oplus W$ definierte Funktion

$$\|(v,w)\| := \|v\|_1 + \|w\|_2$$

ist offensichtlich wieder eine Norm und es ist nicht schwer nachzuprüfen, dass sie die Produkttopologie der Normtopologien von $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ induziert.

Ebenso leicht sieht man ein, dass eine Folge $\{ (v_n, w_n) \}_{n \in \mathbf{N}}$ in $V \oplus W$ genau dann Cauchy ist bezüglich $\| \ \|$, wenn die Folgen $\{ v_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ und $\{ w_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ Cauchy sind bezüglich der Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$.

Entsprechend konvergiert $\{ (v_n, w_n) \}_{n \in \mathbf{N}}$ genau dann gegen einen Vektor (v, w), wenn $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ in V und $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ in W.

Daraus lässt sich sofort schließen, dass die direkte Summe $V \oplus W$ von zwei *Banachräumen* wieder ein Banachraum ist.

Satz 2.20 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Seien V und W Banachräume und sei $T\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.*

T ist genau dann stetig, wenn T abgeschlossen ist.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\{ (v_n, T(v_n)) \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in $\Gamma(T)$, die in $V \times W$ gegen einen Punkt (v, w) konvergiert.

Aus Bemerkung 2.19 folgt, dass $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ und $\lim_{n\to\infty} T(v_n) = w$.

Wenn T stetig ist, muss aber $w = \lim_{n\to\infty} T(v_n) = T(v)$ sein und deshalb $(v, w) \in \Gamma(T)$.

Das zeigt, dass $\Gamma(T)$ eine abgeschlossene Menge ist oder in anderen Worten, dass T eine abgeschlossene Abbildung ist.

„$\Leftarrow$": Nach Bemerkung 2.19 ist $V \oplus W$ ein Banachraum und nach Definition 2.18 ist $\Gamma(T)$ ein Untervektorraum von $V \oplus W$.

Wenn T abgeschlossen ist, ist $\Gamma(T)$ abgeschlossen im Banachraum $V \oplus W$ und deshalb vollständig, also selber ein Banachraum.

Die Projektionen $p_V \colon V \oplus W \longrightarrow V$ und $p_W \colon V \oplus W \longrightarrow W$ sind linear, und sie sind stetig, was sich sehr leicht nachprüfen lässt. Also sind auch ihre Einschränkungen auf $\Gamma(T)$ linear und stetig.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} S \colon V &\longrightarrow V \oplus W = V \times W \\ v &\longmapsto \big(v, T(v)\big) \end{aligned}$$

bildet V ab auf $\Gamma(T)$, und man sieht unmittelbar, dass S eine Umkehrabbildung zu $p_V|\Gamma(T)$ ist.

Insbesondere ist $p_V|\Gamma(T)$ eine *bijektive* stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen. Aus dem Banachschen Isomorphiesatz Korollar 2.16 folgt, dass ihre Umkehrabbildung S stetig ist, und das impliziert, dass auch

$$T = p_W \circ S$$

stetig ist. ■

Kapitel 3

Konvexe Mengen

In diesem sehr kurzen Kapitel wollen wir ein Thema betrachten, das zwar algebraischer Natur und somit beim ersten Blick nicht „funktionalanalytisch" ist, das aber doch in einigen Fragen der Funktionalanalysis eine bedeutende Rolle spielt, weil es in die Definition einer wichtigen Klasse von Topologien auf Vektorräumen eingeht. Es handelt sich um den Begriff der ***konvexen Menge***.

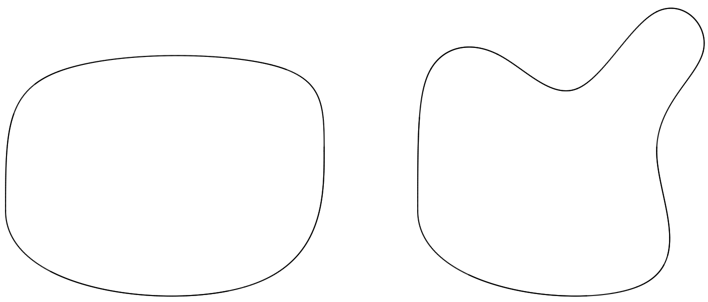
Neben der Anwendbarkeit dieses Begriffs in der Funktionalanalysis gibt es einen anderen Grund, warum es sich lohnt, wenigstens Grundzüge dieser Theorie zu behandeln. Sie ist nämlich neben dem Problem der Erweiterung von linearen Funktionalen eines der wichtigen Anwendungsfelder für den Satz von Hahn-Banach.

Die Sätze über konvexe Mengen, die man aus dem Satz von Hahn-Banach herleiten kann, heißen ***Trennungssätze***, weil es darum geht, konvexe Mengen durch die Werte linearer Funktionale von außerhalb liegenden Punkten zu trennen; man spricht in diesem Zusammenhang von „geometrischen" Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach.

Definition 3.1 Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt ***konvex***, wenn für je zwei Punkte x und y aus A und für jedes $t \in [0,1] \subseteq \mathbf{R}$ der Vektor

$$(1-t)x + ty \in A.$$

In anderen Worten, A ist konvex wenn für je zwei Punkte von A die gerade Verbindungsstrecke in V zwischen diesen Punkten ganz in A enthalten ist.



(a) konvex (b) nicht konvex

Abbildung 3.1: Konvexität in $\mathbf{R}^2$.

Definition 3.2 Sei $(X, \mathcal{R})$ ein topologischer Raum und sei A eine Teilmenge von X. Wir setzen

$$\overset{\circ}{A} := \bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subseteq A}} U.$$

Diese Menge heißt das ***Innere*** von A.

Sie ist eine Vereinigung von offenen Mengen und somit selber offen und ist eine Teilmenge von A, und aus der Definition ist klar, dass das Innere von A die *größte* offene Teilmenge von A ist.

Aus den Regeln für mengentheoretische Operationen mit Komplementen und einem Vergleich der Definitionen des Innern und Definition 1.25 der abgeschlossenen Hülle einer Menge ist klar, dass für jede Menge A gilt

$$\overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}, \quad \text{oder anders gesagt} \quad X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}. \tag{3.1}$$

Die Punkte von $\overset{\circ}{A}$ heißen die ***inneren Punkte*** von A, und aus der Definition ist klar, dass ein Punkt a genau dann ein innerer Punkt von A ist, wenn es eine offene Menge U von X gibt mit $a \in U \subseteq A$.

Lemma 3.3 *Sei V ein Vektorraum.*

a) Ganz V und $\emptyset$ sind immer konvex.

b) Jede Einpunktmenge in V ist konvex.

c) Jeder Untervektorraum von V ist konvex.

d) Sei $\mathcal{K}$ eine Familie von konvexen Teilmengen von V. Dann ist $\bigcap_{A \in \mathcal{K}} A$ konvex.

e) *Seien A und B konvexe Teilmengen von V. Dann sind*

$$A+B := \{\, v+w \mid v \in A \text{ und } w \in B \,\} \qquad \text{und} \qquad cA := \{\, cv \mid v \in A \,\}$$

konvex.

f) *Sei V ein topologischer Vektorraum und sei A eine konvexe Teilmenge von V. Dann ist $\mathring{A}$ konvex.*

g) *Sei V ein topologischer Vektorraum und sei A eine konvexe Teilmenge von V. Dann ist $\bar{A}$ konvex.*

Beweis. a), b) und c) sind klar.

d) ist eine sehr leicht nachzuprüfende Standardaussage, die *immer* gilt, wenn eine Eigenschaft durch Abgeschlossenheit einer Menge unter gewissen Operationen (hier die Bildung von Verbindungsstrecken) charakterisiert ist.

e) lässt sich durch eine einfache algebraische Berechnung nachprüfen. Diese Regeln sind eine direkte Konsequenz der Vektorraumaxiome.

f): Seien v und $w \in \mathring{A}$. Dann gibt es offene Mengen um v und w, die in A enthalten sind, und weil die Addition mit v oder mit w ein Homöomorphismus von V ist, gibt es offene Mengen U_1 und U_2 um 0, so dass

$$v + U_1 \subseteq A \qquad \text{und} \qquad w + U_2 \subseteq A.$$

Nun sei $t \in [0,1]$. Für jedes $u \in U := U_1 \cap U_2$ haben wir

$$(1-t)v+tw+u = (1-t)v+tw+(1-t)u+tu = (1-t)(v+u)+t(w+u) \in A,$$

da $v+u$ und $w+u$ zu A gehören und A konvex ist.

Folglich ist $(1-t)v + tw + U \subseteq A$ und somit

$$(1-t)v + tw \in \mathring{A}.$$

Das zeigt, dass $\mathring{A}$ konvex ist.

g): Seien v und $w \in \bar{A}$. Dann gibt es Folgen $\{\, v_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ und $\{\, w_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ in A mit

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = w.$$

Für jedes $t \in [0,1]$ haben wir aus Stetigkeitsgründen

$$(1-t)v + tw = \lim_{n\to\infty} (1-t)v_n + tw_n.$$

Da A konvex ist, ist $(1-t)v_n + tw_n \in A$ für jedes $n \in \mathbf{N}$. Also ist

$$(1-t)v + tw \in \bar{A}.$$

Das zeigt, dass $\bar{A}$ konvex ist. ■

Wie üblich können wir Eigenschaft 3.3 d) ausnutzen, um die von einer beliebigen vorgegebenen Punktmenge *aufgespannte* konvexe Menge zu definieren.

Definition 3.4 Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $M \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Wir setzen

$$\mathrm{KH}(M) := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \subseteq V \\ A \text{ konvex}}} A. \tag{3.2}$$

Nach Lemma 3.3 d) ist dies eine konvexe Menge und aus der Definition (3.2) ist auch klar, dass $\mathrm{KH}(M)$ die *kleinste* M umfassende konvexe Teilmenge von V ist; sie heißt die ***konvexe Hülle*** von M.

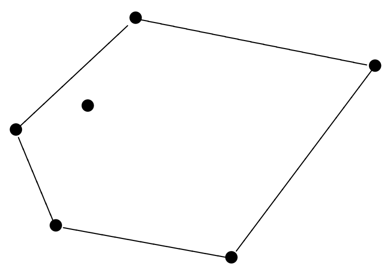


Abbildung 3.2: Die konvexe Hülle von sechs Punkten in der Ebene.

Definition 3.5 Sei V ein Vektorraum. Eine ***konvexe Linearkombination*** oder, kürzer, eine ***konvexe Kombination*** von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$ aus V ist eine reelle Linearkombination

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \qquad \text{mit } t_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ und mit } \sum_{i=1}^{k} t_i = 1.$$

Es gibt eine einfache explizite Beschreibung der konvexen Hülle einer Menge:

Bemerkung 3.6 a) Sei V ein Vektorraum und $A \subseteq V$ konvex. Dann gehört jede konvexe Kombination aus A wieder zu A.

b) Sei V ein Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann ist $\mathrm{KH}(M)$ die Menge aller konvexen Linearkombinationen von Vektoren aus M (in beliebiger endlicher Anzahl).

Beweis. a): Für konvexe Kombinationen von $k = 2$ Vektoren aus A ist die Behauptung einfach die Definition des Begriffes „konvex“, und die Aussage ist auch klar für $k = 1$, denn die einzige konvexe Kombination eines einzelnen Vektors v ist $1 \cdot v$.

Für beliebige konvexe Kombinationen folgt die Aussage durch eine einfache Induktion über die Anzahl k der Koeffizienten $t_i \neq 0$, denn wenn diese Anzahl größer als eins ist, ist $t := t_2 + \cdots + t_k \neq 0$, es ist $t_1 = 1 - t$ und wir können schreiben

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k = (1-t)v_1 + t\Big(\sum_{i=2}^{k} \frac{t_i}{t} v_i\Big),$$

wo der zweite Summand eine konvexe Kombination von $k-1$ Vektoren aus A ist. Dieser Summand gehört zu A nach der Induktionsannahme und der ganze Ausdruck gehört zu A nach der definierenden Bedingung für Konvexität.

b): Man prüft sehr leicht nach, dass jede konvexe Kombination von konvexen Kombinationen aus M selber wieder eine konvexe Kombination aus M ist, d.h., die Menge $\tilde{M}$ aller konvexen Kombinationen aus M ist abgeschlossen unter konvexen Linearkombinationen. Insbesondere gehört jede konvexe Kombination von zwei Vektoren aus $\tilde{M}$ wieder zu $\tilde{M}$ und das bedeutet nach Definition, dass $\tilde{M}$ konvex ist.

Jedes Element $v \in M$ ist gleich der konvexen Kombination $1 \cdot v$ und somit ist $M \subseteq \tilde{M}$.

Und schließlich folgt aus a), dass jede M enthaltende konvexe Menge alle konvexen Kombinationen aus sich und somit insbesondere alle konvexen Kombinationen aus M enthalten muss. $\tilde{M}$ ist deshalb die *kleinste* M umfassende konvexe Menge und ist also gleich $\mathrm{KH}(M)$. ■

Korollar 3.7 *Sei V ein topologischer Vektorraum und sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Dann ist* $\mathrm{KH}(U)$ *offen.*

Beweis. Sei $A := \mathrm{KH}(U)$. Die Menge U ist eine offene Teilmenge von A und somit ist

$$U \subseteq \mathring{A}.$$

Weil A konvex ist, ist nach Lemma 3.3 f) auch $\mathring{A}$ konvex. Da aber $\mathrm{KH}(U)$ die *kleinste* konvexe Obermenge von U ist, muss

$$\mathrm{KH}(U) = \mathring{A}$$

sein und insbesondere ist $\mathrm{KH}(U)$ offen. ■

Wir wollen jetzt die relative Lage konvexer Teilmengen in einem Vektorraum mit Hilfe linearer Funktionale beschreiben. Der Clou zur Gewinnung solcher linearer Funktionale ist die Konstruktion geeigneter sublinearer Funktionale im Einklang mit folgender Beobachtung (Lemma 3.10 unten).

Definition 3.8 Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt ***absorbierend***, wenn es für jedes $v \in V$ eine reelle Zahl $r_v > 0$ gibt, so dass

$$v \in tA \qquad \text{für alle } t \geq r_v.$$

Man beachte, dass absorbierende Mengen immer den Vektor 0 enthalten, denn sonst versagt die definierende Bedingung für $v = 0$.

Ferner gibt es für jedes $v \in V$ auch eine Zahl $r'_v > 0$, so dass $v \in tA$ (für t reell) wann immer $|t| \geq r'_v$; dazu reicht es, $r'_v := \max(r_v, r_{-v})$ zu nehmen.

Aus diesen Bemerkungen sieht man, dass folgende Alternativdefinition zur ursprünglichen Definition offenbar äquivalent ist: A ist ***absorbierend*** genau dann, wenn es für jedes $v \in V$ eine Zahl $\varepsilon_v > 0$ gibt, so dass $tv \in A$ für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| < \varepsilon_v$.

Bemerkung 3.9 In einem topologischen Vektorraum V ist jede Teilmenge A mit 0 als inneren Punkt absorbierend.

Das folgt sofort aus der Alternativdefinition in 3.8, denn eine solche Menge A enthält eine offene Menge U um 0, und für jedes v in V ist die Abbildung $t \mapsto tv$ stetig mit Wert in U bei $t = 0$. Weil U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $tv \in U \subseteq A$ für alle reelle t mit $|t| < \varepsilon$.

Lemma 3.10 *Sei V ein Vektorraum und sei p ein sublineares Funktional auf V. Dann sind die Mengen*

$$A := \{\, v \in V \mid p(v) < 1 \,\} \qquad \textit{und} \qquad B := \{\, v \in V \mid p(v) \leq 1 \,\}$$

konvex und absorbierend.

Beweis. Diese Mengen sind konvex, weil für je zwei Punkte v und w von A oder von B und für jedes $t \in [0,1]$ gilt nach Definition 2.2, dass

$$p\big((1-t)v + tw\big) \leq p\big((1-t)v\big) + p(tw) = (1-t)p(v) + tp(w) \leq (1-t) + t = 1.$$

Das zeigt, dass B konvex ist, aber da t und $1-t$ nicht beide 0 sein können ist die Ungleichung $<$ wenn v und $w \in A$ und somit ist auch A konvex.

Aus Eigenschaft 2.2 a) in der Definition von ***sublinear*** ist klar, dass für jedes $t > 0$ gilt

$$tA = \{ v \in V \mid p(v) < t \} \qquad \text{und} \qquad tB = \{ v \in V \mid p(v) \leq t \} .$$

Somit gilt für jeden Vektor v, dass $v \in tA \subseteq tB$ für alle $t > \max\bigl(0, p(v)\bigr)$, und somit sind A und B absorbierend. ■

Dieses Lemma können wir „umkehren", um sublineare Funktionale aus konvexen absorbierenden Mengen zu konstruieren.

Lemma und Definition 3.11 *Sei V ein Vektorraum und $A \subseteq V$ eine konvexe absorbierende Teilmenge. Für jedes $v \in V$ setzen wir*

$$p_A(v) := \inf \{ t > 0 \in \mathbf{R} \mid v \in tA \} . \tag{3.3}$$

Weil A absorbierend ist, ist dies eine nichtnegative endliche Funktion auf V.

*Wir nennen p_A das **Minkowski-Funktional** oder **Eichfunktional** von A.*

Das Minkowski-Funktional einer konvexen absorbierenden Menge ist ein nichtnegatives sublineares Funktional.

Beweis. Aus der definierenden Bedingung (3.3) ist klar, dass $p_A(v) \geq 0$ für jedes v und dass $p_A(\lambda v) = \lambda p_A(v)$ für jedes $v \in V$ und jedes $\lambda \geq 0$ (für $\lambda = 0$ ist $p_A(0) = 0$ weil der Vektor 0, der gleich all seiner Vielfache ist, zu A gehört).

Wir müssen nur noch Bedingung 2.2 a) nachprüfen, die Subadditivität von p_A. Seien v und $w \in V$.

Seien s und $t > 0$ mit $v \in sA$ und $w \in tA$. Dann haben wir $v/s \in A$ und $w/t \in A$. Weil A konvex ist und weil $s/(s+t) + t/(s+t) = 1$, gehört die konvexe Kombination

$$\frac{s}{s+t} \cdot \frac{v}{s} + \frac{t}{s+t} \cdot \frac{w}{t} = \frac{v}{s+t} + \frac{w}{s+t} = \frac{v+w}{s+t}$$

zu A, oder anders gesagt, $v + w \in (s+t)A$.

Folglich ist $p_A(v+w) \leq s+t$, und das gilt für jedes $s > 0$ mit $v \in sA$ und jedes $t > 0$ mit $w \in tA$.

Da $p_A(v)$ das Infimum aller solcher s und $p_A(w)$ das Infimum aller solcher t ist, haben wir wie gewünscht

$$p_A(v+w) \leq p_A(v) + p_A(w).$$

■

Lemma 3.12 *Sei V ein Vektorraum und $A \subseteq V$ eine konvexe absorbierende Teilmenge. Für jedes $v \in A$ ist*

$$p_A(v) \leq 1.$$

Wenn V ein topologischer Vektorraum ist und wenn w ein innerer Punkt von A ist, dann ist

$$p_A(w) < 1.$$

Wenn V ein topologischer Vektorraum ist und wenn 0 ein innerer Punkt von A ist, gilt die Umkehrung dieser Aussage, d.h., dann ist jeder Punkt w von V mit $p_A(w) < 1$ ein innerer Punkt von A.

Beweis. Die erste Aussage ist sofort klar aus der Definition von p_A.

Nun sei V ein topologischer Vektorraum.

Wenn w ein innerer Punkt von A ist und wenn U eine offene Menge ist mit $w \in U \subseteq A$, dann folgt aus der Stetigkeit von $t \mapsto tw$ und der Tatsache, dass $1 \cdot w = w \in U$, dass es auch Zahlen $s > 1$ gibt mit $sw \in U \subseteq A$, also $w \in (1/s)A$. Das impliziert

$$p_A(w) \leq \frac{1}{s} < 1.$$

Umgekehrt, sei $0 \in \overset{\circ}{A}$, sei $w \in V$ und es sei $p_A(w) < 1$. Dann gibt es eine positive Zahl $t < 1$ und einen Vektor $x \in A$, so dass $w = tx$. Sei $f\colon V \longrightarrow V$ die Abbildung

$$f(v) := (1-t)v + tx.$$

Es gilt $f(0) = w$.

Diese Abbildung ist stetig, weil die Vektorraumoperationen stetig sind, und sie hat eine stetige Umkehrabbildung

$$g(u) := \frac{1}{1-t}(u - tx).$$

Die Abbildung f ist also ein Homöomorphismus. Ferner, weil A konvex ist sieht man an der Form von f, dass $f(A) \subseteq A$.

Weil 0 ein innerer Punkt von A ist und weil f ein Homöomorphismus ist, ist $f(0) = w$ ein innerer Punkt von $f(A)$, also auch von der größeren Menge $A \supseteq f(A)$. ■

Lemma 3.13 (Hyperebenen-Trennungssatz) *Sei V ein reeller topologischer Vektorraum und sei E eine konvexe Teilmenge von V, die mindestens* *einen inneren Punkt hat. Sei $x \in V \setminus E$. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha \neq 0 \in V^*$, so dass*

$$\alpha(v) \leq \alpha(x) \qquad \text{für alle } v \in E. \tag{3.4}$$

Wenn E offen und nichtleer ist, dann gilt die strenge Ungleichung

$$\alpha(v) < \alpha(x) \qquad \text{für alle } v \in E. \tag{3.5}$$

Dies ist eine geometrische Aussage! Sei $c = \alpha(x)$. Dann besagt Ungleichung (3.5), dass die ganze Menge E auf einer Seite der Hyperebene $\alpha^{-1}\big(\{\, c \,\}\big)$ liegt.

Beweis. Sei w ein innerer Punkt von E. Dann ist die Menge

$$A := E - w$$

eine konvexe Menge mit 0 als inneren Punkt und ist nach Bemerkung 3.9 absorbierend.

Ferner, nach Lemma 3.12 ist das Eichfunktional $p_A \leq 1$ auf A und ist < 1 genau an den inneren Punkten von A.

Sei $y := x - w$. Weil $x \notin E$ ist $y \neq 0$ und y ist kein Punkt von A, also auch kein innerer Punkt von A, weshalb $p_A(y) \geq 1$.

Wir definieren auf dem eindimensionalen Untervektorraum $\mathbf{R}y$ von V ein stetiges lineares Funktional f durch

$$f(ay) := a \qquad \text{für jedes } a \in \mathbf{R}.$$

Für jedes $a \geq 0$ ist $p_A(ay) = ap_A(y) \geq a = f(ay)$ weil p_A sublinear ist, aber weil $p_A \geq 0$ ist, gilt auch für $a < 0$, dass $f(ay) = a < 0 \leq p_A(ay)$. In anderen Worten,

$$f(u) \leq p_A(u) \qquad \text{für alle Vektoren } u \in \mathbf{R}y.$$

Nach dem algebraischen Satz von Hahn-Banach (Satz 2.4) erweitert sich f zu einem linearen Funktional α, definiert auf ganz V und mit der Eigenschaft, dass

$$-p_A(-v) \leq \alpha(v) \leq p_A(v) \qquad \text{für jeden Vektor } v.$$

Daraus folgt, dass α stetig ist, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$U := \varepsilon\mathring{A} \cap (-\varepsilon\mathring{A}) = \varepsilon\mathring{A} \cap \varepsilon(-\mathring{A})$$

eine offene Menge um $0 \in V$, auf der gilt $p_A(\pm v) < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$ (weil $\pm v$ im Innern von A liegt für jedes $v \in U$).

Somit gilt für $v \in U$ die Abschätzung

$$-\varepsilon < -p_A(-v) \leq \alpha(v) \leq p_A(v) < \varepsilon.$$

D.h., $\alpha(U) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Daraus sieht man, dass α stetig ist bei 0 und deshalb auch auf ganz V.

Für jedes $v \in A$ haben wir

$$\alpha(v) \leq p_A(v) \leq 1 = f(y) = \alpha(y).$$

Wenn wir A und y durch die Translation mit w verschieben, erhalten wir für jedes $v \in E$ wie behauptet, dass

$$\alpha(v) = \alpha(v - w) + \alpha(w) \leq \alpha(y) + \alpha(w) = \alpha(y + w) = \alpha(x).$$

Wenn E offen ist, gilt hier sogar $<$ und es kann kein $z \in E$ geben mit $\alpha(z) = \alpha(x)$.

Denn weil $\alpha \neq 0$, gibt es Vektoren u mit $\alpha(u) \neq 0$, und durch Negation von u wenn notwendig kann man erreichen, dass $\alpha(u) > 0$.

Weil jede offene Menge um 0 absorbierend ist, gibt es wegen der Linearität von α solche Vektoren u auch in jeder offenen Menge um 0, insbesondere in der offenen Menge $E - z$. Dann wäre aber $u + z \in E$ aber

$$\alpha(u + z) = \alpha(u) + \alpha(z) > \alpha(z) = \alpha(x)$$

in Widerspruch zur schon bewiesenen Ungleichung (3.4). ■

Lemma 3.14 (Erweiterte Hyperebenen-Trennungssatz) *Sei V ein reeller topologischer Vektorraum und seien E und F disjunkte nichtleere konvexe Teilmengen von V, von denen mindestens eine einen inneren Punkt hat.*

Dann gibt es eine Zahl $c \in \mathbf{R}$ und es gibt ein stetiges lineares Funktional $\alpha \neq 0 \in V^*$, so dass

$$\alpha(v) \leq c \leq \alpha(w) \qquad \text{für alle } v \in E \text{ und } w \in F. \tag{3.6}$$

Wenn E oder F offen ist, dann ist die Ungleichung auf der entsprechenden Seite von (3.6) streng.

Beweis. Aus Lemma 3.3 e) folgt, dass

$$E - F = \{\, v - w \mid v \in E, w \in F \,\}$$

konvex ist, und weil E oder F eine nichtleere offene Menge enthält und die Addition oder Subtraktion mit einzelnen Vektoren ein Homöomorphismus

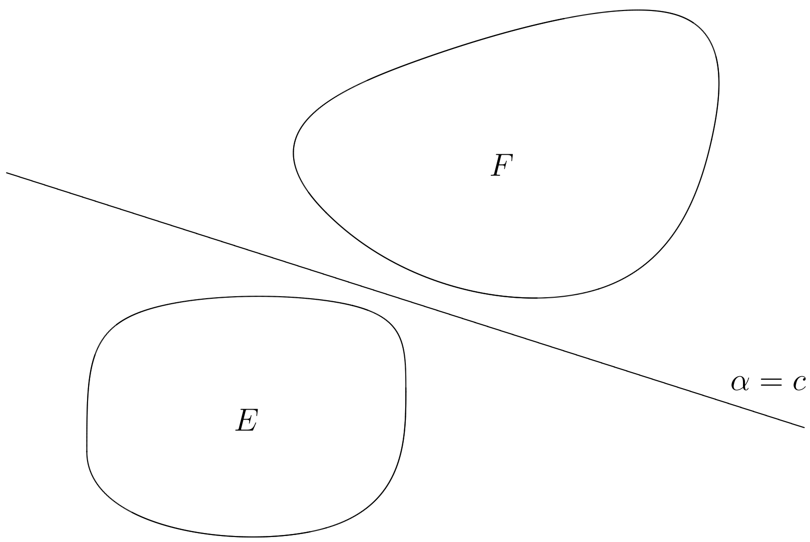


Abbildung 3.3: Trennung von konvexen Mengen durch Hyperebenen.

ist, enthält auch $E - F$ eine nichtleere offene Menge und somit einen inneren Punkt.

Weil $E \cap F = \emptyset$, ist $0 \notin E - F$ und nach Lemma 3.13 existiert ein stetiges lineares Funktional $\alpha \neq 0 \in V^*$ mit

$$\alpha(u) \leq \alpha(0) = 0$$

für alle $u \in E - F$.

Das bedeutet, dass $\alpha(v) - \alpha(w) \leq 0$ oder $\alpha(v) \leq \alpha(w)$ für alle $v \in E$ und $w \in F$. Insbesondere ist dann auch

$$a := \sup_{v \in E} \alpha(v) \leq \inf_{w \in F} \alpha(w) =: b$$

und für jedes $c \in [a, b]$ gilt (3.6).

Das gleiche Argument wie im Beweis von Lemma 3.13 zeigt, dass die Gleichheit in (3.6) nicht gelten kann, wenn die beteiligte konvexe Menge offen ist—das folgt ganz unabhängig von der Wahl von c, solange die entsprechende schwache Ungleichung auf ganz E oder F gilt. ∎

In den vergangenen Sätzen spielten konvexe Mengen mit inneren Punkten und insbesondere konvexe Mengen mit 0 als inneren Punkt eine besondere Rolle, unter anderem weil Mengen mit 0 als inneren Punkt absorbierend sind. Deshalb sind diese Sätze besonders gut anzuwenden auf topologische Vektorräume mit „genügend vielen“ konvexen Mengen der genannten Art.

Definition 3.15 Sei V ein topologischer Vektorraum. Wir nennen V ***lokalkonvex***, wenn es zu jeder offenen Menge U und zu jedem Punkt $u \in U$ eine konvexe offene Menge E gibt mit $u \in E \subseteq U$.

Weil die Translation mit einem festen Vektor immer ein Homöomorphismus ist, der die Konvexität erhält, ist V schon lokalkonvex, wenn jede offene Menge um 0 eine konvexe offene Menge um 0 enthält.

Beispiel 3.16 Jeder halbnormierte Vektorraum V ist lokalkonvex.

Das sieht man leicht, denn da Halbnormen (und reelle Vielfache von ihnen) sublinear sind, folgt aus Lemma 3.10, dass jeder offene Ball in V eine konvexe offene Menge ist.

Lemma 3.17 *Sei V ein lokalkonvexer reeller topologischer Vektorraum. Sei A eine abgeschlossene konvexe Teilmenge und B eine kompakte konvexe Teilmenge von V mit $A \cap B = \emptyset$.*

Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha \in V^*$, so dass

$$\sup_{v \in A} \alpha(v) < \inf_{w \in B} \alpha(w). \tag{3.7}$$

Beweis. Sei $x \in B$. Dann ist $V \setminus A$ eine offene Menge um B und somit um x.

Weil die Addition in V stetig ist und weil $x = x + 0 \in V \setminus A$, gibt es eine offene Menge $U_x \ni x$ und eine offene Menge $W_x \ni 0$, so dass

$$U_x + W_x = \{\, u + w \mid u \in U_x, w \in W_x \,\} \subseteq V \setminus A.$$

Weil V lokalkonvex ist, können wir die W_x wenn nötig ein bisschen kleiner machen und sie als konvex wählen.

B wird von den Mengen U_x für alle $x \in X$ überdeckt, und weil B kompakt ist, wird B schon von endlich vielen der U_x überdeckt.

Wir setzen W gleich dem Durchschnitt der entsprechenden endlich vielen Mengen W_x. Dies ist eine konvexe offene Menge um 0 und nach Konstruktion gilt

$$B + W \subseteq V \setminus A.$$

Die Menge $B+W$ ist konvex nach Lemma 3.3 e) und ist offen, da sie eine Vereinigung von Translaten von W ist und diese alle offen sind.

Nach Lemma 3.14 und weil $B + W$ offen ist, gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha \in V^*$ und eine Zahl c, so dass

$$\alpha(v) \le c < \alpha(x) \qquad \text{für alle } v \in A \text{ und alle } x \in B + W. \tag{3.8}$$

Da B kompakt ist, nimmt α auf B ein Minimum an (weil $\alpha(B)$ eine kompakte und somit beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R}$ ist).

Sagen wir, dieses Minimum wird an der Stelle x_0 angenommen. Aus (3.8) folgt, dass

$$\sup_{v\in A}\alpha(v)\le c<\alpha(x_0)=\inf_{w\in B}\alpha(w)$$

und wir sind fertig. ■

Korollar 3.18 *Sei V ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum über* $\mathbf{R}$.

*Dann **trennt** V^* **Punkte** in V, d.h., für je zwei verschiedene Vektoren $x\ne y\in V$ gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha\in V^*$ mit $\alpha(x)\ne\alpha(y)$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Lemma 3.17, denn $\{\, x \,\}$ ist abgeschlossen und $\{\, y \,\}$ ist kompakt, beide Mengen sind konvex und sie sind disjunkt. ■

Lemma 3.19 *Sei V ein normierter oder halbnormierter reeller Vektorraum und seien A und B konvexe Teilmengen von V, so dass*

$$d(A,B):=\inf\{\, \|v-w\| \mid v\in A, w\in B \,\}>0.$$

Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha\in V^*$, so dass

$$\sup_{v\in A}\alpha(v)<\inf_{w\in B}\alpha(w). \tag{3.9}$$

Beweis. Sei $\varepsilon:=d(A,B)>0$. Die Menge $A-B=\{\, v-w \mid v\in A, w\in B \,\}$ ist konvex nach Lemma 3.3 e), und nach Voraussetzung ist $\|x\|\ge\varepsilon$ für alle $x\in A-B$ und deshalb ist

$$(A-B)\cap B_\varepsilon(0)=\emptyset.$$

Der offene Ball $B_\varepsilon(0)$ ist eine offene konvexe Menge um 0.

Nach Lemma 3.14 gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha\in V^*$ und eine Zahl c mit

$$\alpha(x)\le c<\alpha(y)\qquad\text{für alle } x\in A-B \text{ und alle } y\in B_\varepsilon(0).$$

Weil $0\in B_\varepsilon(0)$ und $\alpha(0)=0$ (denn α ist linear), ist $c<0$, und weil

$$\alpha(v-w)=\alpha(v)-\alpha(w)\le c<0$$

für alle $v\in A$ und $w\in B$, ist auch

$$\sup_{v\in A}\alpha(v)-\inf_{w\in B}\alpha(w)\le c<0$$

und folglich

$$\sup_{v \in A} \alpha(v) < \inf_{w \in B} \alpha(w).$$

■

Neben diesen Trennungssätzen gibt es einen weiteren interessanten Satz der Funktionalanalysis, der beschreibt, wie man eine konvexe Menge als konvexe Hülle einer minimalen Erzeugendenmenge erhalten kann.

Definition 3.20 Sei V ein Vektorraum und sei A eine konvexe Teilmenge von V.

Eine nichtleere konvexe Teilmenge $S \subseteq V$ heißt eine ***Extremalmenge*** von A, wenn für jedes $x \in S$ und je zwei Punkte v und $w \in A$ und jede reelle Zahl t mit $0 < t < 1$ gilt: wenn

$$x = (1-t)v + tw, \tag{3.10}$$

dann sind v und $w \in S$.

In anderen Worten, alle geraden Strecken in A durch Punkte von S verlaufen ganz in S, und Punkte von S können nicht zwischen zwei Punkten von A liegen, die nicht beide zu S gehören.

Ein Punkt $x \in A$ heißt ein ***Extremalpunkt*** von A, wenn die Menge $\{ x \}$ eine Extremalmenge ist, d.h., wenn keine nichtkonstante Strecke in A durch x verläuft (es sei denn, x ist ein Endpunkt der Strecke).

Das ist gleichbedeutend damit, dass x keine nichttriviale konvexe Kombination $(1-t)v + tw$ (mit $0 < t < 1$) von zwei *verschiedenen* Vektoren aus A ist, denn wenn $v \neq w$, dann können nicht beide Vektoren v und w aus $\{ x \}$ sein (x kann ohnehin keine konvexe Kombination von zwei gleichen Vektoren $\neq x$ sein).

Punkte von A, die nicht Extremalpunkte sind, heißen ***interne Punkte*** von A.

Lemma 3.21 *Sei V ein Vektorraum und sei A eine nichtleere konvexe Teilmenge von V.*

a) Ganz A ist eine Extremalmenge von A.

b) Jeder nichtleere Durchschnitt von Extremalmengen von A ist wieder eine Extremalmenge von A.

c) Ist S eine Extremalmenge von A und E eine Extremalmenge von S, so ist E eine Extremalmenge von A.

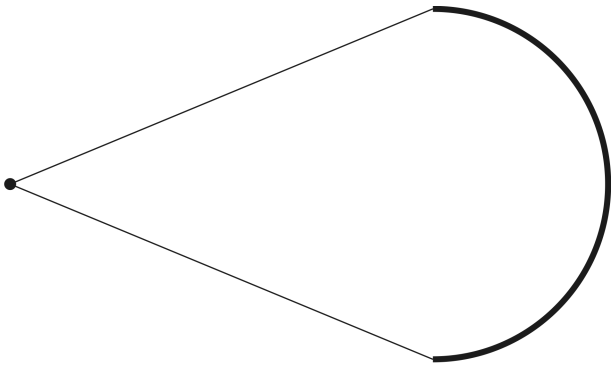


Abbildung 3.4: Extremalpunkte.

d) *Sei $f\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung, die auf A ein Maximum (oder ein Minimum) c annimmt. Dann ist $f^{-1}(\{c\}) \cap A$ eine Extremalmenge von A.*

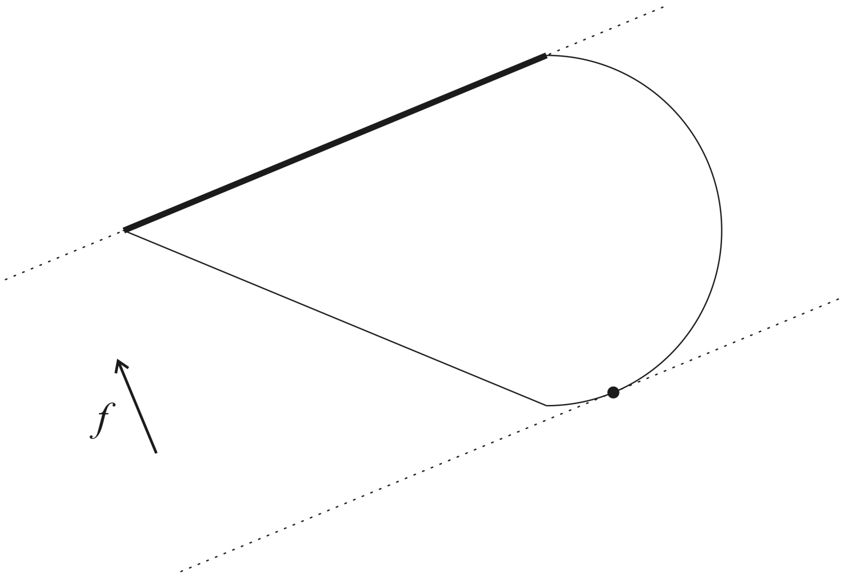


Abbildung 3.5: Maximale und minimale Niveaus eines linearen Funktionals sind Extremalmengen.

Beweis. a) ist trivial.

b): Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Extremalmengen von A und sei $E := \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$ nichtleer. Als Durchschnitt von konvexen Mengen ist E konvex. Wenn ein Vektor $x \in E$ eine Darstellung (3.10) als nichttriviale konvexe Kombination von zwei Vektoren aus A hat, so müssen diese Vektoren zu jedem S aus $\mathcal{F}$

gehören (und deshalb zu E), weil x zu jedem S aus $\mathcal{F}$ gehört und dieses S eine Extremalmenge ist. Also ist E eine Extremalmenge von A.

c): E ist nichtleer und konvex, weil es eine Extremalmenge von S ist.

Sei $x \in E$ und x habe eine Darstellung (3.10) mit v und w aus A und $t \in (0,1)$. Dann sind zunächst v und $w \in S$, weil $x \in S \supseteq E$ und weil S eine Extremalmenge von A ist.

Weil E eine Extremalmenge von S ist, müssen v und w dann aus E sein. Also ist E eine Extremalmenge von A.

d): Wir behandeln den Fall eines Maximums; der andere Fall unterscheidet sich nur in der Orientierung der Ungleichheitsrelationen.

Da f ein Maximum c annimmt, ist $f^{-1}\big(\{\, c \,\}\big) \neq \emptyset$.

Sei $x \in A$ und seien v und w Vektoren aus A und $t \in [0,1]$ eine Zahl, so dass $x = (1-t)v + tw$. Dann ist

$$f(x) = (1-t)f(v) + tf(w)$$

und alle Werte von f in dieser Gleichung sind $\leq c$.

Wenn $f(v) = f(w) = c$, dann ist auch $f(x) = c$, d.h., $f^{-1}\big(\{\, c \,\}\big)$ ist konvex.

Wenn $0 < t < 1$ und wenn $f(v) < c$ oder $f(w) < c$, dann ist auch $f(x) < c$, weil $1-t$ und t beide > 0 sind.

Folglich, wenn $f(x) = c$, dann sind auch $f(v) = f(w) = c$, und das zeigt, dass $f^{-1}\big(\{\, c \,\}\big)$ eine Extremalmenge von A ist. ■

Beispiele 3.22 a) Eine konvexe offene Menge U in einem topologischen Vektorraum $V \neq \{\, 0 \,\}$ hat keine Extremalpunkte.

Denn für jedes $x \in U$ ist $U - x$ eine konvexe offene Menge um 0 und somit absorbierend. Sei $v \neq 0 \in V$. Für genügend kleine $t > 0$ in $\mathbf{R}$ sind tv und $-tv \in U - x$. Folglich sind $x + tv$ und $x - tv \in U$ und sind $\neq x$. Weil $x = \frac{1}{2}(x+tv) + \frac{1}{2}(x-tv)$, ist x kein Extremalpunkt von U.

b) Sei $V = \mathbf{R}^n$ und sei $r > 0$. Die Extremalpunkte vom abgeschlossenen Ball D_r von Radius r in der euklidischen Norm sind genau die Punkte von der Sphäre S_r von Radius r.

Denn wenn $x \in S_r$ und wenn $v \neq w \in D_r$ und es ein $t \in (0,1)$ gibt mit $x = (1-t)v + tw$, so ist

$$r = \|x\| = \big\|(1-t)v + tw\big\| \leq (1-t)\,\|v\| + t\,\|w\| \leq (1-t)r + tr = r.$$

Dies kann nur stimmen, wenn überall die Gleichheit herrscht und insbesondere höchstens dann, wenn $\|v\| = \|w\| = r$.

Aber dann hat die Gleichung $\left\|(1-t)v+tw\right\| = \left\|v+t(w-v)\right\| = r$ oder gleichbedeutend

$$\left\|v+t(w-v)\right\|^2 = r^2,$$

nach der Definition der euklidischen Norm eine quadratische Gleichung in t, schon zwei Lösungen $t=0$ und $t=1$. Diese Gleichung ist nichtausgeartet (also wirklich von Grad 2), weil $w-v \neq 0$. Sie kann deshalb keine weiteren Lösungen haben und x ist tatsächlich ein Extremalpunkt.

Die Punkte von $D_r \setminus S_r = B_r(0)$ können nicht Extremalpunkte sein, weil sie sonst auch Extremalpunkte von $B_r(0)$ wären, in Widerspruch zu Teil a).

c) Wir betrachten auf $V = \mathbf{R}^n$ die so genannte ***Maximumsnorm***

$$\left\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i| .$$

Man sieht leicht, dass dies wirklich eine Norm ist.

Sei $r>0$. Die Extremalpunkte vom abgeschlossenen Ball $D_r = [-r,r]^n$ von Radius r in der Norm $\| \ \|_\infty$ sind genau die ***Eckpunkte*** der Gestalt

$$(\pm r, \pm r, \ldots, \pm r)$$

für alle 2^n möglichen Kombinationen von Vorzeichen.

Wenn $n=1$ ist das klar, denn dann ist die Maximumsnorm gleich der euklidischen Norm und die Extremalpunkte von $D_r = [-r,r]$ sind nach Teil b) die beiden Punkte $\pm r$ von S_r.

Wenn $n>1$, so gehört $x := (x_1, \ldots, x_n)$ zu D_r genau dann, wenn jede Koordinate x_i zum eindimensionalen Ball $D_r = [-r,r]$ gehört, und x ist genau dann eine nichttriviale konvexe Kombination $(1-t)v+tw$ von zwei verschiedenen Vektoren von D_r, wenn mindestens eines der x_i eine nichttriviale konvexe Kombination von zwei verschiedenen Zahlen $v_i \neq w_i \in [-r,r]$ ist.

Anders gesagt, x ist genau dann ein Extremalpunkt, wenn *jedes* x_i ein Extremalpunkt des eindimensionalen D_r ist. Das beweist die Behauptung.

Lemma 3.23 *Sei V ein Hausdorffscher lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei $A \neq \emptyset$ eine kompakte konvexe Teilmenge von V. Dann besitzt A Extremalpunkte.*

Beweis. Wir betrachten die Familie $\mathcal{E}$ aller abgeschlossenen Extremalmengen von A. Weil A kompakt und V Hausdorffsch ist, ist A abgeschlossen, und A ist eine Extremalmenge von A nach Lemma 3.21. Also ist $A \in \mathcal{E}$ und $\mathcal{E}$ ist nicht leer.

Wir ordnen $\mathcal{E}$ durch die Teilmengenrelation $\subseteq$. Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ eine nichtleere total geordnete Teilfamilie, so ist

$$F := \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$$

nichtleer weil A kompakt ist, weil die Mengen S aus $\mathcal{F}$ abgeschlossen sind, und weil kein endlicher Durchschnitt aus der total geordneten Familie $\mathcal{F}$ leer ist (denn kein Element von $\mathcal{F}$ ist leer). Also ist F eine Extremalmenge von A nach Lemma 3.21 b). Und F ist abgeschlossen weil es ein Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist.

Deshalb gehört F zu $\mathcal{E}$ und ist eine untere Schranke von $\mathcal{F}$.

Weil jede total geordnete Teilfamilie von $\mathcal{E}$ eine untere Schranke hat, besagt das Zornsche Lemma, dass $\mathcal{E}$ ein minimales Element S enthält. (Formal wendet man das Zornsche Lemma auf die umgekehrte Ordnung $\supseteq$ an und findet bezüglich dieser Ordnung ein maximales Element.)

Wir müssen nun zeigen, dass S nur aus einem Punkt besteht—dann haben wir einen Extremalpunkt gefunden.

Wenn S zwei verschiedene Punkte $x \neq y$ enthält, so finden wir nach Korollar 3.18 ein stetiges lineares Funktional $\alpha \in V^*$ mit $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. Insbesondere ist α nicht konstant auf S.

S ist abgeschlossen und somit als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge A selber kompakt, und α nimmt aus diesem Grund ein Minimum c auf S an.

Nach Lemma 3.21 d) ist

$$\tilde{S} := \{\, v \in X \mid \alpha(v) = c \,\}$$

eine Extremalmenge von S, und somit auch von A unter Berufung auf Lemma 3.21 c).

Als Urbild unter α der abgeschlossenen Menge $\{\, c \,\} \subseteq \mathbf{R}$ ist $\tilde{S}$ abgeschlossen.

Aber $\tilde{S}$ ist eine echte Teilmenge von S, weil α auf S nicht konstant ist, und S war eine minimale abgeschlossene Extremalmenge von A. Diesen Widerspruch haben wir hergeleitet aus der Annahme, es gäbe zwei verschiedene Punkte in S.

Da S nicht leer ist, besteht S nur aus einem einzigen Punkt, und dieser ist ein Extremalpunkt von A. ■

Satz 3.24 (Satz von Krein-Milman) *Sei V ein lokalkonvexer Hausdorffscher topologischer Vektorraum und sei A eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von V. Sei E die Menge der Extremalpunkte von A. Dann ist*

$$A = \overline{\mathrm{KH}(E)}. \tag{3.11}$$

Beweis. Weil A eine abgeschlossene konvexe Obermenge von E ist, gilt sicher die Inklusion $\supseteq$ in (3.11), und wir müssen nur die Richtung „$\subseteq$“ beweisen.

Gilt diese Inklusion nicht, so gibt es einen Punkt $x \in A \setminus \overline{\mathrm{KH}(E)}$.

Wir wenden Lemma 3.17 an mit der abgeschlossenen konvexen Menge $\overline{\mathrm{KH}(E)}$ in der Rolle von A und mit $\{\, x \,\}$ in der Rolle der zu A disjunkten kompakten konvexen Teilmenge B, und schließen aus diesem Lemma die Existenz eines stetigen linearen Funktionals $\alpha \in V^*$, so dass

$$\sup_{v \in \overline{\mathrm{KH}(E)}} \alpha(v) < \alpha(x). \tag{3.12}$$

Weil A kompakt ist, nimmt α auf A ein Maximum C an, und wir setzen

$$M := \alpha^{-1}\big(\{\, C \,\}\big) \cap A.$$

Dies ist eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge A und ist deshalb selber kompakt. Nach Lemma 3.21 d) ist M eine Extremalmenge von A und ist insbesondere konvex.

Nach Lemma 3.23 besitzt M Extremalpunkte, und diese sind nach Lemma 3.21 c) auch Extremalpunkte von A, d.h., Elemente von E. Aber (3.12) impliziert, dass $E \cap M = \emptyset$, weil

$$\alpha(v) < \alpha(x) \leq C$$

für jedes $v \in E$.

Das ist ein Widerspruch und $A \subseteq \overline{\mathrm{KH}(E)}$, was zu zeigen war. ■

Kapitel 4

Die L^p-Räume

Inzwischen wissen wir eine ganze Menge über Banachräume, aber es fehlt uns noch an interessanten Beispielen. Zwar ist jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum automatisch ein Banachraum, aber diese Räume sind, wie wir wissen, sehr einfach und nicht wirklich lohnenswerte Untersuchungsgegenstände für die Funktionalanalysis.

Mögen unendlichdimensionale Banachräume noch so schöne und inzwischen uns auch einigermaßen bekannte Eigenschaften haben, das nützt nicht viel, wenn solche Räume nur „in freier Wildbahn“ vorkommen und die Betrachtung einzelner Exemplare aus der Nähe nicht möglich ist, um festzustellen, welche bisher nicht erahnten Eigenschaften sie vielleicht noch haben könnten und welche vermuteten Merkmale wir im Gegensatz *nicht* generell erwarten dürfen.

Im jetzigen Kapitel wollen wir das erste Gehege in unserem funktionalanalytischen Zoo einrichten und eine nützliche Familie von klassischen Beispielen von unendlichdimensionalen Banachräumen näher untersuchen. Es handelt sich um die so genannten L^p-Räume, eine ganze Schar von Banachräumen, die gebildet werden durch Äquivalenzklassen von integrierbaren Funktionen auf einem Maßraum, wobei die jeweils angewendete Integrabilitätsbedingung vom positiven Index p abhängt. Der Buchstabe L im Namen steht, natürlich, für *Lebesgue*.

Diese Räume, deren Konstruktion sich auf das Lebesgue-Integral und somit auf eine analytische Operation mit einer engen Beziehung zu Kernfragen der Funktionalanalysis stützt, sind auch deshalb von besonderem Interesse, weil ihre Struktur sich als nützlich für die Gewinnung und Beschreibung von Erweiterungen des Funktionenbegriffs eignet, mit deren Hilfe man einige wichtige Anwendungsprobleme angehen und lösen kann.

Hier sind diese Räume:

Definition 4.1 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $p > 0$ eine positive reelle Zahl. Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ eine messbare Funktion. Wir definieren

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.1a}$$

und wir nennen $\|f\|_p$ die ***p-Norm*** von f.

Da die p-Norm durch ein Integral definiert ist, hängt sie nur von der Äquivalenzklasse von f ab, d.h., Funktionen die fast überall gleich sind haben die gleiche p-Norm.

Wir lassen auch ∞ als Wert von p zu, aber in diesem Fall können wir die p-Norm natürlich nicht durch Formel (4.1a) definieren. Stattdessen setzen wir

$$\|f\|_\infty := \inf_{\substack{N \in \mathcal{R} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} \bigl|f(x)\bigr|. \tag{4.1b}$$

$\|f\|_\infty$ heißt wie für andere Werte von p die ***∞-Norm von f***, aber auch das ***wesentliche (absolute) Supremum von f***.

Die ∞-Norm ist so konstruiert, dass auch $\|f\|_\infty$ nur von der Äquivalenzklasse von f abhängt.

Weil $\bigl|f(x)\bigr|$ immer nichtnegativ ist, ist $\|f\|_p$ für jedes p mit $0 < p \leq \infty$ definiert, aber der Wert kann natürlich unendlich sein. Wir nennen eine auf X definierte Funktion f ***p-integrabel*** oder ***p-summierbar***, wenn f messbar ist und wenn $\|f\|_p < \infty$. Wenn $p = \infty$ benutzt man auch diese Sprache, oder man sagt alternativ, f ist ***wesentlich beschränkt***.

Bemerkung 4.2 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine messbare Funktion. Dann gibt es eine μ-Nullmenge N, so dass

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X \setminus N} \bigl|f(x)\bigr|. \tag{4.2}$$

Beweis. Wenn $\|f\|_\infty = \infty$ gilt die Aussage für jede Nullmenge N (sonst wäre das Infimum der rechten Seite über alle N nicht ∞).

Wenn $\|f\|_\infty = C < \infty$, so gibt es für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ eine Nullmenge N_k, so dass

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X \setminus N_k} \bigl|f(x)\bigr| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{k}.$$

Sei

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k.$$

Dies ist immer noch eine Nullmenge, und weil $X \setminus N \subseteq X \setminus N_k$ haben wir

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in X\setminus N} \big|f(x)\big| \leq \sup_{x\in X\setminus N_k} \big|f(x)\big| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{k} \qquad \text{für jedes } k \geq 1.$$

Daraus folgt, wenn $k \to \infty$, dass

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in X\setminus N} \big|f(x)\big| \leq \|f\|_\infty$$

und (4.2) gilt für diese Nullmenge N. ■

Der Name ***p-Norm*** und die Notation $\| \ \|_p$ sind sehr suggestiv, und natürlich kommen sie auch nicht von ungefähr, aber wir sind den Beweis noch schuldig, dass $\| \ \|_p$ tatsächlich die Eigenschaften einer Norm (in Wirklichkeit einer Halbnorm) hat. Dieser Beweis erfordert ein bisschen Vorbereitung.

Dabei und an vielen anderen Stellen in der Untersuchung von $\| \ \|_p$ erweist es sich als nützlich, den Index p, sofern er ≥ 1 ist, nicht für sich zu betrachten, sondern immer in Verbindung mit einem „dualen“ Index q, der von p abhängt und eindeutig bestimmt ist durch die Bedingung, dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4.3}$$

Offensichtlich lässt sich diese Gleichung für jedes p mit $1 < p < \infty$ (was gleichbedeutend ist mit $0 < 1/p < 1$) eindeutig lösen durch eine Zahl q für die ebenfalls gilt $1 < q < \infty$.

In manchen Betrachtungen erlauben wir auch $p = 1$ (und nehmen dann $q = \infty$) oder $p = \infty$ (und nehmen dann $q = 1$).

Hilfssatz 4.3 *Seien a und b reelle Zahlen ≥ 0. Seien p und q positive reelle Zahlen mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(woraus folgt, dass p und $q > 1$ sind).

Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.4}$$

und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$.

Man beachte, dass im Falle der Gleichheit sogar gilt $a^p = b^q = ab$, was aus (4.4) unter Anwendung von (4.3) sofort folgt.

Beweis. Die Beziehung $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ kann man auch schreiben als $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q}$ oder

$$q-1=\frac{q}{p}.$$

Wir betrachten den Ausdruck

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}-ab$$

für festes a als eine differenzierbare Funktion $\varphi(b)$ von $b \in [0,\infty]$, und wir suchen ihren minimalen Wert.

Ihre Ableitung ist gegeben durch

$$\varphi'(b) := b^{q-1}-a$$

und weil $q-1>0$, ist dies eine streng monoton steigende Funktion von b, die genau dann 0 ist, wenn

$$a=b^{q-1}=b^{q/p} \tag{4.5}$$

oder gleichbedeutend, wenn $a^p=b^q$.

Für kleinere Werte von b ist $\varphi'(b)<0$ und für größere Werte von b ist $\varphi'(b)>0$. Also ist das gefundene Extremum von φ wo $a^p=b^q$ ein isoliertes *Minimum.*

An dieser Minimalstelle von φ haben wir unter Verwendung von (4.5), dass

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}=\frac{b^q}{p}+\frac{b^q}{q}=b^q=b^{q-1}b=ab$$

und folglich $\varphi(b)=0$.

Dieser minimale Wert von φ wird nur an dieser einzigen Stelle angenommen; für alle anderen Werte von b ist $\varphi(b)>0$. Also gilt die Gleichheit in (4.4) genau dann, wenn $a^p=b^q$, und für alle anderen Werte von b gilt in (4.4) die strenge Relation $<$.

Die Bemerkung über die Gleichheit von a^p, b^q und ab am Ende der Aussage ist klar, und im Übrigen haben wir sie im vorletzten Absatz mitbewiesen. ■

Satz 4.4 (Hölder Ungleichung) *Sei $(X,\mathcal{R},\mu)$ ein Maßraum und seien f und $g\colon X \longrightarrow \mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ messbare Funktionen.*

Seien p und $q \in [1,\infty]$ mit

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

(insbesondere erfüllen die Paare $p = 1$, $q = \infty$ und $p = \infty$, $q = 1$ diese Gleichung).

Dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \,. \tag{4.6}$$

Beweis. Wenn f oder $g = 0$ fast überall, dann gilt das Gleiche für fg und beide Seiten von (4.6) sind 0. In diesem Fall ist nichts weiter zu beweisen.

Wir können also im Folgenden annehmen, dass f und g nicht fast überall verschwinden, und dass in Konsequenz beide Faktoren auf der rechten Seite von (4.6) nicht 0 sind.

Wir können ferner annehmen, dass beide Faktoren endlich sind, denn sonst ist die rechte Seite von (4.6) unendlich und die Ungleichung gilt.

Es sind aber trotzdem noch die Fälle zu unterscheiden, wo p und q beide endlich sind, oder wo eines den Wert ∞ hat (und das andere den Wert 1).

Fall I: $1 < p, q < \infty$.

Sei

$$c := \frac{\|f\|_p^{p/q}}{\|g\|_q} > 0$$

und setze

$$h := cg.$$

Der Sinn dieser Skalierung von g besteht darin, bei einer Anwendung von Hilfssatz 4.3 die Gleichheit in (4.4) zu erhalten, denn wir haben es mit der Skalierung so eingerichtet, dass

$$\|h\|_q^q = c^q \|g\|_q^q = \frac{\|f\|_p^p}{\|g\|_q^q} \|g\|_q^q = \|f\|_p^p. \tag{4.7}$$

Wir finden nun durch zweimalige Anwendung von Hilfssatz 4.3, dass

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 &= \frac{1}{c} \|fh\|_1 \\
&= \frac{1}{c} \int_X |fh| \; d\mu \\
&\leq \frac{1}{c} \int_X \frac{1}{p} |f|^p + \frac{1}{q} |h|^q \; d\mu && \text{nach Hilfssatz 4.3} \\
&= \frac{1}{c} \Big(\frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|h\|_q^q \Big) \\
&= \frac{1}{c} \|f\|_p \|h\|_q && \text{nach Hilfssatz 4.3, Gleichheit wegen (4.7)} \\
&= \|f\|_p \|g\|_q
\end{aligned}$$

wie behauptet.

Fall II: p und q haben die Werte 1 und ∞.

Wegen der Symmetrie der Aussage können wir annehmen, dass $p = \infty$ und $q = 1$.

Ferner können wir f und g durch äquivalente Funktionen ersetzen, ohne die Gültigkeit der Aussage zu verändern, und in Anbetracht von Bemerkung 4.2 können wir somit erreichen, dass

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \big|f(x)\big|.$$

Diesen Wert haben wir als endlich vorausgesetzt.

Es gilt jetzt

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \; d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty \, |g| \; d\mu = \|f\|_\infty \int_X |g| \; d\mu = \|f\|_\infty \, \|g\|_1$$

wie behauptet. ■

Satz 4.5 *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und seien f und $g\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbare Funktionen.*

Sei $0 < p \leq \infty$.

a) Wenn $f \sim g$, dann ist $\|f\|_p = \|g\|_p$.

b) $\|f\|_p \geq 0$ und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $f \sim 0$.

c) Für jedes $a \in \mathbf{R}$ ist $\|af\|_p = |a| \, \|f\|_p$.

d) Wenn $p \geq 1$, dann ist

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.8}$$

*Diese Dreiecksungleichung für die p-Norm nennt sich die **Minkowski Ungleichung**.*

Beweis. a) ist klar aus den Details der Definition von $\| \ \|_\infty$ und weil $\| \ \|_p$ für alle $p < \infty$ durch ein Integral definiert wird. Diese Tatsache wurde übrigens schon in Definition 4.1 bemerkt.

b): Aus der Definition von $\| \ \|_p$ ist klar, dass $\|f\|_p \geq 0$, und wenn $f \sim 0$, dann ist $\|f\|_p = \|\mathbf{0}\|_p = 0$ nach Teil a).

Das wesentliche Supremum einer Funktion kann auf Grund von Bemerkung 4.2 nur 0 sein, wenn die Menge $\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}$ eine Nullmenge ist, und das Integral einer positiven Potenz von $|f|$ kann auch nur in diesem Fall Null werden. Also ist $\|f\|_p$ für ein beliebiges $p > 0$ nur dann 0, wenn $f \sim 0$.

c) ist trivial und lässt sich direkt aus der Definition von $\| \ \|_p$ nachrechnen.

d)Wir unterscheiden im Beweis drei Fälle.

Wenn $p = 1$, so folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag, dass

$$\begin{aligned}\|f+g\|_1 = \int_X |f+g| \ d\mu \le \int_X |f| + |g| \ d\mu \\ = \int_X |f| \ d\mu + \int_X |g| \ d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 .\end{aligned}$$

Wenn $p = \infty$, seien M und N beliebige Nullmengen in X. Dann ist

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &\le \sup_{x \in X \setminus (M \cup N)} \big|(f+g)(x)\big| \\ &\le \sup_{x \in X \setminus (M \cup N)} \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \\ &\le \sup_{x \in X \setminus (M \cup N)} \big|f(x)\big| + \sup_{y \in X \setminus (M \cup N)} \big|g(y)\big| \\ &\le \sup_{x \in X \setminus M} \big|f(x)\big| + \sup_{y \in X \setminus N} \big|g(y)\big|\end{aligned}$$

und weil dies für jede Wahl einer Nullmenge $M \subseteq X$ und einer Nullmenge $N \subseteq X$ gilt, bleibt die Ungleichung richtig, wenn wir die Terme auf der rechten Seite durch ihr Infimum über alle Nullmengen ersetzen. Wir erhalten dann

$$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Zum Schluss betrachten wir den Fall $1 < p < \infty$, und wir wählen zu p die „duale“ Zahl

$$q := \frac{p}{p-1} \qquad \text{mit} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wir setzen

$$h := (f+g)^{p-1} = (f+g)^{p/q}$$

und haben

$$(f+g)^p = (f+g)h$$

und

$$\|h\|_q = \Big(\int_X |f+g|^p \ d\mu\Big)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q} = \|f+g\|_p^{p-1} .$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag und der Hölder Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p \, d\mu &= \int_X \big|(f+g)h\big| \, d\mu \\ &\le \int_X |fh| \, d\mu + \int_X |gh| \, d\mu \\ &\le \big\|f\big\|_p \|h\|_q + \big\|g\big\|_p \|h\|_q = \big(\big\|f\big\|_p + \big\|g\big\|_p\big) \|h\|_q \\ &= \big(\big\|f\big\|_p + \big\|g\big\|_p\big) \|f+g\|_p^{p-1} . \end{aligned}$$

Wenn $\|f+g\|_p = 0$ ist ohnehin nichts zu beweisen, und sonst können wir die letzte Ungleichung durch $\|f+g\|_p^{p-1}$ teilen und erhalten wie gewünscht

$$\|f+g\|_p \le \big\|f\big\|_p + \big\|g\big\|_p.$$

■

Mit diesem Satz haben wir bewiesen, dass für $p \ge 1$ die p-Norm $\| \, \|_p$ die Eigenschaften einer *Halbnorm* besitzt, wenn wir sie einschränken auf die Funktionen, für die sie endlich ist. Wegen Satz 4.5 b) ist $\| \, \|_p$ zwar keine richtige Norm, aber das stört nur wenig, denn mit Hilfe von Korollar 1.50 können wir trotzdem einen normierten Vektorraum erhalten mit $\| \, \|_p$ als Norm (allerdings haben die Elemente der so gewonnenen normierten Vektorräume eine nicht ganz einfache Struktur und sie wirken deshalb etwas unnatürlich. Damit meine ich aber nur die *psychologische* Wirkung—mathematisch sind sie einwandfrei!).

Definition 4.6 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 \le p \le \infty$. Wir setzen

$$\mathcal{L}^p(X) := \Big\{ f \colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{ \pm\infty \} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty \Big\} . \qquad (4.9)$$

Offensichtlich ist $\mathbf{0} \in \mathcal{L}^p(X)$ und aus Satz 4.5 c) und aus der Minkowski Ungleichung Satz 4.5 d) ist klar, dass $\mathcal{L}^p(X)$ ein Vektorraum ist. Ferner, Satz 4.5 besagt, dass $\| \, \|_p$ auf diesem Vektorraum eine Halbnorm ist.

Wir nennen $\mathcal{L}^p(X)$ den halbnormierten ***Vektorraum der p-integrablen Funktionen*** auf X.

Sei

$$N := \Big\{ f \in \mathcal{L}^p(X) \mid \|f\|_p = 0 \Big\} = \{ f \in \mathcal{L}^p(X) \mid f \sim \mathbf{0} \} .$$

Nach Korollar 1.50 induziert $\| \ \|_p$ eine wohldefinierte *Norm* (die wir auch mit $\| \ \|_p$ bezeichnen) auf

$$L^p(X) := \frac{\mathcal{L}^p(X)}{N}. \tag{4.10}$$

Man beachte, dass zwei Funktionen aus $\mathcal{L}^p(X)$ genau dann die gleiche Restklasse in $L^p(X)$ haben, wenn ihre Differenz Null ist außerhalb einer Nullmenge, d.h., wenn die Funktionen fast überall gleich sind. Somit ist $L^p(X)$ die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen $[f]$ von messbaren Funktionen f auf X mit endlicher p-Norm, d.h.,

$$L^p(X) := \{ [f] \mid f \in \mathcal{L}^p(X) \} .$$

Man nennt $L^p(X)$ schlicht den ***L-p Raum*** des Maßraumes $(X, \mathcal{R}, \mu)$.

Wenn es nötig ist, das verwendete Maß auf X genau zu kennzeichnen, schreiben wir auch $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ statt $\mathcal{L}^p(X)$ und $L^p(X, \mu)$ statt $L^p(X)$.

Bemerkung und Definition 4.7 Es ist ein bisschen ärgerlich, dass $\| \ \|_p$ im Allgemeinen auf $\mathcal{L}^p(X)$ nur eine Halbnorm ist und dass wir, um einen normierten Vektorraum zu haben, zum komplizierteren Raum $L^p(X)$ übergehen müssen, dessen Elemente keine richtigen Funktionen auf X sind, sondern nur „fast überall" bestimmte Funktionen, also Äquivalenzklassen von Funktionen. Das liegt natürlich daran, dass die p-Halbnorm durch ein Integral definiert ist, und dass auch bei der Definition von $\| \ \|_\infty$, in der keine Integrale involviert sind, trotzdem Nullmengen ignoriert werden und nur das *wesentliche* Supremum gebildet wird.

Aber diese Probleme treten nicht immer auf, denn die genaue Bedeutung des Lebesgue-Integrals hängt von der Struktur des Maßraums ab und in manchen elementaren aber wichtigen Beispielen gibt es keine nichtleeren Nullmengen. In diesem Fall ist Äquivalenz dasselbe wie die Gleichheit, die Räume $\mathcal{L}^p(X)$ und $L^p(X)$ stimmen überein, und $\| \ \|_p$ ist schon auf $\mathcal{L}^p(X)$ eine Norm.

Das ist insbesondere bei ***diskreten Maßräumen*** der Fall, in denen X eine abzählbare Menge ist und jeder Punkt von X positives Maß hat. Dann ist das Integral einer Funktion über X nichts anderes als eine gewichtete Summe (oder wenn X unendlich ist eine gewichtete Reihensumme) der Funktionswerte, wo die Gewichtung durch die Maße der einzelnen Stellen in X gegeben ist.

Besonders einfach sieht das aus wenn alle Einzelpunkte Maß 1 haben und somit alle Summanden der Integrale Einheitsgewicht haben. X kann eine endliche Menge sein oder abzählbar unendlich. Der letztgenannte Fall ist so nützlich, dass man hierfür eine Standardrealisierung wählt und eine besondere Notation für die L-p-Räume dieser Realisierung.

Wir nehmen $X := \mathbf{N}$, $\mathcal{R} := \mathcal{P}(\mathbf{N})$, und für μ nehmen wir das Abzählmaß: für $A \subseteq \mathbf{N}$ ist $\mu(A)$ die Anzahl (eventuell ∞) der Elemente von A.

Für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir

$$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbf{N}) \qquad \text{(mit dem genannten Maß.)}$$

Man nennt diesen Raum ***„klein l-p"***.

Wir wollen kurz wiederholen, wie dieser spezielle Raum und wie seine Norm aussehen. Eine Funktion $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ ist nichts anderes als eine Folge in $\mathbf{R}$, wobei einige Glieder zunächst auch $\pm\infty$ sein dürfen. Aber wir interessieren uns nur für die p-integrablen Folgen, und weil eine integrable Funktion nur auf einer Nullmenge unendliche Werte annehmen darf und es in $\mathbf{N}$ mit dem Abzählmaß keine nichtleeren Nullmengen gibt, können p-integrable Folgen doch keine unendlichen Glieder haben.

Das Integral einer nichtnegativen Funktion auf $\mathbf{N}$, also einer nichtnegativen Folge, ist die Summe der Reihe, deren Summanden die Folgenglieder sind. Folglich, wenn $1 \leq p < \infty$ ist

$$\ell^p = \left\{ \{ a_n \}_{n \in \mathbf{N}} \;\middle|\; a_n \in \mathbf{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}, \tag{4.11}$$

während ℓ^∞ der Raum der beschränkten Folgen in $\mathbf{R}$ ist.

Für eine Folge $\varphi = \{ a_n \}_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^p$ ist

$$\|\varphi\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{wenn } 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n|, & \text{wenn } p = \infty. \end{cases} \tag{4.12}$$

Man sieht, dass $\|\varphi\|_p$ tatsächlich *nur* dann 0 ist, wenn alle $a_n = 0$. Also ist $\| \;\|_p$ tatsächlich eine Norm auf ℓ^p und $\ell^p \cong L^p(\mathbf{N})$.

Die wichtigsten oder zumindest am häufigsten betrachteten ℓ^p sind neben dem Raum ℓ^∞ der beschränkten Folgen in $\mathbf{R}$ der Raum ℓ^1 der ***absolut konvergenten Reihen*** in $\mathbf{R}$ und der Raum ℓ^2 der ***quadrat-summablen Folgen***.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass die normierten Vektorräume $L^p(X)$ Banachräume sind. Dazu erinnern wir an die Aussage aus Übungsaufgabe 7–3.

Definition 4.8 Sei V ein halbnormierter Vektorraum. Wir nennen eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ in V ***absolut konvergent***, wenn die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \|v_i\|$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

Hilfssatz 4.9 *Ein normierter Vektorraum V ist genau dann ein Banachraum, wenn in V jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ eine absolut konvergente Reihe in einem Banachraum V, und für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} v_i$$

die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ und sei

$$t_n := \sum_{i=0}^{n} \|v_i\|$$

die n-te Partialsumme der konvergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \|v_i\|$.

Für jedes $m \leq n$ gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} v_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|v_i\| = |t_n - t_m|$$

und weil die Partialsummen t_n der in $\mathbf{R}$ konvergenten Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \|v_i\|$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{R}$ bilden, bilden auch die Partialsummen s_n eine Cauchyfolge in V.

Diese Cauchyfolge konvergiert weil V ein Banachraum ist. In anderen Worten, die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ konvergiert in V.

„$\Leftarrow$“: Sei $\{ v_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in einem normierten Vektorraum V, in dem jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Wir wollen zeigen, dass die Cauchyfolge $\{ v_n \}$ konvergiert—nach Bemerkung 1.54 reicht es zu zeigen, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

Dazu müssen wir die Teilfolge einfach so wählen, dass die zu ihr äquivalente Reihe absolut konvergiert. Eine solche Teilfolge finden wir leicht:

Weil $\{ v_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $k \in \mathbf{N}$ eine Zahl N_k, so dass für alle m und $n \geq N_k$ gilt

$$\|v_m - v_n\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Wir wählen eine monoton steigende Indexfolge $\{ n_k \}_{k \in \mathbf{N}}$, so dass $n_k \geq N_k$ für jedes k, und wir definieren eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$, indem wir

$$w_0 := v_{n_0} \qquad \text{und} \qquad w_k := v_{n_k} - v_{n_{k-1}} \quad \text{für alle } k \geq 1$$

setzen.

Die k-te Partialsumme dieser Reihe ist v_{n_k} und die Reihe konvergiert deshalb genau dann, wenn die Folge $\{ v_{n_k} \}_{k\in\mathbf{N}}$ konvergiert (und mit ihr die ursprüngliche Folge $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$).

Aber weil $n_k > n_{k-1} \geq N_{k-1}$ haben wir $\|w_k\| \leq 2^{-k}$ für jedes $k \geq 1$. Da zumindest die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\|$ durch die geometrische Reihe majorisiert wird, konvergiert sie in $\mathbf{R}$ und mit ihr auch die volle Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|w_k\| = \|w_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\| .$$

D.h., die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ konvergiert absolut, und nach den vorausgesetzten Eigenschaften von V konvergiert sie in V. Das bedeutet, wie wir schon gesehen haben, dass die Cauchyfolge $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert. ∎

Satz 4.10 (Satz von Riesz-Fischer) *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $L^p(X)$ ein Banachraum, d.h., $\| \; \|_p$ ist vollständig.*

Beweis. Wir werden Hilfssatz 4.9 ausnutzen und die Behauptung beweisen, indem wir zeigen, dass jede absolut konvergente Reihe in $L^p(X)$ konvergiert.

Weil aber die Projektion $\pi\colon \mathcal{L}^p(X) \longrightarrow L^p(X)$ eine surjektive Isometrie ist (nach Korollar 1.50) und natürlich auch stetig ist, reicht es, wenn wir diese Aussage in $\mathcal{L}^p(X)$ beweisen, also für Funktionenreihen statt für Reihen aus Funktionenäquivalenzklassen. Denn die absolut konvergenten oder konvergenten Reihen in $L^p(X)$ sind wegen der genannten Eigenschaften von π genau die Bilder unter π der absolut konvergenten bzw. konvergenten Reihen in $\mathcal{L}^p(X)$.

Fall $1 \leq p < \infty$: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathcal{L}^p(X)$ und sei

$$M := \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

Um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ in $\mathcal{L}^p(X)$ konvergiert, betrachten wir zunächst die (eventuell gegen ∞ divergierende) Reihe

$$g := \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| ,$$

und wir zeigen, dass sie punktweise fast überall konvergiert.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei $g_n := \sum_{k=0}^{n} |f_k| \in \mathcal{L}^p(X)$ die n-te Partialsumme dieser Reihe. Die g_n bilden eine monoton steigende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen mit Supremum g (und das entsprechende gilt auch für ihre p-ten Potenzen).

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \big\| |f_k| \big\|_p = \sum_{k=0}^{n} \big\| f_k \big\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \big\| f_k \big\|_p = M$$

und aus diesem Grund ist

$$\int_X g_n^p \, d\mu = \int_X |g_n|^p \; d\mu = \|g_n\|_p^p \leq M^p.$$

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt, dass

$$\int_X g^p \, d\mu = \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_X g_n^p \, d\mu \leq M^p < \infty$$

und deshalb ist g^p und somit auch g fast überall endlich.

Sei N die Nullmenge, auf der g unendlich ist. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ punktweise überall auf $X \setminus N$.

In anderen Worten, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut und somit auch punktweise an jedem Punkt von $X \setminus N$, gegen eine (somit fast überall definierte und endlichwertige) messbare Funktion f.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$h_n := f - \sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k.$$

Die Folge $\{\, h_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ und somit auch die Folge $\{\, |h_n|^p \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ konvergieren fast überall punktweise gegen 0, und eine standardmäßige Abschätzung mit der Dreiecksungleichung zeigt, dass

$$|h_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \leq g$$

und somit $|h_n|^p \leq g^p$.

Weil g^p integrierbar ist, schließen wir zunächst daraus, dass h_0 eine p-integrable Funktion ist, und deshalb ist auch $f = h_0 + f_0 \in \mathcal{L}^p$.

Ferner können wir den Lebesgue Satz über dominierte Konvergenz auf die Folge $\{\, |h_n|^p \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ anwenden und folgern, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \Big\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \Big\|_p &= \lim_{n \to \infty} \|h_n\|_p \\ &= \lim_{n \to \infty} \Big(\int_X |h_n|^p \; d\mu \Big)^{1/p} = \Big(\int_X \lim_{n \to \infty} |h_n|^p \; d\mu \Big)^{1/p} = 0, \end{aligned}$$

d.h., $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gegen f in der p-Halbnorm von $\mathcal{L}^p(X)$.

Fall $p = \infty$: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathcal{L}^{\infty}(X)$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ in $\mathbf{R}$.

Nach Bemerkung 4.2 gibt es für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine Nullmenge $N_n \subseteq X$, so dass

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_n} \big|f_n(x)\big|,$$

und dies bleibt wahr, wenn wir jedes N_n durch die größere Nullmenge

$$N := \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$$

ersetzen, denn

$$\|f_n\|_{\infty} \leq \sup_{x \in X \setminus N} \big|f_n(x)\big| \leq \sup_{x \in X \setminus N_n} \big|f_n(x)\big| = \|f_n\|_{\infty} .$$

Das bedeutet, dass für jedes $x \in X \setminus N$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \big|f_n(x)\big|$ von der konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ majorisiert wird und somit auch konvergiert.

D.h., $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert absolut für jedes $x \in X \setminus N$, und weil in $\mathbf{R}$ absolut konvergente Reihen konvergieren, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise auf $X \setminus N$ gegen eine messbare Funktion f.

Diese Funktion ergänzt sich zu einer auf ganz X definierten messbaren Funktion, die wir auch f nennen, und die Reihe konvergiert sogar in der ∞-Halbnorm von $\mathcal{L}^{\infty}(X)$ gegen f.

Denn wieder haben wir für jedes $x \in X \setminus N$ die Abschätzung

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \big|f_k(x)\big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$$

(die rechte Ungleichung weil N so gewählt ist, dass $\|f_k\|_{\infty} = \sup_{x \in X \setminus N} \big|f_k(x)\big|$ für jedes k).

Daraus folgt, dass

$$\Big\|f - \sum_{k=0}^{n} f_k\Big\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$$

und die rechte Seite, somit auch die linke, geht gegen 0 für $n \to \infty$ weil die ganze Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ konvergiert. D.h., $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gegen f in der ∞-Halbnorm von $\mathcal{L}^{\infty}(X)$. ■

Wir haben schon mehrmals, zum Beispiel bei der Hölder Ungleichung, Zahlenpaare p und q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ als „dual“ zueinander bezeichnet. Wir werden jetzt sehen, dass dieser Name berechtigt ist, denn „duale“ Zahlenpaare haben tatsächlich etwas mit den Dualräumen der L^p-Räume zu tun.

Um diese Beziehung näher beschreiben zu können, führen wir zunächst eine bilineare Paarung zwischen den Räumen L^p und L^q für duale Zahlen p und q ein.

Definition 4.11 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und seien p und $q \in [1, \infty]$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wir definieren zunächst eine ***Paarung*** $\langle\ ,\ \rangle \colon \mathcal{L}^p(X) \times \mathcal{L}^q(X) \longrightarrow \mathbf{R}$ durch die Vorschrift

$$\langle f, g \rangle := \int_X f g \, d\mu \tag{4.13a}$$

für jedes $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und jedes $g \in \mathcal{L}^q(X)$.

Da das Integral auf der rechten Seite nur von der Äquivalenzklasse von fg und somit nur von den Äquivalenzklassen von f und g abhängt, induziert diese Paarung auch eine wohldefinierte Paarung $L^p(X) \times L^q(X) \longrightarrow \mathbf{R}$, die wir mit der gleichen Notation bezeichnen und die gegeben ist durch

$$\langle [f], [g] \rangle := \langle f, g \rangle = \int_X f g \, d\mu \tag{4.13b}$$

Aus den kanonischen Integralabschätzungen und der Hölder Ungleichung folgt für jedes $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und jedes $g \in \mathcal{L}^q(X)$, dass

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \int_X f g \, d\mu \right| \le \int_X |fg| \; d\mu = \|fg\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q < \infty. \tag{4.14}$$

Insbesondere ist $\langle f, g \rangle$ tatsächlich definiert und endlich (denn fg ist integrierbar weil $|fg|$ nach dieser Abschätzung integrierbar ist), die Paarung $\langle\ ,\ \rangle$ ist offensichtlich bilinear, und aus der Abschätzung folgt, dass $\langle\ ,\ \rangle$ stetig ist, nicht nur in jeder Variablen einzeln sondern als Funktion von zwei Variablen zumindest bei $(0, 0)$. Aus der Bilinearität folgt dann aber leicht die Stetigkeit an jeder beliebigen Stelle.

Natürlich gelten die gleichen Aussagen und die gleiche Abschätzung auch für die Paarung zwischen $L^p(X)$ und $L^q(X)$.

Mit Hilfe der Paarung erhalten wir eine Beziehung zwischen $L^q(X)$ und dem Dualraum von $L^p(X)$.

Lemma und Definition 4.12 *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und seien p und $q \in [1, \infty]$ mit*
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Wenn $p = 1$ und $q = \infty$ nehmen wir an, dass μ σ-endlich ist.

Für jedes $\beta \in L^q(X)$ definieren wir eine Abbildung
$$\varphi(\beta)\colon L^p(X) \longrightarrow \mathbf{R}$$
durch die Vorschrift
$$\varphi(\beta)(\alpha) := \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{4.15}$$

Für jedes $\beta \in L^q(X)$ ist die Abbildung $\varphi(\beta)$ stetig und linear und somit ein Element des Dualraums $\big(L^p(X)\big)^*$ (dessen Namen wir in Zukunft mit $L^{p*}(X)$ abkürzen wollen).

Die so konstruierte Abbildung
$$\varphi\colon L^q(X) \longrightarrow L^{p*}(X) := \big(L^p(X)\big)^*$$
ist eine lineare Isometrie.

Beweis. Für jedes $\beta \in L^q(X)$ ist $\varphi(\beta)$ linear weil $\langle\ ,\ \rangle$ bilinear ist, und stetig weil aus der Abschätzung (4.14) folgt, dass
$$\big\|\varphi(\beta)\big\| \leq \|\beta\|_q\,. \tag{4.16}$$
Also gehört $\varphi(\beta)$ zu $L^{p*}(X)$ und φ bildet $L^q(X)$ nach $L^{p*}(X)$ ab.

Die Abbildung φ selber ist linear, wieder weil $\langle\ ,\ \rangle$ bilinear ist, und (4.16) zeigt, dass $\|\varphi\| \leq 1$ und φ somit stetig ist. Wir müssen aber noch zeigen, dass φ tatsächlich eine Isometrie ist.

Die Isometrieeigenschaft müssen wir nur für $\beta \neq 0 \in L^q(X)$ nachprüfen, denn wegen der Linearität ist $\varphi(0) = \mathbf{0}$ und hat in $L^{p*}(X)$ die gleiche Norm wie das Element $0 \in L^q(X)$.

Sei also $\beta \neq 0 \in L^q(X)$ und sei $g \in \mathcal{L}^q(X)$ mit $\beta = [g]$. Wir wollen zeigen, dass $\big\|\varphi(\beta)\big\| = \|\beta\|_q = \|g\|_q$. Wir haben in (4.16) schon gesehen, dass „$\leq$“ gilt.

Wir definieren eine messbare Funktion $\operatorname{sgn} g$ auf X durch die Vorschrift
$$(\operatorname{sgn} g)(x) := \begin{cases} +1, & \text{wenn } g(x) \geq 0; \\ -1, & \text{wenn } g(x) < 0. \end{cases}$$
Offensichtlich gilt $(\operatorname{sgn} g)g = |g|$ und $(\operatorname{sgn} g)\,|g| = g$.

Wir unterscheiden im Beweis die Fälle $q = 1$, $1 < q < \infty$ und $q = \infty$.

Wenn $q = 1$, dann ist $p = \infty$. Sei $f := \operatorname{sgn} g$ und $\alpha = [f]$. Offensichtlich ist $\|\alpha\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ und

$$\varphi(\beta)(\alpha) = \int_X (\operatorname{sgn} g) g \, d\mu = \int_X |g| \, d\mu = \|g\|_1 \,,$$

woraus folgt, dass $\big\|\varphi(\beta)\big\| \geq \|g\|_1 = \|\beta\|_1$. Also gilt die Gleichheit.

Wenn $1 < q < \infty$, ist

$$q - 1 = q\Big(1 - \frac{1}{q}\Big) = q \cdot \frac{1}{p} = \frac{q}{p}.$$

Setze

$$f := (\operatorname{sgn} g) \, |g|^{q-1} = (\operatorname{sgn} g) \, |g|^{q/p} \,.$$

Wir haben dann $|f|^p = |g|^q$, und wenn man dies über X integriert erhalten wir $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$ oder

$$\|f\|_p = \|g\|_q^{q/p} = \|g\|_q^{q-1} \,.$$

Ferner ist $fg = (\operatorname{sgn} g) \, |g|^{q-1} \, g = (\operatorname{sgn} g) g \, |g|^{q-1} = |g| \, |g|^{q-1} = |g|^q$ und somit ist

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta)(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle f, g \rangle = \int_X fg \, d\mu &= \int_X |g|^q \, d\mu \\
&= \|g\|_q^q = \|g\|_q^{q-1} \, \|g\|_q = \|f\|_p \, \|g\|_q = \|\alpha\|_p \, \|\beta\|_q
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\big\|\varphi(\beta)\big\| \geq \|\beta\|_q$ und mit der früheren Abschätzung (4.16) gilt die Gleichheit.

Wenn $q = \infty$, dann ist $p = 1$ und nach Annahme ist μ ein σ-endliches Maß. Sei $M := \|\beta\|_\infty = \|g\|_\infty < \infty$. Nach Bemerkung 4.2 gibt es eine Nullmenge N, so dass

$$M = \|g\|_\infty = \sup_{x \in X \setminus N} \big|g(x)\big|.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ hat die Menge

$$A_\varepsilon := \Big\{ \, x \in X \setminus N \, \Big| \, \big|g(x)\big| \geq M - \varepsilon \, \Big\}$$

positives Maß, denn sonst wäre das wesentliche Supremum von g höchstens $M - \varepsilon$, also kleiner als M.

Weil μ als σ-endlich vorausgesetzt ist, ist auch A_ε eine abzählbare Vereinigung von Mengen endlichen Maßes, von denen mindestens eine positives

Maß haben muss, weil sonst auch A_ε eine Nullmenge wäre. Wir finden also eine Menge B_ε von positivem endlichen Maß, so dass $|g| \geq M - \varepsilon$ überall auf B_ε.

Sei $f_\varepsilon := (\operatorname{sgn} g)\chi_{B_\varepsilon}$. Diese messbare Funktion gehört zu $\mathcal{L}^1(X)$ und

$$\|f_\varepsilon\|_1 = \int_X |f| \, d\mu = \int_X \chi_{B_\varepsilon} \, d\mu = \mu(B_\varepsilon) > 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\beta)\big([f_\varepsilon]\big) &= \int_X f_\varepsilon g \, d\mu = \int_X (\operatorname{sgn} g)\chi_{B_\varepsilon}\, g \, d\mu = \int_X (\operatorname{sgn} g) g \, \chi_{B_\varepsilon} \, d\mu \\ &= \int_{B_\varepsilon} (\operatorname{sgn} g) g \, d\mu = \int_{B_\varepsilon} |g| \, d\mu \geq (M-\varepsilon)\mu(B_\varepsilon) = (M-\varepsilon)\big\|[f_\varepsilon]\big\|_1,\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $\big\|\varphi(\beta)\big\| \geq M - \varepsilon$.

Da das für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist $\big\|\varphi(\beta)\big\| \geq M = \|\beta\|_\infty$. Mit der früheren Abschätzung haben wir die Gleichheit.

Wir haben also für jedes $q \in [1, \infty]$ gezeigt, dass φ eine Isometrie ist. ∎

Weil die Räume $L^q(X)$ normierte Vektorräume sind, ist jede auf ihnen definierte Isometrie automatisch injektiv, und aus Lemma 4.12 folgt somit, dass jeder Raum $L^q(X)$ ein abgeschlossener (da vollständiger) *Unterraum* von $L^{p*}(X)$ ist, für die zu q duale Zahl p.

Wir werden aber gleich zeigen, dass in den meisten Fällen φ nicht nur injektiv, sondern sogar ein Isomorphismus ist; d.h., die Dualräume der L^p-Räume sind auch L^p-Räume, nur für ein anderes, nämlich für das *duale* p.

Satz 4.13 (Darstellungssatz von Riesz) *Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 \leq p < \infty$ und sei $q \in (1, \infty]$ so, dass*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wenn $p = 1$ nehmen wir an, dass μ ein σ-endliches Maß ist.

Dann ist die in Lemma und Definition 4.12 definierte Isometrie

$$\varphi\colon L^q(X) \longrightarrow L^{p*}(X)$$

surjektiv und somit ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen, wollen wir ein paar Fakten sammeln, die an verschiedenen Stellen im Beweis eingesetzt werden können.

Sei $g\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\,\infty\,\} \cup \{\,-\infty\,\}$ eine messbare Funktion.

Für $A \in \mathcal{R}$ ist

$$\|g\chi_A\|_p^p = \int_X |\chi_A g|^p \; d\mu = \int_X \chi_A^p \,|g|^p \; d\mu = \int_X \chi_A \,|g|^p \; d\mu = \int_A |g|^p \; d\mu \tag{4.17}$$

eine σ-additive Funktion von A.

Wenn $g \in \mathcal{L}^p(X)$ oder allgemeiner wenn $g\chi_A \in \mathcal{L}^p(X)$, dann sind in (4.17) alle Terme endlich.

Sei $\{\, E_n \mid n \in \mathbf{N}\,\}$ eine abzählbare Familie disjunkter messbarer Mengen und sei

$$E := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$$

ihre Vereinigung. Wenn $g\chi_E \in \mathcal{L}^p(X)$, dann behaupten wir, dass

$$g\chi_E = \sum_{n=0}^{\infty} g\chi_{E_n} \in \mathcal{L}^p(X) \tag{4.18}$$

(dass die Reihe punktweise gegen $g\chi_E$ konvergiert, ist klar und gilt auch ohne einschränkende Annahmen über g—wichtig ist hier, dass unter der genannten Voraussetzung sogar Konvergenz in der p-Halbnorm besteht).

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$F_n := E_0 \cup \cdots \cup E_n.$$

Weil die E_k disjunkt sind und weil $\|g\chi_A\|_p^p$ eine σ-additive Funktion von A ist, haben wir

$$\|g\chi_{F_n}\|_p^p = \|g\chi_{E_0}\|_p^p + \cdots + \|g\chi_{E_n}\|_p^p$$

und

$$\|g\chi_E\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|g\chi_{E_n}\|_p^p = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|g\chi_{F_n}\|_p^p,$$

woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|g\chi_E - g\chi_{F_n}\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \left\|g\chi_{E\setminus F_n}\right\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \|g\chi_E\|_p^p - \|g\chi_{F_n}\|_p^p = 0$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \|g\chi_E - g\chi_{F_n}\|_p = 0.$$

Das zeigt, wenn $g \in \mathcal{L}^p(X)$ oder wenn auch nur $g\chi_E \in \mathcal{L}^p(X)$, dass wie behauptet

$$g\chi_E = \lim_{n\to\infty} g\chi_{F_n} = \sum_{n=0}^{\infty} g\chi_{E_n} \quad \text{in } \mathcal{L}^p(X).$$

Wegen der p-Norm Konvergenz gilt eine ähnliche Reihensummenformel auch nach Anwendung von stetigen linearen Funktionalen.

Dazu sei $\pi\colon \mathcal{L}^p(X) \longrightarrow L^p(X)$ die Projektion, die bekanntlich eine Isomorphie ist.

Sei $\alpha \in L^{p*}(X)$ und sei $g\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ eine messbare Funktion.

Weil α und π stetig und linear sind, können wir aus (4.18) folgern, wenn $g\chi_E \in \mathcal{L}^p(X)$, dass

$$\alpha\big([g\chi_E]\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\big([g\chi_{E_n}]\big) \quad \text{in } L^p(X). \tag{4.19}$$

Nach dieser kurzen vorbereitenden Diskussion beginnen wir mit dem Hauptbeweis.

Wir führen ihn in zwei Schritten durch. Beim ersten Schritt machen wir die zusätzliche Annahme (für alle p), dass $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein endlicher Maßraum ist; beim zweiten Schritt zeigen wir dann, dass der Satz für alle Maßräume gilt (wenn $p = 1$ aber nur für alle σ-endlichen Maßräume).

Nehmen wir also zunächst an, dass $\mu(X) < \infty$.

Sei $\alpha \in L^{p*}(X)$. Wir assoziieren zu α wie folgt ein endliches μ-stetiges signiertes Maß ν auf $\mathcal{R}$.

Für jede messbare Menge $E \in \mathcal{R}$ ist χ_E integrierbar, da $\mu(E) < \infty$, und weil

$$|\chi_E|^p = \chi_E \tag{4.20}$$

ist $\chi_E \in \mathcal{L}^p(X)$ und

$$\|\chi_E\|_p = \Big(\int_X |\chi_E|^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \Big(\int_X \chi_E \, d\mu\Big)^{1/p} = \sqrt[p]{\mu(E)}. \tag{4.21}$$

Wir setzen

$$\nu(E) := (\alpha \circ \pi)(\chi_E) = \alpha\big([\chi_E]\big) \in \mathbf{R}. \tag{4.22}$$

Die konstante Funktion 1 gehört zu $\mathcal{L}^p(X)$ weil $\mu(X) < \infty$, und (4.19) mit $g = 1$ besagt, dass ν σ-additiv ist. Es ist klar, dass ν nur endliche Werte annimmt, denn α nimmt ja nur endliche Werte an. Also ist ν ein endliches signiertes Maß.

Wenn $\mu(E) = 0$, dann ist $\chi_E \sim \mathbf{0}$ und somit $\nu(E) = \alpha(0) = 0$. Also ist $\nu \ll \mu$.

Nach dem Satz von Radon-Nikodym, Satz 0.74, gibt es eine integrierbare Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, so dass für jede Menge $E \in \mathcal{R}$ gilt

$$\alpha\big([\chi_E]\big) = \nu(E) = \int_E f\,d\mu = \int_X \chi_E f\,d\mu, \tag{4.23}$$

und diese Funktion können wir so wählen, dass sie nur endliche Werte annimmt. Denn weil die Integrale in (4.23) für alle E endlich sind, kann f höchstens auf einer μ-Nullmenge unendliche Werte annehmen, und diese können wir durch einen endlichen Wert ersetzen, ohne die Integrale zu verändern.

Wir wollen Aussage (4.23) dahingehend erweitern, dass sie noch gilt, wenn wir die charakteristische Funktion χ_E durch eine beliebige Funktion aus $\mathcal{L}^p(X)$ ersetzen. Dazu werden wir die Konvergenzsätze der Lebesgue Integration anwenden, darunter auch den Satz über dominierte Konvergenz, dessen Voraussetzungen aber nur erfüllt sind, wenn wir gewisse Abschätzungen machen können, die auf ganz X leider nicht gelten müssen. Deshalb sind wir zu einer gewissen beweistechnischen Akrobatik gezwungen, bei der wir unsere Betrachtungen zunächst auf approximierenden Teilmengen von X durchführen, um sie anschließend auf ganz X zu übertragen.

Sei $g \in \mathcal{L}^p(X)$ und sei $Y \in \mathcal{R}$. Wir sagen, g ***mag*** Y (und schreiben $g \heartsuit Y$), wenn

$$\alpha\big([g\chi_Y]\big) = \int_Y fg\,d\mu = \int_X fg\chi_Y\,d\mu. \tag{4.24}$$

Gleichung (4.23) besagt, dass $\chi_E \heartsuit X$ und $1 \heartsuit E$ für jede messbare Menge E.

Ferner ist aus der Definition klar, dass $g \heartsuit Y$ genau dann, wenn $g\chi_Y \heartsuit X$.

Für jede feste Menge $Y \in \mathcal{R}$ ist die Menge

$$\heartsuit_Y := \big\{\, g \in \mathcal{L}^p(X) \;\big|\; g \heartsuit Y \,\big\}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(X)$, da beide Seiten von (4.24) linear von g abhängen, und da offensichtlich $0 \in \heartsuit_Y$.

Sei $E \in \mathcal{R}$. Weil $\chi_E\chi_Y = \chi_{E\cap Y}$ und weil $\chi_{E\cap Y} \heartsuit X$, gilt $\chi_E \heartsuit Y$ und somit

$$\chi_E \in \heartsuit_Y.$$

Wenn $f \in \mathcal{L}^q(Y)$ (was insbesondere gilt wenn f beschränkt ist auf Y, da μ endlich ist) dann behaupten wir, dass $\heartsuit_Y$ sogar ein *abgeschlossener* Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(X)$ ist.

Um das zu beweisen, zeigen wir, dass für $f \in \mathcal{L}^q(Y)$ beide Seiten von (4.24) stetig in g sind bezüglich der p-Norm. (Die Behauptung folgt dann aus der Tatsache, dass $\heartsuit_Y$ die Nullstellenmenge der Differenz beider Seiten von (4.24) ist; wenn diese Differenz stetig ist in der p-Norm, ist ihre Nullstellenmenge abgeschlossen in der p-Norm.)

Für $g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt offensichtlich

$$\|g\chi_Y\|_p \leq \|g\|_p \,,$$

und somit ist die Abbildung $g \mapsto g\chi_Y$ stetig in der p-Norm.

Die linke Seite von (4.24) ist nun stetig weil α und π stetig sind. Die rechte Seite von (4.24) ist stetig auf Grund der Hölder Ungleichung, oder anders gesagt, weil die Paarung zwischen $\mathcal{L}^p(X)$ und $\mathcal{L}^q(X)$ in der ersten Variablen stetig ist.

Wir nehmen nun einmal an, dass $f \in \mathcal{L}^q(Y)$. Dann ist $\heartsuit_Y$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(X)$, der alle messbaren charakteristischen Funktionen und somit alle messbaren Treppenfunktionen enthält.

Sei nun $g \geq 0 \in \mathcal{L}^p(X)$. Dann gibt es nach Lemma 0.43 eine monoton steigende Folge $\{\, s_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ von messbaren nichtnegativen Treppenfunktionen mit $g = \sup_{n\in\mathbf{N}} s_n$.

Es gilt $\lim_{n\to\infty} g - s_n = 0$ und deshalb auch

$$\lim_{n\to\infty} (g - s_n)^p = 0 \quad \text{punktweise,}$$

und die $g - s_n$ sind messbare Funktionen mit $0 \leq g - s_n \leq g$ und deshalb

$$0 \leq (g - s_n)^p \leq g^p.$$

Weil $|g|^p = g^p$ integrierbar ist, folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz Satz 0.46, dass die Funktionen $(g - s_n)^p$ integrierbar sind (also gehören $g - s_n$ und deshalb auch s_n zu $\mathcal{L}^p(X)$) und dass

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_X (g - s_n)^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |g - s_n|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \|g - s_n\|_p^p \,,$$

weshalb

$$\lim_{n\to\infty} \|g - s_n\|_p = 0$$

und

$$g = \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathcal{L}^p(X).$$

Weil $s_n \in \heartsuit_Y$ und weil $\heartsuit_Y$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(X)$ ist, ist $g \in \heartsuit_Y$ für jede nichtnegative Funktion $g \in \mathcal{L}^p(X)$.

Wenn g eine *beliebige* Funktion in $\mathcal{L}^p(X)$ ist, so ist offensichtlich auch $|g| \in \mathcal{L}^p(X)$ und deshalb auch g_+ und g_-, weil $0 \leq g_\pm \leq |g|$. Da wir schon gesehen haben, dass $g_\pm \in \heartsuit_Y$, ist auch

$$g = g_+ - g_- \in \heartsuit_Y$$

für jede Funktion $g \in \mathcal{L}^p(X)$ und jede messbare Teilmenge Y mit $f \in \mathcal{L}^q(Y)$.

In anderen Worten, wenn $f \in \mathcal{L}^q(Y)$, dann ist $\heartsuit_Y = \mathcal{L}^p(X)$.

Wir müssen jetzt zeigen, dass $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Wir unterscheiden die Fälle $p = 1$ und $p > 1$.

In beiden Fällen nutzen wir aus, dass α stetig ist. Sei $C := \|\alpha\|$. Weil die Projektion $\pi\colon \mathcal{L}^p(X) \longrightarrow L^p(X)$ eine Isometrie ist, ist auch $\big\|\pi \circ \alpha\big\| = C$.

Wenn $p = 1$, dann ist $q = \infty$. Aus der Definition von ν folgt, dass für jede messbare Menge $E \in \mathcal{R}$ gilt

$$\big|\nu(E)\big| = \Big|\alpha\big([\chi_E]\big)\Big| \leq C \, \|\chi_E\|_1 = C\mu(E). \tag{4.25}$$

Insbesondere müssen für jedes $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$A := \big\{\, x \in X \;\big|\; f(x) \geq C + \varepsilon \,\big\} \qquad \text{und} \qquad B := \big\{\, x \in X \;\big|\; f(x) \leq -C - \varepsilon \,\big\}$$

μ-Nullmengen sein, weil sonst ist

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \geq (C + \varepsilon)\mu(A) > C\mu(A)$$

oder

$$\nu(B) = \int_B f \, d\mu \leq -(C + \varepsilon)\mu(B) < -C\mu(B),$$

in Widerspruch zu (4.25).

Das heißt, $\|f\|_\infty \leq C$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$.

Wenn $1 < p < \infty$, dann ist $1 < q < \infty$, und $q - 1 = q/p$ (wie man sieht, wenn man die Gleichung $1/p + 1/q = 1$ mit q durchmultipliziert).

Multipliziert man sie noch mit p durch, findet man $pq - p = q$ oder $p = pq - q = q(p - 1)$.

Wir setzen $g := (\operatorname{sgn} f)\, |f|^{q-1} = (\operatorname{sgn} f)\, |f|^{q/p}$ und haben $|g|^p = |f|^q = fg$.

Für jede messbare Menge E ist also nach (4.17)

$$\|g\chi_E\|_p^p = \int_E |g|^p \; d\mu = \int_E fg \, d\mu = \int_E |f|^q \; d\mu = \|f\chi_E\|_q^q$$

und wenn E so gewählt ist, dass $f\chi_E \in \mathcal{L}^q(X)$, dann sind alle Terme hier endlich, $g\chi_E \in \mathcal{L}^p(X)$, und (4.24) besagt, dass der mittlere und somit alle Terme gleich $\alpha\big([g\chi_E]\big)$ sind.

Für jede Menge E, auf der f beschränkt ist, ist $f\chi_E \in \mathcal{L}^q(X)$ und wir haben die Abschätzung

$$\|f\chi_E\|_q^q = \|g\chi_E\|_p^p = \alpha\big([g\chi_E]\big) \leq C \, \|g\chi_E\|_p \, ,$$

woraus folgt

$$\|g\chi_E\|_p^{p-1} \leq C.$$

Also finden wir

$$\|f\chi_E\|_q^q = \|g\chi_E\|_p^p = \|g\chi_E\|_p^{q(p-1)} \leq C^q$$

wann immer f auf E beschränkt ist.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$E_n := \Big\{ x \in X \;\Big|\; \big|f(x)\big| \leq n \Big\}.$$

Diese Mengen bilden eine monoton steigende Folge von messbaren Mengen, und weil f nach Wahl nur endliche Werte annimmt ist

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = X.$$

Weil f auf E_n beschränkt ist, ist

$$\|f\chi_{E_n}\|_q^q \leq C^q$$

für jedes n. Weil $\|f\chi_E\|_q^q = \|g\chi_E\|_p^p$ nach (4.17) eine nichtnegative σ-additive Funktion von E ist, haben wir

$$\|f\|_q^q = \|f\chi_X\|_q^q = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|f\chi_{E_n}\|_q^q \leq C^q$$

und $f \in \mathcal{L}^q(X)$.

Wir haben jetzt in beiden Situationen $p = 1$ und $p > 1$ bewiesen, dass $f \in \mathcal{L}^q(X)$, und folglich ist $\heartsuit_X = \mathcal{L}^p(X)$. Das heißt, (4.24) gilt mit $Y = X$ und wir haben

$$\alpha\big([g]\big) = \int_X fg\,d\mu = \langle g, f\rangle = \varphi\big([f]\big)\big([g]\big)$$

für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$.

Also ist $\alpha = \varphi\big([f]\big)$ und φ ist surjektiv, wohlbemerkt unter der Voraussetzung, dass μ endlich ist.

Wir beweisen jetzt den allgemeinen Fall. Wir beginnen mit einer nützlichen Bemerkung.

Sei $E \in \mathcal{R}$ eine messbare Teilmenge von X. Wir erweitern jedes $g \in \mathcal{L}^p(E)$ zu ganz X indem wir außerhalb E Nullwerte setzen, d.h., wir definieren

$$g^X(x) := \begin{cases} g(x), & \text{wenn } x \in E; \\ 0, & \text{wenn } x \notin E, \end{cases} \tag{4.26}$$

und erhalten so eine messbare Erweiterung g^X von g zu ganz X, die offensichtlich die gleiche p-Norm hat wie g und insbesondere in $\mathcal{L}^p(X)$ liegt.

Wir bezeichnen mit j_E die offensichtlich lineare Abbildung

$$\begin{aligned} j_E\colon \mathcal{L}^p(E) &\longrightarrow \mathcal{L}^p(X) \\ g &\longmapsto g^X, \end{aligned}$$

die nach der Bemerkung über die p-Norm eine Isometrie ist.

Für jede messbare Menge E und für beliebige Funktionen g und h aus $\mathcal{L}^p(E)$ gilt offensichtlich

- $g^X|E = g$;
- $g^X = g^X\chi_E$;
- $(gh)^X = g^X h^X$;
- $g^X \sim h^X$ genau dann, wenn $g \sim h$.

Wegen der letzten Eigenschaft induziert j_E eine wohldefinierte lineare Isometrie

$$\begin{aligned} L^p(E) &\longrightarrow L^p(X) \\ [g] &\longmapsto [g^X], \end{aligned}$$

die wir auch mit j_E bezeichnen werden.

Die Verknüpfung mit j_E erlaubt uns, für jedes $E \in \mathcal{R}$ eine ***Einschränkungsabbildung*** $L^{p*}(X) \longrightarrow L^{p*}(E)$ zu definieren, die jedem stetigen linearen Funktional $\alpha \in L^{p*}(X)$ das stetige lineare Funktional

$$\alpha_E := \alpha \circ j_E \in L^{p*}(E)$$

zuordnet.

Wenn $\mu(E) < \infty$, dann können wir auf α_E den Schluss des ersten Beweisteils anwenden und wir finden eine Funktion $f_E \in \mathcal{L}^q(E)$, so dass

$$\alpha_E = \varphi\big([f_E]\big). \tag{4.27}$$

Man beachte: für jede Menge E (auch nicht von endlichem Maß), für die es eine Funktion $f_E \in \mathcal{L}^q(E)$ gibt, die (4.27) erfüllt, ist f_E bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt, da φ als Isometrie injektiv ist.

Weil j_E eine Isometrie ist, ist $\|\alpha_E\| \leq \|\alpha\|$, und weil φ eine Isometrie ist, muss

$$\|f_E\|_q = \|\alpha_E\| \leq \|\alpha\| \tag{4.28}$$

sein für jede messbare Menge E, für die (4.27) erfüllbar ist.

Wenn man hinschreibt, was (4.27) bedeutet und die Definition und Gestalt von j_E berücksichtigt, erhält man für jedes $g \in \mathcal{L}^p(E)$, dass

$$\alpha\bigl([g^X]\bigr) = \alpha_E\bigl([g]\bigr) = \int_E f_E g \, d\mu = \int_X (f_E g)^X \, d\mu = \int_X f_E^X g^X \, d\mu$$

und die hierin enthaltene Gleichung

$$\alpha\bigl([g^X]\bigr) = \int_E f_E g \, d\mu \tag{4.29}$$

für jedes $g \in \mathcal{L}^p(E)$ ist äquivalent zu der Aussage, dass $\alpha_E = \varphi\bigl([f_E]\bigr)$.

Die Aussage (4.29) können wir weiter vereinfachen wenn wir berüchsichtigen, dass die Elemente von $\mathcal{L}^p(E)$ genau die Funktionen der Gestalt $h := (g\chi_E)|E$ für Funktionen $g \in \mathcal{L}^p(X)$ sind. Jede Funktion von der genannten Gestalt gehört tatsächlich zu $\mathcal{L}^p(E)$, und jede Funktion $h \in \mathcal{L}^p(E)$ ist gleich $(h^X\chi_E)|E$ mit $h^X \in \mathcal{L}^p(X)$.

Für $h := (g\chi_E)|E$ (mit $g \in \mathcal{L}^p(X)$) ist aber $h^X = g\chi_E$. Deshalb können wir (4.29) in folgender bequemeren Form ausdrücken: für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$ ist

$$\alpha\bigl([g\chi_E]\bigr) = \int_E f_E g \chi_E \, d\mu = \int_E f_E g \, d\mu. \tag{4.30}$$

Auch dies ist äquivalent zu der Aussage, dass $\alpha_E = \varphi\bigl([f_E]\bigr)$.

Eine Funktion $f_E \in \mathcal{L}^q(E)$, die (4.30) erfüllt, gibt es, wie gesagt, wenn $\mu(E) < \infty$.

Sei nun E nicht unbedingt selber von endlichem Maß, aber eine abzählbare Vereinigung einer Familie $\{\, E_n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ von messbaren Mengen mit $\mu(E_n) < \infty$.

Wenn wir von jeder Menge E_n die Vereinigung ihrer Vorgänger in der Folge $\{\, E_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ abziehen, können wir erreichen, dass die Mengen E_n disjunkt sind, und natürlich wird ihr Maß durch das Disjunktmachen nicht größer und bleibt somit endlich.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gibt es eine Funktion $f_{E_n} \in \mathcal{L}^q(E_n)$, so dass (4.30) gilt (mit E_n in der Rolle von E) für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$.

Weil die E_n disjunkt sind, erhalten wir auf E eine wohldefinierte Funktion f, gegeben durch

$$f(x) := f_{E_n}(x) \quad \text{für das eindeutige } n \in \mathbf{N} \text{ mit } x \in E_n.$$

Diese Funktion können wir auch schreiben als

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_{E_n}^E. \tag{4.31}$$

Diese Reihe hat an jeder Stelle höchstens einen Summanden $\neq 0$ und konvergiert deshalb auf E, und diese Darstellung zeigt, dass f messbar ist.

Natürlich gilt $f|E_n = f_{E_n}$ für jedes n.

Wir wollen zeigen, dass $f \in \mathcal{L}^q(E)$.

Wenn $p = 1$ und $q = \infty$ ist das klar, denn nach (4.28) ist $\|f_{E_n}\|_\infty \leq \|\alpha\|$ für jedes $n \in \mathbf{N}$, und deshalb gibt es eine Nullmenge $N_n \subseteq E_n$, so dass

$$\big|f_{E_n}(x)\big| \leq \|\alpha\|$$

für alle $x \in E_n \setminus N_n$.

Die Vereinigung N der abzählbar vielen N_n ist eine Nullmenge in E und

$$\big|f(x)\big| \leq \|\alpha\|$$

für alle $x \in E \setminus N$, also ist auch $\|f\|_\infty \leq \|\alpha\|$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$.

Im Falle $1 < p < \infty$ betrachten wir für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Menge

$$F_n := E_0 \cup \cdots \cup E_n.$$

Sei $f_n := f|F_n$.

Für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$ haben wir

$$g\chi_{F_n} = \sum_{k=0}^{n} g\chi_{E_k}$$

und für jedes k ist

$$\alpha\big([g\chi_{E_k}]\big) = \int_{E_k} f_{E_k} g \, d\mu = \int_{E_k} f g \, d\mu. \tag{4.32}$$

Wenn wir die äußeren Terme dieser Gleichungen für k von 0 bis n summieren, erhalten wir

$$\alpha\big([g\chi_{F_n}]\big) = \sum_{k=0}^{n} \alpha\big([g\chi_{E_k}]\big) \overset{(4.32)}{=} \sum_{k=0}^{n} \int_{E_k} f g \, d\mu = \int_{F_n} f g \, d\mu = \int_{F_n} f_n g \, d\mu.$$

Weil $\mu(F_n) < \infty$ folgt daraus $f_n \sim f_{F_n}$ und wir haben nach (4.28)

$$\int_{F_n} |f|^q \, d\mu = \int_{F_n} |f_n|^q \, d\mu = \|f_n\|_q^q = \|f_{F_n}\|_q^q \leq \|\alpha\|^q$$

für jedes n.

Aber die F_n bilden eine monoton steigende Folge von Mengen mit Vereinigung E, und weil $\int_A |f|^q \, d\mu$ eine σ-additive Funktion von A ist, haben wir

$$\int_E |f|^q \, d\mu = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{F_n} |f|^q \, d\mu \leq \|\alpha\|^q$$

und $f \in \mathcal{L}^q(E)$ mit $\|f\|_q \leq \|\alpha\|$.

Nun sei g eine beliebige Funktion aus $\mathcal{L}^p(X)$. Dann können wir schreiben

$$\alpha\big([g\chi_E]\big) \overset{(4.19)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\big([g\chi_{E_n}]\big) \overset{(4.32)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f g \, d\mu = \int_E f g \, d\mu.$$

Das besagt, dass $\alpha_E = \varphi\big([f]\big)$ in $L^{p*}(E)$.

Der Satz gilt also auf jeder Menge, die eine abzählbare Vereinigung von Mengen von endlichem Maß ist, und er gilt auf dem ganzen Raum X wenn dieser σ-endlich ist. Das beendet den Beweis im Fall $p = 1$, weil wir in diesem Fall die Voraussetzung der σ-Endlichkeit gemacht haben.

Im Falle $1 < p < \infty$ haben wir aber keine solche Voraussetzung gemacht und wir sind noch nicht fertig. Wir wissen aber jetzt, dass es zu jeder σ-endlichen Menge $E \in \mathcal{R}$ eine Funktion $f_E \in \mathcal{L}^q(E)$ gibt, so dass

$$\alpha_E = \varphi\big([f_E]\big) \in L^{p*}(E),$$

was äquivalent dazu ist, dass Gleichung (4.30) für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt. Wir haben schon gesehen, dass f_E bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist, und dass $\|f_E\|_q \leq \|\alpha\|$.

Wenn F eine andere σ-endliche Menge ist mit $F \subseteq E$, dann folgt aus der Integraldarstellung (4.30), dass für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt

$$\int_F f_F g \, d\mu = \alpha\big([g\chi_F]\big) = \alpha\big([g\chi_F\chi_E]\big) = \int_E f_E g \chi_F \, d\mu = \int_F f_E g \, d\mu,$$

und $f_E|F$ erfüllt also die gleiche Integraleigenschaft (4.30) wie f_F. Wegen der Eindeutigkeit ist $f_F \sim f_E|F$ und daraus folgt

$$\|f_F\|_q^q = \int_F |f_F|^q \, d\mu = \int_F |f_E|^q \, d\mu \leq \int_E |f_E|^q \, d\mu = \|f_E\|_q^q,$$

d.h., $\|f_F\|_q \leq \|f_E\|_q$.

Wir setzen

$$M := \sup\big\{ \|f_E\|_q \;\big|\; E \text{ messbar und } \sigma\text{-endlich} \big\} \leq \|\alpha\|$$

und wir wählen eine Folge $\{ A_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ von σ-endlichen Mengen, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{A_n}\|_q = M.$$

Die Menge
$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$
ist auch σ-endlich. Also gibt es auch auf ihr eine Funktion $f_A \in \mathcal{L}^q(A)$, so dass
$$\alpha_A = \varphi\big([f_A]\big) \in L^{p*}(A).$$

Weil $A_n \subseteq A$ haben wir $\|f_{A_n}\|_q \leq \|f_A\|_q$ für jedes n, und daraus folgt
$$\lim_{n\to\infty} \|f_{A_n}\|_q = M \leq \|f_A\|_q \leq M,$$
d.h.,
$$\|f_A\|_q = M. \tag{4.33}$$

Nun sei $g \in \mathcal{L}^p(X)$, und sei
$$B := \Big\{ x \in X \setminus A \;\Big|\; |g(x)| > 0 \Big\}.$$

Für jedes $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ sei
$$B_n := \Big\{ x \in X \setminus A \;\Big|\; |g(x)| \geq \frac{1}{n} \Big\}.$$
Die Mengen B_n haben endliches Maß, weil
$$\frac{\mu(B_n)}{n^p} \leq \int_{B_n} |g|^p \, d\mu \leq \|g\|_p^p < \infty,$$
und B ist die Vereinigung der B_n und somit σ-endlich.

Sei
$$h := g\chi_B = g - g\chi_A$$
(außerhalb $B \cup A$ ist g ja 0).

Wir behaupten, dass $\alpha\big([h]\big) = 0$. Gilt das nicht, so ist
$$\int_B f_B h \, d\mu \neq 0$$
(denn dieses Integral ist gleich $\alpha\big([h\chi_B]\big)$ und $h\chi_B = h$).

Aber dann ist wegen der Hölder Ungleichung $\|f_B\|_q > 0$.

Die Menge $D := A \cup B$ ist immer noch σ-endlich, und weil $A \cap B = \emptyset$, haben wir für jedes $u \in \mathcal{L}^p(X)$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\int_D f_D u\, d\mu &= \alpha\big([u\chi_D]\big)\\ &= \alpha\big([u\chi_A + u\chi_B]\big)\\ &= \alpha\big([u\chi_A]\big) + \alpha\big([u\chi_B]\big)\\ &= \int_A f_A u\, d\mu + \int_B f_B u\, d\mu\\ &= \int_D f_A^D u\, d\mu + \int_D f_B^D u\, d\mu\\ &= \int_D (f_A^D + f_B^D) u\, d\mu,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$f_D \sim f_A^D + f_B^D.$$

Wieder weil A und B disjunkt sind, erhalten wir daraus die Abschätzung

$$\|f_D\|_q^q = \|f_A\|_q^q + \|f_B\|_q^q > \|f_A\|_q^q = M^q,$$

ein Widerspruch zur Definition von M.

Damit gilt aber unsere Behauptung $\alpha\big([h]\big) = 0$. Also ist

$$\alpha\big([g]\big) = \alpha\big([h + g\chi_A]\big) = \alpha\big([g\chi_A]\big) = \int_A f_A g\, d\mu = \int_X f_A^X g\, d\mu.$$

Da dies für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt, ist $\alpha = \varphi\big([f_A^X]\big)$ und φ ist surjektiv. ■

Korollar 4.14 *Für jeden σ-endlichen Maßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ und für jedes q mit $1 < q \le \infty$ ist $L^q(X)$ der Dualraum eines Banachraums.*

Für endliche q kann man sogar auf die Voraussetzung der σ-Endlichkeit verzichten.

Kapitel 5

Drei Topologien auf Dualräumen

In diesem Kapitel wollen wir die Dualräume von normierten Vektorräumen näher untersuchen. Es gibt einige sehr gute Gründe, das zu tun, Gründe, die wir schon kennen (zum Beispiel, dass Dualräume V^* immer Banachräume sind, auch wenn V selber kein Banachraum ist) und einige, die wir erst im Laufe dieses Abschnitts kennen lernen werden.

Der wichtigste Grund besteht darin, dass auf Dualräumen einige der Schwierigkeiten, die normierte Vektorräume haben, sich abmildern lassen.

Zunächst überrascht das Wort „Schwierigkeit" in diesem Kontext, denn Normen sind eine schöne und angenehme Struktur und normierte Vektorräume sind demgemäß sehr bequem zu untersuchen und werden eigentlich gut verstanden. Allgemeinere topologische Vektorräume können viel exotischer sein und man versucht wo immer möglich durch zusätzliche Vorraussetzungen wie Lokalkonvexität ihre Struktur der Normstruktur anzugleichen oder durch ähnliche Strukturen (z.B., durch Punkte trennende Familien von Halbnormen) zu beschreiben.

Aber wir haben auch gesehen, dass nützliche klassische Eigenschaften wie etwa die Kompaktheit des abgeschlossenen Einheitsballes in unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen nicht gelten müssen oder *nicht gelten können.* Auf Dualräumen lässt sich diese Schwierigkeit zumindest umgehen, indem man neben der Normtopologie andere Topologien anwendet, in denen die klassischen Eigenschaften wieder richtig sind.

Es gibt drei Standardtopologien auf Dualräumen, die man in Verbindung miteinander verwenden kann und die das Hauptthema von Kapitel 5 bilden werden: die ***Normtopologie*** der Operatornorm für stetige lineare Funktionale, die ***schwache Topologie*** und die ***schwach-$*$-Topologie***. Die ersten beiden auf dieser Liste lassen sich auf jedem topologischen Vektorraum einführen, aber die schwach-$*$-Topologie gibt es nur auf Dualräumen und gerade in dieser Topologie, nicht unbedingt in der schwachen Topologie, sind abgeschlossene Einheitsbälle wieder kompakt. Die Aussage gilt in der schwachen Topologie nur dann, wenn sie gleich der schwach-$*$-Topologie ist.

Die Kosten für diesen Vorteil sind sehr gering, das heißt, die Fixierung unserer Aufmerksamkeit auf Dualräume ist keine wesentliche Einschränkung, weil jeder normierter Vektorraum V durch die in Lemma und Definition 2.11 eingeführte ***kanonische Abbildung*** mit einem Unterraum seines Bidualraums V^{**} identifiziert werden kann.

Dualräume sehen „psychologisch“ etwas komplizierter aus als „einfache“ normierte Vektorräume, aber diese Kompliziertheit ist zum großen Teil eine Illusion. Und bei den Beispielen von Banachräumen, die wir bisher kennen gelernt haben, etwa bei den L^p-Räumen, sind fast alle Räume, wie der Rieszsche Darstellungssatz zeigt, Dualräume von anderen L^q-Räumen, so dass wir auch in Bezug auf Beispielen schon eine große Liste von Dualräumen kennen, auf denen wir die in diesem Kapitel gewonnenen neuen Erkenntnisse werden anwenden können. Ein weiterer guter Grund, Dualräume besser kennen zu lernen.

Wir wollen also mit der Konstruktion der oben erwähnten nützlichen Topologien beginnen. Dazu erinnern wir als erstes an eine sehr leistungsfähige und bequeme Methode, eine Topologie auf einer Menge so zu bestimmen, dass vorgegebene Abbildungen stetig werden.

Definition 5.1 Sei X eine Menge und seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ zwei Topologien auf X. Wir nennen $\mathcal{S}$ ***gröber*** als $\mathcal{T}$, und $\mathcal{T}$ ***feiner*** als $\mathcal{S}$, wenn die Inklusion

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$$

gilt, d.h., wenn jede $\mathcal{S}$-offene Menge auch $\mathcal{T}$-offen ist, oder wenn $\mathcal{T}$ „mehr“ offene Mengen hat als $\mathcal{S}$.

Statt ***gröber*** sagt man auch ***schwächer***, und statt ***feiner*** sagt man oft ***stärker***.

(In diesem Sinn sind die „schwachen“ Topologien zu verstehen, die wir später definieren wollen—sie sind gröber als die Normtopologie.)

Wir wollen gleich zwei Methoden vorstellen, um Topologien auf einer Menge X durch die Vorgabe zu definieren, dass gewisse Abbildungen zwischen X und bestimmten anderen topologischen Räumen stetig sein sollen.

Man beachte, dass die genaue Kenntnis aller stetigen Abbildungen nach X hinein oder aus X hinaus die Topologie von X eindeutig festlegt:

Bemerkung 5.2 Sei X eine Menge und seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ zwei Topologien auf X.

a) Genau dann ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, wenn $\mathrm{id}_X\colon (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X,\mathcal{S})$ stetig ist.

b) Wenn für jeden topologischen Raum Z genau die gleichen Abbildungen $g\colon Z \longrightarrow X$ stetig sind bezüglich $\mathcal{S}$ wie bezüglich $\mathcal{T}$, dann ist $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

c) Wenn für jeden topologischen Raum Y genau die gleichen Abbildungen $h\colon X \longrightarrow Y$ stetig sind bezüglich $\mathcal{S}$ wie bezüglich $\mathcal{T}$, dann ist $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Beweis. a) ist klar.

b) und c): Wenn wir in b) $Z = X$ und in c) $Y = X$ nehmen, mit einer der Topologien $\mathcal{S}$ oder $\mathcal{T}$, so ist id_X stetig, wenn wir in beiden Kopien von X die gleiche Topologie $\mathcal{S}$ oder $\mathcal{T}$ wählen.

Aus der Voraussetzung in b) oder c) folgt dann, dass id_X auch stetig ist, wenn die Topologien $\mathcal{S}$ oder $\mathcal{T}$ im Quell- und Zielraum verschieden sind, und zwar für beide Möglichkeiten, $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ auf Quelle und Ziel zu verteilen. Nach Teil a) ist also jede der Topologien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ gröber als die andere, d.h., sie sind gleich. ■

Definition 5.3 Sei X eine Menge, sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine (mengentheoretische) Abbildung.

Wir setzen
$$f^{-1}(\mathcal{T}) := \left\{\, f^{-1}(U) \;\middle|\; U \in \mathcal{T} \,\right\}. \tag{5.1}$$
Weil $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$, und weil Urbildnehmen mit Vereinigung und Durchschnitt verträglich ist, prüft man sofort nach, dass $f^{-1}(\mathcal{T})$ eine Topologie auf X ist, und da sie genau aus den Teilmengen von X besteht, die offen sein müssen, wenn f stetig werden soll, ist f tatsächlich stetig bezüglich dieser Topologie, und $f^{-1}(\mathcal{T})$ ist die gröbste Topologie auf X mit dieser Eigenschaft.

Wir nennen $f^{-1}(\mathcal{T})$ die ***unter f zurückgeholte Topologie von $\mathcal{T}$***, oder etwas vornehmer die ***Initialtopologie*** von f.

Diese Konstruktion können wir leicht verallgemeinern.

Definition 5.4 Sei X eine Menge, sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei ein topologischer Raum $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ und eine mengentheoretische Abbildung $f_\lambda\colon X \longrightarrow Y_\lambda$ gegeben.

Nach Bemerkung und Definition 1.13 gibt es eine *gröbste* Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die alle Topologien $f_\lambda^{-1}(\mathcal{T}_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ enthält, also eine gröbste Topologie $\mathcal{T}$, in der alle Abbildungen f_λ stetig sind.

Man nennt diese Topologie $\mathcal{T}$ die ***Initialtopologie der Familie von Abbildungen*** $\mathcal{F} := \{\, f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \,\}$.

Manchmal schreiben wir für diese Topologie auch $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, um die Familie von Abbildungen zu kennzeichnen, deren Initialtopologie sie ist.

Man beachte, dass in Definition 5.4 nicht verlangt wird, dass die topologischen Räume $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ alle verschieden sein müssen. Oft werden wir die Definition anwenden für eine Familie von Abbildungen von X in einen festen zweiten topologischen Raum $(Y, \mathcal{S})$.

Bemerkung 5.5 Sei X eine Menge und für jedes λ in einer Indexmenge Λ sei f_λ eine Abbildung von X in einen topologischen Raum $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, und sei $\mathcal{T}$ die Initialtopologie der Familie von Abbildungen $\{ f_\lambda \}$.

Sei $\mathcal{B}$ die Familie aller endlichen Durchschnitte von Mengen der Form $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ mit $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$. Dann ist eine Menge $U \subseteq X$ genau dann offen in $\mathcal{T}$, wenn sie eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Man überlegt nämlich sehr leicht, dass die Mengen dieser Gestalt tatsächlich eine Topologie auf X bilden, und jede Topologie, die alle $f_\lambda^{-1}(\mathcal{T}_\lambda)$ enthält, muss auch alle Mengen aus $\mathcal{B}$ und alle ihre Vereinigungen enthalten, also alle Mengen der genannten Gestalt.

Es gibt eine „duale" Konstruktion zur Initialtopologie, die für unsere Zwecke weniger wichtig ist, aber die wir trotzdem erwähnen sollten (denn ganz unwichtig ist sie auch nicht).

Definition 5.6 Sei Y eine Menge, sei $(X, \mathcal{S})$ ein topologischer Raum und sei $f \colon X \longrightarrow Y$ eine (mengentheoretische) Abbildung.

Wir setzen

$$f(\mathcal{S}) := \left\{ U \subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}(U) \in \mathcal{S} \right\}. \tag{5.2}$$

Weil $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$, und weil Urbildnehmen mit Vereinigung und Durchschnitt verträglich ist, sieht man auch hier, dass $f(\mathcal{S})$ eine Topologie auf Y ist, und da sie genau aus den Teilmengen von Y besteht, deren Urbilder offen sind und die somit nicht „vermasseln", dass f stetig wird, ist f tatsächlich stetig bezüglich dieser Topologie, und $f(\mathcal{S})$ ist die *feinste* Topologie auf Y mit dieser Eigenschaft.

Wir nennen $f(\mathcal{S})$ die ***Bildtopologie von $\mathcal{S}$ unter f***, oder etwas gehobener die ***Finaltopologie*** von f.

Ist $\mathcal{T}$ eine beliebige Topologie auf Y, so ist f genau dann stetig bezüglich $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} \subseteq f(\mathcal{S})$.

Lemma 5.7 *Sei X eine Menge und für jedes λ in einer Indexmenge Λ sei f_λ eine Abbildung von X in einen topologischen Raum $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. Sei $\mathcal{T}$ die Initialtopologie der Familie von Abbildungen $\{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$.*

a) Sei $\mathcal{S}$ eine Topologie auf X. Genau dann sind alle f_λ für $\lambda \in \Lambda$ stetig bezüglich $\mathcal{S}$, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

b) *Sei $(Z, \mathcal{S})$ ein topologischer Raum und $g\colon Z \longrightarrow X$ eine Abbildung. Dann ist g genau dann stetig bezüglich $\mathcal{T}$, wenn die Abbildungen*

$$f_\lambda \circ g\colon Z \longrightarrow Y_\lambda$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ stetig sind.

Man beachte, dass nach Bemerkung 5.2 b) diese Bedingung die Topologie $\mathcal{T}$ eindeutig charakterisiert.

c) *Sei $\{ x_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in X und sei $a \in X$. Genau dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad\qquad \text{in } X \text{ bezüglich } \mathcal{T},$$

wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_\lambda(x_n) = f_\lambda(a) \qquad\qquad \text{in } Y_\lambda \text{ bezüglich } \mathcal{T}_\lambda.$$

d) *Wir sagen, die Familie $\{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$* ***trennt Punkte*** *in X, wenn es für je zwei verschiedene Elemente $x \neq z \in X$ ein $\lambda \in \Lambda$ gibt, so dass $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(z)$.*

Wenn die Familie $\{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ Punkte trennt und alle $\mathcal{T}_\lambda$ Hausdorffsch sind, dann ist $\mathcal{T}$ Hausdorffsch.

Beweis. a): Genau dann sind alle f_λ bezüglich $\mathcal{S}$ stetig, wenn $\mathcal{S}$ alle $f_\lambda^{-1}(\mathcal{T}_\lambda)$ enthält, und mit ihnen die gröbste sie enthaltende Topologie $\mathcal{T}$.

b): Wenn g stetig ist bezüglich $\mathcal{T}$, dann sind alle $f_\lambda \circ g$ stetig, da die f_λ stetig sind bezüglich $\mathcal{T}$.

Umgekehrt, wenn alle $f_\lambda \circ g$ stetig sind, dann ist $f_\lambda^{-1}(\mathcal{T}_\lambda) \subseteq g(\mathcal{S})$ für jedes $\lambda \in \Lambda$, und somit ist $\mathcal{T} \subseteq g(\mathcal{S})$ und g ist stetig bezüglich $\mathcal{T}$.

c): Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ in X, dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_\lambda(x_n) = f_\lambda(a)$ in jedem Y_λ, weil die f_λ stetig sind.

Umgekehrt, sei $\{ x_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in X und sei $a \in X$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} f_\lambda(x_n) = f_\lambda(a)$$

in Y_λ für jedes $\lambda \in \Lambda$.

Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ in X mit der Topologie $\mathcal{T}$, d.h., dass jede Menge $U \in \mathcal{T}$, die a enthält, auch alle bis auf endlich viele x_n enthält.

Nach Bemerkung 5.5 sind die offenen Mengen von $\mathcal{T}$ genau die Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus den $f_\lambda^{-1}(\mathcal{T}_\lambda)$.

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ und für jedes $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ mit $a \in f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, in anderen Worten mit $f_\lambda(a) \in U_\lambda$, gibt es nur endlich viele Indizes n mit $f_\lambda(x_n) \notin U_\lambda$ und somit nur endlich viele Indizes n mit $x_n \notin f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$.

Für einen endlichen Durchschnitt E von solchen Mengen gibt es immer noch insgesamt nur endlich viele n, so dass x_n in mindestens einer der am Durchschnitt beteiligten Mengen fehlt, also mit $x_n \notin E$.

Und in einer Vereinigung von solchen endlichen Durchschnitten fehlen höchstens so viele Folgenglieder, wie in einem einzelnen Durchschnitt.

D.h., jede $\mathcal{T}$-offene Menge um a enthält x_n für alle bis auf endlich viele n, und somit gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

d): Seien $x \neq z \in X$. Weil die Familie der $\{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ Punkte trennt, gibt es ein $\mu \in \Lambda$, so dass $f_\mu(x) \neq f_\mu(z)$, und weil $\mathcal{T}_\mu$ Hausdorffsch ist, gibt es disjunkte offene Mengen U und $V \in \mathcal{T}_\mu$ mit $f_\mu(x) \in U$ und $f_\mu(z) \in V$.

Dann sind $f_\mu^{-1}(U)$ und $f_\mu^{-1}(V)$ disjunkte $\mathcal{T}$-offene Mengen um x bzw. z. Also ist $\mathcal{T}$ Hausdorffsch. ∎

Korollar 5.8 *Sei X eine Menge und für jedes λ in einer Indexmenge Λ sei f_λ eine Abbildung von X in einen topologischen Raum $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. Sei $\mathcal{T}$ die Initialtopologie der Familie von Abbildungen $\{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$.*

Sei Z eine Menge und sei $h\colon Z \longrightarrow X$ eine mengentheoretische Abbildung. Sei $\mathcal{S}$ die Initialtopologie von h (induziert von der Topologie $\mathcal{T}$ auf X).

Dann ist $\mathcal{S}$ auch die Initialtopologie der Familie von Abbildungen

$$\{ f_\lambda \circ h\colon Z \longrightarrow Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}.$$

Beweis. Sei W ein topologischer Raum und sei $g\colon W \longrightarrow Z$ eine Abbildung.

Nach Lemma 5.7 b) ist g stetig bezüglich $\mathcal{S}$ genau dann, wenn $h \circ g$ stetig ist bezüglich $\mathcal{T}$, und das ist genau dann der Fall, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Abbildung $f_\lambda \circ h \circ g\colon Z \longrightarrow Y_\lambda$ stetig ist.

Aber das ist auch die Bedingung dafür, dass g stetig ist bezüglich der Initialtopologie der Familie $\{ f_\lambda \circ h\colon Z \longrightarrow Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$. Nach der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 5.7 b) ist diese Topologie also gleich $\mathcal{S}$. ∎

Die in den letzten Definitionen vorgestellten Hilfsmitteln zur Erzeugung neuer Topologien können wir jetzt in topologischen Vektorräumen anwenden.

Definition 5.9 Sei V mit der Topologie $\mathcal{T}$ ein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Die ***schwache Topologie*** $\mathcal{T}_w$ auf V ist definiert als die Initialtopologie $\mathcal{T}_{V^*}$ der Familie V^* von Abbildungen $V \longrightarrow \mathbf{K}$.

Der Buchstabe w steht für „weak topology“, und wir verwenden die englische Bezeichnung nur, weil im Deutschen s auch „stark“ abkürzt und somit verwechselbar wäre.

Weil jedes Element von V^* auch bezüglich der gegebenen „starken“ Topologie $\mathcal{T}$ stetig ist, ist $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}$ nach Lemma 5.7 a) und die schwache Topologie ist also tatsächlich schwächer als die gegebenen Topologie $\mathcal{T}$ (oder ihr gleich).

Lemma 5.10 *Seien V und W topologische Vektorräume über dem Körper $\mathbf{K}$.*

Jede stetige lineare Abbildung $T \in L(V, W)$ ist auch stetig bezüglich der schwachen Topologien auf V und W.

Beweis. Für jedes $\alpha \in W^*$ ist $\alpha \circ T \colon V \longrightarrow \mathbf{K}$ stetig bezüglich der gegebenen Topologie auf V, da α und T stetig sind in den gegebenen Topologien.

Also gehört $\alpha \circ T$ zu V^* und ist stetig bezüglich der *schwachen* Topologie auf V, weil diese die Initialtopologie von V^* ist (und nach Definition der Initialtopologie jedes Element von V^* in ihr stetig ist).

Da für jedes $\alpha \in W^*$ die Verknüpfung $\alpha \circ T$ stetig ist in der schwachen Topologie auf V, und da die schwache Topologie auf W die Initialtopologie von W^* ist, ist T stetig bezüglich der schwachen Topologie auf V und auf W nach Lemma 5.7 b). ■

Definition 5.11 Sei V ein topologischer Vektorraum. Sei $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge aus V und sei $a \in V$.

Wir nennen $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ ***schwach konvergent*** gegen a, oder sagen, die Folge $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ ***konvergiert schwach*** gegen a, wenn

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

in der schwachen Topologie auf V.

Nach Lemma 5.7 c) konvergiert $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ genau dann schwach gegen a, wenn für jedes $\alpha \in V^*$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(x_n) = \alpha(a) \in \mathbf{K}.$$

Entsprechend können wir für alle anderen topologischen Begriffe eine schwache Version definieren—sie ist in jedem Fall der gegebene Begriff bezogen auf die schwache Topologie. So ist eine Teilmenge von V ***schwach kompakt***, wenn sie kompakt ist in der schwachen Topologie, eine Abbildung aus V heraus oder nach V hinein ist ***schwach stetig***, wenn sie bezüglich der schwachen Topologie stetig ist, usw.

Korollar 5.12 *Jeder lokal konvexe Hausdorffsche topologische Vektorraum V (insbesondere jeder normierte Vektorraum V) ist auch schwach Hausdorffsch (also Hausdorffsch in der schwachen Topologie).*

Beweis. Die Körper $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ sind Hausdorffsche topologische Räume, und nach Korollar 3.18 trennt V^* Punkte. Die Behauptung folgt jetzt sofort aus Lemma 5.7 d). ■

Folgendes Beispiel zeigt, dass die schwache Topologie nicht etwa immer gleich der gegebenen Topologie ist, und das Gegenbeispiel ist noch nicht einmal besonders exotisch.

Beispiel 5.13 Sei V der Banachraum ℓ^2 aller quadratsummierbaren Folgen aus $\mathbf{R}$.

Die Zahl $p = 2$ ist „selbstdual", d.h., $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, und nach dem Rieszschen Darstellungssatz Satz 4.13 ist die Abbildung $\varphi\colon \ell^2 \longrightarrow \ell^{2*}$ mit

$$\varphi\big(\{\, a_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}\big)\big(\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}\big) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Für jedes $m \in \mathbf{N}$ sei $\gamma_m \in \ell^2$ die Folge $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ mit $x_m = 1$ und $x_n = 0$ für alle $n \neq m$.

Diese Folge ist offensichtlich quadratsummierbar, und man rechnet sofort nach, dass für $j \neq k$ gilt $\|\gamma_j - \gamma_k\|_2 = \sqrt{2}$, so dass die Folge $\{\, \gamma_m \,\}_{m\in\mathbf{N}}$ in der 2-Norm nicht Cauchy ist und deshalb in der Normtopologie nicht konvergieren kann.

Aber sie konvergiert *schwach* gegen 0, denn φ ist surjektiv und für jedes Element $\alpha := \{\, a_n \,\}_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ ist

$$\varphi\big(\{\, a_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}\big)(\gamma_m) = a_m \to 0 = \varphi\big(\{\, a_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}\big)(0) \qquad \text{für } m \to \infty,$$

da die Reihe $\sum a_m^2$ konvergiert und die Glieder deshalb eine Nullfolge bilden.

Da schwache Konvergenz nicht das gleiche wie Normkonvergenz ist, ist die schwache Topologie auf ℓ^2 nicht gleich der Normtopologie.

Völlig unabhängig voneinander sind die schwache und die Normtopologie natürlich auch nicht.

Lemma 5.14 *Sei V ein normierter Vektorraum und sei $\{\, x_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine schwach konvergente Folge aus V.*

Dann ist $\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ beschränkt bezüglich der Norm von V.

Beweis. Sei $i\colon V \longrightarrow V^{**}$ die kanonische Abbildung (Definition 2.11).

Für jedes $\alpha \in V^*$ konvergiert die Folge $\{\, \alpha(x_n) \,\}$, so dass die Menge

$$\left\{\, \alpha(x_n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \,\right\} = \left\{\, i(x_n)(\alpha) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \,\right\}$$

in $\mathbf{K}$ beschränkt ist.

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz 2.9, folgt, dass die Familie $\left\{\, i(x_n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \,\right\}$ beschränkt ist in V^{**}, und weil i eine Isometrie ist, ist $\{\, x_n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ beschränkt in der Norm von V. ∎

Der letzte Beweis erinnert daran, dass manchmal der Bidualraum und die kanonische Abbildung ganz nützlich sein können. Wir wollen sie deshalb für die Konstruktion von Topologien heranziehen, und wir werden bald sehen, dass das eine sehr lohnende Idee ist.

Definition 5.15 Sei V ein normierter Vektorraum über den Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Auf dem Banachraum V^* haben wir drei wichtige Topologien:

a) die Normtopologie des Operatornorms $\| \; \|$, die wir auch die ***starke Topologie*** von V^* nennen wollen;

b) die ***schwache Topologie*** im Sinne von Definition 5.9, d.h., die Initialtopologie von V^{**} auf V^*;

c) als noch schwächere Topologie die Initialtopologie nicht des vollen Bidualraums, sondern der Teilfamilie $i(V) \subseteq V^{**}$.

   Diese Topologie $\mathcal{T}_{i(V)}$ nennt man die ***schwach-$*$-Topologie*** auf V^*.

   Dies ist die Topologie der ***punktweisen Konvergenz***, d.h., eine Folge $\{\, \alpha \,\}_n$ von Funktionalen in V^* konvergiert in der schwach-$*$-Topologie gegen einen Funktional β genau dann, wenn $\{\, \alpha \,\}_n$ *punktweise* gegen β konvergiert.

   Eine Menge $\mathcal{U}$ von Funktionalen ist schwach-$*$ offen in V^*, wenn die Funktionale aus $\mathcal{U}$ an jeder Stelle in V eine offene Menge von Werten in $\mathbf{K}$ annehmen.

Lemma 5.16 *Für jeden normierten Vektorraum V ist der Dualraum V^* schwach-$*$-Hausdorffsch.*

Beweis. Die Körper $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ sind Hausdorffsche topologische Räume, und $i(V) \subseteq V^{**}$ trennt Punkte in V^*, weil zwei Funktionale α und $\beta \in V^*$ genau dann verschieden sind, wenn es ein $v \in V$ gibt mit $\alpha(v) \neq \beta(v)$, also mit $i(v)(\alpha) \neq i(v)(\beta)$.

Die Behauptung folgt jetzt wieder sofort aus Lemma 5.7 d). ■

Die schwach-$*$-Topologie auf dem Dualraum eines normierten Vektorraums ist genügend schwach, damit in ihr der Einheitsball der Norm wieder kompakt ist (obwohl das in der Normtopologie nie passieren kann, außer im endlichdimensionalen Fall). Diese schöne Eigenschaft ist eine der wichtigsten Merkmale der schwach-$*$-Topologie und unterstreicht ihre Bedeutung.

Um diesen Satz beweisen zu können, müssen wir unsere Kenntnisse über Produkträume in der Topologie etwas vertiefen.

Definition 5.17 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein nichtleerer topologischer Raum.

Die ***Produkttopologie*** oder ***Tychonofftopologie***

$$\mathcal{T} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$$

auf dem kartesischen Produkt

$$X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

ist definiert als die Initialtopologie der Familie der Projektionen

$$\left\{ \pi_\mu \colon X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu \;\middle|\; \mu \in \Lambda \right\}$$

(wo π_μ die Projektion auf die μ-te Koordinate ist).

Für eine offene Menge $U_\mu \in X_\mu$ hat $\pi_\mu^{-1}(U_\mu)$ die Form $\prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, wo $V_\mu = U_\mu$ und $V_\lambda = X_\lambda$ für jedes $\lambda \neq \mu$.

Ein endlicher Durchschnitt von solchen Mengen ist einfach ein Produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, wo jedes V_λ offen in X_λ ist, aber nur endlich viele $V_\lambda \neq X_\lambda$.

Nach Bemerkung 5.5 sind die offenen Mengen von der Tychonofftopologie alle Vereinigungen von solchen endlichen Durchschnitten, also alle Vereinigungen von Produkten von offenen Mengen der Faktorräume, in denen jeweils nur endlich viele Faktoren sich vom ganzen Raum X_λ unterscheiden.

In der Tychonofftopologie sind nicht alle Produkte von offenen Mengen der Faktorräume offen, wie man es naiverweise erwarten würde. Die Menge aller Vereinigungen von *beliebigen* Produkten von offenen Mengen ist zwar auch eine Topologie (die so genannte ***starke Topologie***) auf $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ und erfüllt diese naive Erwartung, aber die Tychonofftopologie ist trotzdem die „richtige“ Topologie auf einem kartesischen Produkt, weil ihre Struktur allein durch die einzelnen Projektionen auf die Faktoren bestimmt ist und das ein allgemeines Merkmal von Produktobjekten in allen Gebieten der Mathematik ist.

Die Produktstruktur auf einem Produktobjekt X soll die Eigenschaft haben, dass eine Abbildung nach X genau dann Struktur erhaltend ist, wenn ihre Verknüpfungen mit den Projektionen Struktur erhaltend sind.

Die Tychonofftopologie erfüllt diese Forderung nach Lemma 5.7 b). Die feinere starke Topologie verarbeitet gleichzeitig alle beteiligten Faktortopologien und lässt sich deshalb nicht auf die Stetigkeit der einzelnen Projektionen zurückführen.

Die Konsequenz ist, dass im Gegensatz zur starken Topologie die Tychonofftopologie alle wesentlichen topologischen Eigenschaften der Faktorräume auf den Produktraum überträgt, und insbesondere gilt folgender wichtiger und schwieriger Satz.

Satz 5.18 *Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein nichtleerer kompakter topologischer Raum.*

In der Tychonofftopologie ist $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ kompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen von X. Wir sagen, $\mathcal{A}$ hat die ***endliche Durchschnittseigenschaft***, wenn kein endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{A}$ leer ist, und wir sagen, $\mathcal{A}$ hat ***insgesamt nichtleeren Durchschnitt***, wenn (was sonst?)

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset.$$

Um zu zeigen, dass X kompakt ist, beweisen wir, dass jede Familie $\mathcal{C}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, die die endliche Durchschnittseigenschaft hat, insgesamt nichtleeren Durchschnitt hat.

Sei also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft.

Erstaunlicherweise bekommen wir diese Familie viel besser in den Griff, wenn wir sie soweit wie möglich vergrößern. Wir werden deshalb als erstes zeigen, dass sich $\mathcal{C}$ zu einer *maximalen* Familie $\mathcal{D}$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft erweitern lässt.

Die Existenz dieser maximalen Familie beweisen wir mit dem Zornschen Lemma. Sei

$$E := \left\{ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \;\middle|\; \mathcal{B} \supseteq \mathcal{C} \text{ hat die endliche Durchschnittseigenschaft} \right\},$$

geordnet durch Inklusion.

Wenn F eine nichtleere total geordnete Teilmenge von E ist, dann gehört auch

$$\mathcal{F} := \bigcup_{\mathcal{B}\in F} \mathcal{B}$$

zu E, denn $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ und weil F total geordnet ist findet man für je endlich viele Mengen aus $\mathcal{F}$ eine gemeinsame Familie $\mathcal{B} \in F$, die sie alle enthält, weshalb ihr Durchschnitt nichtleer ist. D.h., $\mathcal{F}$ hat auch die endliche Durchschnittseigenschaft.

Die Familie $\mathcal{F}$ ist eine obere Schranke zu F in E. Weil jede total geordnete Teilfamilie von E eine obere Schranke hat, besagt das Zornsche Lemma, dass E eine maximale Familie $\mathcal{D}$ enthält.

Wenn eine Menge A nichtleeren Durchschnitt mit jedem endlichen Durchschnitt aus $\mathcal{D}$ hat, dann ist $A \in \mathcal{D}$, weil wir sonst A zu $\mathcal{D}$ hinzufügen könnten, ohne die endliche Durchschnittseigenschaft zu zerstören, und $\mathcal{D}$ wäre nicht maximal in E.

Daraus können wir leicht folgende Abschlusseigenschaften folgern:

- Jeder endliche Durchschnitt C von Mengen aus $\mathcal{D}$ gehört zu $\mathcal{D}$, denn der Durchschnitt von C mit endlich vielen Mengen aus $\mathcal{D}$ ist immer noch ein endlicher Durchschnitt aus $\mathcal{D}$ und somit nicht leer.

- Jede Menge A, so dass $A \cap D \neq \emptyset$ für jedes $D \in \mathcal{D}$, gehört zu $\mathcal{D}$. Denn weil, wie wir gerade gesehen haben, jeder endliche Durchschnitt aus $\mathcal{D}$ zu $\mathcal{D}$ gehört, hat A nichtleeren Durchschnitt mit jedem endlichen Durchschnitt aus $\mathcal{D}$ und gehört folglich zu $\mathcal{D}$.

- Wenn $D \in \mathcal{D}$ und wenn $A \supseteq D$, dann gehört A zu $\mathcal{D}$, weil D und deshalb erst recht A nichtleeren Durchschnitt mit jeder Menge aus $\mathcal{D}$ hat.

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei

$$\mathcal{D}_\lambda := \left\{ \overline{\pi_\lambda(D)} \;\middle|\; D \in \mathcal{D} \right\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{D}_\lambda$ sind abgeschlossene Teilmengen von X_λ, und weil $\mathcal{D}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, hat die Familie $\mathcal{D}_\lambda$ sie offensichtlich auch.

Aber X_λ ist kompakt, und der Durchschnitt jeder Familie von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft ist nicht leer. Also gibt es für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein Element $x_\lambda \in X_\lambda$, so dass

$$x_\lambda \in \overline{\pi_\lambda(D)} \qquad \text{für jedes } D \in \mathcal{D}.$$

Sei x das Element von X mit den Koordinaten x_λ.

Sei $\lambda \in \Lambda$ und sei U_λ eine offene Menge um x_λ in X_λ. Für jedes $D \in \mathcal{D}$ ist $x_\lambda \in \overline{\pi_\lambda(D)}$ und deshalb trifft jede offene Menge um x_λ die Menge $\pi_\lambda(D)$.

Also ist $U_\lambda \cap \pi_\lambda(D) \neq \emptyset$ und folglich ist

$$\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \cap D \neq \emptyset \qquad \text{für jedes } D \in \mathcal{D}.$$

Aus diesem Grund ist $\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{D}$. Weil $\mathcal{D}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, gehört auch jeder endliche Durchschnitt von solchen Mengen zu $\mathcal{D}$, und auch jede Obermenge eines solchen endlichen Durchschnitts, insbesondere jede Vereinigung von solchen endlichen Durchschnitten.

In anderen Worten, jede Tychonoff-offene Menge um x gehört zu $\mathcal{D}$.

Daraus folgt, dass jede Tychonoff-offene Menge um x mit jeder Menge aus $\mathcal{D}$ nichtleeren Durchschnitt hat. Also gehört x zur abgeschlossenen Hülle jeder Menge aus $\mathcal{D}$.

Insbesondere gehört x zu $\overline{C}$ für jedes $C \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, aber weil die Mengen in $\mathcal{C}$ abgeschlossen sind heißt das, dass $x \in C$ für jedes $C \in \mathcal{C}$. Somit ist

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Das war zu zeigen, und X ist kompakt. ■

Wir erinnern kurz an die ***Unterraumtopologie*** einer Teilmenge eines topologischen Raumes.

Definition 5.19 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge von X.

Die Topologie $\mathcal{T}$ von X induziert auf A eine Topologie $\mathcal{T}_A$, genannt die ***Relativtopologie*** oder die ***Unterraumtopologie*** oder die ***Spurtopologie*** von $\mathcal{T}$ auf A, definiert als die Initialtopologie der Inklusionsabbildung $j\colon A \longrightarrow X$, also als die Topologie $j^{-1}(\mathcal{T})$.

Weil $j^{-1}(B) = B \cap A$ für jede Teilmenge B von X, besteht $\mathcal{T}_A$ nach Formel (5.1) in Definition 5.3 genau aus den Mengen $U \cap A$ für U offen in X.

($U \cap A$ kann man auffassen als die „Spur“, die U auf A hinterlässt—deshalb der Name ***Spurtopologie***.)

Hier nun der bedeutende Satz über kompakte Bälle.

Satz 5.20 (Satz von Alaoglu) *Sei V ein normierter Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.*

Der abgeschlossene Einheitsball

$$D_1^* := \left\{ \alpha \in V^* \;\middle|\; \|\alpha\| \leq 1 \right\}$$

in V^* ist kompakt in der schwach-$*$-Topologie.

Beweis. Wir können V^* als eine Teilmenge von

$$X := \mathbf{K}^V = \{\, f\colon V \longrightarrow \mathbf{K} \,\}$$

(die Menge der *mengentheoretischen* Abbildungen $V \longrightarrow \mathbf{K}$) betrachten. Sei $j\colon V^* \longrightarrow X$ die Inklusion.

Die Menge X der $\mathbf{K}$-wertigen Funktionen auf V ist nichts anderes als das kartesische Produkt

$$\prod_{v \in V} \mathbf{K},$$

wo für eine Funktion $f \in X$ der Wert $f(v)$ für jedes $v \in V$ die v-te Koordinate von f als Element des Produkts ist. In anderen Worten, für die Projektion π_v von X auf den v-ten Faktor $\mathbf{K}$ gilt

$$\pi_v(f) = f(v).$$

Wir topologisieren X mit der Tychonofftopologie $\mathcal{T}$ des Produkts, induziert von der Standardtopologie auf den Faktoren $\mathbf{K}$.

Man beachte, dass eine Folge $\{\, f_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ von Funktionen in X genau dann in $\mathcal{T}$ gegen eine Funktion $f \in X$ konvergiert, wenn für jedes $v \in V$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \pi_v(f_n) = \pi_v(f)$$

oder gleichbedeutend, wenn für jedes $v \in V$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(v) = f(v).$$

Die Tychonofftopologie auf dem Funktionenraum X ist also die Topologie der punktweisen Konvergenz.

Die Tychonofftopologie induziert eine Unterraumtopologie $\mathcal{S}$ auf der Teilmenge $V^* \subseteq X$. Diese Topologie ist die Initialtopologie von j bezüglich der Tychonofftopologie auf X, und weil diese die Initialtopologie der Projektionen auf die einzelnen Koordinaten ist, folgt aus Korollar 5.8, dass die Unterraumtopologie die Initialtopologie der Familie

$$\{\, \pi_v \circ j \mid v \in V \,\}$$

ist.

Aber für $\alpha \in V^*$ ist

$$(\pi_v \circ j)(\alpha) = \pi_v(\alpha \in X) = \alpha(v) = \big(i(v)\big)(\alpha),$$

wo i die kanonische Abbildung $V \longrightarrow V^{**}$ ist.

Also ist die Unterraumtopologie $\mathcal{S}$ auf V^* die Initialtopologie der Familie $i(V) \subseteq V^{**}$ und ist somit gleich der schwach-$*$-Topologie.

Neben dem topologischen Dualraum V^* von V können wir auch den *algebraischen* Dualraum V' betrachten, der Raum aller $\mathbf{K}$-linearen aber nicht unbedingt stetigen Abbildungen $V \longrightarrow \mathbf{K}$.

Auch V' ist eine Teilmenge von X, und es ist leicht zu zeigen, dass V' *abgeschlossen* ist in X.

Denn sei $f \in \overline{V'}$. Dann ist f der Limes einer Folge von linearen Funktionalen $\alpha_n \in V'$. Konvergenz in der Tychonofftopologie ist punktweise Konvergenz, und weil die algebraischen Operationen in $\mathbf{K}$ stetig sind kann man die Linearität von $f = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ sofort aus der Linearität der α_n schließen. Also gehört f zu V' und V' ist abgeschlossen.

Wir konstruieren jetzt eine kompakte Menge in X, deren Durchschnitt mit V^* und mit V' der zu untersuchende Ball D_1^* ist.

Für jedes $v \in V$ sei

$$D_v := \left\{ a \in \mathbf{K} \;\middle|\; |a| \leq \|v\| \right\}.$$

Dies ist für jedes v eine abgeschlossene Scheibe in $\mathbf{K}$ und ist kompakt (da $\mathbf{K}$ ja endlichdimensional ist).

Nach dem Satz von Tychonoff ist

$$D := \prod_{v \in V} D_v$$

eine kompakte Teilmenge von X.

Ein Element $f \in X$ gehört genau dann zu D, wenn

$$\big|f(v)\big| \leq \|v\|$$

für jedes $v \in V$. Für lineare f ist diese Bedingung gleichbedeutend damit, dass 1 eine Schranke für f ist, also dass $\|f\| \leq 1$. Dann ist f stetig und gehört auch zu V^*.

In anderen Worten, es ist

$$V' \cap D = V^* \cap D = D_1^*.$$

Aber V' ist abgeschlossen in der Topologie $\mathcal{T}$ von X und D ist kompakt in $\mathcal{T}$, und nach Bemerkung 1.42 ist der Durchschnitt D_1^* deshalb kompakt.

Aus der Überdeckungsdefinition der Kompaktheit ist klar, dass die Kompaktheit einer Menge A nur von der Unterraumtopologie auf A abhängt. Also ist D_1^* auch kompakt in jedem Unterraum von X, der D_1^* enthält, insbesondere in dem Unterraum V^*.

Die Unterraumtopologie auf V^* ist gleich der schwach-$*$-Topologie. Damit gilt der Satz. ■

Der Preis, den wir für den Satz von Alaoglu bezahlen, ist die Verwendung einer etwas exotischen Topologie, nämlich der schwach-$*$-Topologie. In der Normtopologie kann der Satz nicht gelten wenn die Dimension unendlich ist, aber manchmal gilt er schon in der schwachen Topologie, insbesondere wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Definition 5.21 Sei V ein normierter Vektorraum. Wir nennen V ***reflexiv***, wenn die kanonische Abbildung

$$i\colon V \longrightarrow V^*$$

ein Isomorphismus ist.

Da die kanonische Abbildung immer eine Isometrie und somit injektiv ist, ist V genau dann reflexiv, wenn i surjektiv ist.

Bemerkung 5.22 a) Wenn V ein reflexiver normierter Vektorraum ist, dann stimmen die schwache und die schwach-$*$-Topologie auf V^* überein (da $i(V) = V^{**}$).

b) Jeder reflexive normierte Vektorraum ist ein Banachraum, denn er ist isometrisch isomorph zu einem Dualraum und alle Dualräume sind Banach.

Um mehr als Trivialitäten über reflexive Banachräume beweisen zu können, müssen wir ein paar einfache Betrachtungen über Dualräume und die Dualisierung von stetigen linearen Abbildungen machen.

Lemma und Definition 5.23 *Seien V und W normierte Vektorräume und sei $T \in L(V, W)$.*

a) T induziert einen wohldefinierten stetigen linearen Operator

$$\begin{aligned} T^*\colon W^* &\longrightarrow \quad V^* \\ \beta \quad &\longmapsto \beta \circ T \end{aligned} \tag{5.3}$$

und es gilt $\|T^*\| = \|T\|$.

*Wir nennen T^* die **Dualisierung** von T oder den **dualen Operator** zu T oder den **transponierten Operator** zu T oder den **adjungierten Operator** zu T.*

b) *Die Dualisierung aus Teil a) kann man auch auf T^* anwenden, um den stetigen linearen Operator*

$$T^{**} = (T^*)^* \colon V^{**} \longrightarrow W^{**}$$

zu erhalten, und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i"'] & W \arrow[d, "i"] \\ V^{**} \arrow[r, "T^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h., es gilt

$$i_W \circ T = T^{**} \circ i_V. \tag{5.4}$$

Die doppelte Dualisierung ist also verträglich mit den kanonischen Abbildungen.

Beweis. a): Weil T stetig und linear ist, ist für jedes $\beta \in W^*$ die Verknüpfung $\beta \circ T$ tatsächlich eine stetige lineare Abbildung $V \longrightarrow \mathbf{K}$, also ein Element von V^*.

Ferner ist

$$\big\|T^*(\beta)\big\| = \|\beta \circ T\| \leq \|T\| \, \|\beta\| \, .$$

Also ist T^* stetig mit

$$\|T^*\| \leq \|T\| \, . \tag{5.5}$$

Die Gleichheit in (5.5) werden wir aus Teil b) herleiten, und stellen den Beweis deshalb zurück.

b): Sei $v \in V$. Für jedes $\beta \in W^*$ ist

$$\begin{aligned} \big((i_W \circ T)(v)\big)(\beta) &= \Big(i_W\big(T(v)\big)\Big)(\beta) \\ &= \beta\big(T(v)\big) = (\beta \circ T)(v) = \big(T^*(\beta)\big)(v) = \big(i_V(v)\big)\big(T^*(\beta)\big) \\ &= \big(i_V(v) \circ T^*\big)(\beta) = \Big(T^{**}\big(i_V(v)\big)\Big)(\beta) = \big((T^{**} \circ i_V)(v)\big)(\beta) \end{aligned}$$

Also sind $(i_W \circ T)(v)$ und $(T^{**} \circ i_V)(v)$ die gleiche Funktion auf W^*, d.h., sie stimmen als Elemente von W^{**} überein.

Das gilt für jedes $v \in V$. Also ist $i_W \circ T = T^{**} \circ i_V$.

Wir müssen noch den Beweis von Teil a) zu Ende führen und die Gleichheit in (5.5) beweisen.

Weil i_W eine Isometrie ist, ist $\|T\| = \|i_W \circ T\|$. Weil i_V eine Isometrie ist, ist $\|i\|_V \leq 1$. Unter Verwendung der schon bewiesenen Ungleichung (5.5) finden wir nun

$$\|T\| = \|i_W \circ T\| = \|T^{**} \circ i_V\| \leq \|T^{**}\| \, \|i_V\| \leq \|T^{**}\| \leq \|T^*\| \leq \|T\| .$$

Weil die äußeren Terme gleich sind, sind hier alle Terme gleich, und wir sind fertig. ■

Bemerkung 5.24 Seien U, V und W normierte Vektorräume und seien $S \in L(U, V)$ und $T \in L(V, W)$.

Man rechnet sofort nach oder prüft sehr leicht nach, dass

a) $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

b) Wenn $W = V$ und $T^* = \mathrm{id}_{V^*}$, dann ist $T = \mathrm{id}$.

   Denn sonst gibt es ein $v \in V$ mit $T(v) \neq v$, und dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach oder nach Korollar 3.18 ein Funktional $\alpha \in V^*$, so dass
   $$\alpha(v) \neq \alpha\big(T(v)\big) = \big(T^*(\alpha)\big)(v).$$
   Also ist $T^*(\alpha) \neq \alpha$ und T^* war doch nicht die Identität.

c) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

d) Wenn T ein Isomorphismus ist, d.h., wenn T bijektiv ist und wenn T^{-1} stetig ist, dann ist auch T^* ein Isomorphismus mit
   $$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$
   Das folgt direkt aus a) und aus c) angewendet auf die Verknüpfung von T und T^{-1} in beiden Reihenfolgen.

Lemma 5.25 *Sei V ein reflexiver normierter Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist W reflexiv.*

Beweis. Sei $g \in W^{**}$. Sei $j\colon W \longrightarrow V$ die Inklusion. Sie ist eine Isometrie und deshalb stetig, und sie induziert nach Lemma 5.23 a) eine stetige lineare Abbildung $j^*\colon V^* \longrightarrow W^*$.

Sei f das stetige lineare Funktional $g \circ j^* \in V^{**}$. Weil V reflexiv ist, gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $f = i_V(v)$, also so dass

$$\alpha(v) = f(\alpha) = (g \circ j^*)(\alpha) = g(\alpha \circ j)$$

für jedes $\alpha \in V^*$.

Wir zeigen, dass $v \in W$. Dazu sei $\pi\colon V \longrightarrow V/W$ die kanonische Projektion. Weil W ein abgeschlossener Untervektorraum von V ist, ist V/W normiert. Man beachte, dass $\pi \circ j = \mathbf{0}$.

Wenn $v \notin W$, dann ist $\pi(v) \neq 0$ und somit $\|\pi(v)\| \neq 0$.

Der Satz von Hahn-Banach in der Version von Korollar 2.7 besagt, dass es ein stetiges lineares Funktional $\gamma \in (V/W)^*$ gibt mit $\gamma\big(\pi(v)\big) = \big\|\pi(v)\big\| \neq 0$.

Nun ist $\gamma \circ \pi \in V^*$ aber $\gamma \circ \pi \circ j = 0$, und wir haben jetzt den Widerspruch

$$0 \neq (\gamma \circ \pi)(v) = f(\gamma \circ \pi) = g(\gamma \circ \pi \circ j) = g(0) = 0.$$

Also gilt doch $v \in W$.

Wir behaupten $g = i_W(v)$. Sei $\beta \in W^*$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (diesmal in der Version von Satz 2.6) lässt sich β zu einem stetigen linearen Funktional $\alpha \in V^*$ erweitern, d.h., so dass $\alpha \circ j = \beta$.

Nun ist

$$\begin{aligned} g(\beta) &= g(\alpha \circ j) = (g \circ j^*)(\alpha) \\ &= f(\alpha) = \big(i_V(v)\big)(\alpha) = \alpha(v) \\ &= \beta(v) && \text{(weil } v \in W\text{)} \\ &= \big(i_W(v)\big)(\beta). \end{aligned}$$

Damit ist $g = i_W(v)$ und wir haben gezeigt, dass i_W surjektiv ist. Nach Definition ist W reflexiv. ■

Lemma 5.26 *Seien V und W normierte Vektorräume, die als topologische Vektorräume isomorph sind.*

Wenn V reflexiv ist, dann ist auch W reflexiv.

Beweis. Sei $T\colon V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus von topologischen Vektorräumen (also stetig, linear und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung).

Nach Lemma 5.23 b) haben wir

$$i_W \circ T = T^{**} \circ i_V.$$

Aus Bemerkung 5.24 d) folgt, dass auch T^{**} ein Isomorphismus und somit bijektiv ist.

Wenn i_V surjektiv ist, dann ist also auch $T^{**} \circ i_V$ surjektiv, somit ist $i_W \circ T$ surjektiv, also auch i_W.

D.h., W ist reflexiv. ■

Satz 5.27 *Sei V ein Banachraum. Dann ist V reflexiv genau dann, wenn V^* reflexiv ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Weil V reflexiv ist, ist $i_V\colon V \longrightarrow V^{**}$ ein Isomorphismus, und nach Bemerkung 5.24 d) ist auch

$$i_V^*\colon V^{***} \longrightarrow V^*$$

ein Isomorphismus.

Wir behaupten, dass die kanonische Abbildung $i_{V^*}\colon V^* \longrightarrow V^{***}$ die Umkehrabbildung von i_V^* ist (und deshalb ein Isomorphismus ist).

Für jedes $v \in V$ und für jedes $\alpha \in V^*$ ist

$$\big((i_V^* \circ i_{V^*})(\alpha)\big)(v) = \Big(i_V^*\big(i_{V^*}(\alpha)\big)\Big)(v) = \big(i_{V^*}(\alpha) \circ i_V\big)(v) = \big(i_{V^*}(\alpha)\big)\big(i_V(v)\big) = \big(i_V(v)\big)(\alpha) = \alpha(v).$$

Also ist $(i_V^* \circ i_{V^*})(\alpha) = \alpha$, d.h., $i_V^* \circ i_{V^*} = \mathrm{id}_{V^*}$. Weil i_V^* und id_{V^*} Isomorphismen sind, ist auch i_{V^*} ein Isomorphismus und V^* ist reflexiv.

„$\Leftarrow$": Wenn V^* reflexiv ist, dann ist auch V^{**} reflexiv nach dem ersten Teil des Beweises.

Die kanonische Abbildung $i_V\colon V \longrightarrow V^{**}$ ist ein isometrischer Isomorphismus auf ihr Bild und weil V ein Banachraum ist, ist auch $i_V(V)$ ein Banachraum und somit ein abgeschlossener Unterraum des reflexiven Banachraums V^{**}.

Nach Lemma 5.25 ist $i_V(V)$ reflexiv, aber dieser Raum ist vermöge i_V isometrisch isomorph zu V. Also ist V reflexiv nach Lemma 5.26. ∎

Lemma 5.28 *Sei V ein reflexiver normierter Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist V/W reflexiv.*

Beweis. Sei $\pi\colon V \longrightarrow V/W$ die kanonische Projektion. Weil W ein abgeschlossener Untervektorraum von V ist, ist V/W ein Banachraum, und π hat eine stetige Dualisierung

$$\begin{aligned} \pi^*\colon \left(\frac{V}{W}\right)^* &\longrightarrow V^*. \\ \beta &\longmapsto \beta \circ \pi \end{aligned}$$

Sei $\beta \in (V/W)^*$ und sei $u \in V/W$ mit $\|u\| \leq 1$.

Nach der Definition der Quotientennorm gibt es ein $v \in V$ mit $\pi(v) = u$ und mit $\|v\| \leq 2$. Wir haben

$$\big(\pi^*(\beta)\big)(v/2) = \beta\big(\pi(v/2)\big) = \beta(u/2) = \beta(u)/2$$

und weil $\|v/2\| \leq 1$, ist

$$\big\|\pi^*(\beta)\big\| \geq \left\|\frac{\beta(u)}{2}\right\| = \frac{\|\beta(u)\|}{2}.$$

Ersetzen wir die rechte Seite durch ihr Supremum über alle $u \in V/W$ mit $\|u\| \leq 1$, so finden wir

$$\big\|\pi^*(\beta)\big\| \geq \frac{1}{2}\,\|\beta\|$$

für jedes $\beta \in (V/W)^*$.

Aus Korollar 2.17 folgt nun, dass π^* eine injektive Abbildung ist und dass Bild π^* ein abgeschlossener Untervektorraum von V^* ist, somit ein Banachraum.

Als Abbildung nach Bild π^* ist π^* bijektiv, und aus dem Banachschen Isomorphiesatz (Korollar 2.16) folgt, dass π^* ein Isomorphismus von $(V/W)^*$ auf den Bildraum ist.

Weil V reflexiv ist, ist V^* reflexiv nach Satz 5.27, damit auch der abgeschlossene Unterraum Bild π^* nach Lemma 5.25, damit auch der isomorphe Raum $(V/W)^*$ nach Lemma 5.26, und deshalb auch V/W selber, wieder nach Satz 5.27. ∎

Beispiel 5.29 Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(X)$ reflexiv.

Beweis. Sei $q \in (1, \infty)$ die eindeutig bestimmte Zahl mit $(1/p) + (1/q) = 1$.

In Definition 4.12 haben wir Isometrien $\varphi\colon L^q(X) \longrightarrow L^{p*}(X)$ und (zur Unterscheidung ändern wir den Namen) $\psi\colon L^p(X) \longrightarrow L^{q*}(X)$ definiert, so dass für jedes $f \in \mathcal{L}^q(X)$ und jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt

$$\Big(\varphi\big([f]\big)\Big)\big([g]\big) = \int_X f\,g\,d\mu = \Big(\psi\big([g]\big)\Big)\big([f]\big). \tag{5.6}$$

Sei i die kanonische Abbildung $L^p(X) \longrightarrow L^{p**}(X)$. Für jedes $f \in \mathcal{L}^q(X)$ und jedes $g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt

$$\Big((\varphi^* \circ i)\big([g]\big)\Big)\big([f]\big) = \Big(i\big([g]\big)\Big)\Big(\varphi\big([f]\big)\Big) = \Big(\varphi\big([f]\big)\Big)\big([g]\big) \overset{(5.6)}{=} \Big(\psi\big([g]\big)\Big)\big([f]\big)$$

und folglich ist

$$\varphi^* \circ i = \psi. \tag{5.7}$$

Weil p und q beide endlich und > 1 sind, sind ψ und φ Isomorphismen nach Satz 4.13 (dem Darstellungssatz von Riesz). Nach Bemerkung 5.24 d) ist auch φ^* ein Isomorphismus, und folglich ist $i = (\varphi^*)^{-1} \circ \psi$ ein Isomorphismus und $L^p(X)$ ist reflexiv. ∎

Bemerkung 5.30 Beispiel 5.29 lässt sich nicht auf die Fälle $p = 1$ oder $p = \infty$ erweitern.

In den Übungen werden Beispiele von σ-endlichen Maßräumen $(X, \mathcal{R}, \mu)$ vorgestellt, die zeigen, dass wenn $q = \infty$ die Isometrie $\psi\colon L^1(X) \longrightarrow L^{\infty *}(X)$ nicht surjektiv sein muss, während die Isometrie $\varphi\colon L^\infty(X) \longrightarrow L^{1^*}(X)$ für diese Beispiele wegen der σ-Endlichkeit doch ein Isomorphismus ist und mit ihr auch φ^*.

Gleichung (5.7) gilt auch für $p = 1$ (wie es hier der Fall ist), denn bis zu dieser Stelle im Beweis von Beispiel 5.29 werden keine Eigenschaften der Rieszschen Isometrien benutzt, die nicht für alle $p \in [1, \infty]$ gelten.

Weil φ^* ein Isomorphismus ist aber ψ nicht, kann in diesen Beispielen auch i für $p = 1$ kein Isomorphismus sein und $L^1(X)$ ist nicht reflexiv.

Da $L^\infty(X) \cong L^{1^*}(X)$, kann wegen Satz 5.27 auch $L^\infty(X)$ nicht reflexiv sein.

Wir suchen noch einige schöne Kriterien für Reflexivität, oder Konsequenzen davon, die wir aus dem Satz von Alaoglu gewinnen können. Wir beginnen mit einem

Hilfssatz 5.31 *Sei V ein normierter Vektorraum, sei $f \in V^{**}$ mit $\|f\| \leq 1$, und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ beliebige endlich viele Funktionale aus V^*.*

Für jedes $v \in V$ setze

$$h(v) := \sum_{i=1}^{k} \bigl|f(\alpha_i) - \alpha_i(v)\bigr|^2. \tag{5.8}$$

Dann ist

$$\inf_{\|v\| \leq 1} h(v) = 0.$$

Beweis. Seien x und $y \in \mathbf{K}$ und sei t eine reelle Variable. $\mathbf{K}$ ist ein Unterkörper von $\mathbf{C}$ und wir erinnern uns daran, dass

$$|x + ty|^2 = (x + ty)\overline{(x + ty)}.$$

Dies ist eine differenzierbare Funktion von t mit Ableitung

$$\frac{d}{dt}\,|x + ty|^2 = y\overline{(x + ty)} + \bar{y}(x + ty) = 2\,\mathrm{Re}\bigl(y\overline{(x + ty)}\bigr). \tag{5.9}$$

Bei $t = 0$ ist dies $2\,\mathrm{Re}(\bar{x}y)$.

Sei D_1 der abgeschlossene Einheitsball

$$D_1 = \bigl\{\, v \in V \;\big|\; \|v\| \leq 1 \,\bigr\}.$$

Sei a das tatsächliche Infimum der Werte von $h(v)$ für $\|v\| \leq 1$ und sei $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Vektoren aus D_1 mit $\lim_{n\to\infty} h(v_n) = a$.

Dann ist die Folge $\{ h(v_n) \}$ beschränkt und mit ihr sind es auch alle Folgen $\{ \alpha_i(v_n) \}_{n\in\mathbf{N}}$ in $\mathbf{K}$.

Nach Übergang zu einer Teilfolge, wenn nötig, können wir annehmen, dass jede Folge $\{ \alpha_i(v_n) \}_{n\in\mathbf{N}}$ gegen einen Grenzwert $c_i \in \mathbf{K}$ konvergiert.

Wir haben dann

$$a = \lim_{n\to\infty} h(v_n) = \sum_{i=1}^{k} \bigl| f(\alpha_i) - c_i \bigr|^2 = \sum_{i=1}^{k} |d_i|^2 ,$$

wo $d_i = f(\alpha_i) - c_i$ für jedes i.

Für beliebiges v mit $\|v\| \leq 1$ betrachten wir die Verbindungsgerade von v_n nach v, die ganz in D_1 liegt, weil D_1 konvex ist.

Nach der Definition von a stellen wir fest, dass für jedes $t \in [0,1]$ und jedes $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a &\leq h\bigl((1-t)v_n + tv\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \Bigl| f(\alpha_i) - \alpha_i\bigl((1-t)v_n + tv\bigr) \Bigr|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \Bigl| f(\alpha_i) - \alpha_i(v_n) + t\bigl(\alpha_i(v_n) - \alpha_i(v)\bigr) \Bigr|^2 . \end{aligned}$$

Wenn $n \to \infty$ erhalten wir daraus

$$a \leq \sum_{i=1}^{k} \Bigl| f(\alpha_i) - c_i + t\bigl(c_i - \alpha_i(v)\bigr) \Bigr|^2 = \sum_{i=1}^{k} \Bigl| d_i + t\bigl(c_i - \alpha_i(v)\bigr) \Bigr|^2 ,$$

wobei die rechte Seite *im Intervall* $[0,1]$ ein Minimum am Endpunkt $t = 0$ hat, weil für diesen Wert von t die Gleichheit gilt.

Folglich ist die Ableitung der rechten Seite nichtnegativ bei $t = 0$, und aus (5.9) erhalten wir

$$2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} \bigl(c_i - \alpha_i(v)\bigr) \geq 0. \tag{5.10}$$

Wir setzen

$$\alpha := \sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} \alpha_i$$

und finden aus (5.10), dass

$$\operatorname{Re}\alpha(v) \leq \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i$$

für jedes v mit $\|v\| \leq 1$.

Da für jedes v ein $z \in \mathbf{C}$ existiert mit $|z| = 1$ (und z reell wenn $\mathbf{K} = \mathbf{R}$), so dass

$$|\alpha(v)| = z\alpha(v) = \operatorname{Re}\bigl(z\alpha(v)\bigr) = \operatorname{Re}\alpha(zv),$$

ist

$$\|\alpha\| \leq \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i.$$

Andrerseits, für die Glieder der Folge $\{\, v_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ in D_1 haben wir

$$\Bigl|\sum_{i=1}^{k} \overline{d_i}\alpha_i(v_n)\Bigr| = \bigl|\alpha(v_n)\bigr| \leq \|\alpha\|$$

für jedes $n \in \mathbf{N}$, und wenn wir $n \to \infty$ gehen lassen, finden wir

$$\Bigl|\sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i\Bigr| \leq \|\alpha\| \leq \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i \leq \left|\sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i\right|.$$

Das kann nur gelten, wenn überall die Gleichheit herrscht und wenn außerdem $\sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i$ reell ≥ 0 ist, und das ergibt

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} 0 \leq a = \sum_{i=1}^{k} |d_i|^2 &= \sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} d_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{d_i}\bigl(f(\alpha_i) - c_i\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} f(\alpha_i) - \sum_{i=1}^{k} \overline{d_i} c_i \\ &= f(\alpha) - \|\alpha\|. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Insbesondere ist $f(\alpha) = a + \|\alpha\|$ reell ≥ 0 und somit gleich $|f(\alpha)|$.

Weil $\|f\| \leq 1$, ist $f(\alpha) = |f(\alpha)| \leq \|\alpha\|$ und mit (5.11) zeigt das, dass $a \leq 0$, also $a = 0$ wie zu zeigen war. ∎

Satz 5.32 *Sei V ein Banachraum, sei D_1 der abgeschlossene Einheitsball*

$$D_1 = \left\{ v \in V \;\middle|\; \|v\| \leq 1 \right\}$$

in V und sei D_1^{**} der abgeschlossene Einheitsball

$$D_1^{**} = \left\{ f \in V^{**} \;\middle|\; \|f\| \leq 1 \right\}$$

in V^{**}.

Dann ist $i(D_1)$ schwach-$*$-dicht in D_1^{**}.

Beweis. Sei $f \in V^{**}$ mit $\|f\| \leq 1$. Wir müssen zeigen, dass f in der schwach-$*$ abgeschlossenen Hülle von $i_V(D_1)$ liegt, also dass jede schwach-$*$ offene Menge um f die Menge $i_V(D_1)$ trifft.

Nach Bemerkung 5.5 sind alle schwach-$*$ offenen Mengen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen der Form

$$\big(i_{V^*}(\alpha)\big)^{-1}(U) = \left\{ g \in V^{**} \;\middle|\; \big(i_{V^*}(\alpha)\big)(g) \in U \right\} = \left\{ g \in V^{**} \;\middle|\; g(\alpha) \in U \right\}$$

für $\alpha \in V^*$ und U offen in $\mathbf{K}$.

Wenn eine solche Menge f enthält, dann ist $f(\alpha) \in U$ und weil U offen ist in $\mathbf{K}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass U alle Zahlen c enthält mit $\big|f(\alpha) - c\big| < \varepsilon$.

Zu den Elementen von $\big(i_{V^*}(\alpha)\big)^{-1}(U) \cap i_V(D_1)$ gehören insbesondere alle Funktionale $i_V(v)$ mit $\|v\| \leq 1$, so dass

$$\big|f(\alpha) - \alpha(v)\big| = \big|f(\alpha) - \big(i_V(v)\big)(\alpha)\big| < \varepsilon.$$

Das passende ε hängt natürlich von α und U ab, und deshalb notieren wir es besser mit $\varepsilon(U, \alpha)$, aber für einen endlichen Durchschnitt

$$E := \bigcap_{j=1}^{k} \big(i_{V^*}(\alpha_j)\big)^{-1}(U_j)$$

von Mengen der genannten Art bietet

$$\varepsilon := \min_{1 \leq j \leq k} \varepsilon(U_j, \alpha_j)$$

die Voraussetzung dafür, dass die Funktionale $i_V(v)$ mit $\|v\| \leq 1$, so dass

$$\big|f(\alpha_j) - \alpha_j(v)\big| < \varepsilon \qquad \text{für alle } j \text{ mit } 1 \leq j \leq k, \tag{5.12}$$

in allen $\big(i_{V^*}(\alpha_j)\big)^{-1}(U_j)$ und somit in E liegt.

Nach Hilfssatz 5.31 gibt es aber einen Vektor $v \in D_1$, so dass

$$\sum_{j=1}^{k} \big|f(\alpha_j) - \alpha_j(v)\big|^2 < \varepsilon^2,$$

denn das Infimum dieses Ausdrucks über alle $v \in D_1$ ist 0. Ein solches v erfüllt natürlich auch (5.12) und liegt somit in E.

Jede schwach-$*$ offene Menge A um f umfasst einen solchen endlichen Durchschnitt E, der f enthält, und trifft $i_V(D_1)$, weil schon E das tut. Also ist $f \in \overline{i_V(D_1)}$ und wir sind fertig. ■

Korollar 5.33 *Ein normierter Vektorraum V ist genau dann reflexiv, wenn D_1 schwach kompakt ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wenn V reflexiv ist, dann ist auch V^* reflexiv und auf V^{**} ist deshalb die schwach-$*$-Topologie das Gleiche, wie die schwache Topologie. Es ist D_1^{**} schwach-$*$ kompakt, also auch schwach kompakt.

Die kanonische Abbildung $i\colon V \longrightarrow V^{**}$ ist bijektiv und eine Isometrie, weshalb $i^{-1}(D_1^{**}) = D_1$. Weil i^{-1} stetig in der Normtopologie ist, ist i^{-1} auch stetig in der schwachen Topologie nach Lemma 5.10, und folglich ist $D_1 = i^{-1}(D_1^{**})$ kompakt in der schwachen Topologie auf V.

“$\Leftarrow$“: Die kanonische Abbildung i ist stetig in der Normtopologie und aus Lemma 5.10 folgt, dass i auch stetig ist in den schwachen Topologien auf V und V^{**}.

Wenn D_1 schwach kompakt in V ist, dann ist sein schwach-stetiges Bild $i(D_1)$ schwach kompakt in V^{**} und deshalb auch schwach-$*$ kompakt, denn weil die schwach-$*$-Topologie gröber ist als die schwache Topologie, ist jede schwach-$*$ offene Überdeckung von $i(D_1)$ auch eine schwach offene Überdeckung und enthält somit eine endliche Teilüberdeckung.

Daraus folgt, dass $i(D_1)$ schwach-$*$ abgeschlossen ist, denn nach Lemma 5.16 ist V^{**} schwach-$*$ Hausdorffsch und nach Lemma 1.38 sind kompakte Teilmengen eines Hausdorffschen Raumes abgeschlossen.

Da aber $i(D_1)$ schwach-$*$ dicht in D_1^{**} ist nach Satz 5.32, muss $D_1^{**} = i(D_1)$ sein.

Daraus folgt offensichtlich, dass i surjektiv ist, also dass V reflexiv ist. ■

Korollar 5.34 *Ein Banachraum V ist genau dann reflexiv, wenn auf V^* die schwache und schwach-$*$-Topologien übereinstimmen.*

Beweis. Wenn V reflexiv ist, dann ist $i(V) = V^{**}$, und da die schwache Topologie auf V^* die Initialtopologie von ganz V^{**} ist und die schwach-$*$-Topologie die Initialtopologie von $i(V)$ ist, sind diese Topologien gleich.

Umgekehrt, wenn die schwache und schwach-$*$-Topologien auf V^* gleich sind, dann ist der Einheitsball in V^* schwach kompakt, weil er nach dem Satz von Alaoglu schwach-$*$ kompakt ist. Daraus folgt nach Korollar 5.33, dass V^* reflexiv ist, und weil V ein Banachraum ist, impliziert das nach Satz 5.27, dass V reflexiv ist. ■

In manchen Fällen lässt sich Kompaktheit durch eine Folgenbedingung beschreiben.

Definition 5.35 Sei X ein topologischer Raum und sei A eine Teilmenge von X. Wir nennen A ***folgenkompakt***, wenn jede Folge aus A eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

Wie wir in Satz 1.37 gesehen haben, kann man in metrischen Räumen die Kompaktheit durch diese Bedingung charakterisieren: eine Teilmenge A eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn A folgenkompakt ist.

Obwohl die schwache Topologie auf einem Banachraum im Gegensatz zur Normtopologie in der Regel keine metrische Topologie ist, ist die (schwach kompakte) Einheitskugel in einem reflexiven Banachraum folgenkompakt, wie wir jetzt beweisen wollen.

Definition 5.36 Ein topologischer Raum X heißt ***separabel***, wenn X eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Beispiel 5.37 Für jede natürliche Zahl n ist $\mathbf{R}^n$ separabel, denn $\mathbf{Q}^n$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge.

Aus diesem Grund sind auch die Räume $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$ separabel.

Bemerkung 5.38 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein separabler topologischer Raum. Dann ist X auch separabel in jeder gröberen Topologie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Denn eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist dicht genau dann, wenn jede offene Menge A trifft.

Gilt dies in der Topologie $\mathcal{T}$, dann erst recht in jeder in $\mathcal{T}$ enthaltenen, also gröberen Topologie. Insbesondere, wenn es in $\mathcal{T}$ eine abzählbare dichte Teilmenge gibt, dann ist sie auch dicht in $\mathcal{S}$.

Lemma 5.39 *Sei V ein topologischer Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.*

Wenn V einen dichten Untervektorraum von abzählbarer algebraischer Dimension besitzt, dann ist V separabel.

Beweis. Sei W ein Untervektorraum von V mit einer abzählbaren Erzeugendenmenge $\{ w_n \mid n \in \mathbf{N} \}$, und so dass $\overline{W} = V$.

Der Körper $\mathbf{K}$ ist separabel und die abzählbar vielen Elemente von $\mathbf{K}$ mit rationalem Real- und Imaginärteil bilden eine dichte Teilmenge von $\mathbf{K}$.

Weil in jeder einzelnen Linearkombination nur endlich viele Vektoren vorkommen, gibt es insgesamt nur abzählbar viele Linearkombinationen der w_n mit Koeffizienten aus $\mathbf{Q}$ (wenn $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) oder aus $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{-1}$ (wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), und diese abzählbare Menge L von „rationalen Linearkombinationen" der w_n ist dicht in W weil die algebraischen Operationen von W stetig sind, und deshalb auch dicht in $V = \overline{W}$.

Also ist V separabel. ∎

Lemma 5.40 *Sei V ein normierter Vektorraum. Wenn V^* in der Normtopologie separabel ist, dann ist auch V in der Normtopologie separabel.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $V \neq \{ 0 \}$, denn $\{ 0 \}$ ist endlich und daher sicher separabel.

Sei $\{ \alpha_n \mid n \in \mathbf{N} \}$eine abzählbare dichte Teilmenge von V^* und für jedes $n \in \mathbf{N}$ wähle einen Vektor $w_n \in V$ mit $\|w\|_n = 1$, so dass

$$\left|\alpha_n(w_n)\right| \geq \frac{1}{2} \|\alpha_n\| .$$

Sei W die abgeschlossene Hülle des von den w_n aufgespannten Untervektorraumes.

Wir behaupten, dass $W = V$.

Wenn das nicht der Fall ist, dann gibt es in V^* ein lineares Funktional $\beta \neq 0$, so dass $\beta(w_n) = 0$ für jedes n.

Denn weil $W \neq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum von V ist, ist $V/W \neq \{ 0 \}$ ein normierter Vektorraum. Nach dem Satz von Hahn-Banach, Korollar 2.7, gibt es in $(V/W)^*$ ein nichtverschwindendes lineares Funktional γ, und $\beta := \gamma \circ \pi$ (wo π die kanonische Projektion $V \longrightarrow V/W$ ist) hat die gewünschten Eigenschaften.

Weil $\|\beta\| > 0$ und weil die α_n in V^* dicht sind, gibt es ein $n \in \mathbf{N}$, so dass

$$\|\beta - \alpha_n\| < \frac{\|\beta\|}{4}.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass $\|\alpha_n\| > \frac{3}{4}\|\beta\| > 0$.

Aber wir haben dann den Widerspruch

$$\frac{3}{8} \|\beta\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \|\beta\| < \frac{\|\alpha_n\|}{2} \leq \left|\alpha_n(w_n)\right| = \left|(\alpha_n - \beta)(w_n)\right| \leq \|\alpha_n - \beta\| < \frac{\|\beta\|}{4}.$$

Folglich ist $W = V$ und alle $\mathbf{K}$-Linearkombinationen der abzählbar vielen Vektoren w_n bilden einen dichten Untervektorraum von V.

Nach Lemma 5.39 ist V separabel. ∎

Definition 5.41 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

Wir sagen, $\mathcal{T}$ erfüllt das ***erste Abzählbarkeitsaxiom***, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine abzählbare Familie $\mathcal{E}$ von offenen Mengen um x gibt, so dass für jede offene Menge $U \ni x$ eine Menge $E \in \mathcal{E}$ existiert mit $E \subseteq U$.

Lemma 5.42 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{T}$ erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist jede kompakte Teilmenge von X folgenkompakt.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ kompakt und sei $\{ x_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in A. Wir suchen eine Teilfolge, die in A konvergiert.

Für jedes $m \in \mathbf{N}$ sei

$$C_m := \overline{\{ x_n \mid n \geq m \}}.$$

Offensichtlich enthält jeder endliche Durchschnitt

$$C_{m_1} \cap C_{m_2} \cap \cdots \cap C_{m_k}$$

dieser Mengen alle Folgenglieder x_n mit $n \geq \max\{ m_1, \ldots, m_k \}$ und hat somit nichtleeren Durchschnitt mit A. Weil A kompakt ist, ist

$$C := A \cap \bigcap_{m\in\mathbf{N}} C_m \neq \emptyset.$$

Sei $a \in C$, und sei $\{ E_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare Familie von offenen Mengen um a, so dass jede offene Menge um a eine der Mengen E_n enthält.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$U_n := E_0 \cap E_1 \cap \cdots \cap E_n,$$

so dass

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \ni a.$$

Weil a in der abgeschlossenen Hülle von $\{ x_n \mid n \geq m \}$ liegt für jedes $m \in \mathbf{N}$, enthält jede offene Menge um a Folgenglieder x_n für beliebig große Werte von n. Deshalb können wir durch Induktion über k leicht eine Teilfolge $\{ x_{n_k} \}_{k\in\mathbf{N}}$ wählen, so dass $x_{n_k} \in U_k$ für jedes k.

Jede offene Menge U um a enthält eine der E_k und enthält somit alle U_m für $m \geq k$, damit auch alle x_{n_m} für $m \geq k$.

Damit ist gezeigt, dass
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$
und $\{ x_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge mit Limes in A. ■

Hilfssatz 5.43 *Sei V ein normierter Vektorraum, der in der Normtopologie separabel ist. Sei $r > 0$ und sei*
$$D_r^* := \big\{ \alpha \in V^* \;\big|\; \|\alpha\| \le r \big\}$$
die abgeschlossene Scheibe von Radius r um den Ursprung in V^*.

Dann erfüllt D_r^* als Unterraum von V^* mit der schwach-$*$-Topologie das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis. Sei A eine abzählbare dichte Teilmenge von V in der Normtopologie.

Sei $\alpha \in D_r^*$.

Die offenen Mengen der schwach-$*$-Topologie auf D_r^* sind Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen der Gestalt
$$\big(i_V(v)\big)^{-1}(U) \cap D_r^* = \Big\{ \beta \in D_r^* \;\Big|\; \big(i_V(v)\big)(\beta) \in U \Big\} = \big\{ \beta \in D_r^* \;\big|\; \beta(v) \in U \big\}$$
für $v \in V$ und U offen in $\mathbf{K}$.

Wenn eine solche Menge α enthält, dann ist $\alpha(v) \in U$ und weil U offen ist in $\mathbf{K}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass U alle Zahlen c enthält mit $\big|\alpha(v) - c\big| < \varepsilon$. Somit enthält $\big(i_V(v)\big)^{-1}(U)$ alle Funktionale $\beta \in D_r^*$ mit
$$\big|\alpha(v) - \beta(v)\big| = \big|(\alpha - \beta)(v)\big| < \varepsilon.$$

Für jeden endlichen Durchschnitt
$$S := \bigcap_{j=1}^{k} \big(i_V(v_j)\big)^{-1}(U_j) \ni \alpha \tag{5.13}$$
von Urbildmengen der genannten Art gibt es also positive Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$, so dass jedes Funktional $\beta \in D_r^*$ mit
$$\big|(\alpha - \beta)(v_j)\big| < \varepsilon_j \qquad \text{für alle } j \text{ mit } 1 \le j \le k \tag{5.14}$$
zu S gehört.

Wir konstruieren jetzt eine abzählbare Familie von speziellen offenen Mengen um α. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ und jede endliche Teilmenge $E \subseteq A$ setze
$$U_{n,E} := \Big\{ \beta \in D_r^* \;\Big|\; \big|(\alpha - \beta)(w)\big| < 2^{-n} \text{ für alle } w \in E \Big\}.$$

Weil E endlich ist, ist $U_{n,E}$ tatsächlich ein endlicher Durchschnitt der Gestalt (5.13) (mit $v_j = w$ und $U_j = B_{2^{-n}}\bigl(\alpha(w)\bigr)$, wo w die endliche Menge E durchläuft) und somit ist $U_{n,E}$ eine schwach-$*$ offene Menge um α. Sei $\mathcal{U}$ die abzählbare Familie aller Mengen $U_{n,E}$.

Jede offene Menge um α in der schwach-$*$-Topologie ist eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen $\bigl(i_V(v)\bigr)^{-1}(U) \cap D_r^*$ und enthält somit eine Menge S der Gestalt (5.13) um α.

Wir werden jetzt zeigen, dass jede solche Menge S eine geeignete Menge $U_{n,E}$ aus $\mathcal{U}$ enthält. Damit enthält jede schwach-$*$ offene Menge um α eine Menge aus der abzählbaren Familie $\mathcal{U}$ und das beweist den Satz.

Sei S wie in (5.13), seien ε_j die in (5.14) vorkommenden Zahlen und sei n so groß, dass $2^{-n} < \varepsilon_j/3$ für jedes j.

Die Familie A ist norm-dicht in V und wir können zu jedem j einen Vektor $w_j \in A$ finden mit

$$\|v_j - w_j\| < \frac{\varepsilon_j}{3r}.$$

Sei $E := \{\, w_1, \dots, w_k \,\}$.

Wenn $\beta \in U_{n,E}$, dann gilt für jedes j mit $1 \leq j \leq k$, dass

$$\begin{aligned}\bigl|(\alpha-\beta)(v_j)\bigr| &\leq \bigl|(\alpha-\beta)(v_j - w_j)\bigr| + \bigl|(\alpha-\beta)(w_j)\bigr| \\ &< \|\alpha-\beta\|\,\|v_j - w_j\| + \frac{1}{2^n} \\ &< 2r\frac{\varepsilon_j}{3r} + \frac{\varepsilon_j}{3} = \varepsilon_j\end{aligned}$$

und deshalb ist $\beta \in S$.

Also ist $U_{n,E} \subseteq S$, wie wir zeigen wollten. ■

Satz 5.44 *Sei V ein reflexiver Banachraum. Dann ist D_1 schwach folgenkompakt.*

In Konsequenz dessen hat jede in der Norm beschränkte Folge aus V eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass V separabel ist in der Normtopologie. Weil V reflexiv ist, ist die kanonische Abbildung $i\colon V \longrightarrow V^{**}$ ein isometrischer Isomorphismus und deshalb ist auch V^{**} separabel in der Normtopologie.

Nach Lemma 5.40 ist auch V^* separabel in der Normtopologie und Hilfssatz 5.43 besagt, dass die abgeschlossene Einheitsscheibe D_1^{**} in V^{**} in der schwach-$*$-Topologie *des Bidualraums* das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Ferner, D_1^{**} ist nach dem Satz von Alaoglu kompakt in dieser Topologie.

Aus Lemma 5.42 schließen wir, dass D_1^{**} in der schwach-$*$-Topologie folgenkompakt ist.

Das bedeutet, dass jede Folge $\{ f_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus D_1^{**} eine Teilfolge $\{ f_{n_k} \}_{k\in\mathbf{N}}$ besitzt, die in der schwach-$*$-Topologie gegen einen Grenzwert $g \in D_1^{**}$ konvergiert.

Wir haben in Definition 5.15 c) gesehen, dass die schwach-$*$-Topologie die Topologie der punktweisen Konvergenz ist, d.h., die Folge $\{ f_{n_k} \}$, betrachtet als eine Folge von Funktionen auf V^*, konvergiert punktweise gegen g.

Um es noch genauer auszudrücken: für jedes Funktional $\alpha \in V^*$ ist

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\alpha) = g(\alpha). \tag{5.15}$$

Nun sei $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in D_1 und für jedes $n \in \mathbf{N}$ setze

$$f_n := i(v_n).$$

Die Folge $\{ f_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ liegt in D_1^{**} (da i eine Isometrie ist) und sie hat eine Teilfolge $\{ f_{n_k} \}_{k\in\mathbf{N}}$, die im Sinne von Gleichung (5.15) gegen ein Element $g \in D_1^{**}$ konvergiert.

Weil V reflexiv und i eine *surjektive* Isometrie ist, gibt es einen Vektor $a \in D_1$, so dass

$$i(a) = g.$$

Gleichung (5.15) mit $f_n = i(v_n)$ und $g = i(a)$ besagt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \big(i(v_{n_k})\big)(\alpha) = \big(i(a)\big)(\alpha)$$

für jedes α in V^*, oder wenn man die Definition von i berücksichtigt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(v_{n_k}) = \alpha(a)$$

für jedes α in V^*.

Das bedeutet aber gerade, dass

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = a$$

in der *schwachen* Topologie auf V.

Damit ist gezeigt, dass D_1 schwach folgenkompakt ist, *wenn V in der Normtopologie separabel ist.*

Der Satz gilt aber auch, wenn V nicht separabel ist.

Denn sei $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in D_1 und sei W bezüglich der Normtopologie die abgeschlossene Hülle des von den v_n aufgespannten Untervektorraums von V.

Da W einen dichten Untervektorraum von abzählbarer algebraischer Dimension besitzt, ist W separabel in der Normtopologie nach Lemma 5.39, und weil W ein abgeschlossener Untervektorraum des reflexiven Banachraums V ist, ist W reflexiv nach Lemma 5.25.

Aus dem ersten Teil des Beweises (für den separablen Fall) folgt, dass $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Teilfolge $\{ v_{n_k} \}_{k\in\mathbf{N}}$ besitzt, die in der schwachen Topologie von W gegen einen Grenzwert a mit $\|a\| \leq 1$ konvergiert. Das bedeutet, dass

$$\lim_{k\to\infty} \beta(v_{n_k}) = \beta(a)$$

für jedes β in W^*.

Aber dann konvergiert $\{ v_{n_k} \}_{k\in\mathbf{N}}$ auch in der schwachen Topologie von V gegen a, denn für jedes $\alpha \in V^*$ ist $\alpha|W \in W^*$ und somit ist

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(v_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (\alpha|W)(v_{n_k}) = (\alpha|W)(a) = \alpha(a).$$

Also ist D_1 schwach folgenkompakt.

Weil die Multiplikation mit einer positiven reellen Konstante ein stetiger linearer Automorphismus von V ist, ist auch jedes $D_r = rD_1$ für $r > 0$ schwach folgenkompakt, und da jede normbeschränkte Folge in einem geeigneten D_r enthalten ist, hat sie, wie behauptet, eine schwach konvergente Teilfolge. ■

Kapitel 6

Hilberträume

In diesem Kapitel wollen wir eine sehr wichtige und angenehme spezielle Klasse von Banachräumen kennen lernen, in der die Norm nicht einfach als unauflösbares „Atom" der Struktur vorgegeben ist, sondern sich auf eine noch fundamentalere Struktur zurückführen lässt, nämlich auf ein inneres Produkt, eine Sesquilinearform auf dem Vektorraum.

Banachräume, die diese zusätzliche Struktur besitzen, heißen ***Hilberträume***, nach dem berühmten Mathematiker David Hilbert (1862-1943). Allerdings war der einzige von Hilbert selber untersuchte Hilbertraum der Raum ℓ^2 (und dann auch nur die Einheitskugel in ℓ^2). Hilbert soll Hermann Weyl sogar einmal nach einem Vortrag gefragt haben:

> Weyl, eine Sache müssen Sie mir erklären: Was ist das, ein Hilbertscher Raum? Das habe ich nicht verstanden.

Die Grundeigenschaften eines inneren Produkts und somit vieles von der Struktur eines „Hilbertschen Raumes" kennen Sie (im Gegensatz zu Hilbert?) sehr gut aus den Anfängervorlesungen *Lineare Algebra*. Neu ist hier hauptsächlich die Tatsache, dass die von uns betrachteten Innenprodukträume meist unendlichdimensional sind, und dass wir gewissermaßen als Ausgleich dafür verlangen, dass ihre vom inneren Produkt induzierte Norm *vollständig* sein muss. Wir werden sehen, dass uns das erlaubt, ***topologische Basen*** für Hilberträume einzuführen, die praktisch die gleiche Rolle spielen können, wie algebraische Basen in der rein algebraischen Vektorraumtheorie.

Die Voraussetzung einer zusätzlichen Struktur auf einem bekannten mathematischen Objekt ist einerseits eine Einschränkung (nicht jeder Banachraum ist ein Hilbertraum), aber andrerseits eine Gelegenheit, Sätze zu beweisen, die nur durch die zusätzliche Struktur ihre Gültigkeit erlangen und in allgemeineren Räumen nicht immer richtig sind.

Es gibt aber noch einen sehr überzeugenden Grund, dieser neuen Struktur viel Aufmerksamkeit zu widmen: Hilberträume und Operatoren auf Hilberträumen kommen auf natürliche Weise in der modernen Physik und speziell in der Quantenmechanik vor, wo die Hilberträume als ***Zustandsräume*** quantenmechanischer Systeme auftreten, und die physikalischen Größen (***Observable*** genannt) durch gewisse stetige Endomorphismen dargestellt werden.

Die ***Spektren*** dieser Operatoren (eine auf den unendlichdimensionalen Fall passende Verallgemeinerung des Eigenwertbegriffs), die wir in den folgenden Kapiteln untersuchen werden, beschreiben welche Werte mit welchen Wahrscheinlichkeiten für die quantenmechanischen Observablen gemessen werden.

Somit ist die Hilbertraumtheorie ein außerordentlich bedeutungsvolles Teilgebiet der Funktionalanalysis.

Konvention 6.1 In diesem Kapitel werden wir es mit Vektorräumen über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ zu tun haben, auf denen „symmetrische Bilinearformen" definiert sind, die nur über $\mathbf{R}$ tatsächlich bilinear und symmetrisch sind, während über $\mathbf{C}$ zwar ähnliche Eigenschaften gelten, die aber die komplexe Konjugation involvieren.

Um nicht ständig zwei getrennte und verschiedene Fälle ansprechen zu müssen, gehen wir in der Notation grundsätzlich vom komplexen Fall aus, auch wenn der Körper $\mathbf{R}$ ist, es sei denn, eine Aussage gilt tatsächlich nur im reellen Fall. Dann werden wir das aber ausdrücklich sagen.

Insbesondere schreiben wir komplexe Konjugierte dort, wo wir sie bei $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ schreiben müssen, aber wir verstehen dabei, dass der Körper womöglich doch $\mathbf{R}$ ist und dass die Konjugation dann einfach die Identität ist, also keine Wirkung hat.

Definition 6.2 Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Eine ***hermitesche Form*** auf V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle \colon V \times V \longrightarrow \mathbf{K},$$

so dass folgende Eigenschaften gelten:

a) $\langle\ ,\ \rangle$ ist reell bilinear.

b) Für v und $w \in V$ und für jedes $a \in \mathbf{K}$ ist

$$\langle av, w \rangle = a\langle v, w \rangle = \langle v, \bar{a}w \rangle.$$

Eine Form $\langle\ ,\ \rangle$, die a) und b) erfüllt, nennt man eine ***Sesquilinearform*** (also eine „eineinhalblineare" Form). Im reellen Fall ist sie natürlich einfach eine Bilinearform.

c) Für v und $w \in V$ ist $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$.

   Eine Form mit dieser Eigenschaft nennt man ***schiefsymmetrisch***. Im reellen Fall ist sie einfach symmetrisch.

Man beachte, dass wenn $\langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Form ist, dann ist

$$\langle v, v\rangle \in \mathbf{R} \tag{6.1}$$

für jedes $v \in V$, denn aus c) folgt, dass $\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle}$ für jedes $v \in V$.

Definition 6.3 Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Form auf V.

Wir nennen $\langle\ ,\ \rangle$ ***positiv definit***, wenn

$$\langle v, v\rangle > 0 \qquad \text{für jedes } v \neq 0 \in V \tag{6.2}$$

(wenn hier nur ≥ 0 gilt, nennen wir die Form ***positiv semidefinit***).

Ein ***inneres Produkt*** oder ein ***Skalarprodukt*** auf V ist eine positiv definite hermitesche Form.

Ein ***Innenproduktraum*** ist ein Paar $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$, wo V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum ist für $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und wo $\langle\ ,\ \rangle$ ein inneres Produkt auf V ist.

Auf die bekannte Weise kann man aus einem inneren Produkt eine Norm gewinnen. Wir erinnern kurz an die Details.

Hilfssatz 6.4 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Form auf V.*

Seien v und $w \in V$ und sei $\lambda \in \mathbf{K}$. Dann ist

$$\langle v + \lambda w, v + \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\,\mathrm{Re}\Big(\lambda\overline{\langle v, w\rangle}\Big) + |\lambda|^2 \langle w, w\rangle. \tag{6.3}$$

Beweis. Unter Anwendung der Sesquilinearität und der Schiefsymmetrie der hermiteschen Form rechnet man sofort aus

$$\begin{aligned}\langle v + \lambda w, v + \lambda w\rangle &= \langle v, v\rangle + \langle v, \lambda w\rangle + \langle \lambda w, v\rangle + \langle \lambda w, \lambda w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \bar\lambda\langle v, w\rangle + \lambda\overline{\langle v, w\rangle} + \lambda\bar\lambda\langle w, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + 2\,\mathrm{Re}\big(\lambda\overline{\langle v, w\rangle}\big) + |\lambda|^2 \langle w, w\rangle.\end{aligned}$$

■

Satz 6.5 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine positiv semidefinite hermitesche Form auf V.*

Dann gilt für je zwei Vektoren v und $w \in v$ die Ungleichung

$$\bigl|\langle v, w\rangle\bigr|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle. \tag{6.4}$$

Beweis. Weil $\langle\ ,\ \rangle$ positiv semidefinit ist, folgt aus Hilfssatz 6.4, dass

$$0 \leq \langle v + \lambda w, v + \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\operatorname{Re}\bigl(\lambda\overline{\langle v, w\rangle}\bigr) + |\lambda|^2 \langle w, w\rangle \tag{6.5}$$

für jeden Skalar $\lambda \in \mathbf{K}$.

Wir beachten, dass wenn λ ein reelles Vielfaches von $\langle v, w\rangle$ ist (und das wird in den folgenden Schritten der Fall sein), dann ist der Ausdruck $\lambda\overline{\langle v, w\rangle}$ reell und wir können im mittleren Term von (6.5) das „Re" einfach weglassen.

Wenn $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle = 0$, setzen wir $\lambda = -\langle v, w\rangle$ in (6.5) und erhalten

$$0 \leq -2\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle} = -2\bigl|\langle v, w\rangle\bigr|^2 \leq 0,$$

woraus folgt, dass *alle* Ausdrücke in (6.4) verschwinden und die „Ungleichung" gilt.

Wenn $\langle v, v\rangle$ und $\langle w, w\rangle$ nicht beide 0 sind, können wir annehmen, dass $\langle w, w\rangle \neq 0$, denn die zu beweisende Ungleichung (6.4) ist symmetrisch in v und w (Vertauschung konjugiert zwar den Ausdruck in den Betragszeichen auf der linken Seite, aber das ändert den Betrag nicht).

Wir setzen in (6.5) dann

$$\lambda = -\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

ein und erhalten

$$0 \leq \langle v, v\rangle - 2\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\overline{\langle v, w\rangle} + \frac{\bigl|\langle v, w\rangle\bigr|^2}{\bigl|\langle w, w\rangle\bigr|^2}\langle w, w\rangle = \langle v, v\rangle - \frac{\bigl|\langle v, w\rangle\bigr|^2}{\langle w, w\rangle}.$$

Multiplikation mit $\langle w, w\rangle > 0$ liefert

$$0 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \bigl|\langle v, w\rangle\bigr|^2,$$

äquivalent zur zu beweisenden Ungleichung (6.4). ∎

Satz und Definition 6.6 *Sei* $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *ein Innenproduktraum über* $\mathbf{R}$ *oder* $\mathbf{C}$.

Für jedes $v \in V$ *definiere man*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \geq 0 \in \mathbf{R}. \tag{6.6}$$

Wir erhalten so eine wohldefinierte Funktion

$$\|\ \| : V \longrightarrow \mathbf{R}$$

und diese Funktion ist eine Norm auf V, *genannt die* ***Norm des inneren Produkts*** $\langle\ ,\ \rangle$.

(Wenn $\langle\ ,\ \rangle$ *nicht positiv* definit, *sondern nur semidefinit ist, aber alle anderen Eigenschaften eines inneren Produkts hat, kann man* $\|\ \|$ *immer noch definieren und man erhält dann eine Halbnorm.)*

Beweis. Weil $\langle\ ,\ \rangle$ reell bilinear ist, ist $\langle 0, 0\rangle = 0$, und weil das innere Produkt positiv definit ist, ist $\langle v, v\rangle > 0$ für jedes $v \neq 0$.

Also hat $\langle v, v\rangle$ für jedes $v \in V$ eine eindeutig bestimmte nichtnegative Quadratwurzel und $\|v\|$ ist wohldefiniert, ist nach Definition immer ≥ 0, und ist gleich 0 nur für $v = 0$.

Damit ist auch Eigenschaft 1.28 a) in der Definition einer Norm bewiesen.

Wegen der Sesquilinearität gilt für jedes $a \in \mathbf{K}$ und jedes $v \in V$, dass

$$\|av\|^2 = \langle av, av\rangle = a\bar{a}\langle v, v\rangle = |a|^2\,\|v\|^2\,,$$

und wenn wir Quadratwurzeln ziehen erhalten wir Eigenschaft 1.28 b):

$$\|av\| = |a|\,\|v\|\,.$$

Eigenschaft 1.28 c), die Dreiecksungleichung, folgt aus Hilfssatz 6.4 wenn wir in Gleichung (6.3) $\lambda = 1$ setzen und den mittleren Term auf der rechten Seite mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung abschätzen. Für v und $w \in V$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle &= \langle v, v\rangle + 2\,\mathrm{Re}\big(\overline{\langle v, w\rangle}\big) + \langle w, w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(\langle v, w\rangle\big) + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\big|\langle v, w\rangle\big| + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\,\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= \big(\|v\| + \|w\|\big)^2.
\end{aligned}$$

Durch Ziehen von Quadratwurzeln auf beiden Seiten ergibt sich die Dreiecksungleichung.

Damit ist bewiesen, dass $\| \ \|$ alle erforderlichen Eigenschaften besitzt und eine Norm auf V ist.

Die einzige Stelle, wo im Beweis tatsächlich verwendet wurde, dass $\langle \ , \ \rangle$ positiv *definit* ist, war im Nachweis, dass $\|v\| > 0$ für alle $v \neq 0$.

Ohne die Definitheit erhalten wir aber immer noch $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\| \ \|$ ist zumindest eine Halbnorm. ■

Für spätere Verwendung lohnt es sich, einige der schon bewiesenen Gleichheiten und Ungleichungen und einfache Konsequenzen daraus in „Normgestalt" hinzuschreiben.

Korollar 6.7 *Sei $\big(V, \langle \ , \ \rangle\big)$ ein Innenproduktraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.*

a) Für je zwei Vektoren v und $w \in V$ und für jedes $\lambda \in \mathbf{K}$ gilt

$$\|v + \lambda w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big(\lambda\overline{\langle v, w\rangle}\Big) + |\lambda|^2\,\|w\|^2\,. \tag{6.7}$$

*b) Für je zwei Vektoren v und $w \in V$ gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung***

$$\big|\langle v, w\rangle\big| \leq \|v\|\,\|w\|\,. \tag{6.8}$$

c) Die zweistellige Funktion $\langle \ , \ \rangle$ ist stetig bezüglich der Norm von V.

d) Sei $V \neq \{\,0\,\}$. Für jedes $v \in V$ ist

$$\|v\| = \max\Big\{\ \big|\langle v, w\rangle\big|\ \Big|\ w \in V \text{ mit } \|w\| = 1\ \Big\}. \tag{6.9}$$

*e) Für je zwei Vektoren v und $w \in V$ gilt die **Parallelogrammgleichung***

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|w\|^2\,. \tag{6.10}$$

Diese Gleichung wird so genannt, weil sie besagt, dass die Quadratsumme der Längen der Diagonalen eines Parallelogramms gleich der Quadratsumme der Längen der vier Seiten ist.

Beweis. a): Gleichung (6.7) ist einfach Gleichung (6.3), in der alle innere Produkte von zwei gleichen Vektoren als Quadrate der Norm umgeschrieben wurden.

b) ergibt sich auf die gleiche Weise aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (6.4), wenn man anschließend beide Seiten der Ungleichung durch ihre Quadratwurzel ersetzt.

c): Die Stetigkeit folgt sofort aus Ungleichung (6.8).

d): Wenn $v = 0$, dann ist $\langle v, w\rangle = 0$ für jedes w auf Grund der reellen Bilinearität des inneren Produkts, und beide Seiten von (6.9) sind 0.

Wenn $v \neq 0$, dann folgt sofort aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (6.8), dass

$$\big|\langle v, w\rangle\big| \leq \|v\| \qquad \text{wenn } \|w\| \leq 1,$$

und für den speziellen Vektor $w = v/\|v\|$ erhalten wir

$$\big|\langle v, w\rangle\big| = \left\|\langle v, \frac{v}{\|v\|}\rangle\right\| = \frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|} = \frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \|v\|\,,$$

so dass das Maximum auf der rechten Seite von (6.9) tatsächlich $\|v\|$ ist.

e): Wir erhalten (6.10) sofort, wenn wir in (6.7) einmal $\lambda = 1$ und einmal $\lambda = -1$ einsetzen und die beiden resultierenden Gleichungen addieren. ∎

Die Parallelogrammgleichung (6.10) ist nicht nur eine schöne und einfache Konsequenz der Berechnungen mit dem inneren Produkt, sondern charakterisiert die von einem inneren Produkt stammenden Normen, wie Johann von Neumann zuerst bemerkte.

Satz 6.8 *Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.*

Genau dann erfüllt die Norm die Parallelogrammgleichung (6.10)*, wenn es ein inneres Produkt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V gibt, so dass*

$$\langle v, v\rangle = \|v\|^2$$

für jedes $v \in V$. Ferner, $\|\ \|$ bestimmt $\langle\ ,\ \rangle$ eindeutig.

Beweis. Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist Korollar 6.7 e), und wir müssen hier nur die Richtung „$\Rightarrow$“ und die Eindeutigkeit des inneren Produkts beweisen.

Dazu nehmen wir zur Einfachheit zunächst an, der Körper sei $\mathbf{R}$ (das heißt aber nur, dass wir uns um die komplexen Eigenschaften des inneren Produkts vorerst nicht kümmern wollen—das werden wir später noch nachholen).

Um ein zur Norm passendes inneres Produkt zu finden, wollen wir einmal schauen, was denn wäre, wenn wir das innere Produkt schon hätten. Das innere Produkt müsste dann für je zwei Vektoren v und w Gleichung (6.7) mit $\lambda = 1$ erfüllen, aber diese Gleichung enthält bis auf den mittleren Term auf der rechten Seite, in dem das innere Produkt unmittelbar vorkommt, nur *Norm* Terme, deren Wert wir schon kennen. Wir können diese Gleichung deshalb zur *Bestimmung* des inneren Produkts verwenden.

Die gemachte Annahme dass $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ rettet uns vor der Schwierigkeit, dass in Gleichung (6.7) nur der Realteil des inneren Produkts steht, denn das innere Produkt nimmt unter dieser Annahme ohnehin nur reelle Werte an.

Wir definieren also zunächst nur eine *reelle* zweistellige Funktion

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}} \colon V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$$

durch Auflösung von Gleichung (6.7). D.h., wir setzen

$$\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}} := \frac{1}{2}\big(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\big). \tag{6.11}$$

Diese Form ist offensichtlich symmetrisch.

Ferner, weil die Norm stetig ist auf V, ist klar, dass $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ stetig ist in beiden Variablen.

Nach der Parallelogrammgleichung kann man den Ausdruck in Klammern in (6.11) auch als

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2$$

schreiben, und wenn wir beide Ausdrücke für $\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}}$ mitteln finden wir

$$\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}} = \frac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big). \tag{6.12}$$

Hieraus ist klar, dass

$$\langle v, -w\rangle_{\mathbf{R}} = -\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}} = \langle -v, w\rangle_{\mathbf{R}} \tag{6.13}$$

Die Form $\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}}$ ist additiv in v (und wegen der Symmetrie dann auch in w), denn aus (6.11) haben wir

$$\begin{aligned}
&4\langle u, w\rangle_{\mathbf{R}} + 4\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}} \\
&\quad = 2\,\|u+w\|^2 - 2\,\|u\|^2 - 2\,\|w\|^2 + 2\,\|v+w\|^2 - 2\,\|v\|^2 - 2\,\|w\|^2 \\
&\qquad = 2\,\|u+w\|^2 + 2\,\|v+w\|^2 - 2\,\|u\|^2 - 2\,\|v\|^2 - 4\,\|w\|^2 .
\end{aligned}$$

Nach der Parallelogrammgleichung für das Paar von Vektoren $u+w$ und $v+w$ können wir auf der rechten Seite

$$2\,\|u+w\|^2 + 2\,\|v+w\|^2 \qquad \text{durch} \qquad \|u+v+2w\|^2 + \|u-v\|^2$$

ersetzen und wir erhalten

$$4\langle u, w\rangle_{\mathbf{R}} + 4\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}} = \|u+v+2w\|^2 + \|u-v\|^2 - 2\,\|u\|^2 - 2\,\|v\|^2 - 4\,\|w\|^2 .$$

Nach der Parallelogrammgleichung für das Paar von Vektoren u und v können wir

$$\|u-v\|^2 - 2\,\|u\|^2 - 2\,\|v\|^2 \qquad \text{durch} \qquad -\|u+v\|^2$$

ersetzen, und anschließend können wir nach der Parallelogrammgleichung für das Paar von Vektoren $u+v+w$ und w die Summe

$$\|u+v+2w\|^2 \qquad \text{durch} \qquad 2\|u+v+w\|^2+2\|w\|^2-\|u+v\|^2$$

ersetzen und wir erhalten

$$4\langle u,w\rangle_{\mathbf{R}}+4\langle v,w\rangle_{\mathbf{R}}=2\|u+v+w\|^2-2\|u+v\|^2-2\|w\|^2=4\langle u+v,w\rangle_{\mathbf{R}}.$$

Wir kommen jetzt zur Linearität von $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ bezüglich der Multiplikation mit Skalaren. Sei

$$F:=\left\{\, a\in\mathbf{R}\;\middle|\;\langle av,w\rangle_{\mathbf{R}}=a\langle v,w\rangle_{\mathbf{R}} \text{ für alle } v \text{ und } w\in V\,\right\}.$$

Natürlich ist $1\in F$, wir haben gesehen, dass $-1\in F$, und aus der Additivität von $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ in jeder Variablen folgt, dass F unter Addition abgeschlossen ist.

Trivialerweise ist F unter Multiplikation abgeschlossen, und wenn $a\neq 0\in F$, dann ist auch $1/a\in F$, wie man leicht feststellen kann, indem man v durch v/a ersetzt. Man findet zunächst

$$\langle v,w\rangle_{\mathbf{R}}=\langle a\tfrac{v}{a},w\rangle_{\mathbf{R}}=a\langle\tfrac{v}{a},w\rangle_{\mathbf{R}},$$

und Division durch $a\neq 0$ liefert daraus

$$\langle\frac{v}{a},w\rangle_{\mathbf{R}}=\frac{1}{a}\langle v,w\rangle_{\mathbf{R}}.$$

Alle diese Abschlussregeln zusammen besagen, dass F ein Unterkörper von $\mathbf{R}$ ist. Somit ist $\mathbf{Q}\subseteq F$, denn $\mathbf{Q}$ ist der Primkörper (also der kleinste Unterkörper) von $\mathbf{R}$.

Aber $\mathbf{Q}$ ist dicht in $\mathbf{R}$, und weil $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ stetig ist bleibt die definierende Gleichung für F richtig für alle Skalare aus $\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$.

Das heißt, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ ist $\mathbf{R}$-linear in der ersten Variablen, und wegen Symmetrie auch in der zweiten.

Für $v=w$ erhalten wir aus (6.12), dass

$$\langle v,v\rangle_{\mathbf{R}}=\frac{1}{4}\|2v\|^2=\|v\|^2.$$

Dies ist ≥ 0 und ist >0 wenn $v\neq 0$, und folglich ist $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ positiv definit.

Das beweist, dass $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ ein inneres Produkt ist, und wir haben gerade gesehen, dass $\|\ \|$ die von ihm induzierte Norm ist. Wir haben also im reellen Fall alle erforderlichen Eigenschaften bewiesen.

Im Falle $K = \mathbf{C}$ können wir aus dem schon konstruierten reellen inneren Produkt $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ sehr leicht ein komplexes inneres Produkt $\langle\ ,\ \rangle$ definieren durch

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{2}\big(\langle v, w\rangle_{\mathbf{R}} + \langle iv, iw\rangle_{\mathbf{R}} + i\langle v, iw\rangle_{\mathbf{R}} - i\langle w, iv\rangle_{\mathbf{R}}\big). \tag{6.14}$$

Dies ist immer noch eine reell-bilineare (aber jetzt komplexwertige) Form, und durch Inspektion stellt man sofort fest, dass $\langle\ ,\ \rangle$ schiefsymmetrisch ist (Vertauschen von v und w negiert offenbar den Imaginärteil, aber der Realteil bleibt unverändert weil $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ symmetrisch ist).

Man rechnet sofort nach, dass

$$\begin{aligned}
\langle iv, w\rangle &= \frac{1}{2}\big(\langle iv, w\rangle_{\mathbf{R}} + \langle i^2 v, iw\rangle_{\mathbf{R}} + i\langle iv, iw\rangle_{\mathbf{R}} - i\langle w, i^2 v\rangle_{\mathbf{R}}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\langle w, iv\rangle_{\mathbf{R}} - \langle v, iw\rangle_{\mathbf{R}} + i\langle iv, iw\rangle_{\mathbf{R}} + i\langle w, v\rangle_{\mathbf{R}}\big)\\
&= \frac{i}{2}\big(-i\langle w, iv\rangle_{\mathbf{R}} + i\langle v, iw\rangle_{\mathbf{R}} + \langle iv, iw\rangle_{\mathbf{R}} + \langle w, v\rangle_{\mathbf{R}}\big)\\
&= i\langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

und wir sehen, dass $\langle\ ,\ \rangle$ in der ersten Variablen i-linear und deshalb $\mathbf{C}$-linear ist. Weil die Form schiefsymmetrisch ist, ist sie in der zweiten Variablen konjugiert-linear und ist insgesamt also sesquilinear.

Wenn wir $w = v$ setzen in (6.14), dann finden wir

$$\begin{aligned}
\langle v, v\rangle &= \frac{1}{2}\big(\langle v, v\rangle_{\mathbf{R}} + \langle iv, iv\rangle_{\mathbf{R}} + i\langle v, iv\rangle_{\mathbf{R}} - i\langle v, iv\rangle_{\mathbf{R}}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\langle v, v\rangle_{\mathbf{R}} - i^2\langle v, v\rangle_{\mathbf{R}}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\langle v, v\rangle_{\mathbf{R}} + \langle v, v\rangle_{\mathbf{R}}\big)\\
&= \langle v, v\rangle_{\mathbf{R}} = \|v\|^2\,,
\end{aligned}$$

und somit ist auch die komplexe Form positiv definit und sie hat $\|\ \|$ als ihre Norm.

Damit haben wir zur gegebenen Norm ein passendes inneres Produkt konstruiert.

Die Eindeutigkeit des inneren Produkts folgt sofort aus Gleichung (6.7), denn diese Gleichung mit $\lambda = 1$ und $\lambda = i$ bestimmt $\mathrm{Re}\langle v, w\rangle$ bzw. $\mathrm{Im}\langle v, w\rangle$ eindeutig aus Werten der Norm (das war ja auch die Idee, die wir zur *Konstruktion* des inneren Produkts verwendet haben). ■

Da jedes innere Produkt eine Norm induziert, ist es sinnvoll, wichtige Eigenschaften von normierten Vektorräumen speziell auf Innenproduktträume anzuwenden. Die für die Funktionalanalysis wichtigste Eigenschaft, die ein normierter Vektorraum haben kann, ist die Vollständigkeit.

Definition 6.9 Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$, ein Innenproduktraum über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Man nennt V einen ***Hilbertraum***, wenn die von $\langle\ ,\ \rangle$ induzierte Norm vollständig ist.

Ein Hilbertraum ist also ein Banachraum, dessen Norm von einem inneren Produkt kommt.

Diese spezielle Form der Norm macht Hilberträume zu besonders angenehmen Vertretern der Gattung „Banachraum“.

Beispiele 6.10 a) Das Standardskalarprodukt auf $\mathbf{R}^n$ oder $\mathbf{C}^n$, gegeben durch

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \tag{6.15}$$

ist offensichtlich ein inneres Produkt auf $\mathbf{K}^n$, und seine Norm ist die euklidische Norm.

Da $\mathbf{K}^n$ vollständig ist in dieser (und in jeder) Norm, ist $\mathbf{K}^n$ ein Hilbertraum.

b) Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum, sei $1 \leq p \leq \infty$ und sei q die Zahl mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Wir erinnern an die in Definition 4.11 konstruierte Paarung

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle \colon \mathcal{L}^p(X) \times \mathcal{L}^q(X) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_X f g \, d\mu \end{aligned}$$

(und an die davon induzierte Paarung $L^p(X) \times L^q(X) \longrightarrow \mathbf{R}$).

Diese Paarungen haben im Wesentlichen die Eigenschaften eines inneren Produkts, aber sie verbinden nicht Vektoren *eines* gegebenen Vektorraums miteinander, sondern sie paaren zwei verschiedene und zueinander *komplementäre* Räume $L^p(X)$ und $L^q(X)$.

Aber es gibt eine Ausnahme zu diesem Einwand, denn für genau einen Wert von p ist q die gleiche Zahl wie p, nämlich für $p = 2$ (schließlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$).

Die Paarung auf $\mathcal{L}^2(X)$ ist leider nur semidefinit, aber auf $L^2(X)$ ist sie positiv definit und wir stellen fest:

Die Paarung $\langle\ ,\ \rangle\colon L^2(X) \times L^2(X) \longrightarrow \mathbf{R}$ mit

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_X fg \, d\mu$$

ist bilinear, sie ist offensichtlich symmetrisch, und sie ist positiv definit weil

$$\langle [f], [f] \rangle := \int_X f^2 \, d\mu = \|f\|_2^2 \,.$$

Also ist sie ein inneres Produkt auf $L^2(X)$, und ihre Norm ist die schon vorhandene 2-Norm $\|\ \|_2$.

Da $L^2(X)$ in dieser Norm vollständig ist, ist $L^2(X)$ ein Hilbertraum.

c) Als Spezialfall von b) haben wir den Hilbertraum ℓ^2 der quadratsummierbaren Folgen aus $\mathbf{R}$, mit dem inneren Produkt

$$\langle \{ a_n \}_{n \in \mathbf{N}}, \{ b_n \}_{n \in \mathbf{N}} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n .$$

d) Beispiele b) und c) kann man auch als komplexe Hilberträume realisieren.

Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Maßraum. Die komplexen L^p-Räume $L^p(X, \mathbf{C})$ und die p-Norm werden genau so definiert, wie im reellen Fall, aber wir erlauben komplexwertige messbare Funktionen als Elemente der $\mathcal{L}^p$-Räume und Äquivalenzklassen komplexwertiger Funktionen als Elemente der L^p-Räume.

Bei der Berechnung der p-Norm einer komplexwertigen Funktion f wird $|f|^p$ integriert, so dass immer noch reelle Integrale auftreten und sich hier nichts ändert. Alle Sätze über L^p-Räume gelten nach wie vor und praktisch mit den gleichen Beweisen.

Nur die Definition der Paarung wird angepasst, indem wir im komplexen Fall

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

setzen (wobei das Integral eines komplexen Integranden wie in Definition 0.62 erklärt ist).

Diese Paarung ist offensichtlich sesquilinear, und wenn $p = q = 2$ ist sie antisymmetrisch und es gilt immer noch

$$\langle [f], [f] \rangle := \int_X f \bar{f} \, d\mu = \int_X |f|^2 \; d\mu = \|f\|_2^2 \,.$$

Also liefert $\langle\ ,\ \rangle$ auf $L^2(X, \mathbf{C})$ immer noch ein inneres Produkt, und weil $L^2(X, \mathbf{C})$ nach wie vor in der 2-Norm vollständig ist, ist es ein komplexer Hilbertraum.

Als Spezialfall haben wir den komplexen Hilbertraum $\ell^2(\mathbf{C})$ der quadratsummierbaren[1] komplexen Folgen mit dem inneren Produkt

$$\langle \{ a_n \}_{n\in\mathbf{N}}, \{ b_n \}_{n\in\mathbf{N}} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Weil das innere Produkt eines Hilbertraumes H sesquilinear ist, ordnet es jedem Vektor w eine lineare Abbildung $H \longrightarrow \mathbf{K}$ zu, gegeben durch das innere Produkt mit w. Diese linearen Abbildungen (die auch stetig sind) werden wir uns näher ansehen, aber bevor wir das in aller Detail tun, wollen wir uns, gewissermaßen als Einstieg in dieses Thema, die Kerne dieser Abbildungen anschauen.

Definition 6.11 Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein Innenproduktraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Seien v und $w \in V$. Wir nennen sie ***orthogonal***, und schreiben

$$v \perp w,$$

wenn gilt $\langle v, w\rangle = 0$.

Für einen gegebenen Vektor w setzen wir

$$w^\perp := \{ v \in V \mid v \perp w \}. \tag{6.16}$$

Weil $\langle\ ,\ \rangle$ linear ist in der ersten Variablen, ist $w^\perp$ offensichtlich ein Untervektorraum von V, und weil $\langle\ ,\ \rangle$ stetig ist in der ersten Variablen ist dieser Unterraum abgeschlossen (denn er ist das Urbild von 0 unter der stetigen Abbildung $v \mapsto \langle v, w\rangle$).

Der abgeschlossene Untervektorraum $w^\perp$ heißt das ***orthogonale Komplement*** zu w.

Allgemeiner, wenn M eine nichtleere Teilmenge von V ist, definieren wir das ***orthogonale Komplement*** von M als den abgeschlossenen Untervektorraum

$$M^\perp := \bigcap_{w\in M} w^\perp = \{ v \in V \mid v \perp w \text{ für alle } w \in M \}. \tag{6.17}$$

Ferner, für $v \in V$ schreiben wir

$$v \perp M$$

[1] Eine Folge $\{ a_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\mathbf{C}$ heißt ***quadratsummierbar***, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert.

genau dann, wenn $v \in M^\perp$, also wenn $v \perp w$ für jedes $w \in M$.

Entsprechend, wenn N eine weitere nichtleere Teilmenge von V ist, schreiben wir

$$N \perp M$$

genau dann, wenn $v \perp w$ für jedes $v \in N$ und jedes $w \in M$, also wenn $N \subseteq M^\perp$.

Bemerkung 6.12 Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein Innenproduktraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei $w \in W$.

a) Sei $v \in V$. Wenn $v \perp w$, dann ist auch $w \perp v$ (weil das innere Produkt schiefsymmetrisch ist, insbesondere symmetrisch wenn der Wert 0 ist).

   Hieraus folgt auch, wenn M und N nichtleere Teilmengen von V sind, dass $N \perp M$ genau dann, wenn $M \perp N$.

b) Sei $v \in V$. Wenn $v \perp w$, dann ist

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 . \tag{6.18}$$

   Das folgt sofort aus Gleichung (6.7) mit $\lambda = 1$.

c) $0^\perp = V$, aber wenn $w \neq 0$, dann ist $w^\perp$ ein 1-kodimensionaler Untervektorraum von V (das heißt, $\dim V/w^\perp = 1$ und $w^\perp \neq V$).

   Denn die Abbildung $v \mapsto \langle v, w\rangle$ ist eine lineare Abbildung $V \longrightarrow \mathbf{K}$, die nicht $\mathbf{0}$ ist wenn $w \neq 0$, weil $\langle w, w\rangle = \|w\|^2 \neq 0$. Also ist sie surjektiv auf den 1-dimensionalen Bildraum $\mathbf{K}$ und hat einen 1-kodimensionalen Kern $w^\perp$.

d) $V^\perp = \{\,0\,\}$.

   Denn für keinen Vektor $w \neq 0$ gilt $w \perp w$, da $\langle w, w\rangle = \|w\|^2 > 0$.

e) Seien $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq V$. Dann ist offensichtlich

$$B^\perp \subseteq A^\perp.$$

Satz 6.13 *Sei H ein Hilbertraum und sei A eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von H. Sei $v \in H$.*

*Dann gibt es einen eindeutig bestimmten **nächsten Vektor** w zu v in A, das heißt, einen eindeutig bestimmten Vektor $w \in A$, so dass*

$$\|v - w\| \leq \|v - u\| \qquad \text{für alle Vektoren } u \in A.$$

Beweis. Sei

$$d := \inf_{u \in A} \|v - u\| .$$

Diese Zahl ist ≥ 0 und ist endlich, weil $A \neq \emptyset$.

Sei $\{ u_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in A, so dass

$$d_n := \|v - u_n\|$$

gegen d konvergiert.

Wir behaupten, dass $\{ u_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Dazu seien m und $n \in \mathbf{N}$, und setze

$$a := \frac{v - u_n}{2}, \qquad b := \frac{v - u_m}{2} \qquad \text{und} \qquad x := \frac{u_n + u_m}{2}.$$

Weil A konvex ist, ist $x \in A$.

Wir wenden die Parallelogrammgleichung auf a und b an. Es gilt

$$2 \|a\|^2 + 2 \|b\|^2 = \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2$$

oder, wenn wir diese Terme unter Verwendung der Definition von a und b ausrechnen:

$$\frac{1}{2} d_n^2 + \frac{1}{2} d_m^2 = \|v - x\|^2 + \frac{1}{4} \|u_m - u_n\|^2 \geq d^2 + \frac{1}{4} \|u_m - u_n\|^2$$

(die Abschätzung $\|v - x\|^2 \geq d^2$ gilt weil $x \in A$).

Die ganz linke Seite konvergiert gegen d^2 für m und $n \to \infty$, und deshalb muss $\|u_m - u_n\|^2$ gegen 0 konvergieren, d.h., die Folge $\{ u_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ ist Cauchy.

Da der Hilbertraum H vollständig ist, konvergiert $\{ u_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ gegen einen Vektor $w \in H$, und w liegt in A weil A abgeschlossen ist.

Weil die Norm stetig ist haben wir

$$\|v - w\| = \lim_{n \to \infty} \|v - u_n\| = \lim_{n \to \infty} d_n = d \leq \|v - u\| \text{ für jedes } u \in A.$$

Also gibt es mindestens ein Element in A mit minimalem Abstand zu v. Dass es eindeutig ist, kann man auf die gleiche Weise beweisen, wie die Cauchy Eigenschaft für die Folge u_n.

Noch effizienter ist es, die Eindeutigkeit aus der Cauchy Eigenschaft zu folgern. Denn jede Folge $\{ u_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus *Elementen mit Abstand d zu v* ist eine Folge, deren Abstände zu v (alle $= d$) gegen d konvergieren, und wir haben schon bewiesen, dass *jede* solche Folge Cauchy ist.

Insbesondere, wenn w und w' Elemente von A sind mit

$$\|v - w\| = d = \|v - w'\| ,$$

dann ist die Folge

$$u_n := \begin{cases} w, & \text{wenn } n \text{ gerade;} \\ w', & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine Cauchyfolge, und das ist nur möglich wenn $w = w'$.

Also ist das zu v nächste Element von A eindeutig. ■

Lemma 6.14 *Sei H ein Hilbertraum und sei W ein abgeschlossener Untervektorraum von H.*

a) Sei $v \in H$ und sei $u \in W$. Genau dann ist u der nach Satz 6.13 eindeutig bestimmte nächste Vektor zu v in W, wenn

$$v - u \in W^{\perp}.$$

b) $H = W \oplus W^{\perp}$.

Insbesondere ist jeder abgeschlossene Untervektorraum eines Hilbertraums H ein direkter Summand in H.

c) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

d) Ist M eine beliebige nichtleere Teilmenge von H und ist W die abgeschlossene Hülle des Spanns von M, dann ist

$$M^{\perp} = W^{\perp} \qquad \text{und} \qquad (M^{\perp})^{\perp} = W.$$

Beweis. a): Satz 6.13 ist auf W anwendbar, weil Unterräume ja konvex sind, und es gibt also in W ein eindeutiges nächstes Element w zu v.

Sei x ein beliebiger Vektor in W. Für jedes $t \in \mathbf{R}$ ist nach Korollar 6.7 a)

$$\|v - w - tx\|^2 = \|v - w\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\Big(t\overline{\langle v - w, x\rangle}\Big) + |t|^2 \|x\|^2,$$

und nach der Wahl von w nimmt dieser Ausdruck seinen minimalen Wert bei $t = 0$ an. Dort verschwindet also die Ableitung nach t und wir erhalten

$$-2\,\mathrm{Re}\langle x, v - w\rangle = -2\,\mathrm{Re}\langle v - w, x\rangle = -2\,\mathrm{Re}\,\overline{\langle v - w, x\rangle} = 0$$

für jedes $x \in W$.

In anderen Worten, $\langle x, v - w\rangle$ ist rein imaginär für jedes $x \in W$. Weil das innere Produkt in der ersten Variablen linear ist, kann das aber nur der Fall sein, wenn $\langle x, v - w\rangle = 0$ für jedes $x \in W$. Also ist $v - w \in W^{\perp}$.

Umgekehrt, sei $u \in W$ und es sei $v - u \in W^\perp$. Dann gilt für jedes $x \neq 0 \in W$ nach Bemerkung 6.12 b), dass

$$\left\|v - (u - x)\right\|^2 = \|v - u + x\|^2 = \|v - u\|^2 + \|x\|^2 > \|v - u\|^2$$

und somit ist u das eindeutig bestimmte Element von W mit kleinstem Abstand zu v.

b): Um zu zeigen, dass H die direkte Summe von W und $W^\perp$ ist, müssen wir zeigen, dass jedes Element $v \in H$ die Summe eines Elementes $w \in W$ und eines Elementes $x \in W^\perp$ ist, und wir müssen zeigen, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Das Erste folgt aus Teil a), wenn wir für w das zu v nächste Element in W nehmen und $x := v - w$ setzen. Das Zweite folgt aus der Tatsache, dass für jedes Element $u \in W \cap W^\perp$ gilt

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 0 \qquad (\text{weil } u \in W \cap W^\perp \Rightarrow u \perp u),$$

also $u = 0$.

c): Offensichtlich ist $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Sei nun $v \in (W^\perp)^\perp$ und schreibe v als $w + x$ mit $w \in W$ und $x \in W^\perp$.

Weil $w \in (W^\perp)^\perp$ und $v \in (W^\perp)^\perp$, muss auch $x = v - w \in (W^\perp)^\perp$ sein, aber daraus folgt $x = 0$ weil $W^\perp \cap (W^\perp)^\perp = \{0\}$.

Das heißt, $(W^\perp)^\perp \subseteq W$ und wir haben die Gleichheit.

d): Offensichtlich ist $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Eine zweimalige Anwendung von Bemerkung 6.12 e) auf $M \subseteq W$ zeigt, dass

$$M \subseteq (M^\perp)^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp = W.$$

Als kleinste abgeschlossene Menge, die $\operatorname{Span} M$ enthält, ist W der kleinste abgeschlossene Untervektorraum, der M enthält, aber schon $(M^\perp)^\perp$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum. Deshalb ist

$$(M^\perp)^\perp = W.$$

Daraus folgt, mit Teil c) angewendet auf $M^\perp$, dass

$$W^\perp = \left((M^\perp)^\perp\right)^\perp = M^\perp.$$

■

Mit Hilfe des orthogonalen Komplements kann man also jeden abgeschlossenen Untervektorraum eines Hilbertraumes „abspalten", d.h. den Hilbertraum zerlegen als eine direkte Summe des gegebenen Untervektorraums mit einem geeigneten komplementären Unterraum. Diese Zerlegung lässt sich erheblich verfeinern.

Jeder Vektorraum V besitzt bekanntlich eine algebraische Basis, manchmal auch eine ***Hamel Basis*** genannt, also eine linear unabhängige Teilmenge, deren Spann ganz V ist. Das gilt auch für unendlichdimensionale Vektorräume, aber mit unendlichen Basen lässt sich nicht so bequem rechnen, wie im endlichdimensionalen Fall, und für die Banachräume und die anderen unendlichdimensionalen topologischen Vektorräume der Funktionalanalysis sind algebraische Basen nicht sehr nützlich, weil sie die Topologie nicht charakterisieren und kaum erfassen.

In Hilberträumen erlaubt aber die Orthogonalität, ***topologische Basen*** zu finden, mit denen man sehr ähnlich rechnen kann, wie in endlichdimensionalen algebraischen Vektorräumen (obwohl die meisten Vektoren nicht durch endliche, sondern durch „unendliche Linearkombinationen" von Basisvektoren dargestellt werden, die man als konvergente Reihen verstehen sollte). Diese Darstellung wollen wir als Nächstes beschreiben.

Definition 6.15 Sei V ein topologischer Vektorraum und sei M eine Teilmenge von V.

Die ***abgeschlossene lineare Hülle*** oder der ***abgeschlossene Spann*** von M ist definiert als der Untervektorraum

$$\overline{\langle M \rangle}$$

von V, also die abgeschlossene Hülle des von M erzeugten algebraischen Untervektorraums von V. Dies ist der kleinste *abgeschlossene* Untervektorraum von V, der M enthält.

Wir nennen M eine ***topologische Basis*** von V, wenn der abgeschlossene Spann von M ganz V ist und wenn keine echte Teilmenge von M diese Eigenschaft hat.

Korollar 6.16 *Sei H ein Hilbertraum und sei $M \subseteq H$.*

Sei $v \in H$. Genau dann gehört v zum abgeschlossenen Spann von M, wenn $v \perp M^{\perp}$.

Beweis. Sei W der abgeschlossene Spann von M. Nach Lemma 6.14 d) ist $(M^{\perp})^{\perp} = W$. Also ist $v \in W$ genau dann, wenn $v \in (M^{\perp})^{\perp}$, also wenn $v \perp M^{\perp}$. ∎

Definition 6.17 Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$, ein Innenproduktraum und sei $M \subseteq V$.

Wir nennen M eine ***orthogonale Menge***, wenn je zwei verschiedene Vektoren aus M zueinander orthogonal sind.

Wir nennen M eine ***orthonormale Menge***, wenn M eine orthogonale Menge ist und wenn für jeden Vektor $w \in M$ gilt $\|w\| = 1$.

Wir nennen M eine ***orthonormale Basis*** von V, wenn M eine orthonormale Menge ist und wenn der abgeschlossene Spann von M ganz V ist.

Lemma 6.18 *Sei* $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$, *ein Innenproduktraum.*

a) *Sei $M \subseteq V$ eine orthogonale Menge, die den Vektor 0 nicht enthält (man beachte, dass keine* orthonormale *Menge die 0 enthalten kann).*

   Kein Vektor $w \in M$ gehört zum abgeschlossenen Spann der restlichen Vektoren, also der Menge $M' := M \setminus \{\, w \,\}$.

b) *Jede orthogonale Teilmenge $M \subseteq V$, die den Vektor 0 nicht enthält, ist linear unabhängig.*

   Insbesondere ist jede orthonormale Teilmenge von V linear unabhängig.

c) *Jede orthonormale Basis von V ist eine topologische Basis.*

Beweis. a): Sei $w \in M$. Dann ist $w \neq 0$.

Weil M orthogonal ist, ist $w \in M'^{\perp}$, aber der abgeschlossene Spann von M' ist $\left(M'^{\perp}\right)^{\perp}$ nach Lemma 6.14 c). In dieser Menge kann w nicht liegen, weil sonst $w \perp w$, also $\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = 0$, in Widerspruch dazu, dass $w \neq 0$.

b): Wenn M linear abhängig ist, gibt es einen Vektor in M, der eine Linearkombination der anderen Vektoren aus M ist. Das kann nach Teil a) nicht passieren.

c): Nach der Definition hat eine orthonormalen Basis M ganz V als ihren abgeschlossenen Spann, aber der abgeschlossene Spann einer echten Teilmenge N von M kann nach Teil a) keinen Vektor aus $M \setminus N$ enthalten, und somit nicht ganz V sein. ■

Lemma 6.19 *Sei V ein Innenproduktraum und sei M eine orthonormale Teilmenge von V. Sei $v \in V$ und für jedes $w \in M$ sei*

$$a_w := \langle v, w\rangle.$$

*Dann sind nur abzählbar viele der $a_w \neq 0$ und es gilt die **Besselsche Ungleichung***

$$\sum_{w \in M} |a_w|^2 \leq \|v\|^2 . \tag{6.19}$$

Beweis. Sei E eine *endliche* Teilmenge von M und sei

$$u := \sum_{w \in E} a_w w.$$

Nach der Definition der a_w gilt

$$\langle v, u \rangle = \sum_{w \in E} \langle v, a_w w \rangle = \sum_{w \in E} \overline{a_w} \langle v, w \rangle = \sum_{w \in E} \overline{a_w} a_w = \sum_{w \in E} |a_w|^2 .$$

Weil M orthonormal ist, folgt sofort aus einer wiederholten Anwendung von Bemerkung 6.12 b), dass

$$\|u\|^2 = \left\| \sum_{w \in E} a_w w \right\|^2 = \sum_{w \in E} \|a_w w\|^2 = \sum_{w \in E} |a_w|^2 \|w\|^2 = \sum_{w \in E} |a_w|^2 .$$

Aus Gleichung (6.7) mit $\lambda = -1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|v\|^2 - 2 \operatorname{Re} \overline{\langle v, u \rangle} + \|u\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2 \sum_{w \in E} |a_w|^2 + \sum_{w \in E} |a_w|^2 = \|v\|^2 - \sum_{w \in E} |a_w|^2 , \end{aligned}$$

und weil dies nichtnegativ ist, ist jede endliche Summe $\sum_{w \in E} |a_w|^2$ durch $\|v\|^2$ beschränkt.

Daraus folgt, dass nur abzählbar viele a_w ungleich 0 sind, denn sonst gibt es ein $n \geq 1 \in \mathbf{N}$, so dass überabzählbar viele $|a_w| > 1/n$, und dann können die endlichen Summen $\sum_{w \in E} |a_w|^2$ nicht beschränkt sein.

Weil nur abzählbar viele $a_w \neq 0$ sind, ist die Gesamtsumme $\sum_{w \in M} |a_w|^2$ als Reihensumme definiert, und es ist

$$\sum_{w \in M} |a_w|^2 \leq \|v\|^2 ,$$

weil diese Schranke für jede endliche Teilsumme gilt. ∎

Satz 6.20 *Sei H ein Hilbertraum und sei B eine orthonormale Basis von H.*

Für jedes $w \in B$ sei eine Zahl $a_w \in \mathbf{K}$ gegeben, so dass nur abzählbar viele der $a_w \neq 0$ sind. Genau dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{w \in B} a_w w \tag{6.20}$$

in der Norm von H, wenn die Reihe

$$\sum_{w \in B} |a_w|^2 \tag{6.21}$$

in $\mathbf{K}$ konvergiert.

Jeder Vektor $v \in H$ hat eine eindeutig bestimmte Darstellung als eine in der Norm konvergenten Reihe der Gestalt

$$v = \sum_{w \in B} a_w w \tag{6.22}$$

wo $a_w \in \mathbf{K}$ und nur abzählbar viele $a_w \neq 0$.

Diese Reihe heißt die ***Fourierreihe*** *von v in der orthonormalen Basis B, und die Koeffizienten a_w heißen die* ***Fourierkoeffizienten*** *von v bezüglich der orthonormalen Basis B.*

Die a_w sind gegeben durch

$$a_w := \langle v, w \rangle. \tag{6.23}$$

Für jedes $u \in H$ ist

$$\langle v, u \rangle = \sum_{w \in B} a_w \langle w, u \rangle. \tag{6.24}$$

Diese Reihe konvergiert absolut in $\mathbf{K}$.

Auch u hat eine Darstellung (6.22) mit Fourierkoeffizienten b_w, und das innere Produkt von v mit u berechnet sich auch als

$$\langle v, u \rangle = \sum_{w \in B} a_w \overline{b_w}, \tag{6.25}$$

und die Reihe konvergiert absolut in $\mathbf{K}$.

Als Spezialfall dieser Aussagen konvergiert die Reihe (6.21) gegen $\|v\|^2$.

Beweis. Ist E eine endliche Teilmenge von B, dann ist E orthonormal und es folgt aus einer wiederholten Anwendung von Bemerkung 6.12 b), dass

$$\left\| \sum_{w \in E} a_w w \right\|^2 = \sum_{w \in E} \|a_w w\|^2 = \sum_{w \in E} |a_w|^2 \|w\|^2 = \sum_{w \in E} |a_w|^2 .$$

Daraus folgt aber, bei jeder Anordnung der abzählbar vielen Summanden, die nicht 0 sind, dass die Reihe $\sum_{w \in B} a_w w$ genau dann in der Norm von H Cauchy ist, wenn die Reihe $\sum_{w \in B} |a_w|^2$ in $\mathbf{K}$ Cauchy ist.

Also konvergiert die eine Reihe genau dann, wenn die andere konvergiert. Das beweist die erste Behauptung.

Nun sei $v \in H$ und wir nehmen zunächst an, v hat eine Darstellung (6.22) als Summe einer konvergenten Reihe der Gestalt (6.20) für gewisse Koeffizienten a_w, von denen nur abzählbar viele ungleich 0 sind.

Gleichung (6.24) gilt für jede endliche Teilsumme der Reihe $\sum_{w\in B} a_w w$, weil das innere Produkt in der ersten Variablen linear ist, und für die ganze Summe, weil das innere Produkt stetig ist.

Wenn $u := w' \in B$, dann folgt aus Gleichung (6.24), dass

$$\langle v, w'\rangle = \sum_{w\in B} a_w \langle w, w'\rangle = a_{w'},$$

d.h., die a_w erfüllen tatsächlich (6.23).

Wenn u eine Darstellung (6.22) mit Fourierkoeffizienten b_w hat, dann folgt aus (6.23), dass

$$\langle w, u\rangle = \overline{\langle u, w\rangle} = \overline{b_w}$$

für jedes w, und durch Einsetzen in jeden Summanden von (6.24) erhalten wir Gleichung (6.25); die Reihe hier ist also die gleiche Reihe wie in (6.24).

Für jedes $w \in W$ gilt in $\mathbf{K}$ die Abschätzung

$$\left|a_w \overline{b_w}\right| \le |a_w|\,|b_w| \le \max\bigl(|a_w|^2, |b_w|^2\bigr) \le |a_w|^2 + |b_w|^2 .$$

Wir wissen, dass die einzelnen Reihen $\sum |a_w|^2$ und $\sum |b_w|^2$ in $\mathbf{K}$ konvergieren, und somit auch ihre Summe.

Diese majorisiert die Reihe $\sum \left|a_w \overline{b_w}\right|$, die deshalb konvergiert. Das besagt, dass die Reihe (6.25) absolut konvergiert, wie natürlich dann auch die Reihe (6.24), die ja die gleiche Reihe ist.

Mit $u = v$ erhalten wir aus Gleichung (6.25), dass

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \sum_{w\in B} a_w \overline{a_w} = \sum_{w\in B} |a_w|^2 ,$$

wie behauptet.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass jedes $v \in V$ tatsächlich eine Darstellung (6.22) hat.

Dazu definiere man die Koeffizienten a_w nach Gleichung (6.23). Aus Lemma 6.19 folgt, dass nur abzählbar viele $a_w \neq 0$ sind, und dass die Reihe (6.21) durch $\|v\|^2$ beschränkt ist und aus diesem Grund konvergiert.

Deshalb konvergiert auch die Reihe (6.20), gegen einen Vektor $v' \in V$. Aber wir haben schon gesehen, dass auch $\langle v', w\rangle = a_w = \langle v, w\rangle$ für jedes $w \in B$, und deshalb ist $\langle v - v', w\rangle = 0$ für jedes $w \in B$ und $v - v' \in B^\perp$.

Weil B eine orthonormale Basis von V ist, ist der abgeschlossene Spann von B gleich V, und nach Lemma 6.14 c) ist $B^\perp = V^\perp = \{ 0 \}$.

Also ist $v = v'$ und v hat eine Darstellung (6.22). ∎

Wenn ein Hilbertaum H eine *abzählbare* orthonormale Basis besitzt, dann besagt Satz 6.20 unter anderem, dass die Koeffizienten a_w der Reihendarstellung (6.22) eines Vektors v quadratsummabel sind und somit eine Folge aus ℓ^2 bilden; man kann sogar sehr leicht zeigen, dass H dann isomorph zu ℓ^2 ist. Wie schon erwähnt wurde, waren ℓ^2 und allgemeiner die L^2 Räume die einzigen Hilberträume, die Hilbert selber betrachtet hat.

Mit Hilfe der Darstellung (6.22) kann man in einem Hilbertraum sehr bequem rechnen, sofern man eine orthonormale Basis kennt. Deshalb ist es wichtig zu wissen, dass man immer eine orthonormale Basis finden kann.

Satz 6.21 *Jeder Hilbertraum H besitzt eine orthonormale Basis.*

Genauer: ist $M \subseteq H$ eine orthonormale Menge, so besitzt H eine orthonormale Basis $B \supseteq M$.

Beweis. Wir beweisen die „genauere" Aussage. Da es immer orthonormale Teilmengen gibt (zum Beispiel die leere Menge), folgt aus der „genaueren" Aussage auch die allgemeine Existenz von orthonormalen Basen.

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas kann man sehr leicht zeigen, dass H eine maximale orthonormale Teilmenge $B \supseteq M$ besitzt.

Wenn $\mathcal{T}$ eine durch die Mengeninklusion total geordnete Familie von orthonormalen Mengen $N \supseteq M$ ist, dann ist

$$S := \bigcup_{N \in \mathcal{T}} N$$

offensichtlich auch orthonormal (jeder Vektor in S hat Norm 1, und weil $\mathcal{T}$ total geordnet ist liegen je zwei verschiedene Vektoren aus S in einer gemeinsamen Menge N aus $\mathcal{T}$ und sind deshalb orthogonal zueinander) und enthält M.

S ist eine obere Schranke zu $\mathcal{T}$ in der Familie aller orthonormalen Obermengen von M. Weil jede total geordnete solche Familie eine obere Schranke besitzt, gibt es nach dem Zornschen Lemma eine maximale orthonormale Teilmenge $B \supseteq M$.

Sei W der abgeschlossene Spann von B. Um zu zeigen, dass B eine orthonormale Basis für V ist, müssen wir nur beweisen, dass $W = V$.

Weil B eine maximale orthonormale Menge um M ist, gilt $W^\perp = \{ 0 \}$.

Denn wenn es Vektoren $\neq 0$ in $W^\perp$ gibt, dann gibt es auch einen Vektor v von Norm 1 in $W^\perp \subseteq B^\perp$. Die Menge $B' = B \cup \{ v \}$ ist dann orthonormal und ist eine echte Obermenge von B (da offensichtlich $v \notin B$, weil $v \in B^\perp$) und natürlich auch eine Obermenge von M. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von B.

Nach Lemma 6.14 c) und Bemerkung 6.12 c) ist

$$W = (W^\perp)^\perp = \{ 0 \}^\perp = V,$$

wie wir zeigen wollten.

B ist also eine orthonormale Basis. ■

Kapitel 7

Lineare Abbildungen auf Hilberträumen

In Kapitel 6 haben wir die Grundstruktur der Hilberträume kennen gelernt und gesehen, wie leicht diese Struktur sich mit Hilfe des Orthogonalitätsbegriffs zerlegen und analysieren lässt, bis hin zu der ausführlichen Beschreibung der algebraischen und topologischen Zusammenhänge zwischen den Elementen durch die Fourierreihenzerlegung bezüglich einer orthonormalen Basis.

Aber ein wichtiges Thema, eigentlich das wichtigste Thema, haben wir uns aufgespart: die Untersuchung und Beschreibung der stetigen linearen Abbildungen auf einem Hilbertraum.

Die Struktur der linearen Abbildungen auf Hilberträumen ist viel durchsichtiger als für andere Banachräume und das innere Produkt bietet eine wesentliche Hilfe bei der Konstruktion und der Beschreibung und Klassifizierung stetiger linearer Abbildungen.

Die Beziehung zwischen linearen Funktionalen und dem inneren Produkt ist offensichtlich, da das innere Produkt zumindest in der ersten Variablen linear ist, und in der zweiten „fast" linear. Somit ist die Nützlichkeit des inneren Produkts bei der Erfassung linearer Funktionale nicht weiter überraschend, zumal wir schon in Kapitel 4 erlebt haben, dass die Paarung zwischen L^p Räumen komplementärer Indizes benutzt werden konnte, um jeden der gepaarten Räume mit dem Dualraum des anderen zu identifizieren. Ein Hilbertraum H wird durch das innere Produkt *mit sich selber* gepaart, und wie erwartet ist jeder Hilbertraum zumindest reell isomorph zu seinem eigenen Dualraum.

Wenn $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ klappt alles perfekt, weil das innere Produkt dann wirklich bilinear ist, aber im komplexen Fall ist das innere Produkt nur *sesquilinear* und nicht wirklich linear, und das erfordert an anderer Stelle eine kleine

Korrektur, die aber leicht zu handhaben ist und die wir gleich vorwegnehmen möchten.

Definition 7.1 Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{C}$. Wir definieren einen neuen $\mathbf{C}$-Vektorraum $\overline{V}$ durch die Angaben, dass

$$\overline{V} := V \qquad \text{als Menge und additive Gruppe,}$$

aber diese Vektorräume unterscheiden sich in der Art, wie Vektoren mit Skalaren multipliziert werden: für jedes $v \in V = \overline{V}$ und für jedes $a \in \mathbf{C}$ ist

$$av \in \overline{V} := \bar{a}v \in V. \tag{7.1}$$

Diese Definition können wir wörtlich anwenden auch für reelle Vektorräume, aber in diesem Fall ist $\overline{V}$ einfach der gleiche Vektorraum, wie V.

Definition 7.2 Seien V und W Vektorräume über $\mathbf{C}$. Eine Abbildung

$$\alpha\colon V \longrightarrow W$$

heißt ***antilinear*** oder ***schieflinear***, wenn sie reell-linear ist und wenn für jedes $v \in V$ und für jedes $a \in \mathbf{C}$ gilt

$$\alpha(av) = \bar{a}\alpha(v) \in W. \tag{7.2}$$

Diesen Begriff kann man mit der gleichen Definition auch auf reelle Vektorräume anwenden, aber für diese Räume unterscheidet er sich nicht von der Linearität.

Bemerkung 7.3 Seien U, V und W Vektorräume über $\mathbf{C}$.

a) Die Identitätsabbildung der Menge V ist eine *antilineare* Abbildung

$$\mathrm{id}\colon V \longrightarrow \overline{V}.$$

b) Es gilt $\overline{\overline{V}} = V$.

c) Seien $\beta\colon U \longrightarrow V$ und $\alpha\colon V \longrightarrow W$ Abbildungen, von denen jede entweder $\mathbf{C}$-linear oder $\mathbf{C}$-antilinear ist.

   Dann ist
$$\alpha \circ \beta\colon U \longrightarrow W$$
   linear, wenn α und β beide linear oder beide antilinear sind, und $\alpha \circ \beta$ ist antilinear, wenn eine der Abbildungen α und β linear und die andere antilinear ist.

d) Sei $\alpha\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung. Folgende drei Bedingungen sind äquivalent.

i) α ist antilinear.

ii) Als Abbildung $\overline{V} \longrightarrow W$ ist α linear über $\mathbf{C}$.

iii) Als Abbildung $V \longrightarrow \overline{W}$ ist α linear über $\mathbf{C}$.

Wir interessieren uns natürlich deshalb für antilineare Abbildungen, weil sie in Verbindung mit sesquilinearen Formen auftreten.

Bemerkung 7.4 Sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\| \ \|$.
Sei W ein weiterer normierter Vektorraum.

a) Die Norm ordnet jedem Element $v \in V$ einen nichtnegativen reellen Wert $\|v\|$ zu, und weil $\overline{V}$ die gleichen Elemente wie V hat, können wir $\| \ \|$ auch als eine Funktion auf $\overline{V}$ auffassen.

Auch auf $\overline{V}$ ist $\| \ \|$ eine Norm. Da V und $\overline{V}$ sich nur in der Multiplikation mit Skalaren unterscheiden, müssen wir nur Bedingung 1.28 b) nachprüfen (weil die anderen beiden definierenden Eigenschaften einer Norm automatisch gelten), und Bedingung 1.28 b) gilt für jedes $v \in \overline{V} = V$ und jedes $a \in \mathbf{K}$, weil

$$\|av\|_{\overline{V}} := \|\bar{a}v\|_V = |\bar{a}|\,\|v\|_V = |a|\,\|v\|_{\overline{V}}\,.$$

Weil die Additionen von V und $\overline{V}$ gleich sind, ist die Normmetrik auf $\overline{V}$ gleich der Normmetrik auf V, d.h., V und $\overline{V}$ sind nicht nur als Mengen, sondern auch als metrische Räume gleich.

Folglich ist auch die metrische Topologie in beiden Fällen die gleiche.

Natürlich hat $\overline{V}$ dann die gleichen metrischen Eigenschaften wie V. Zum Beispiel, wenn V ein Banachraum ist, dann ist auch $\overline{V}$ ein Banachraum.

b) Aus a) folgt, dass die Identität, aufgefasst als antilineare Abbildung $\mathrm{id}\colon \overline{V} \longrightarrow V$ (oder umgekehrt), normerhaltend und somit eine Isometrie ist, und topologieerhaltend und somit ein Homöomorphismus ist.

Weil nach Bemerkung 7.3 c) die Verknüpfung mit dieser Abbildung jede antilineare Abbildung $\alpha\colon V \longrightarrow W$ in eine lineare Abbildung $\alpha'\colon \overline{V} \longrightarrow W$ verwandelt und umgekehrt, ist es klar, dass die antilineare Abbildung α genau dann eine Isometrie ist, wenn α' eine ist.

Viel wichtiger ist aber, dass α genau dann stetig ist, wenn α' stetig ist, also genau dann wenn α' beschränkt ist, was wegen der Gleichheit der Normen gleichbedeutend damit ist, dass α beschränkt ist.

Man kann die Operatornorm von α genau so definieren wie die Operatornorm von α', und wieder weil die Normen auf $\overline{V}$ und V gleich sind ist die Operatornorm von α dann gleich der Operatornorm von α' und kann nach den gleichen Methoden, zum Beispiel mit Lemma 1.33 a), berechnet werden.

c) Wenn V ein Innenproduktraum ist, mit einem inneren Produkt $\langle\ ,\ \rangle$, das die Norm induziert, so ist zwar $\langle\ ,\ \rangle$ selber im Allgemeinen *kein* inneres Produkt auf $\overline{V}$, aber die Funktion $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ gegeben durch

$$\langle\langle v, w\rangle\rangle := \langle w, v\rangle$$

ist eins. Denn für jeden Skalar a gilt

$$\langle\langle av \in \overline{V}, w\rangle\rangle = \langle w, \bar{a}v \in V\rangle = a\langle w, v\rangle = a\langle\langle v, w\rangle\rangle$$

und

$$\langle\langle v, aw \in \overline{V}\rangle\rangle = \langle \bar{a}w \in V, v\rangle = \bar{a}\langle w, v\rangle = \bar{a}\langle\langle v, w\rangle\rangle.$$

Dass $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ die anderen Eigenschaften eines inneren Produkts erfüllt ist offensichtlich.

Natürlich erzeugt $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ die gleiche Norm, wie $\langle\ ,\ \rangle$, also die Norm $\|\ \|$, die auch die Norm von $\overline{V}$ ist.

Satz und Definition 7.5 (Rieszscher Darstellungssatz, Hilbertraum Version) *Sei H ein Hilbertraum. Für jeden Vektor $w \in H$ definieren wir eine Abbildung*

$$\rho_w\colon H \longrightarrow \mathbf{K}$$

durch die Vorschrift

$$\rho_w(v) := \langle v, w\rangle \qquad \text{für alle } v \in H. \tag{7.3}$$

Für jedes $w \in W$ ist ρ_w eine stetige lineare Abbildung, also ein lineares Funktional in H^*.

Die Zuordnung

$$\begin{aligned} j\colon H &\longrightarrow H^* \\ w &\longmapsto \rho_w \end{aligned} \tag{7.4}$$

ist ein isometrischer Antiisomorphismus (also ein antilinearer Isomorphismus) von H nach H^*.

Das kann man auch so sagen: die Abbildung j ist ein isometrischer Isomorphismus $\overline{H} \longrightarrow H^*$.

Beweis. Für jedes $w \in W$ ist ρ_w linear, weil die Sesquilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ in der ersten Variablen linear ist, und ρ_w ist stetig weil $\langle\ ,\ \rangle$ in beiden Variablen stetig ist. Also gehört ρ_w tatsächlich zu H^*.

Die Abbildung j ist antilinear, weil die Sesquilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ in der zweiten Variablen antilinear ist.

Wir zeigen, dass j eine Isometrie ist. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir für jeden Vektor $v \in H$ und für jeden Vektor $w \in H$, dass

$$\Big|\big(j(w)\big)(v)\Big| = \big|\rho_w(v)\big| = \big|\langle v, w\rangle\big| \leq \|v\|\,\|w\|\,. \tag{7.5}$$

Das heißt, $\|w\|$ ist eine Schranke für die lineare Abbildung ρ_w und es folgt $\|\rho_w\| \leq \|w\|$.

In Wirklichkeit gilt aber die Gleichheit. Das ist klar wenn $w = 0$, weil dann $\rho_w = 0$. Wenn $w \neq 0$ so können wir als Testvektor $v = w$ in (7.5) einsetzen und finden

$$\big|\rho_w(w)\big| = \big|\langle w, w\rangle\big| = \|w\|^2 \neq 0,$$

woraus folgt $\|\rho_w\| \geq \|w\|$, so dass die Gleichheit gilt.

Aber $\rho_w = j(w)$ und wir haben somit gezeigt, dass

$$\big\|j(w)\big\| = \|w\|$$

für jedes $w \in H$.

In anderen Worten, j ist eine Isometrie.

Aus Bemerkung 7.4 b) ist klar, dass j eine stetige antilineare Abbildung ist, und weil diese Abbildung normerhaltend ist, ist sie injektiv.

Zum Schluss zeigen wir noch, dass j surjektiv ist. Dazu wählen wir im Einklang mit Satz 6.21 eine orthonormale Basis B für H.

Sei $\alpha \in H^*$ und für jedes $w \in B$ setze

$$a_w := \overline{\alpha(w)} \in \mathbf{K}.$$

Wir behaupten, dass nur abzählbar viele der $a_w \neq 0$ sind und dass

$$\sum_{w \in B} |a_w|^2 < \infty.$$

Der Beweis ähnelt dem Beweis der Besselschen Ungleichung in Lemma 6.19. Sei E eine endliche Teilmenge von B und sei

$$u := \sum_{w \in E} a_w w.$$

Aus der pythagoreischen Gleichung (6.18), oder aus einer Anwendung der letzten Aussage in Satz 6.20 auf die endliche Linearkombination u erhalten wir, dass

$$\|u\|^2 = \sum_{w \in E} |a_w|^2 .$$

Nach der Definition der a_w gilt aber

$$\alpha(u) = \sum_{w \in E} a_w \alpha(w) = \sum_{w \in E} a_w \overline{a_w} = \sum_{w \in E} |a_w|^2 .$$

Weil α stetig ist, haben wir

$$\|u\|^2 = \big\|\alpha(u)\big\| \leq \|\alpha\| \, \|u\| ,$$

woraus folgt

$$\|u\| \leq \|\alpha\|$$

wenn $\|u\| \neq 0$ (und natürlich auch wenn $\|u\| = 0$).

Diese Ungleichung können wir auch quadrieren und wir erhalten

$$\sum_{w \in E} |a_w|^2 = \|u\|^2 \leq \|\alpha\|^2$$

für jede endliche Teilmenge $E \subseteq B$.

Daraus folgt, dass nur abzählbar viele a_w ungleich 0 sind, und dass

$$\sum_{w \in B} |a_w|^2 \leq \|\alpha\|^2 < \infty.$$

Nach Satz 6.20 konvergiert die Reihe

$$\sum_{w \in E} a_w w$$

gegen einen Vektor $v \in H$.

Nun sei u ein beliebiger Vektor aus H und man schreibe u als eine Fourierreihe

$$u = \sum_{w \in B} b_w w.$$

Weil α stetig und linear ist, finden wir (unter Verwendung der Berechnung von $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ aus Satz 6.20), dass

$$\alpha(u) = \sum_{w\in B} b_w \alpha(w) = \sum_{w\in B} b_w \overline{a_w} \overset{(6.25)}{=} \langle u, v\rangle = \rho_v(u).$$

Das heißt, $\alpha = \rho_v = j(v)$ und j ist surjektiv.

Somit ist j bijektiv, und weil j eine Isometrie ist, ist auch die Umkehrabbildung j^{-1} stetig.

Sie ist linear als Abbildung $H^* \longrightarrow \overline{H}$ und somit antilinear als Abbildung $H^* \longrightarrow H$. Also ist j ein antilinearer isometrischer Isomorphismus. ■

Bemerkung 7.6 Nur beim Beweis der Surjektivität von j in Satz 7.5 haben wir wirklich die Vollständigkeit des Hilbertraumes H benutzt.

Die restliche Aussage, nämlich dass die Abbildung j eine wohldefinierte antilineare Isometrie $H \longrightarrow H^*$ ist, gilt in jedem Innenproduktraum H.

Korollar 7.7 *Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

Beweis. Sei H ein Hilbertraum und sei $i\colon H \longrightarrow H^{**}$ die kanonische Abbildung.

Sei $j\colon H \longrightarrow H^*$ der in Satz und Definition 7.5 definierte isometrische Antiisomorphismus zwischen H und seinem Dualraum. Wir bezeichnen mit $\bar{\jmath}$ die gleiche Abbildung, betrachtet als einen richtig linearen Isomorphismus $\overline{H} \longrightarrow H^*$.

Entsprechend, sei $j'\colon \overline{H} \longrightarrow \overline{H}^*$ der isometrische Antiisomorphismus zwischen dem Hilbertraum $\overline{H}$ und seinem Dualraum, und sei $\bar{\jmath}'$ die gleiche Abbildung, betrachtet als Isomorphismus $H \longrightarrow \overline{H}^*$. Man beachte, dass $\overline{H}$ das innere Produkt $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ aus Bemerkung 7.4 c) trägt.

Sei $f \in H^{**}$. Dann ist $f \circ \bar{\jmath}$ eine stetige lineare Abbildung $\overline{H} \longrightarrow \mathbf{K}$, also ein Element von $\overline{H}^*$, und es gibt einen Vektor $v \in H = \overline{H}$ mit

$$f \circ \bar{\jmath} = \bar{\jmath}'(v) = j'(v).$$

Wir behaupten, dass $f = i(v)$. Dazu sei $\alpha \in H^*$ und sei w das eindeutig bestimmte Element von $\overline{H} = H$ mit $\alpha = \bar{\jmath}(w) = j(w)$.

Es ist

$$\begin{aligned} f(\alpha) = (f\circ\bar{\jmath})(w) &= \big(\bar{\jmath}'(v)\big)(w) = \big(j'(v)\big)(w) \\ &= \langle\!\langle w, v\rangle\!\rangle = \langle v, w\rangle = \big(j(w)\big)(v) = \alpha(v) = \big(i(v)\big)(\alpha), \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

Wir haben damit bewiesen, dass i surjektiv ist. Also ist H reflexiv. ■

Korollar 7.8 *Der Dualraum H^* eines Hilbertraumes H ist auch ein Hilbertraum.*

Wenn $j\colon H \longrightarrow H^*$ der in Definition 7.5 konstruierte isometrische Antiisomorphismus ist, ist das innere Produkt $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ von H^* eindeutig bestimmt durch die Beziehung

$$\langle\!\langle j(v), j(w)\rangle\!\rangle = \langle w, v\rangle \tag{7.6}$$

für v und $w \in H$.

Ferner, $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ ist das einzige innere Produkt auf H^*, dessen Norm die Operatornorm ist.

Beweis. Sei $j\colon H \longrightarrow H^*$ die Abbildung aus Satz und Definition 7.5. Weil j eine bijektive reell-lineare normerhaltende Abbildung ist, erhält j die Parallelogrammgleichung (6.10), die in H gilt, weil H ein Innenproduktraum ist, und die somit auch in $j(H) = H^*$ mit der Operatornorm gilt.

Also kommt die Operatornorm von H^* nach Satz 6.8 von einem eindeutig bestimmten inneren Produkt auf H^*.

Weil j antilinear und surjektiv ist, ist es leicht zu prüfen, dass die eindeutige Funktion $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$, die Gleichung (7.6) erfüllt, ein inneres Produkt auf H^* ist, und weil j eine Isometrie ist, ist die Norm dieses inneren Produkts die vorgegebene Norm von H^*, d.h., die Operatornorm.

Nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 6.8 kann kein anderes inneres Produkt die Operatornorm definieren.

Das innere Produkt $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ macht H^* zu einem Hilbertraum, weil H^*, wie jeder Dualraum, ein Banachraum ist und eine vollständige Operatornorm hat. ∎

Nachdem wir mit Hilfe des inneren Produkts eine schöne Beschreibung des Dualraums eines Hilbertraumes gewinnen konnten, wenden wir unsere Aufmerksamkeit jetzt den stetigen linearen Abbildungen zwischen zwei Hilberträumen. Auch dabei stellt sich das innere Produkt als sehr hilfreich heraus.

Lemma und Definition 7.9 *Seien $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ und $\big(K, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\big)$ zwei Hilberträume, und sei $T \in L(H,K)$.*

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung

$$T^t\colon K \longrightarrow H,$$

*genannt die **adjungierte Abbildung** zu T, so dass*

$$\langle\!\langle T(v), w\rangle\!\rangle = \langle v, T^t(w)\rangle \tag{7.7}$$

für jedes $v \in H$ und jedes $w \in K$.

Sind $j_H\colon H \longrightarrow H^*$ und $j_K\colon K \longrightarrow K^*$ die isometrischen Antiisomorphismen aus Satz und Definition 7.5, so ist

$$T^t = j_H^{-1} \circ T^* \circ j_K. \tag{7.8}$$

Das heißt, die adjungierte Abbildung entspricht vermöge dieser Antiisomorphismen dem von T induzierten dualen Operator $T^*\colon K^* \longrightarrow H^*$.

Beweis. Nach Satz und Definition 7.5 bestimmt jeder Vektor $w \in K$ nach Formel (7.3) ein stetiges lineares Funktional $\rho_w^K = j_K(w) \in K^*$ mit

$$\rho_w^K(x) = \langle\!\langle x, w \rangle\!\rangle$$

für jedes $x \in K$, und die linke Seite von Gleichung (7.7) hat den Wert $\rho_w^K\big(T(v)\big) = (\rho_w^K \circ T)(v)$ und ist somit stetig und linear in v.

Die Verknüpfung $\rho_w^K \circ T = T^*(\rho_w^K)$ gehört zu H^* und es gibt nach Satz 7.5 einen *eindeutig bestimmten* Vektor $u \in H$, so dass

$$\rho_w^K \circ T = \rho_u^H = j_H(u). \tag{7.9}$$

Wir setzen

$$T^t(w) := u.$$

Dieser Wert erfüllt Gleichung (7.7) für jedes $v \in H$ und ist der einzige Wert, der das leistet.

Unter Berücksichtigung dieser Definition kann man Gleichung (7.9) umschreiben als

$$j_K(w) \circ T = j_H\big(T^t(w)\big) \qquad \text{oder} \qquad T^* \circ j_K = j_H \circ T^t.$$

Weil j_H umkehrbar ist, können wir die letzte Gleichung auflösen als

$$T^t = j_H^{-1} \circ T^* \circ j_K,$$

womit (7.8) bewiesen ist, und wir sehen daraus, dass T^t als Verknüpfung von zwei antilinearen und einer linearen Abbildung nach Bemerkung 7.3 c) eine lineare Abbildung $K \longrightarrow H$ ist, und als Verknüpfung von drei stetigen Abbildungen auch stetig ist. ■

Bemerkung 7.10 Seien G, H, und K Hilberträume über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Seien S und $T \in L(H, K)$ und $U \in L(G, H)$.

Es gilt

a) $(\mathrm{id}_H)^t = \mathrm{id}_H$.

b) $(S+T)^t = S^t + T^t$.

c) Für jeden Skalar $a \in \mathbf{K}$ ist $(aT)^t = \bar{a}T^t$.

d) $(T \circ U)^t = U^t \circ T^t$.

e) Für jedes $v \in H$ und $w \in K$ ist

$$\langle T^t(w), v\rangle = \langle\!\langle w, T(v)\rangle\!\rangle \tag{7.10}$$

(wo $\langle\ ,\ \rangle$ das innere Produkt von H ist und $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ das innere Produkt von K).

f) $(T^t)^t = T$.

g) Wenn T ein Isomorphismus ist, d.h., wenn T bijektiv ist und wenn T^{-1} stetig ist, dann ist auch T^t ein Isomorphismus mit

$$(T^t)^{-1} = (T^{-1})^t.$$

Beweis. a) ist trivial, und b) und c) rechnet man mit Gleichung (7.7), die die adjungierte Abbildung eindeutig bestimmt, unter Verwendung der Grundeigenschaften von Sesquilinearformen sofort nach. Auch d) kann man mit Gleichung (7.7) direkt nachrechnen.

e) folgt sofort aus (7.7) durch Vertauschen der Faktoren in den inneren Produkten; dadurch werden die Werte nur konjugiert und die Gleichung bleibt richtig.

f) folgt sofort aus (7.10), welches besagt, dass T die definierende Bedingung für $(T^t)^t$ erfüllt.

g) ist eine leichte Konsequenz aus d) und a). ■

Lemma 7.11 *Seien $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ und $\big(K, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\big)$ zwei Hilberträume, und sei $T \in L(H,K)$.*

Dann ist

$$\|T\| = \sup\Big\{\, |\langle\!\langle T(v), w\rangle\!\rangle| \;\Big|\; v \in H,\ w \in K,\ \|v\| \le 1,\ \|w\| \le 1 \Big\} \tag{7.11a}$$

$$= \sup\Big\{\, |\langle\!\langle T(v), w\rangle\!\rangle| \;\Big|\; v \in H,\ w \in K,\ \|v\| = \|w\| = 1 \Big\} \tag{7.11b}$$

(wenn $H \ne \{\,0\,\} \ne K$).

Beweis. Wenn H oder $K = \{0\}$, dann ist $T = \mathbf{0}$, nur (7.11a) ist relevant, und beide Seiten dieser Zeile sind 0, so dass die Gleichung gilt.

Wir können also annehmen, dass weder H noch $K = \{0\}$ ist. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 1.33 b) haben wir für jeden Vektor $v \in H$ mit $\|v\| \leq 1$ und jeden Vektor $w \in K$ mit $\|w\| \leq 1$, dass

$$\bigl|\langle\!\langle T(v), w\rangle\!\rangle\bigr| \leq \bigl\|T(v)\bigr\| \, \|w\| \leq \|T\| \, \|v\| \, \|w\| \leq \|T\| \, .$$

Also sind die rechten Seiten von beiden Gleichungen (7.11) höchstens $\|T\|$, und weil die rechte Seite von (7.11a) (als Supremum über eine größere Menge von Zahlen) mindestens so groß ist, wie die rechte Seite von (7.11b), reicht es zu zeigen, dass in (7.11b) die Gleichheit gilt.

Nach Lemma 1.33 a) ist

$$\|T\| = \sup\Bigl\{ \bigl\|T(v)\bigr\| \Bigm| v \in H, \ \|v\| = 1 \Bigr\}$$

und nach Korollar 6.7 d) gilt für jedes einzelne $v \in H$, dass

$$\bigl\|T(v)\bigr\| = \sup\Bigl\{ \bigl|\langle\!\langle T(v), w\rangle\!\rangle\bigr| \Bigm| w \in K, \ \|w\| = 1 \Bigr\}.$$

Die Kombination dieser beiden Aussagen liefert (7.11b). ■

Korollar 7.12 *Seien* $\bigl(H, \langle \ , \ \rangle\bigr)$ *und* $\bigl(K, \langle\!\langle \ , \ \rangle\!\rangle\bigr)$ *zwei Hilberträume, und sei* $T \in L(H, K)$.

Dann ist

$$\bigl\|T^t\bigr\| = \|T\| \tag{7.12}$$

und die Zuordnung

$$\begin{aligned} L(H,K) &\longrightarrow L(K,H) \\ T &\longmapsto T^t \end{aligned}$$

ist ein isometrischer Antiisomorphismus.

Beweis. Gleichung (7.12) ist eine leichte Konsequenz aus Gleichung (7.11a), denn im Ausdruck auf der rechten Seite von (7.11a) ist

$$\bigl|\langle\!\langle T(v), w\rangle\!\rangle\bigr| = \bigl|\langle v, T^t(w)\rangle\bigr| = \bigl|\langle T^t(w), v\rangle\bigr|,$$

und das Supremum dieser Werte über alle Paaren von Vektoren von Norm ≤ 1 liefert mit der ganz linken Schreibweise $\|T\|$, aber mit der gleichwertigen ganz rechten Schreibweise $\|T^t\|$. Deshalb muss $\|T\| = \|T^t\|$ sein.

Bemerkungen 7.10 b) und c) besagen, dass die Zuordnung $T \mapsto T^t$ antilinear ist.

Gleichung (7.12) zeigt, dass sie eine Isometrie ist.

Weil $(T^t)^t = T$, ist die Zuordnung $T \mapsto T^t$ bijektiv und die entsprechende Operation definiert auf $L(K, H)$ ist ihre Umkehrabbildung. ■

Korollar 7.13 *Seien* $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *und* $\big(K, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\big)$ *zwei Hilberträume, und sei* $T \in L(H, K)$.

Dann ist

$$\left\|T \circ T^t\right\| = \left\|T^t \circ T\right\| = \|T\|^2 . \tag{7.13}$$

Beweis. Für jedes $v \in H$ mit $\|v\| \leq 1$ ist

$$\begin{aligned}
\left\|T(v)\right\|^2 &= \left|\langle\!\langle T(v), T(v) \rangle\!\rangle\right| \\
&= \left|\langle v, (T^t \circ T)(v) \rangle\right| \\
&\leq \|v\| \left\|(T^t \circ T)(v)\right\| && \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq \|v\| \left\|T^t \circ T\right\| \|v\| = \left\|T^t \circ T\right\| \|v\|^2 \\
&\leq \left\|T^t \circ T\right\| .
\end{aligned}$$

Das Supremum des linken Ausdrucks über alle $v \in H$ mit $\|v\| \leq 1$ ist $\|T\|^2$, und unter Anwendung von Lemma 1.33 c) und der Gleichheit von $\|T\|$ und $\|T^t\|$ erhalten wir

$$\|T\|^2 \leq \left\|T^t \circ T\right\| \leq \left\|T^t\right\| \|T\| \leq \|T\|^2 ,$$

so dass überall die Gleichheit gilt und $\|T\|^2 = \|T^t \circ T\|$.

Die andere Beziehung $\|T\|^2 = \|T \circ T^t\|$ folgt, wenn man T durch T^t ersetzt und ausnutzt, dass $(T^t)^t = T$ und $\|T^t\| = \|T\|$. ■

Lemma 7.14 *Seien* $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *und* $\big(K, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\big)$ *zwei Hilberträume, und sei* $T \in L(H, K)$.

Dann ist

$$\operatorname{Ker} T^t = (\operatorname{Bild} T)^\perp \subseteq K \tag{7.14a}$$

und

$$\overline{\operatorname{Bild} T^t} = (\operatorname{Ker} T)^\perp \subseteq H. \tag{7.14b}$$

Ferner gelten beide Aussagen auch, wenn man die Rollen von T^t und T vertauscht.

Beweis. Wenn die Aussagen gelten, gelten sie auch mit T^t und T vertauscht wegen Bemerkung 7.10 f).

Unter Anwendung von Lemma 6.14 d) erhält man (7.14b), wenn man (7.14a) auf T^t anstelle von T anwendet und beide Seiten durch ihr orthogonales Komplement ersetzt. Also müssen wir nur (7.14a) beweisen.

Sei $w \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Ker} T^t &\iff T^t(w) = 0 \\ &\iff \langle v, T^t(w) \rangle = 0 \text{ für jedes } v \in H \\ &\iff \langle\!\langle T(v), w \rangle\!\rangle = 0 \text{ für jedes } v \in H \\ &\iff w \in (\operatorname{Bild} T)^{\perp}. \end{aligned}$$

■

Lemma 7.15 *Seien* $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ *und* $\big(K, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\big)$ *zwei Hilberträume, und sei* $T \in L(H,K)$.

Genau dann ist $\operatorname{Bild} T$ *ein abgeschlossener Untervektorraum von* K*, wenn* $\operatorname{Bild} T^t$ *ein abgeschlossener Untervektorraum von* H *ist.*

Beweis. Weil $(T^t)^t = T$ reicht es, die Vorwärtsrichtung zu beweisen. Sei $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen.

$\operatorname{Bild} T$ erbt das innere Produkt von K und dessen Norm, und als abgeschlossener Untervektorraum ist es vollständig in dieser Norm und somit selber ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$.

Natürlich ist auch $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ als abgeschlossener Untervektorraum ein Banachunterraum von H.

Um zu beweisen, dass $\operatorname{Bild} T^t$ abgeschlossen ist, reicht es zu zeigen, dass $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} \subseteq \operatorname{Bild} T^t$, denn nach Gleichung (7.14b) in Lemma 7.14 ist $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ die abgeschlossene Hülle von $\operatorname{Bild} T^t$.

Nach Lemma 6.14 b) ist $H = (\operatorname{Ker} T) \oplus (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ und folglich ist T eine Bijektion $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} \longrightarrow \operatorname{Bild} T$.

Nach dem Banachschen Isomorphiesatz hat diese stetige lineare Bijektion zwischen Banachräumen eine stetige Umkehrabbildung

$$S\colon\ \operatorname{Bild} T \longrightarrow (\operatorname{Ker} T)^{\perp}.$$

Sei nun $w \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ und sei $\alpha := j(w) \in T^*$ und $\beta := \alpha \circ S \in (\operatorname{Bild} T)^*$.

Nach Satz 7.5 gibt es einen Vektor $u \in \operatorname{Bild} T \subseteq K$, so dass $\beta = j(u)$, d.h., für jeden Vektor $x \in \operatorname{Bild} T$ ist $\beta(x) = \langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle$.

Das kann man auch so sagen: für jeden Vektor $v \in H$ ist

$$\langle v, T^t(u) \rangle = \langle\!\langle T(v), u \rangle\!\rangle = \beta\big(T(v)\big) = (\alpha \circ S \circ T)(v) = \alpha(v) = \langle v, w \rangle.$$

Da dies für jedes $v \in H$ gilt, ist $T^t(u) = w$ und wir haben gezeigt, dass $(\operatorname{Ker} T)^\perp \subseteq \operatorname{Bild} T^t$, wie wir uns vorgenommen hatten.

Damit ist bewiesen, dass $\operatorname{Bild} T^t$ abgeschlossen ist. ■

Die Adjungierte einer stetigen linearen Abbildung zwischen Hilberträumen ist, wie wir gesehen haben, ein Abbild der Dualisierung, aber sie hat gegenüber der dualen Abbildung den Vorteil, dass sie zwischen den ursprünglichen Räumen verläuft (wenn auch in der anderen Richtung) und nicht zwischen den Dualräumen.

Beim ersten Blick erscheint das nur wie eine nette Spielerei, aber es ist weit mehr. Das gilt besonders in dem Fall, wo Quelle und Ziel der gleiche Hilbertraum sind und wo die Abbildung also ein stetiger *Endomorphismus* dieses Raumes ist.

Dann ist die adjungierte Abbildung auch ein Endomorphismus des gleichen Hilbertraumes, und man kann nach „Verwandtschaften" oder besonderen Beziehungen und Verträglichkeiten zwischen der ursprünglichen Abbildung und ihrer Adjungierten fragen. Solche Verträglichkeiten machen die Untersuchung der Abbildungen sehr viel einfacher und werden später, zum Beispiel in der Ausarbeitung der von uns angepeilten Spektraltheorie dieser Operatoren, eine bedeutende Rolle spielen.

Im Rest dieses Kapitels untersuchen wir also stetige lineare Selbstabbildungen (d.h., Endomorphismen) eines Hilbertraumes. Um Missverständnisse auszuschliessen, halten wir die genaue Definition fest:

Definition 7.16 Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Ein ***Endomorphismus*** von V im Sinne der Funktionalanalysis ist eine *stetige* lineare Abbildung $T\colon V \longrightarrow V$, also ein Element von $L(V, V)$.

In Zukunft schreiben wir

$$\operatorname{End} V$$

als bevorzugte Bezeichnung für $L(V, V)$, die Menge aller stetigen Endomorphismen von V.

Man beachte, dass $\operatorname{End} V = L(V, V)$ selber ein normierter Vektorraum ist, mit der Operatornorm als Norm, aber dass $\operatorname{End} V$ außerdem durch die Verknüpfung von Endomorphismen eine Ring-Multiplikation besitzt, für die die Identitätsabbildung id_V ein Einselement ist.

Mit dieser Multiplikation ist $\operatorname{End} V$ sogar eine $\mathbf{K}$-Algebra.

Bevor wir die wichtigen Verträglichkeitsbedingungen zwischen Endomorphismen eines Hilbertraumes und ihren Adjungierten formulieren, wollen wir eine nützliche Abschätzung präsentieren, die für beliebige Endomorphismen eines Innenproduktraumes anwendbar ist.

Hilfssatz 7.17 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Innenproduktraum über* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *oder* $\mathbf{C}$ *und sei* $T \in \operatorname{End} V$.

Sei d *eine nichtnegative reelle Zahl, so dass*

$$\big|\langle T(v), v\rangle\big| \le d\,\|v\|^2 \tag{7.15}$$

für jedes $v \in V$.

Dann gilt für je zwei Vektoren v *und* $w \in V$ *die Abschätzung*

$$\big|\langle T(v), w\rangle + \langle v, T(w)\rangle\big| \le 2d\,\|v\|\,\|w\|\,, \tag{7.16a}$$

und wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, *dann gilt sogar*

$$\big|\langle T(v), w\rangle\big| + \big|\langle v, T(w)\rangle\big| \le 2d\,\|v\|\,\|w\|\,. \tag{7.16b}$$

Beweis. Wir können annehmen, dass v und $w \neq 0$, denn sonst sind beide Seiten der Ungleichungen (7.16) Null und die Behauptung stimmt.

Ausgehend von der Parallelogrammgleichung, Ungleichung (7.15) und der Dreiecksungleichung in $\mathbf{K}$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
2d\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big) &= d\big(\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2\big)\\
&\ge \big|\langle T(v+w), v+w\rangle\big| + \big|\langle T(v-w), v-w\rangle\big|\\
&\ge \big|\langle T(v+w), v+w\rangle - \langle T(v-w), v-w\rangle\big|\\
&= \big|\langle T(v), v\rangle + \langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle + \langle T(w), w\rangle\\
&\qquad - \langle T(v), v\rangle + \langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle - \langle T(w), w\rangle\big|\\
&= \big|2\langle T(v), w\rangle + 2\langle T(w), v\rangle\big|\\
&= 2\big|\langle T(v), w\rangle + \overline{\langle v, T(w)\rangle}\big|
\end{aligned}$$

für jedes Paar von Vektoren v und $w \in V$.

In dieser Ungleichung ersetzen wir v und w durch geeignete skalare Vielfache λv und μw, wobei wir die Skalare so wählen, dass nur eine Seite der Ungleichung sich verändert und durch die Veränderung eine günstigere und einfachere Form annimmt.

Zunächst multiplizieren wir v mit $\lambda := \sqrt{\|w\|/\|v\|}$ und w mit $\mu := \sqrt{\|v\|/\|w\|}$.

Dadurch verwandeln sich $\|v\|^2$ und $\|w\|^2$ auf der linken Seite obiger Ungleichung beide in $\|v\|\,\|w\|$, aber die inneren Produkte im letzten Ausdruck auf der rechten Seite verändern sich nicht, weil λ und μ zueinander reziprok und reell sind.

Wir erhalten dann (nach Wegkürzen eines Faktors 2) die Ungleichung

$$\big|\langle T(v), w\rangle + \overline{\langle v, T(w)\rangle}\big| \le 2d\,\|v\|\,\|w\|\,. \tag{7.17}$$

Im reellen Fall können wir die komplexe Konjugation außer Acht lassen und wir haben Ungleichung (7.16a) bewiesen.

Im komplexen Fall können wir weiter vereinfachen, in dem wir w mit einem komplexen Skalar μ von Betrag 1 multiplizieren.

Dadurch ändert sich die rechte Seite von (7.17) überhaupt nicht, und auf der linken Seite wird der erste Summand $\langle T(v), w\rangle$ mit $\bar{\mu}$ multipliziert, der zweite Summand $\overline{\langle v, T(w)\rangle}$ mit $\mu = \mu^2\bar{\mu}$. Die Normen der Summanden bleiben unverändert, weil $|\mu| = 1$.

Wir können davon ausgehen, dass beide Summanden auf der linken Seite ungleich 0 sind, denn sonst gilt Ungleichung (7.16b) ohnehin.

Durch eine geeignete Wahl von μ (genauer, durch Anpassung von μ^2) kann man dann erreichen, dass der zweite Summand auf der linken Seite von (7.17) zu einem positiven reellen Vielfachen des ersten Summandes wird. In diesem Fall addieren sich aber die Normen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\left|\langle T(v), w\rangle\right| + \left|\langle v, T(w)\rangle\right| &= \left|\bar{\mu}\langle T(v), w\rangle\right| + \left|\mu\overline{\langle v, T(w)\rangle}\right| \\
&= \left|\bar{\mu}\langle T(v), w\rangle + \mu\overline{\langle v, T(w)\rangle}\right| \\
&= \left|\langle T(v), \mu w\rangle + \overline{\langle v, T(\mu w)\rangle}\right| \\
&\leq 2d \,\|v\|\,\|\mu w\| \\
&= 2d \,\|v\|\,\|w\|\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir Ungleichung (7.16b) bewiesen.

Da nach der Dreiecksungleichung die linke Seite von (7.16a) höchstens so groß ist, wie die linke Seite von (7.16b), gilt im komplexen Fall auch Ungleichung (7.16a). ∎

Korollar 7.18 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Innenproduktraum über dem Körper* $\mathbf{C}$ *und sei $T \in \operatorname{End} V$.*

Wenn für jedes $v \in V$ gilt

$$\langle T(v), v\rangle = 0,$$

dann ist $T = \mathbf{0}$.

Beweis. Unter der genannten Voraussetzung erfüllt T Ungleichung (7.15) mit $d = 0$, und aus Hilfssatz 7.17 folgt, dass

$$\left|\langle T(v), w\rangle\right| \leq \left|\langle T(v), w\rangle\right| + \left|\langle v, T(w)\rangle\right| = 0$$

für je zwei Vektoren v und $w \in V$.

Also ist $T(v) \in V^{\perp} = \{\,0\,\}$ für jedes $v \in V$, d.h., $T = \mathbf{0}$. ∎

Nach dieser kleinen Vorbereitung kommen wir zurück auf das Thema „spezieller Beziehungen“ zwischen einem Endomorphismus eines Hilbertraumes und seiner Adjungierten. Wir formulieren die drei wichtigsten Instanzen dieser Idee.

Definition 7.19 Sei $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $T \in \operatorname{End} H$.

Wir nennen T

a) ***hermitesch*** oder ***selbstadjungiert***, wenn $T = T^t$, d.h., wenn für je zwei Vektoren v und $w \in H$ gilt

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle; \tag{7.18}$$

b) ***unitär***, wenn T invertierbar ist und $T^t = T^{-1}$, d.h., wenn

$$TT^t = T^tT = \mathrm{id}_H; \tag{7.19}$$

c) ***normal***, wenn T mit seinem adjungierten Operator kommutiert, d.h., wenn

$$TT^t = T^tT. \tag{7.20}$$

Offensichtlich sind selbstadjungierte Endomorphismen und unitäre Endomorphismen immer normal; normal zu sein ist die schwächste der drei Bedingungen, aber für viele schöne Konsequenzen reicht sie aus.

Der Begriff ***unitär*** lässt sich auch für stetige lineare Abbildungen zwischen zwei verschiedenen Hilberträumen $H \longrightarrow K$ formulieren. Die Definition ist genau die gleiche und nur Formel (7.19) muss geringfügig angepasst werden ($TT^t = \mathrm{id}_K$, $T^tT = \mathrm{id}_H$).

Die anderen beiden Begriffe machen nur Sinn, wenn Quell- und Zielraum der gleiche Hilbertraum sind, aber auch unitäre Operatoren werden wir hauptsächlich in dieser Situation betrachten.

Wenn wir von einem hermiteschen, einem unitären oder einem normalen ***Operator auf einem Hilbertraum*** H sprechen, dann ist damit immer ein ***Endomorphismus*** von H mit der entsprechenden Eigenschaft gemeint, auch im unitären Fall, wenn nicht explizit ein anderer Zielraum angegeben wird.

Es ist interessant zu bemerken, dass für hermitesche Operatoren die Stetigkeit automatisch aus Gleichung (7.18) folgt und nicht im Voraus verlangt werden muss:

Satz 7.20 (Satz von Hellinger-Toeplitz) *Sei H ein Hilbertraum und sei $T\colon H \longrightarrow H$ eine lineare Abbildung, so dass*

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$$

für alle v und $w \in H$.

Dann ist T stetig und somit ein hermitescher Operator.

Beweis. Wir verwenden den Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 2.20, und beweisen die Stetigkeit von T indem wir zeigen, dass $\Gamma(T)$, der Graph von T, abgeschlossen ist in $H \times H$.

Dazu sei $(v, w) \in \overline{\Gamma(T)}$ und sei $\big\{ (v_n, w_n) \big\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge aus $\Gamma(T)$ (also mit $T(v_n) = w_n$), die gegen (v, w) konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $(v, w) \in \Gamma(T)$, also dass $w = T(v)$.

Für jeden Vektor $u \in H$ ist

$$\begin{aligned}\langle u, T(v)\rangle = \langle T(u), v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle T(u), v_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle u, T(v_n)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u, w_n\rangle = \langle u, w\rangle.\end{aligned}$$

D.h., es ist $j\big(T(v)\big) = j(w)$ und somit ist $w = T(v)$, wie verlangt. ■

Um unsere Grundkenntnisse über Hilberträume auszurunden wollen wir die wichtigsten elementaren Eigenschaften dieser Operatorklassen, dabei in erster Linie der hermiteschen Operatoren, etwas beleuchten.

Lemma 7.21 *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbf{C}$ und sei $T \in \operatorname{End} H$. Dann ist T genau dann hermitesch, wenn*

$$\langle T(v), v\rangle \in \mathbf{R} \tag{7.21}$$

für jedes $v \in H$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wenn T hermitesch ist, dann ist

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}$$

für jedes $v \in H$, und somit ist $\langle T(v), v\rangle$ reell für jedes v.
„$\Leftarrow$“: Wenn $\langle T(v), v\rangle$ immer reell ist, dann ist

$$\begin{aligned}\langle (T - T^t)(v), v\rangle &= \langle T(v), v\rangle - \langle T^t(v), v\rangle \\ &= \langle T(v), v\rangle - \overline{\langle v, T^t(v)\rangle} \\ &= \langle T(v), v\rangle - \overline{\langle T(v), v\rangle} \\ &= \langle T(v), v\rangle - \langle T(v), v\rangle = 0\end{aligned}$$

für jedes $v \in H$.

Weil H ein komplexer Hilbertraum ist, können wir aus Korollar 7.18 schließen, dass $T - T^t = \mathbf{0}$, also dass $T = T^t$. ■

Lemma 7.22 *Sei $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator auf H. Dann ist*

$$\|T\| = \sup\Big\{ \big|\langle T(v), v\rangle\big| \;\Big|\; v \in H,\ \|v\| = 1 \Big\}. \tag{7.22}$$

Beweis. Sei d das Supremum auf der rechten Seite.

Einerseits folgt sofort aus Gleichung (7.11b) in Lemma 7.11, dass

$$d \leq \|T\|.$$

Andererseits haben wir für jeden Vektor $v \neq 0 \in H$, dass

$$\frac{|\langle T(v), v\rangle|}{\|v\|^2} = |\langle T(v/\|v\|), v/\|v\|\rangle| \leq d,$$

und somit ist $|\langle T(v), v\rangle| \leq d\,\|v\|^2$. Diese Ungleichung gilt natürlich auch für $v = 0$.

Aus Hilfssatz 7.17 und weil T hermitesch ist können wir schließen, dass für je zwei Vektoren v und w mit $\|v\| = \|w\| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} 2\big|\langle T(v), w\rangle\big| &= \big|\langle T(v), w\rangle + \langle T(v), w\rangle\big| \\ &= \big|\langle T(v), w\rangle + \langle v, T(w)\rangle\big| \leq 2d\,\|v\|\,\|w\| = 2d. \end{aligned}$$

Das Supremum von $2\big|\langle T(v), w\rangle\big|$ über alle solche Vektorenpaare ist $2\,\|T\|$ (wieder nach Gleichung (7.11b) in Lemma 7.11), und somit haben wir

$$\|T\| \leq d.$$

Also ist $\|T\| = d$, was zu zeigen war. ■

Korollar 7.23 *Sei $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator auf H.*

Wenn für jedes $v \in H$ gilt

$$\langle T(v), v\rangle = 0,$$

dann ist $T = \mathbf{0}$.

Dieses Korollar liefert nur für reelle Hilberträume neue Erkenntnisse, denn wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ gilt die entsprechende Aussage nach Korollar 7.18 über jeden Innenproduktraum (und T muss nicht hermitesch sein).

Jeden Operator auf einem Hilbertraum kann man leicht „hermitesch machen".

Bemerkung 7.24 Sei H ein Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$.

a) Der Operator
$$\frac{1}{2}(T + T^t)$$
ist offensichtlich gleich seiner Adjungierten und somit hermitesch.

In Anbetracht von Lemma 7.21 überrascht es nicht, dass diese Konstruktion genau der Bildung des Realteils einer komplexen Zahl entspricht.

b) Die Operatoren $T^t \circ T$ und $T \circ T^t$ sind auch hermitesch, wie man aus Bemerkung 7.10 d) und f) sofort nachrechnet.

Diese Konstruktion entspricht der Bildung des Quadrates des Betrages einer komplexen Zahl.

Bemerkung 7.25 Sei H ein Hilbertraum. Die Eigenschaft „hermitesch" bleibt unter vielen elementaren Operationen mit Operatoren erhalten. Insbesondere:

- id_H ist ein hermitescher Operator.
- Wenn S und T hermitesche Operatoren auf H sind, dann ist $S + T$ ein hermitescher Operator.
- Wenn T ein hermitescher Operator auf H ist, dann ist cT ein hermitescher Operator für jede *reelle* Zahl c.
- Wenn S und T *miteinander kommutierende* hermitesche Operatoren auf H sind, dann ist $S \circ T$ ein hermitescher Operator.

Diese Eigenschaften folgen sofort aus Bemerkungen 7.10 a)–d) und der Tatsache, dass hermitesch ***selbstadjungiert*** bedeutet.

Die Namensvetterschaft von hermiteschen Formen und hermiteschen Operatoren kommt nicht von Ungefähr, denn man kann einen hermiteschen Operator auf einem Hilbertraum H benutzen, um eine neue hermitesche Form (neben dem gegebenen inneren Produkt) zu definieren, und dies liefert eine Bijektion zwischen den stetigen hermiteschen Formen und den hermiteschen Operatoren auf H.

Lemma und Definition 7.26 *Sei H ein Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$. Wir definieren eine stetige Sesquilinearform $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$ auf H durch die Vorschrift*

$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle_T := \langle T(v), w \rangle \tag{7.23}$$

für alle Vektoren v und $w \in H$.

Genau dann ist $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$ eine hermitesche Form, wenn T ein hermitescher Operator ist.

Beweis. Offensichtlich ist $\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle_T$ linear in v und antilinear in w, und die Cauchy-Schwarzsche Abschätzung

$$\bigl|\langle T(v), w \rangle\bigr| \leq \|T\|\,\|v\|\,\|w\|$$

zeigt, dass $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$ stetig bei 0 und somit stetig ist.

Genau dann ist $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$ hermitesch, wenn

$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle_T = \overline{\langle\!\langle w, v \rangle\!\rangle_T}$$

für jedes v und jedes $w \in H$.

Dies ist aber äquivalent dazu, dass für jedes v und jedes w gilt

$$\langle T(v), w \rangle = \overline{\langle T(w), v \rangle} = \langle v, T(w) \rangle,$$

und das gilt für alle v und w genau dann, wenn T ein hermitescher Operator ist. ■

Lemma 7.27 *Sei $\bigl(H, \langle\ ,\ \rangle\bigr)$ ein Hilbertraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.*

Jede stetige hermitesche Form $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ auf H ist von der Gestalt $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$ für einen geeigneten hermiteschen Operator T auf H.

Beweis. Sei $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ eine stetige hermitesche Form auf H, und für jedes $w \in W$ definiere eine Abbildung $r_w\colon H \longrightarrow \mathbf{K}$ durch die Vorschrift

$$r_w(v) := \langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle$$

für jedes $v \in H$.

Diese Abbildung ist linear. Ferner, weil die Form $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ stetig ist, gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass $\bigl|\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle\bigr| \leq 1$ wann immer $\|v\| \leq \delta$ und $\|w\| \leq \delta$.

Da $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ reell bilinear ist, können wir schließen, dass

$$\bigl|\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle\bigr| \leq \frac{1}{\delta^2}$$

wann immer $\|v\| \leq 1$ und $\|w\| \leq 1$.

Daraus folgt erstens, dass $\|r_w\| \leq 1/\delta^2$ für jedes $w \in H$ mit $\|w\| \leq 1$, woraus man sofort schließen kann, dass

$$\|r_w\| \leq \frac{\|w\|}{\delta^2} \tag{7.24}$$

für beliebige $w \in H$.

Insbesondere ist r_w stetig und gehört zu H^*, für jedes $w \in H$.

Die Zuordnung $w \mapsto r_w$ ist offensichtlich eine antilineare Abbildung

$$J\colon H \longrightarrow H^*,$$

und aus (7.24) folgt, dass sie stetig ist mit $\|J\| \leq 1/\delta^2$.

Die in Satz und Definition 7.5 definierte Abbildung $j\colon H \longrightarrow H^*$ ist ein isometrischer Antiisomorphismus, und die Verknüpfung

$$T := j^{-1} \circ J$$

ist eine stetige *lineare* Abbildung $H \longrightarrow H$, also ein stetiger Operator auf H.

Für je zwei Vektoren v und $w \in H$ haben wir

$$\begin{aligned}\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle_T := \langle T(v), w\rangle &= \overline{\langle w, T(v)\rangle} \\ &= \overline{\Big(j\big(T(v)\big)\Big)(w)} = \overline{\big((j \circ T)(v)\big)(w)} = \overline{\big(J(v)\big)(w)} \\ &\qquad\qquad\qquad = \overline{\langle\!\langle w, v\rangle\!\rangle} = \langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle.\end{aligned}$$

Folglich ist $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T = \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$, und weil $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ eine hermitesche Form ist, ist T ein hermitescher Operator nach Lemma 7.26. ■

Hermitesche Operatoren und hermitesche Formen auf einem Hilbertraum H sind also im Wesentlichen das Gleiche, aber nicht jede hermitesche Form ist positiv definit, und das heißt, dass nur manche hermitesche Operatoren ein alternatives *inneres Produkt* auf H liefern. Diese verdienen einen besonderen Namen:

Definition 7.28 Sei $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator auf H.

Wir nennen T einen ***positiven Operator*** und schreiben

$$T \geq 0,$$

wenn die hermitesche Form $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$ positiv semidefinit ist, d.h., wenn

$$\langle T(v), v\rangle \geq 0$$

für jedes $v \in V$.

Mit Hilfe dieses Begriffs kann man eine partielle Ordnung zwischen hermiteschen Operatoren einführen. Wenn S und T hermitesche Operatoren auf H sind, schreiben wir

$$S \leq T,$$

wenn $T - S$ ein positiver hermitescher Operator ist.

Diese Ordnung können wir auch zwischen hermiteschen Operatoren und reellen Zahlen definieren, wenn wir die reelle Zahl c mit dem hermiteschen Operator $c\,\mathrm{id}_H$ identifizieren (wir erinnern an Bemerkung 7.25).

Wenn man hinschreibt, was die so definierte Ordnung zwischen Zahlen und Operatoren bedeutet, sieht man, dass für reelle Zahlen c und d genau dann gilt

$$c \leq T \leq d,$$

wenn für jeden Vektor $v \in H$ gilt

$$c\,\|v\|^2 \leq \langle T(v), v\rangle \leq d\,\|v\|^2 . \tag{7.25}$$

Bemerkung 7.29 Sei H ein Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator auf H.

Dann ist

$$-\|T\| \leq T \leq \|T\| \tag{7.26}$$

im Sinne der in Definition 7.28 definierten Ordnung zwischen Zahlen und hermiteschen Operatoren.

Beweis. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 1.33 b) ist

$$\big|\langle T(v), v\rangle\big| \leq \big\|T(v)\big\|\,\|v\| \leq \|T\|\,\|v\|\,\|v\| = \|T\|\,\|v\|^2$$

für jedes $v \in H$. Damit gilt Ungleichung (7.25) für $c = d = \|T\|$. ■

Lemma 7.30 *Sei H ein Hilbertraum und sei T ein positiver hermitescher Operator auf H. Für je zwei Vektoren v und $w \in H$ ist*

$$\big|\langle T(v), w\rangle\big|^2 \leq \langle T(v), v\rangle\langle T(w), w\rangle \tag{7.27}$$

Beweis. Dies ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (6.4) für die positiv semidefinite hermitesche Form $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$. ■

Korollar 7.31 *Sei H ein Hilbertraum und sei T ein positiver hermitescher Operator auf H. Sei $v \in H$.*

Wenn $\langle T(v), v\rangle = 0$, dann ist $T(v) = 0$.

Beweis. Wenn $\langle T(v), v\rangle = 0$, dann ist die rechte Seite von (7.27) Null für jedes $w \in H$. Somit ist $\langle T(v), w\rangle = 0$ für jedes w und $T(v) \in H^\perp = \{0\}$. ■

Wir haben an mehreren Stellen in unserer bisherigen Diskussion von hermiteschen Operatoren T gesehen, dass ihre wesentlichen Eigenschaften oft allein durch die inneren Produkte $\langle T(v), v\rangle$ bestimmt sind. Das ist kein Zufall, sondern eine allgemeine und bekannte Tatsache über hermitesche Formen, die sie aus der Anfängervorlesung *Lineare Algebra* schon kennen, und an die wir kurz erinnern wollen.

Definition 7.32 Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf V.

Diese Form bestimmt eine Abbildung

$$\begin{aligned} q\colon V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ v &\longmapsto \langle v, v\rangle, \end{aligned}$$

genannt die ***quadratische Form*** der hermiteschen Form $\langle\ ,\ \rangle$. In (6.1) haben wir schon gesehen, dass q tatsächlich nur reelle Werte annimmt.

Genau dann ist $\langle\ ,\ \rangle$ nach Definition positiv semidefinit, wenn q nur nichtnegative Werte annimmt.

Wenn $V = H$ ein Hilbertraum ist und wenn T ein hermitescher Operator auf H ist, dann bezeichnen wir mit q_T die quadratische Form der hermiteschen Form $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$, und wir nennen dies die ***quadratische Form des hermiteschen Operators*** T.

Die quadratische Form eines hermiteschen Operators auf einem Hilbertraum ist offensichtlich stetig.

Bemerkung 7.33 Sei H ein Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator auf H. Sei q_T seine quadratische Form.

a) Genau dann ist T positiv, wenn $q_T \geq 0$.

b) Für jedes $v \in H$ ist $\left|q_T(v)\right| \leq \|T\|\,\|v\|^2$.

c) Die quadratische Form q_T hängt linear von T ab.

d) Sei S ein weiterer hermitescher Operator auf H. Genau dann ist $S \leq T$, wenn $q_S \leq q_T$.

Beweis. a) und c) sind klar aus der Tatsache, dass $q_T(v) = \langle T(v), v\rangle$, und Teil d) folgt sofort aus der Kombination von a) und c).

b) ist nur eine andere Formulierung von Bemerkung 7.29. ■

Lemma 7.34 *Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf V und sei q ihre quadratische Form.*

Für je zwei Vektoren v und $w \in v$ gilt

$$\operatorname{Re}\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\bigl(q(v+w) - q(v-w)\bigr) \tag{7.28a}$$

und wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, dann ist

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\bigl(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw)\bigr). \tag{7.28b}$$

Beweis. Formel (7.28a) rechnet man direkt nach:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\bigl(q(v+w) - q(v-w)\bigr) &= \frac{1}{4}\bigl(\langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle\bigr)\\
&= \frac{1}{4}\bigl(\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle\\
&\qquad - \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle - \langle w,w\rangle\bigr)\\
&= \frac{1}{4}\bigl(2\langle v,w\rangle + 2\langle w,v\rangle\bigr)\\
&= \frac{1}{4}\bigl(2\langle v,w\rangle + 2\overline{\langle v,w\rangle}\bigr)\\
&= \frac{1}{4}\bigl(4\operatorname{Re}\langle v,w\rangle\bigr)\\
&= \operatorname{Re}\langle v,w\rangle.
\end{aligned}$$

Daraus folgt auch, dass

$$\operatorname{Im}\langle v,w\rangle = \operatorname{Re}\bigl(-i\langle v,w\rangle\bigr) = \operatorname{Re}\langle v, iw\rangle = \frac{1}{4}\bigl(q(v+iw) - q(v-iw)\bigr),$$

und Einsetzen der bisher gewonnenen Ergebnisse auf der rechten Seite von $\langle v,w\rangle = \operatorname{Re}\langle v,w\rangle + i\operatorname{Im}\langle v,w\rangle$ liefert (7.28b). ∎

Korollar 7.35 *Sei H ein Hilbertraum und T ein hermitescher Operator auf H. Dann bestimmt die quadratische Form q_T den Operator T eindeutig.*

Satz 7.36 *Sei H ein Hilbertraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $\{\,T_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine beschränkte und in der Ordnung von Definition 7.28 monoton steigende Folge von hermiteschen Operatoren auf H.*

Dann gibt es einen hermiteschen Operator T auf H, so dass

$$\lim_{n\to\infty} T_n(v) = T(v)$$

für jedes $v \in H$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen und aus Bemerkung 7.33 b) und d) folgt, dass für jedes $v \in V$ die Folge $\left\{ q_{T_n}(v) \right\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine beschränkte monoton steigende Folge von reellen Zahlen ist, die aus diesem Grund konvergiert.

Den (natürlich von v abhängenden) Grenzwert nennen wir $q(v)$ und wir erhalten so eine wohldefinierte Funktion $q\colon H \longrightarrow \mathbf{R}$, so dass für jedes $v \in H$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} q_{T_n}(v) = q(v).$$

Je nachdem, ob $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ ist, setzen wir q auf der rechten Seite von Gleichung (7.28a) oder (7.28b) ein, um mit der linken Seite eine Funktion $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ auf $H \times H$ zu definieren.

Aus der Definition von q und der Gültigkeit der Gleichungen (7.28) für die einzelnen $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_{T_n}$ und q_{T_n} folgt, dass

$$\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle_{T_n} = \lim_{n\to\infty} \langle T_n(v), w\rangle \tag{7.29}$$

für jedes v und $w \in H$, und weil die $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_{T_n}$ hermitesche Sesquilinearformen sind, ist auch $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform (die algebraischen Gleichheiten, die diese Eigenschaft ausmachen, bleiben beim Übergang zum Grenzwert erhalten).

Die T_n bilden nach Voraussetzung eine beschränkte Familie von Operatoren und es gibt deshalb eine Zahl $C > 0$, so dass $\|T_n\| \le C$ für jedes $n \in \mathbf{N}$. Für je zwei Vektoren v und $w \in H$ folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für die rechte Seite von (7.29), dass

$$\big|\langle T_n(v), w\rangle\big| \le \big\|T_n(v)\big\| \, \|w\| \le \|T_n\| \, \|v\| \, \|w\| \le C \, \|v\| \, \|w\|$$

für jedes $n \in \mathbf{N}$, und deshalb ist

$$\big|\langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle\big| \le C \, \|v\| \, \|w\| \, . \tag{7.30}$$

Daraus folgt, dass $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ stetig bei $(0,0) \in H \times H$ ist, und somit auch auf ganz $H \times H$.

Nach Lemma 7.27 gibt es einen stetigen hermiteschen Operator T auf H, so dass $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle = \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_T$, und (7.30) in Kombination mit Lemma 7.22 impliziert, dass $\|T\| \le C$.

Aus (7.29) erhalten wir dann, dass

$$\langle T(v), v\rangle = \langle\!\langle v, v\rangle\!\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n(v), v\rangle$$

für jedes $v \in H$, d.h.,

$$q_T(v) = \lim_{n\to\infty} q_{T_n}(v).$$

Weil aber $\left\{ q_{T_n}(v) \right\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine monoton steigende Folge ist, ist

$$q_{T-T_n}(v) = q_T(v) - q_{T_n}(v) \geq 0$$

für jedes $v \in H$ und jedes $n \in \mathbf{N}$, und das impliziert nach Bemerkung 7.33 a), dass $T - T_n$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ ein positiver Operator ist.

Auf diesen Operator wenden wir Lemma 7.30 an mit $w = (T - T_n)(v)$ und finden für jedes $v \in V$ und jedes $n \in \mathbf{N}$, dass

$$\begin{aligned}
\bigl\|(T-T_n)(v)\bigr\|^4 &= \bigl|\langle (T-T_n)(v), (T-T_n)(v)\rangle\bigr|^2 = \bigl|\langle (T-T_n)(v), w\rangle\bigr|^2 \\
&\leq \langle (T-T_n)(v), v\rangle \, \langle (T-T_n)(w), w\rangle \qquad \text{nach Lemma 7.30} \\
&= q_{T-T_n}(v)\, q_{T-T_n}(w) \\
&\leq q_{T-T_n}(v)\, \|T-T_n\|\, \|w\|^2 \qquad \text{nach Bemerkung 7.33 b)} \\
&\leq q_{T-T_n}(v)\, \|T-T_n\|^3\, \|v\|^2 \\
&\leq q_{T-T_n}(v) \cdot (2C)^3\, \|v\|^2 = \bigl(q_T(v) - q_{T_n}(v)\bigr) \cdot (2C)^3\, \|v\|^2 .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite geht gegen 0 für $n \to \infty$, also geht auch die linke Seite gegen 0, und das bedeutet, dass

$$\lim_{n\to\infty} (T - T_n)(v) = 0$$

im Hilbertraum H, was zu zeigen war. ■

Zum Ausklang dieses Abschnitts wollen wir noch einen sehr kurzen Blick auf die unitären Endomorphismen eines Hilbertraums, oder (ein wenig) allgemeiner auf die unitären Abbildungen zwischen zwei Hilberträumen werfen.

Ihre Bedeutung liegt darin, dass sie die eigentlich strukturtreuen bijektiven Abbildungen zwischen Hilberträumen sind, da sie nicht nur topologische Vektorraumisomorphismen sind, sondern auch das innere Produkt nicht verändern.

Bemerkung 7.37 Seien $\bigl(H, \langle\ ,\ \rangle\bigr)$ und $\bigl(K, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\bigr)$ zwei Hilberträume, und sei $T \in L(H, K)$ eine surjektive stetige lineare Abbildung.

Genau dann ist T unitär, wenn für je zwei Vektoren v und $w \in H$ gilt

$$\langle\!\langle T(v), T(w)\rangle\!\rangle = \langle v, w\rangle. \tag{7.31}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wenn T unitär ist, ist $T^t \circ T = \mathrm{id}_H$ und nach Definition der Adjungierten gilt

$$\langle\!\langle T(v), T(w)\rangle\!\rangle = \langle v, (T^t \circ T)(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

„⇐“: Wenn Gleichung (7.31) gilt, dann gilt für jedes $w \in H$, dass

$$\langle v, (T^t \circ T)(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

für jedes $v \in H$, und daraus folgt

$$(T^t \circ T)(w) = w$$

für jedes $w \in H$.

Anwendung von T auf beide Seiten liefert, dass

$$(T \circ T^t \circ T)(w) = T(w)$$

für jedes $w \in H$, und weil T surjektiv ist, bedeutet das, dass $T \circ T^t = \mathrm{id}_K$. Da wir schon gesehen hatten, dass $T^t \circ T = \mathrm{id}_H$, ist T unitär. ■

Weil die Norm eines Hilbertraumes aus dem inneren Produkt gewonnen wird, sind unitäre Abbildungen (und auch nichtsurjektive lineare Abbildungen T, die Gleichung (7.31) erfüllen) automatisch Isometrien. Wegen der Parallelogrammgleichung gilt auch die Umkehrung.

Lemma 7.38 *Seien $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ und $\big(K, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle\big)$ zwei Hilberträume, und sei $T \in L(H, K)$ eine lineare oder antilineare Abbildung.*

Dann ist T eine Isometrie genau dann, wenn für je zwei Vektoren v und $w \in H$ gilt

$$\langle\!\langle T(v), T(w) \rangle\!\rangle = \begin{cases} \langle v, w \rangle, & \text{wenn } T \text{ linear ist;} \\ \langle w, v \rangle, & \text{wenn } T \text{ antilinear ist.} \end{cases} \tag{7.32}$$

Beweis. „⇐“ ist klar aus der Definition der Norm von H und K, und wir müssen nur „⇒“ beweisen.

Es sei T eine Isometrie.

Die Funktion $\langle\ ,\ \rangle'$ auf $H \times H$ gegeben durch

$$\langle v, w \rangle' := \begin{cases} \langle\!\langle T(v), T(w) \rangle\!\rangle, & \text{wenn } T \text{ linear ist;} \\ \langle\!\langle T(w), T(v) \rangle\!\rangle, & \text{wenn } T \text{ antilinear ist,} \end{cases}$$

ist in beiden Fällen eine hermitesche Sesquilinearform, wie man leicht nachprüft, und sie ist positiv definit und bestimmt die gleiche Norm wie $\langle\ ,\ \rangle$, weil T eine Isometrie ist.

Diese Norm erfüllt die Parallelogrammgleichung, weil sie von einem inneren Produkt kommt, und nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 6.8 wird sie von einem eindeutigen inneren Produkt induziert.

Also ist $\langle\ ,\ \rangle' = \langle\ ,\ \rangle$, und das ist gleichbedeutend mit (7.32). ■

Ganz zum Schluss präsentieren wir noch eine nützliche Tatsache über normale Operatoren, auf die wir uns später beziehen werden.

Lemma 7.39 *Sei H ein Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ ein normaler Operator.*

Für jedes $v \in H$ ist

$$\|T(v)\| = \|T^t(v)\|. \tag{7.33}$$

Beweis. Weil T normal ist, gilt

$$\begin{aligned}\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle &= \langle v, (T^t \circ T)(v)\rangle \\ &= \langle v, (T \circ T^t)(v)\rangle = \langle T^t(v), T^t(v)\rangle = \|T^t(v)\|^2\end{aligned}$$

(im vorletzten Schritt haben wir Bemerkung 7.10 e) angewendet). ■

Kapitel 8

Spektren auf Banachalgebren

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Spektraltheorie von Operatoren auf Banach- und Hilberträumen. Dies ist eines der faszinierendsten Teile der Funktionalanalysis und hat mannigfache Anwendungen.

Spektren spielen in der Mathematik eine ähnliche Rolle wie in der Physik, der Chemie und der Astronomie. Ein Lichtspektrum ist eine Art stenographische Aufzeichnung der Lichtquelle und charakterisiert ziemlich genau, welche Elemente in dieser Quelle vorhanden sind, oder was für ein Medium das Licht auf dem Weg zum Betrachter durchquert hat. Dabei besteht das Spektrum aus einer Menge von Lichtfrequenzen, in der es einzelne Spektrallinien geben kann, also isolierte Frequenzen, oder ganze Spektralbänder, d.h., kontinuierliche Bereiche.

Mathematische Spektren sind auf ähnliche Weise stenographische Aufzeichnungen von Endomorphismen von Vektorräumen und beschreiben und charakterisieren das qualitative Verhalten der Abbildungen mit der gleichen erstaunlichen Genauigkeit, wie es für das Lichtspektrum gilt (in mancher Hinsicht handelt es sich auch um die gleiche Beschreibung).

Eine Instanz dieser Theorie ist Ihnen vermutlich schon in Form des Spektralsatzes aus der Anfängervorlesung *Linearen Algebra* begegnet, der besagt, dass ein normaler Operator T auf einem endlichdimensionalen komplexen Innenproduktraum V diagonalisierbar ist. Das ***Spektrum*** des Operators ist die Menge seiner Eigenwerte, und V zerlegt sich als die direkte Summe der Eigenräume, auf denen T einfach durch die Multiplikation mit dem entsprechenden Eigenwert operiert. Kennt man noch die Dimensionen der Eigenräume, so ist das qualitative Verhalten von T durch das Spektrum und diese Daten eindeutig bestimmt.

Man kann sogar unter viel allgemeineren Voraussetzungen behaupten, dass das Spektrum das qualitative Verhalten eines Operators charakterisiert und mit wenigen zusätzlichen Daten eindeutig beschreibt. Das gilt für *jeden*

Operator auf einem endlichdimensionalen **C**-Vektorraum, wenn man die Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume kennt. Die Eigenräume *per se* sind die Kerne der Operatoren $T-\lambda\,\mathrm{id}$, wo λ die Eigenwerte sind, und die verallgemeinerten Eigenräume sind die Kerne von *Potenzen* dieser Operatoren und bilden insgesamt den Bereich, wo die genannten Operatoren nilpotent sind. Die Beschreibung wird jetzt durch die Jordansche Normalform gegeben und ist nur geringfügig komplizierter als die schöne Diagonalgestalt, die für normale Operatoren erreichbar ist.

Im endlichdimensionalen Fall sieht das noch alles ziemlich einfach aus, denn die Anzahl der Eigenwerte ist endlich und höchstens gleich der Dimension des Vektorraumes. Wir wollen Teile dieser Theorie auf den unendlichdimensionalen Fall übertragen, aber hier treten neue Phänomene auf.

Ein injektiver Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ist automatisch auch surjektiv, und umgekehrt, und diese Tatsache verwischt Feinheiten, die erst im unendlichdimensionalen Fall wahrnehmbar sind. *Nicht*spektralwerte sind nicht, wie man gewohnt zu denken ist, die Zahlen λ, für die $T-\lambda\,\mathrm{id}$ injektiv ist, sondern es sind die Zahlen, für die $T-\lambda\,\mathrm{id}$ *bijektiv* ist.

In endlichen Dimensionen gibt es keinen Unterschied, aber im unendlichdimensionalen Fall kann ein Operator injektiv sein aber trotzdem nicht invertierbar, und aus diesem Grund gibt es neben den ***Eigenwerten***, die genau so definiert werden, wie wir es aus der *Linearen Algebra* kennen, noch weitere Spektralwerte, die keine Eigenwerte sind.

Hinzu kommt, dass die Anzahl der verschiedenen Spektralwerte nicht mehr endlich sein muss, und es kann sogar ganze kontinuierliche Bereiche von Spektralwerten geben (genau so wie im Lichtspektrum, der einzelne Spektrallinien *und* Spektralbänder enthalten kann).

Gerade diese Vielfalt macht die unendlichdimensionale Spektraltheorie so inhaltsreich, und ermöglicht die Entwicklung einer weitreichenden Theorie, die nicht nur den bekannten endlichdimensionalen Struktursatz in die unendlichdimensionale Welt überträgt (wobei endliche Summen von Eigenraumprojektionen zu operatorwertigen Integralen mutieren!), sondern diesen Satz durch viele neue und erstaunliche Struktursätze ergänzt.

Diese Theorie besticht nicht nur durch ihre Schönheit und ihre abstrakte Eleganz, sie hat auch viele überraschende Anwendungen in der physikalischen Welt und in den Naturwissenschaften.

Eine der bedeutendsten Anwendungen findet sich in der Quantenmechanik, wo ***Observable*** (also messbare Größen) durch selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum dargestellt werden und die Spektralwerte die möglichen Messergebnisse darstellen. Nur die Eigenwerte können scharf gemessen werden; für die anderen Spektralwerte haben nur geeignete Werte-bereiche — aber keine Einzelwerte — eine positive Messwahrscheinlichkeit (quantenmechanische Messungen sind immer Zufallsexperimente, bei denen die Zustände nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Messwerte bestimmen, aber nicht genau festlegen, was beobachtet werden wird).

Es gibt aber auch signifikante Anwendungen von Spektren in Gebieten, wo man sie zunächst gar nicht vermutet, wie in der Kodierungstheorie, um nur ein Beispiel zu nennen. Die Verwendung von Spektren zur effizienten Beschreibung von Phänomenen in der natürlichen Welt ist eines der fundamentalen Werkzeuge von Naturwissenschaftlern und Ingenieuren. Um so wichtiger ist es, davon die mathematischen Grundlagen zu kennen.

Wir werden für die erstaunlichen Ergebnisse, die wir in dieser Theorie erzielen können, gerne einen kleinen Preis bezahlen, und zwar den Preis der Abstraktheit, die es aber erlauben wird, Ergebnisse mit einer Eleganz zu formulieren oder überhaupt zu sehen, die bei direkter Betrachtung der beabsichtigten Objekten nicht immer möglich wäre.

Wirklich untersuchen wollen wir Endomorphismen von Banachräumen verschiedener Gestalt, aber weite Teile der Theorie hängen gar nicht davon ab, dass es um *Abbildungen* zwischen normierten Vektorräumen geht. An einigen Stellen, und auch jetzt am Anfang, spielt nur die algebraische und die topologische Struktur der Endomorphismenalgebra eine Rolle, und wir entwickeln die ersten Grundzüge der Theorie deshalb alleine auf dieser Grundlage, ohne die Vektorräume, auf denen die Endomorphismen definiert sind, überhaupt eines Blickes zu würdigen.

Das *vereinfacht* die Betrachtung, weil wir unnötige Details aus ihr weglassen, aber es *erschwert* die Intuition.

Dies ist kein großes Problem, denn wir entfernen uns nicht sehr weit in die Wolken, und wenn Sie die Füße wieder auf die Erde setzen wollen, können Sie sich jederzeit daran festhalten, dass die (mit kleinen Buchstaben bezeichneten) Elemente der in diesem Kapitel betrachteten ***Banachalgebren*** im Standardbeispiel die (sonst mit großen Buchstaben bezeichneten) Endomorphismen eines vorgegebenen Banachraums darstellen und als solche gesehen werden können, wenn die abstrakte Sichtweise zu ermüdend ist.

Definition 8.1 Sei $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Eine ***normierte Algebra*** über $\mathbf{K}$ ist eine $\mathbf{K}$-Algebra A mit einem Einselement $\mathbf{1}$ (aber nicht unbedingt mit kommutativer Multiplikation), versehen mit einer Norm $\| \; \|$, die A zu einem normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum macht, und so dass zusätzlich gilt:

a) $\|xy\| \le \|x\| \, \|y\|$ für alle x und $y \in A$.

b) $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Eine ***Banachalgebra*** über $\mathbf{K}$ ist eine normierte $\mathbf{K}$-Algebra A, deren Norm vollständig ist. D.h., eine Banachalgebra ist eine normierte Algebra, die als normierter Vektorraum ein Banachraum ist.

Das Standardbeispiel und sicher das wichtigste Beispiel ist die Endomorphismenalgebra eines normierten Vektorraums oder Banachraums.

Beispiel 8.2 Sei $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $V \neq \{0\}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbf{K}$.

Dann ist $A := \operatorname{End} V$ eine normierte $\mathbf{K}$-Algebra und wenn V ein Banachraum ist, dann ist $\operatorname{End} V$ eine Banachalgebra über $\mathbf{K}$.

Beweis. $\operatorname{End} V = L(V, V)$ ist ein normierter Vektorraum über $\mathbf{K}$ und ist mit der Verknüpfung als Multiplikation eine $\mathbf{K}$-Algebra. Der Identitätsendomorphismus id_V ist ein Einselement.

Bedingung 8.1 a) ist einfach die Aussage von Lemma 1.33 c), und offensichtlich gilt $\|\mathrm{id}_V\| = 1$. Folglich ist $\operatorname{End} V$ eine normierte Algebra über $\mathbf{K}$.

Wenn V ein Banachraum ist, dann ist auch $\operatorname{End} V$ ein Banachraum und somit eine Banachalgebra, nach Lemma 1.55 d). ■

Bemerkung 8.3 Sei A eine normierte Algebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

a) Bedingung a) in Definition 8.1 impliziert, dass die Ringmultiplikation in A stetig ist.

b) Die Abbildung $c \mapsto c \cdot \mathbf{1}$ bettet $\mathbf{K}$ isometrisch als Unterkörper in den Ring A ein (oder anders gesagt, wir können $\mathbf{K}$ als normierten Unterkörper von A auffassen, wenn wir jeden Skalar $c \in \mathbf{K}$ mit $c \cdot \mathbf{1} \in A$ identifizieren).

Denn wegen Bedingung b) in Definition 8.1 ist $\mathbf{1}$ nicht der Nullvektor in A, und weil A ein $\mathbf{K}$-Vektorraum ist, ist jeder Vektor $\neq 0$ linear unabhängig und die Abbildung $\alpha\colon \mathbf{K} \longrightarrow A$ mit $\alpha(c) := c\cdot\mathbf{1}$ ist deshalb injektiv. Sie ist auch $\mathbf{K}$-linear und somit ein Homomorphismus der additiven Gruppen. Weil A eine Algebra ist, gilt

$$(c \cdot \mathbf{1})(d \cdot \mathbf{1}) = (cd) \cdot \mathbf{1}^2 = (cd) \cdot \mathbf{1} \qquad \text{für alle } c \text{ und } d \in \mathbf{K},$$

und α ist auch ein Ringhomomorphismus, also ein Körperisomorphismus von $\mathbf{K}$ auf $\operatorname{Bild} \alpha = \mathbf{K} \cdot \mathbf{1} \subseteq A$.

Und α ist eine Isometrie, weil für jedes $c \in \mathbf{K}$ gilt

$$\|c \cdot \mathbf{1}\| = |c|\,\|\mathbf{1}\| = |c| \cdot 1 = |c|\,.$$

Definition 8.4 Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei A eine normierte Algebra über $\mathbf{K}$.

Wir nennen ein Element $x \in A$ eine ***Einheit***, oder sagen x ist ***invertierbar***, wenn es ein Element $y \in A$ gibt (genannt das ***Inverse*** zu x und notiert mit x^{-1}), so dass

$$xy = yx = \mathbf{1}.$$

Bemerkung 8.5 a) Sei V ein normierter Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Ein Endomorphismus T von V ist genau dann invertierbar in der Algebra $\operatorname{End} V$, wenn T bijektiv ist und eine stetige Umkehrabbildung hat.

Wenn V ein Banachraum ist, dann ist $\operatorname{End} V$ eine Banachalgebra und ein Endomorphismus $T \in \operatorname{End} V$ ist genau dann invertierbar, wenn T bijektiv ist, denn in diesem Fall besagt der Banachsche Isomorphiesatz, dass T^{-1} automatisch stetig ist.

b) Wenn V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum ist, dann sind für einen Endomorphismus $T \in \operatorname{End} V$ die vier Bedingungen T *ist invertierbar*; T *ist injektiv*; T *ist surjektiv*; T *ist bijektiv* zueinander äquivalent. (Im endlichdimensionalen Fall ist jede lineare Abbildung stetig und wir brauchen uns um die Stetigkeit der Umkehrabbildung nicht zu kümmern.)

Für unendlichdimensionale normierte Vektorräume sind diese Bedingungen alle verschieden.

c) Sei A eine normierte Algebra. Die invertierbaren Elemente von A bilden unter der Ringmultiplikation von A eine multiplikative Gruppe $G(A)$ mit $\mathbf{1}$ als neutrales Element.

d) Sei A eine normierte Algebra und sei $x \in A$ ein invertierbares Element. Dann ist x^{-1} eindeutig bestimmt.

e) Sei A eine normierte Algebra. Das Element $x \in A$ besitze ein Rechtsinverses y mit $xy = \mathbf{1}$ und ein Linksinverses z mit $zx = \mathbf{1}$. Dann ist x invertierbar.

f) Sei A eine normierte Algebra und sei $x \in A$ ein invertierbares Element. Dann ist $\|x\| \neq 0$ und es ist

$$\left\|x^{-1}\right\| \geq \frac{1}{\|x\|}. \tag{8.1}$$

Beweis. Die meisten dieser Aussagen sind entweder sehr einfach oder sind wohlbekannt aus der *Linearen Algebra.* Das gilt insbesondere für a), b) und c), während d) eine bekannte elementare Aussage aus der Gruppentheorie ist und in diesem Sinne aus c) folgt.

Auch e) ist sehr leicht, denn wenn y ein Rechtsinverses und z ein Linksinverses zu x ist, dann ist

$$y = \mathbf{1}y = (zx)y = z(xy) = z\mathbf{1} = z$$

und $y = z$ ist ein beidseitiges Inverses zu x.

f): Weil $xx^{-1} = \mathbf{1}$, erhalten wir aus Bedingungen 8.1 a) und b), dass

$$1 = \|\mathbf{1}\| = \left\|xx^{-1}\right\| \le \|x\| \left\|x^{-1}\right\|. \tag{8.2}$$

Insbesondere kann $\|x\|$ nicht 0 sein (und somit ist auch $x \neq 0$) und die Behauptung folgt, wenn wir Ungleichung (8.2) durch die positive Zahl $\|x\|$ dividieren. ■

Die invertierbaren Elemente einer Banachalgebra haben auch schöne topologische Eigenschaften, die wir kurz ausarbeiten wollen.

Lemma 8.6 *Sei A ein Banachalgebra über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $x \in A$ mit $\|x\| < 1$.*

Dann gilt

a) $\mathbf{1} - x$ ist invertierbar und

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{8.3a}$$

Ferner,

$$\left\|(\mathbf{1} - x)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|x\|}. \tag{8.3b}$$

b)

$$\left\|(\mathbf{1} - x)^{-1} - \mathbf{1} - x\right\| \le \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}. \tag{8.4}$$

Beweis. a): Sei $c := \|x\|$. Weil $c < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$, und somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut in A.

Weil A ein Banachraum ist, konvergiert diese Reihe nach der Aussage von Hilfssatz 4.9 auch in der Norm von A, gegen einen Grenzwert y.

Wir behaupten, dass $(\mathbf{1}-x)y = \mathbf{1}$. Dazu sei

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k$$

die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Wir haben $y = \lim_{n\to\infty} s_n$ und weil nach Bemerkung 8.3 a) die Multiplikation in A stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}-x)y = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{1}-x)s_n &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} x^k - x\sum_{k=0}^{n} x^k\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1} - x^{n+1} = \mathbf{1},\end{aligned}$$

denn aus Definition 8.1 a) folgt, dass $\|x^{n+1}\| \le c^{n+1} \to 0$.

Weil $\mathbf{1}-x$ mit den Potenzen von x und somit mit den Partialsummen s_n kommutiert, haben wir auch

$$y(\mathbf{1}-x) = \lim_{n\to\infty} s_n(\mathbf{1}-x) = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{1}-x)s_n = \mathbf{1}$$

und $\mathbf{1}-x$ ist invertierbar mit inversem Element y. Das beweist (8.3a).

Aus der Dreiecksungleichung folgt für jedes n, dass

$$\|s_n\| \le \sum_{k=0}^{n} \left\|x^k\right\| \le \sum_{k=0}^{n} c^k \le \sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-\|x\|},$$

und weil $y = \lim_{n\to\infty} s_n$ und die Norm stetig ist, gilt auch $\|y\| \le 1/\big(1-\|x\|\big)$. Das beweist Ungleichung (8.3b).

b): Es gilt

$$(\mathbf{1}-x)^{-1} - \mathbf{1} - x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \mathbf{1} - x = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x^2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^2(\mathbf{1}-x)^{-1}.$$

Aus Bedingung 8.1 a) und Ungleichung (8.3b) folgt nun

$$\left\|(\mathbf{1}-x)^{-1} - \mathbf{1} - x\right\| \le \|x\|^2 \left\|(\mathbf{1}-x)^{-1}\right\| \le \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}.$$

$\blacksquare$

Lemma 8.7 *Sei A eine Banachalgebra und sei $x \in A$ invertierbar. Sei*

$$d := \frac{1}{\|x^{-1}\|}.$$

Für jedes $y \in A$ mit

$$\|y - x\| < d$$

ist y invertierbar, und es gilt

$$y^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{-1}(x-y)\right)^n x^{-1}. \tag{8.5}$$

Ferner gilt die Abschätzung

$$\left\|y^{-1} - x^{-1} + x^{-1}(y-x)x^{-1}\right\| \le \frac{\|x^{-1}\|^3 \|y-x\|^2}{1 - \|x^{-1}\| \|y-x\|}. \tag{8.6}$$

Beweis. Sei $z := \mathbf{1} - x^{-1}y = x^{-1}(x-y)$. Wir haben

$$\|z\| \le \left\|x^{-1}\right\| \|x - y\| = \left\|x^{-1}\right\| \|y - x\| < \left\|x^{-1}\right\| \frac{1}{\|x^{-1}\|} = 1.$$

Nach Lemma 8.6 a) ist $\mathbf{1} - z = x^{-1}y$ invertierbar (und deshalb ist auch $y = x(\mathbf{1} - z)$ invertierbar), und das inverse Element zu $\mathbf{1} - z$ ist gegeben durch

$$(\mathbf{1} - z)^{-1} = (x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{-1}(x-y)\right)^n.$$

Multiplikation von Rechts mit x^{-1} liefert Gleichung (8.5).

Wenden wir die Abschätzungen aus Lemma 8.6 b) und Definition 8.1 a) an, finden wir

$$\begin{aligned}
\left\|y^{-1} - x^{-1} + x^{-1}(y-x)x^{-1}\right\| &= \left\|\left(y^{-1}x - \mathbf{1} - x^{-1}(x-y)\right)x^{-1}\right\| \\
&\le \left\|y^{-1}x - \mathbf{1} - x^{-1}(x-y)\right\| \left\|x^{-1}\right\| \\
&= \left\|(\mathbf{1} - z)^{-1} - \mathbf{1} - z\right\| \left\|x^{-1}\right\| \\
&\le \frac{\|z\|^2 \|x^{-1}\|}{1 - \|z\|}.
\end{aligned}$$

Den Bruch können wir weiter abschätzen. Weil $\|z\| \le \|x^{-1}\| \|x - y\| < 1$, ist der Zähler

$$\|z\|^2 \left\|x^{-1}\right\| \le \left\|x^{-1}\right\|^2 \|x - y\|^2 \left\|x^{-1}\right\| = \left\|x^{-1}\right\|^3 \|y - x\|^2,$$

für den Nenner gilt

$$1 - \|z\| \geq 1 - \left\|x^{-1}\right\| \|x - y\| = 1 - \left\|x^{-1}\right\| \|y - x\| > 0,$$

und folglich ist

$$\frac{\|z\|^2 \|x^{-1}\|}{1 - \|z\|} \leq \frac{\|x^{-1}\|^3 \|y - x\|^2}{1 - \|x^{-1}\| \|y - x\|}.$$

Das liefert dann insgesamt die Abschätzung (8.6). ■

Korollar 8.8 *Sei A eine Banachalgebra. Die Gruppe $G(A)$ der invertierbaren Elemente von A ist eine offene Teilmenge von A, und die Abbildung*

$$x \mapsto x^{-1}$$

ist ein Homöomorphismus von $G(A)$ auf sich.

Beweis. Sei $x \in G(A)$ und setze $d := 1/\left\|x^{-1}\right\|$. Nach Lemma 8.7 ist der offene Ball $B_d(x) \subseteq G(A)$. Also ist $G(A)$ offen.

Ferner, mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Abschätzung (8.6) finden wir für jedes $y \in B_d(x)$, dass

$$\begin{aligned}\left\|y^{-1} - x^{-1}\right\| &\leq \left\|y^{-1} - x^{-1} + x^{-1}(y - x)x^{-1}\right\| + \left\|x^{-1}(x - y)x^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{\|x^{-1}\|^3 \|y - x\|^2}{1 - \|x^{-1}\| \|y - x\|} + \left\|x^{-1}\right\|^2 \|y - x\|\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist (für festes x) eine stetige Funktion von $\|y - x\| < d$ und wird 0 wenn $\|y - x\| = 0$. Daraus folgt

$$\lim_{y \to x} \left\|y^{-1} - x^{-1}\right\| = 0$$

und somit ist $y \mapsto y^{-1}$ stetig bei x. Das gilt für jedes invertierbare x und die Inversenfunktion ist global stetig auf $G(A)$.

Weil $\left(y^{-1}\right)^{-1} = y$, ist die Inversenfunktion ihre eigene Umkehrabbildung und somit bijektiv $G(A) \longrightarrow G(A)$ und in beiden Richtungen stetig, d.h., sie ist ein Homöomorphismus. ■

Die Einheiten einer Banachalgebra sind sehr schöne Elemente, aber sie haben alle das gleiche qualitative Verhalten und stellen eine Art „Regelfall“ dar, der gerade deshalb nicht besonders aussagekräftig ist.

Wir interessieren uns mehr für die *Nichteinheiten* der Banachalgebra, und entleihen oder verallgemeinern einen Trick aus der linearen Algebra, um mit ihrer Hilfe die Struktur beliebiger Elemente der Banachalgebra zu erhellen. Der „Trick“, auf den wir uns hier beziehen, ist die Konstruktion der Eigenwerte eines Endomorphismus T. Sie beschreiben im Wesentlichen das Verhalten des Endomorphismus in seiner einfachsten Normalform, wo T auf geeignete Unterräume durch Multiplikation mit einem Skalar operiert.

Die Ähnlichkeit der Operation von T mit der Multiplikation mit einem Skalar λ wird dadurch verraten, dass $T - \lambda\,\mathrm{id}$ ausgeartet ist und kein Automorphismus ist; die Skalaren λ, für die das gilt, sind in der endlichdimensionalen linearen Algebra gerade die Eigenwerte.

In einer beliebigen Banachalgebra A können wir die gleiche Idee verwenden, um das Verhalten der Elemente $x \in A$ mit dem Verhalten der Skalare $c \cdot \mathbf{1}$ für $c \in \mathbf{K}$ zu vergleichen und so die „Struktur“ von x ein wenig aufzuschlüsseln (und wenn die Banachalgebra eine Endomorphismenalgebra ist, haben wir somit die Eigenwertkonstruktion aus der linearen Algebra in die Funktionalanalysis hinein verallgemeinert).

Definition 8.9 Sei A eine Banachalgebra über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $x \in A$.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{K}$ heißt ***regulär*** für x, wenn $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ invertierbar ist.

Die Menge

$$\rho(x) := \{\, \lambda \in \mathbf{K} \mid \lambda \text{ ist regulär für } x \,\} \tag{8.7}$$

heißt die ***Resolventenmenge*** von x, und die Abbildung

$$\begin{aligned} R_x \colon \rho(x) &\longrightarrow A \\ \lambda &\longmapsto (x - \lambda \cdot \mathbf{1})^{-1} \end{aligned} \tag{8.8}$$

heißt die ***Resolventenfunktion*** von x.

Wie schon gesagt interessiert uns eher das *Komplement* der Resolventenmenge. Die Menge

$$\sigma(x) := \mathbf{K} \setminus \rho(x) \tag{8.9}$$

heißt das ***Spektrum*** von x.

Wir werden auch die topologischen und metrischen Eigenschaften, darunter die eventuelle Beschränktheit dieser Menge untersuchen. Die Zahl

$$r(x) := \sup\big\{\, |\lambda| \;\big|\; \lambda \in \sigma(x) \,\big\} \tag{8.10}$$

(die unendlich sein könnte) heißt der ***Spektralradius*** von x.

Wenn es nötig ist, die Algebra A in der Notation zu kennzeichnen, schreiben wir $\rho_A(x)$ statt $\rho(x)$, R_x^A statt R_x, $\sigma_A(x)$ statt $\sigma(x)$ und $r_A(x)$ statt $r(x)$.

Wenn die Banachalgebra A, wie es oft der Fall sein wird, eine Endomorphismenalgebra ist, kann man mehrere qualitativ verschiedene Arten von Spektralwerten unterscheiden.

Definition 8.10 Sei V ein Banachraum über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei $T \in \operatorname{End} V$.

Sei $\lambda \in \sigma(T)$.

Dann ist $T - \lambda \operatorname{id}_V$ kein invertierbarer Endomorphismus (und nach Bemerkung 8.5 a) heißt das einfach, dass $T - \lambda \operatorname{id}_V$ nicht bijektiv ist), aber welcher Teil der Bijektivität verletzt ist, und wie gravierend er verletzt ist, unterscheidet drei Klassen von Spektralwerten:

Wir setzen

$$\sigma_p(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; T - \lambda \operatorname{id}_V \text{ nicht injektiv} \right\} \tag{8.11a}$$

$$\sigma_c(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; T - \lambda \operatorname{id}_V \text{ injektiv, nicht surjektiv, aber mit dichtem Bild} \right\} \tag{8.11b}$$

$$\sigma_r(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; T - \lambda \operatorname{id}_V \text{ injektiv, nicht surjektiv, ohne dichtes Bild} \right\}. \tag{8.11c}$$

Das Spektrum $\sigma(T)$ ist die disjunkte Vereinigung dieser drei Klassen (da die genannten Fälle sich nicht überlappen und alle Situationen abdecken, in denen $T - \lambda \operatorname{id}_V$ nicht bijektiv ist).

Die Menge $\sigma_p(T)$ heißt das ***Punktspektrum*** von T.

Das Punktspektrum besteht aus genau den Spektralwerten λ, für die es einen Vektor $v \neq 0 \in V$ gibt mit $(T - \lambda \operatorname{id}_V)(v) = 0$, also mit

$$T(v) = \lambda v. \tag{8.12}$$

Die Spektralwerte λ im Punktspektrum nennt man deshalb ***Eigenwerte*** von T, und jeden Vektor $v \neq 0$ so dass (8.12) gilt nennt man einen ***Eigenvektor*** für den Eigenwert λ.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ, zusammen mit dem Nullvektor, bilden einen abgeschlossenen Untervektorraum von V, nämlich den Untervektorraum

$$E_\lambda(T) := \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id}_V),$$

den wir den ***Eigenraum*** von T zum Eigenwert λ nennen.

Die Menge $\sigma_c(T)$ heißt das ***stetige Spektrum*** oder das ***kontinuierliche Spektrum*** von T, und $\sigma_r(T)$ nennt man das ***Restspektrum*** von T.

Die Namen für die drei Spektralarten stammen aus der Beobachtung, dass typischerweise das Punktspektrum aus isolierten Punkten besteht und das stetige Spektrum aus abgeschlossenen Intervallen, während das Restspektrum leer ist. Aber das ist keine immer geltende Regel; es gibt durchaus Ausnahmen.

Wenn V endlichdimensional ist, besteht das ganze Spektrum nur aus dem Punktspektrum und das stetige Spektrum und Restspektrum sind leer, denn jeder injektiver Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ist automatisch bijektiv. Aber im unendlichdimensionalen Fall können alle drei Spektralteilmengen nichtleer sein.

Spektren auf Banachalgebren, die nicht aus Endomorphismen bestehen, scheinen sich zunächst nicht auf die gleiche Weise in Klassen zerlegen zu lassen, denn die Elemente der Banachalgebra sind ja keine Abbildungen und können nicht „injektiv" oder „surjektiv" sein.

Es geht aber dennoch, und um die anschließende Diskussion der abstrakten Banachalgebren etwas schmackhafter zu machen, wollen wir kurz zeigen, dass jede Banachalgebra isometrisch isomorph zu einer Algebra von Endomorphismen ist (nicht unbedingt zu einer Algebra der Form $\operatorname{End} V$, aber zu einer abgeschlossenen Unteralgebra einer solchen Algebra).

Definition 8.11 Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und seien A und B Algebren über $\mathbf{K}$.

Eine Abbildung $\varphi\colon A \longrightarrow B$ nennt sich ein ***Algebrahomomorphismus***, wenn φ eine $\mathbf{K}$-lineare Abbildung ist, so dass

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{8.13}$$

für alle x und $y \in A$.

Lemma 8.12 *Sei A eine Banachalgebra über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.*

Wie in Beispiel 8.2 ist auch $\operatorname{End} A$, die Familie der stetigen $\mathbf{K}$-linearen Selbstabbildungen von A, eine Banachalgebra.

Für jedes $a \in A$ definieren wir einen Endomorphismus

$$T_a \in \operatorname{End} A$$

durch die Vorschrift

$$T_a(b) := ab \qquad \text{für jedes } b \in A.$$

Wir bezeichnen mit

$$E\colon A \longrightarrow \operatorname{End} A$$

die Zuordnung $a \mapsto T_a$. Sie ist ein isometrischer Algebrahomomorphismus, und

$$E(\mathbf{1}) = T_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_A\,.$$

Das Bild $E(A)$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $\operatorname{End} A$.

Diese Unteralgebra ist eine Banachalgebra und ist als normierte Algebra isometrisch isomorph zu A.

Beweis. Aus dem Distributivgesetz folgt, dass T_a für jedes $a \in A$ wirklich ein Endomorphismus von A ist.

Die Tatsache, dass die Zuordnung $a \mapsto T_a$ ein Algebrahomomorphismus ist, folgt sofort ebenfalls aus dem Distributivgesetz und aus dem Assoziativgesetz für die Multiplikation in A.

Dass $T_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_A$ ist trivial.

Wir müssen zeigen, dass E eine Isometrie ist, d.h., dass $\|T_a\| = \|a\|$.

Aus Definition 8.1 a) folgt, dass $\|a\|$ eine Schranke für T_a ist und somit

$$\|T_a\| \leq \|a\|.$$

Aber weil $\big\|T_a(\mathbf{1})\big\| = \|a\mathbf{1}\| = \|a\| = \|a\|\,\|\mathbf{1}\|$, gibt es keine kleinere Schranke und wir haben die Gleichheit.

Weil A vollständig ist und E eine Isometrie ist, ist auch $E(A)$ vollständig und ist deshalb eine abgeschlossene Unteralgebra von $\operatorname{End} A$.

Als vollständige normierte Algebra ist sie eine Banachalgebra, und als Isometrie ist E injektiv und somit ein Algebraisomorphismus auf ihr Bild. ■

Diese Einbettung erhält die Spektren, so dass man die Spektralwerte eines Elements $x \in A$ doch durch die Merkmale der gleichen Werte im Spektrum des entsprechenden Endomorphismus T_x klassifizieren kann.

Lemma 8.13 *Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Für jedes $x \in A$ ist*

$$\sigma_A(x) = \sigma_{\operatorname{End} A}(T_x). \tag{8.14}$$

Beweis. Weil E ein Algebrahomomorphismus ist, ist

$$T_{x-\lambda\cdot\mathbf{1}} = T_x - \lambda \cdot \mathbf{1}$$

für jedes $\lambda \in \mathbf{K}$, und um zu zeigen, dass λ genau dann zum Spektrum von x gehört, wenn es zum Spektrum zu T_x gehört, reicht es zu zeigen, dass ein Element $a \in A$ genau dann invertierbar ist, wenn T_a ein invertierbarer Endomorphismus ist.

Die Richtung „$\Rightarrow$“ folgt leicht aus der Tatsache, dass E ein Algebrahomomorphismus ist, und wir müssen nur die Richtung „$\Leftarrow$“ beweisen.

Sei $a \in A$ und T_a sei ein invertierbarer Endomorphismus von A. Dann gibt es einen Endomorphismus S mit

$$ST_a = \mathrm{id}_A = T_a S.$$

Aus der linken Gleichheit folgt, dass T_a injektiv ist, und aus der rechten folgt, durch Anwendung auf $\mathbf{1} \in A$, dass

$$\mathbf{1} = T_a\big(S(\mathbf{1})\big) = aS(\mathbf{1}),$$

so dass $b := S(\mathbf{1})$ zumindest ein Rechtsinverses für a ist.

Es ist aber auch ein Linksinverses, denn es gilt

$$T_a(ba) = a(ba) = (ab)a = \mathbf{1} \cdot a = a = T_a(\mathbf{1}).$$

Weil T_a injektiv ist, haben wir

$$ba = \mathbf{1}$$

und a ist invertierbar, wenn T_a invertierbar ist. ∎

Lemma 8.13 erlaubt uns nun, den Begriff des Eigenwerts auch auf Elemente einer abstrakten komplexen Banachalgebra zu übertragen.

Definition 8.14 Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $x \in A$. Sei $\lambda \in \mathbf{K}$.

Wir nennen λ einen ***Eigenwert*** von x, wenn λ ein Eigenwert des Endomorphismus T_x ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn $T_{x-\lambda\cdot\mathbf{1}}$, also die Linksmultiplikation mit $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$, nicht injektiv ist, d.h., wenn $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ ein linker Nullteiler ist.

Vorsicht! Durch Übertragung auf eine umgebende Endomorphismenalgebra konnten wir den Begriff des Eigenwerts für die Elemente einer beliebigen Banachalgebra A sinnvoll machen, aber wenn A schon eine Endomorphismenalgebra war, dann war dieser Begriff dort ja schon definiert, und man muss sich überlegen, ob die „neue“ Definition sich mit der alten deckt.

Das ist aber tatsächlich so:

Bemerkung 8.15 Sei $V \neq \{0\}$ ein Banachraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $A = \operatorname{End} V$ und $\alpha \in A$.

Die Endomorphismen $\alpha \in \operatorname{End} V$ und $T_\alpha \in \operatorname{End} A$ haben die gleichen Eigenwerte.

Beweis. Wir werden zeigen, dass α genau dann nicht injektiv ist, wenn T_α nicht injektiv ist. (Wendet man diese Tatsache auf $\alpha - \lambda \cdot \mathbf{1}$ an, erhält man, dass $\lambda \in \mathbf{K}$ genau dann ein Eigenwert von α ist, wenn es ein Eigenwert von T_α ist.)

„⇒“: Sei $w \neq 0 \in \operatorname{Ker} \alpha$. Weil $V \neq \{ 0 \}$ gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein nichtverschwindendes lineares Funktional $\varphi \in V^*$, und wir definieren einen nichtverschwindenden Endomorphismus $\beta \in A = \operatorname{End} V$ durch

$$\beta(v) := \varphi(v)w$$

für jedes $v \in V$.

Weil $w \in \operatorname{Ker} \alpha$ gilt offensichtlich

$$\alpha \circ \beta = \mathbf{0}$$

und wir haben $\mathbf{0} \neq \beta \in \operatorname{Ker} T_\alpha$.

„⇐“: Sei $\beta \neq \mathbf{0} \in \operatorname{Ker} T_\alpha \subseteq A = \operatorname{End} V$.

Dann gibt es ein Element $v \in V$ mit $\beta(v) \neq 0 \in V$. Weil

$$T_\alpha(\beta) = \alpha \circ \beta = \mathbf{0},$$

haben wir

$$\alpha\big(\beta(v)\big) = 0$$

und folglich ist $0 \neq \beta(v) \in \operatorname{Ker} \alpha$. ■

Nach diesem Exkurs kehren wir zu den abstrakten Banachalgebren zurück. Wir wollen jetzt die Topologie der Spektren näher beschreiben und nebenbei wichtige Grundeigenschaften der mit Spektren verbundenen Mengen und Funktionen ausarbeiten.

Lemma 8.16 *Sei A eine Banachalgebra und sei $x \in A$.*

Die Resolventenmenge $\rho(x)$ ist offen in $\mathbf{K}$ und das Spektrum $\sigma(x)$ ist abgeschlossen in $\mathbf{K}$.

Beweis. Die Abbildung $\alpha\colon \mathbf{K} \longrightarrow A$ gegeben durch $\alpha(\lambda) := x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ ist offensichtlich stetig, und weil die Menge $G(A)$ der invertierbaren Elemente von A offen ist nach Korollar 8.8, ist auch

$$\rho(x) = \alpha^{-1}\big(G(A)\big)$$

offen in $\mathbf{K}$.

Als Komplement dieser Menge ist $\sigma(x)$ abgeschlossen. ■

Hilfssatz 8.17 *Sei A eine Banachalgebra und sei $x \in A$ und $\lambda \in \sigma(x)$. Dann ist*

$$\lambda^n \in \sigma(x^n)$$

für jedes $n \geq 1 \in \mathbf{N}$.

Beweis. Aus der Faktorisierung

$$x^n - \lambda^n \cdot \mathbf{1} = (x - \lambda \cdot \mathbf{1}) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k x^{n-k-1} = \Bigl(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k x^{n-k-1}\Bigr)(x - \lambda \cdot \mathbf{1})$$

sieht man, dass wenn y ein Linksinverses zu $x^n - \lambda^n \cdot \mathbf{1}$ ist, dann ist das Element $y \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k x^{n-k}$ ein Linksinverses zu $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$, und wenn w ein Rechtsinverses zu $x^n - \lambda^n \cdot \mathbf{1}$ ist, dann ist $\Bigl(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k x^{n-k}\Bigr) w$ ein Rechtsinverses zu $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$.

Mit Bemerkung 8.5 e) folgt nun, dass wenn $x^n - \lambda^n \cdot \mathbf{1}$ invertierbar ist, dann ist es auch $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ und $\lambda \in \rho(x)$ in Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Also ist $x^n - \lambda^n \cdot \mathbf{1}$ nicht invertierbar, und wir haben $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. ■

Definition 8.18 Sei A eine Banachalgebra über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei U eine offene Teilmenge von $\mathbf{K}$ und $f\colon U \longrightarrow A$ eine Funktion.

Wir nennen f ***analytisch***, wenn f lokal in U eine konvergente Potenzreihenentwicklung in A besitzt. Das bedeutet genauer, dass es für jedes $c \in U$ eine offene Menge W um $0 \in \mathbf{K}$ gibt mit $c + W \subseteq U$, und eine Folge $\{\, a_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ aus A, so dass für jedes $z \in W$ gilt

$$f(c + z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n, \tag{8.15}$$

wo die Reihe in der Norm von A konvergiert.

Man beachte, dass die Produkte in den Summanden mit der skalaren Multiplikation des $\mathbf{K}$-Vektorraums A gebildet werden, denn $z^n \in \mathbf{K}$ und $a_n \in A$.

Satz 8.19 *Sei A eine Banachalgebra über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei $x \in A$.*

Die Resolventenfunktion R_x ist eine analytische (und stetige) Funktion von der offenen Menge $\rho(x) \longrightarrow A$, und sie hat lokal um $c \in \rho(x)$ die Potenzreihenentwicklung

$$R_x(c + z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \bigl(R_x(c)\bigr)^{n+1} \tag{8.16}$$

für alle $z \in \mathbf{K}$ mit

$$|z| < \frac{1}{\bigl\|R_x(c)\bigr\|}.$$

Man beachte, dass die Koeffizienten

$$a_n = \bigl(R_x(c)\bigr)^{n+1}$$

der Potenzreihe alle $\neq 0$ sind, denn sie sind Potenzen des invertierbaren Elements $R_x(c)$ und deshalb selber invertierbar.

Beweis. Sei $c \in \rho(x)$, so dass $x - c \cdot \mathbf{1}$ invertierbar ist, und sei

$$d := \frac{1}{\|(x - c \cdot \mathbf{1})^{-1}\|} = \frac{1}{\|R_x(c)\|}.$$

Wenn $|z| < d$, dann ist

$$\Big\|\big(x - (c+z) \cdot \mathbf{1}\big) - (x - c \cdot \mathbf{1})\Big\| = \Big\|-z \cdot \mathbf{1}\Big\| = |z| \, \|\mathbf{1}\| = |z| < d,$$

und die Voraussetzungen von Lemma 8.7 sind erfüllt für $x - c \cdot \mathbf{1}$ in der Rolle von x und $x - (c+z) \cdot \mathbf{1}$ in der Rolle von y.

Insbesondere ist $c + z \in \rho(x)$.

In der Rolle von „$x - y$" in Lemma 8.7 fungiert $z \cdot \mathbf{1}$, und Formel (8.5) mit den entsprechenden Substitutionen gibt uns die in A konvergente Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} R_x(c+z) = \big(x - (c+z) \cdot \mathbf{1}\big)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((x - c \cdot \mathbf{1})^{-1}(z \cdot \mathbf{1})\big)^n (x - c \cdot \mathbf{1})^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \big((x - c \cdot \mathbf{1})^{-1}\big)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \big(R_x(c)\big)^{n+1} \end{aligned}$$

für jedes $z \in \mathbf{K}$ mit $|z| < d$. Das zeigt, dass R_x analytisch ist und die Potenzreihenentwicklung (8.16) hat.

Man kann zeigen, dass analytische Abbildungen automatisch stetig sind, aber auch ohne Kenntnis dieser Tatsache folgt direkt aus Korollar 8.8, dass R_x stetig ist (denn $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ hängt stetig von λ ab). ∎

Korollar 8.20 *Sei A eine Banachalgebra und sei $x \in A$ und $c \in \rho(x)$.*

Für $z \in \mathbf{K}$ mit

$$|z| < \frac{1}{\|R_x(c)\|}$$

gilt

$$R_x(c+z) = R_x(c)\big(\mathbf{1} - zR_x(c)\big)^{-1} = \big(\mathbf{1} - zR_x(c)\big)^{-1} R_x(c). \tag{8.17}$$

Beweis. Wenn $|z| < 1/\big\|R_x(c)\big\|$, dann ist $\big\|zR_x(c)\big\| < 1$. Aus Formel (8.3a) in Lemma 8.6 a) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(zR_x(c)\big)^n = \big(\mathbf{1} - zR_x(c)\big)^{-1}. \tag{8.18}$$

Weil die Multiplikation in A stetig ist und weil z ein Skalar ist, können wir aus der Reihe in Formel (8.16) einen Faktor $R_x(c)$ nach rechts oder nach links herausziehen und in jedem Summanden den verbleibenden Faktor $z^n\big(R_x(c)\big)^n$ als $\big(zR_x(c)\big)^n$ schreiben. Mit (8.18) erhalten wir dann

$$R_x(c+z) = R_x(c)\sum_{n=0}^{\infty} \big(zR_x(c)\big)^n = R_x(c)\big(\mathbf{1} - zR_x(c)\big)^{-1},$$

und entsprechend für die andere Reihenfolge der Faktoren. ■

Wir sind jetzt in der Lage, Näheres über das Aussehen des Spektrums zu sagen. Wie bei Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume werden die wichtigen Details aber erst über $\mathbf{C}$ sichtbar und können im reellen Fall verborgen bleiben.

Lemma 8.21 *Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $x \in A$.*

a) Dann gilt

$$r(x) \leq \|x\|\,. \tag{8.19}$$

Insbesondere ist $\sigma(x)$ beschränkt und sogar kompakt.

b) Sei $\lambda \in \mathbf{K}$ mit $|\lambda| > \|x\|$. Dann ist $\lambda \in \rho(x)$ nach Teil a) und es gilt

$$R_x(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{8.20}$$

Ferner,

$$\big\|R_x(\lambda)\big\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}. \tag{8.21}$$

Beweis. Wenn $|\lambda| > \|x\|$, dann ist $\|x/\lambda\| < 1$ und nach Lemma 8.6 a) ist $\mathbf{1} - x/\lambda$ invertierbar und

$$(\mathbf{1} - x/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}.$$

Da jeder Skalar außer 0 invertierbar ist, bleibt die Invertierbarkeit erhalten, wenn man mit $-\lambda$ multipliziert. Also ist auch $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ invertierbar, oder in anderen Worten $\lambda \in \rho(x)$, mit

$$R_x(\lambda) = (x - \lambda \cdot \mathbf{1})^{-1} = \left(-\lambda\left(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Damit ist Formel (8.20) in Teil b) bewiesen, und weil jedes λ mit $|\lambda| > \|x\|$ zu $\rho(x)$ gehört, ist $r(x) \leq \|x\|$.

Folglich ist $\sigma(x)$ beschränkt, und da $\sigma(x)$ nach Lemma 8.16 auch abgeschlossen ist, ist das Spektrum kompakt in $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Das vollendet den Beweis von Teil a).

Für $|\lambda| > \|x\|$ finden wir aus Abschätzung (8.3b) in Lemma 8.6 a), dass

$$\left\|R_x(\lambda)\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \|x/\lambda\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|},$$

und das beweist die noch ausstehende Behauptung (8.21) in Teil b). ∎

Satz 8.22 *Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{C}$ und sei $x \in A$.*

a) Das Spektrum $\sigma(x)$ ist eine nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbf{C}$.

b) Für den Spektralradius gilt

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}. \tag{8.22}$$

Beweis. a): Nach Lemma 8.21 a) ist $\sigma(x)$ kompakt in $\mathbf{C}$. Wir müssen nur noch zeigen, dass $\sigma(x)$ nichtleer ist.

Wenn $x = \mathbf{0}$, dann ist $\sigma(x) = \{0\}$, denn jeder Skalar außer 0 ist invertierbar.

Sei nun $x \neq \mathbf{0}$, und nehmen wir an, dass $\sigma(x) = \emptyset$. Dann ist die Resolventenfunktion R_x auf ganz $\mathbf{C}$ definiert und ist dort analytisch mit der lokalen Darstellung (8.16).

Sei $\alpha \in A^*$ ein beliebiges stetiges lineares Funktional auf A. Für jedes $c \in \mathbf{C}$ und für z nahe 0 in $\mathbf{C}$ folgt aus (8.16) und der Stetigkeit und Linearität von α, dass

$$\begin{aligned}(\alpha \circ R_x)(c+z) &= \alpha\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \big(R_x(c)\big)^{n+1}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\Big(z^n \big(R_x(c)\big)^{n+1}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\Big(\big(R_x(c)\big)^{n+1}\Big) z^n \qquad (8.23)\end{aligned}$$

und dies ist eine konvergente komplexe (und nicht mehr A-wertige) Potenzreihe in z nahe $0 \in \mathbf{C}$.

Das bedeutet, dass $\alpha \circ R_x$ eine auf ganz $\mathbf{C}$ definierte analytische, also holomorphe Funktion ist, in anderen Worten, eine ***ganze Funktion*** in der Terminologie der Funktionentheorie.

Sei $\lambda \in \mathbf{C}$ mit $|\lambda| > \|x\|+1$. Nach Abschätzung (8.21) aus Lemma 8.21 b) ist

$$\big\|R_x(\lambda)\big\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} < 1.$$

Folglich ist $|(\alpha \circ R_x)(\lambda)| < \|\alpha\|$ und $\alpha \circ R_x$ ist beschränkt *außerhalb* der abgeschlossenen Scheibe $D_{\|x\|+1}(0) \subseteq \mathbf{C}$. Wegen Stetigkeit ist $\alpha \circ R_x$ auch *auf* dieser kompakten Scheibe beschränkt.

Das heißt, dass die ganze Funktion $\alpha \circ R_x$ auf $\mathbf{C}$ insgesamt beschränkt ist. Der Satz von Liouville aus der Funktionentheorie besagt, dass jede beschränkte ganze Funktion konstant ist.

Wir haben somit gezeigt, dass $\alpha \circ R_x$ konstant ist für jedes $\alpha \in A^*$.

Das ist nur möglich, wenn in der lokalen Potenzreihendarstellung (8.23) für $\alpha \circ R_x$ alle Koeffizienten bis auf den 0-ten verschwinden, d.h., es muss

$$\alpha\Big(\big(R_x(c)\big)^{n+1}\Big) = 0$$

sein für alle $n \geq 1$, für jedes $c \in \mathbf{C}$ und für jedes $\alpha \in A^*$.

Das widerspricht dem Satz von Hahn-Banach, denn die Elemente $R_x(c)$ und ihre Potenzen sind invertierbar und somit $\neq \mathbf{0}$, und man findet nach Korollar 2.7 für jedes solche Element v ein stetiges lineares Funktional α mit $\alpha(v) \neq 0$.

Wir haben also aus der Annahme $\sigma(x) = \emptyset$ einen Widerspruch hergeleitet. Folglich ist das Spektrum nichtleer.

b): Statt der Resolventenfunktion $R_x(\lambda)$ betrachten wir die im Kreis $|\lambda| = 1$ gespiegelte Funktion

$$S_x(\mu) := \mathbf{R}_x\Big(\frac{1}{\mu}\Big).$$

Aus Formel (8.20) in Lemma 8.21 b) sehen wir, dass S_x die Potenzreihenentwicklung

$$S_x(\mu) = -\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} x^n \tag{8.24}$$

hat, die für jedes μ mit $1/|\mu| > \|x\|$, also mit

$$|\mu| < \frac{1}{\|x\|}$$

konvergiert, natürlich auch für $\mu = 0$ und dort gegen den Wert $\mathbf{0}$.

Sei $\alpha \in A^*$ ein beliebiges stetiges lineares Funktional auf A. Aus der Stetigkeit und Linearität von α folgt, dass $\alpha \circ S_x$ analytisch ist wo immer S_x analytisch ist, und für $|\mu| < 1/\|x\|$ hat $\alpha \circ S_x$ die konvergente Potenzreihenentwicklung

$$(\alpha \circ S_x)(\mu) = -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(x^n)\mu^{n+1}. \tag{8.25}$$

Da die Funktion $z \mapsto 1/z$ auf $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, ist $\alpha \circ S_x$ auf der ganzen Menge

$$\left\{ \frac{1}{\lambda} \;\middle|\; \lambda \in \rho(x),\; \lambda \neq 0 \right\}$$

holomorph, und insbesondere ist sie holomorph für alle μ mit $1/\mu > r(x)$, also auf der offenen Scheibe um 0 mit Radius $1/r(x)$.

Wir erinnern an ein paar wichtige Fakten aus der Funktionentheorie:

- Jede komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ besitzt einen ***Konvergenzradius*** d mit der Eigenschaft, dass die Potenzreihe innerhalb der offenen Scheibe von Radius d um 0 absolut konvergiert und auf dem Komplementen der abgeschlossenen Scheibe von Radius d divergiert.

- Der Konvergenzradius wird durch die ***Hadamardsche Formel***

$$\frac{1}{d} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

  gegeben.

- Ist f eine auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ definierte holomorphe Funktion, und ist $z_0 \in \Omega$ und d der Radius der größten in Ω enthaltenen offenen Kreisscheibe um z_0, so ist der Konvergenzradius der Taylorreihe von f entwickelt um z_0 mindestens d.

Die Funktion $\alpha \circ S_x$ ist holomorph auf der offenen Scheibe um 0 mit Radius $1/r(x)$ und hat auf der eventuell kleineren offenen Scheibe mit Radius $1/\|x\|$ die Potenzreihenentwicklung (8.25), die somit ihre Taylorreihenentwicklung um 0 sein muss und deshalb Konvergenzradius $d \geq 1/r(x)$ hat.

Die Reihe (8.25) hat aber offensichtlich den gleichen Konvergenzradius wie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(x^n)\mu^n,$$

da beide Reihen bei 0 konvergieren und überall sonst die neue Reihe einfach minus die Reihe (8.25) geteilt durch $\mu \neq 0$ ist.

Nach der Hadamardschen Formel ist also

$$\frac{1}{d} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha(x^n)\right|}.$$

Für jede reelle Zahl $0 \leq s < d$ ist somit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha(s^n x^n)\right|} = \frac{s}{d} < 1,$$

woraus folgt, dass für alle bis auf endlich viele n gilt $\sqrt[n]{\left|\alpha(s^n x^n)\right|} < 1$ und deshalb auch $\left|\alpha(s^n x^n)\right| < 1$.

Dann ist aber die Menge

$$\left\{ \alpha(s^n x^n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$$

insgesamt beschränkt für jedes positive $s < d$ und für jedes $\alpha \in A^*$.

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit Satz 2.9 folgt, dass die Menge

$$\{ s^n x^n \mid n \in \mathbf{N} \}$$

beschränkt ist und somit auch die Normen $\|s^n x^n\| = s^n \|x^n\|$ beschränkt sind für jede positive reelle Zahl $s < d$, und weil $1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C}$ für jedes $C > 0$ haben wir

$$1 \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{s^n \|x^n\|} = s \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

für jedes positive $s < d$.

Daraus erhalten wir

$$1 \geq d \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

oder

$$r(x) \geq \frac{1}{d} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Um eine Abschätzung in der anderen Richtung zu erhalten, erinnern wir uns an Hilfssatz 8.17, aus dem folgt, dass $r(x^n) \geq \big(r(x)\big)^n$ für jedes $n \geq 1$. Unter Verwendung von (8.19) in Lemma 8.21 a) erhalten wir daraus

$$r(x) \leq \sqrt[n]{r(x^n)} \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

für jedes $n \geq 1$, und Gleichung (8.22) folgt nun aus den Ungleichungen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r(x) \leq \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Alle Terme in dieser Kette müssen gleich sein, und insbesondere stimmen lim sup und lim inf überein und können als lim geschrieben werden. ∎

Das bedeutende an der Spektralradiusformel (8.22) ist, dass sie eine Verbindung zwischen den algebraischen Eigenschaften von Elementen einer Banachalgebra (die Ausdehnung ihres Spektrums) und den metrischen Eigenschaften (die Normen der Potenzen des Elements) herstellt.

So einfach die Aussage von Satz 8.22 aussieht, wie wir am Beweis erkennen konnten ist er kein trivialer Satz. Er hat aber eine ganze Anzahl von schönen und teils einfachen Konsequenzen.

Satz 8.23 (Gelfand-Mazur) *Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{C}$. Nach Bemerkung 8.3 b) bilden die Elemente $\lambda \cdot \mathbf{1}$ für $\lambda \in \mathbf{C}$ einen zu $\mathbf{C}$ isometrisch isomorphen Unterkörper von A.*

Wenn in A jedes Element $x \neq \mathbf{0}$ invertierbar ist, dann ist A gleich diesem Unterkörper und insbesondere ist $A \cong \mathbf{C}$.

Beweis. Sei $\alpha\colon \mathbf{C} \longrightarrow A$ die isometrische Einbettung gegeben durch $\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \mathbf{1}$ für jedes $\lambda \in \mathbf{C}$. Wir haben zu beweisen, dass α surjektiv ist wenn $\mathbf{0}$ das einzige nichtinvertierbare Element von A ist.

Sei $x \in A$. Nach Satz 8.22 a) ist $\sigma(x) \neq \emptyset$ und es gibt deshalb ein Element $\lambda \in \mathbf{C}$, so dass $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ nicht invertierbar ist.

Nach Voraussetzung bedeutet das $x - \lambda \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$, also $x = \alpha(\lambda)$. Deshalb ist α surjektiv. ∎

Wir wollen die topologische Struktur des Spektrums ein bisschen genauer untersuchen und nebenbei untersuchen, wie das Spektrum eines Elements sich ändert, wenn man die umgebende Algebra größer oder kleiner macht (also durch eine Oberalgebra oder eine Unteralgebra ersetzt).

Bemerkung 8.24 Sei B eine Banachalgebra über $\mathbf{C}$ und sei A eine abgeschlossene Unteralgebra von B, die das Element $\mathbf{1} \in B$ enthält. (Mit diesen Voraussetzungen ist auch A eine Banachalgebra.)

Sei $x \in A \subseteq B$. Das Spektrum von x kann davon abhängen, in welcher umgebenden Algebra wir x betrachten, aber generell gilt zumindest

a) $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$;

b) $r_B(x) = r_A(x)$.

Teil a) gilt auch, wenn der Koeffizientenkörper $\mathbf{R}$ ist.

Beweis. a) folgt aus der Tatsache, dass jede Einheit von A offensichtlich auch eine Einheit von B ist.

Dies gilt natürlich unabhängig vom Koeffizientenkörper.

b) folgt aus der Spektralradiusformel (8.22), denn in diese Formel für $r(x)$ gehen nur die Normen der Potenzen von x ein und diese sind in beiden Algebren gleich. ∎

Für die Beschreibung der topologischen Struktur des Spektrums müssen wir kurz an ein paar weitere Begriffe aus der Topologie erinnern.

Definition 8.25 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen X ***zusammenhängend***, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt, von denen man leicht sieht, dass sie alle äquivalent sind:

a) X lässt sich nicht schreiben als die disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen.

b) X lässt sich nicht schreiben als die disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen.

c) X und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von X, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ nennt man ***zusammenhängend***, wenn sie in der Unterraumtopologie $\mathcal{T}_A$ ein zusammenhängender topologischer Raum ist.

Beispiel 8.26 Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbf{R}$ sind genau die Intervalle (egal ob offen, abgeschlossen, oder halboffen, wobei die Endpunkte an den offenen Enden auch unendlich sein können, d.h., auch Strahlen und ganz $\mathbf{R}$ zählen als Intervalle).

Diese bekannte Tatsache wollen wir hier aus Zeitgründen nicht beweisen.

Aus Definition 8.25 folgt sofort:

Hilfssatz 8.27 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine nichtleere zusammenhängende Teilmenge von X. Sei $\mathcal{U}$ eine Familie von disjunkten offenen Mengen mit*

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Menge $U_0 \in \mathcal{U}$, so dass $A \subseteq U_0$.

Beweis. Weil A nichtleer ist, gibt es eine Menge $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $A \cap U_0 \neq \emptyset$.

Die Menge

$$V_0 := \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ U \neq U_0}} U$$

ist offen in X und disjunkt von U_0, und wir haben

$$A = (A \cap U_0) \cup (A \cap V_0),$$

wobei die „Summanden“ dieser Vereinigung offen sind in der Unterraumtopologie auf A, mit $A \cap U_0 \neq \emptyset$.

Weil A zusammenhängend ist, muss also $A \cap V_0 = \emptyset$ sein, und A ist ganz enthalten in U_0. ■

Hieraus erhalten wir sehr leicht folgendes bekanntes

Lemma 8.28 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei A_λ eine zusammenhängende Teilmenge von X, so dass*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

Dann ist die Vereinigung

$$A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

zusammenhängend.

Beweis. Sei $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

Wenn A nicht zusammenhängend ist, dann gibt es offene Mengen U und $V \subseteq X$, so dass $A \subseteq U \cup V$ und so dass $U \cap A$ und $V \cap A$ disjunkt und nichtleer sind. Genau eine dieser Mengen enthält x; wir wählen die Bezeichnungen so, dass $x \in U$ (und $x \notin V$).

Aus Hilfssatz 8.27 folgt, dass jedes A_λ ganz in U oder ganz in V enthalten ist, aber Letzteres ist nicht möglich, weil $x \notin V$. Also ist $A_\lambda \subseteq U$ für jedes λ, und es folgt $A \subseteq U$ und $A \cap V = \emptyset$, in Widerspruch zur Annahme.

Folglich ist A zusammenhängend. ■

Definition 8.29 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $x \in X$.

Es gibt in X zusammenhängende Teilmengen um x (z.B. ist $\{x\}$ offensichtlich eine), und aus Lemma 8.28 folgt sofort, dass die Vereinigung $Z(x)$ *aller* x enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen von X wieder zusammenhängend ist.

Diese Menge ist offensichtlich die *größte* zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält. Man nennt $Z(x)$ die ***Zusammenhangskomponente*** von x in X.

Die Teilmengen $Z \subseteq X$ von dieser Gestalt nennt man die ***Zusammenhangskomponenten*** von X. Per Definition sind sie nichtleer und sie überdecken X.

Je zwei Zusammenhangskomponenten Z_1 und Z_2, die sich schneiden, sind gleich, denn ihre Vereiningung ist zusammenhängend nach Lemma 8.28 und muss in jedem Z_i enthalten sein, weil Zusammenhangskomponenten maximale zusammenhängende Mengen sind. Daraus folgt $Z_1 = Z_2$.

Zusammenhangskomponenten von X, die als Teilmengen von X verschieden sind, sind also disjunkt.

Bemerkung 8.30 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wenn zwei Punkte von X in einer gemeinsamen zusammenhängenden Teilmenge A liegen, dann sind ihre Zusammenhangskomponenten gleich.

Denn nach Konstruktion der Zusammenhangskomponenten ist A enthalten in der Zusammenhangskomponente jedes der beiden Punkte. Also schneiden sich die beiden Zusammenhangskomponenten und müssen gleich sein.

Wichtig ist noch folgende Tatsache und ihre Konsequenzen.

Lemma 8.31 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien C und D disjunkte nichtleere in $\overline{A}$ abgeschlossene Teilmengen von $\overline{A}$ mit

$$\overline{A} = C \cup D.$$

Da diese Mengen abgeschlossen sind in der Unterraumtopologie von $\overline{A}$, ist jede von ihnen der Durchschnitt einer in X abgeschlossenen Menge mit der abgeschlossenen Menge $\overline{A}$, und ist deshalb selber in X abgeschlossen.

Weil A zusammenhängend und in $C \cup D$ enthalten ist, muss einer der disjunkten und in A abgeschlossenen Mengen $C \cap A$ oder $D \cap A$ leer sein. Also ist entweder $A \subseteq D$ oder $A \subseteq C$. Wir können annehmen $A \subseteq C$.

Weil C eine abgeschlossene Obermenge von A ist und weil $\overline{A}$ die kleinste in X abgeschlossene Obermenge von A ist, haben wir $C = \overline{A}$. Dann ist aber $D = \emptyset$, in Widerspruch zur Annahme über C und D.

Solche Mengen C und D kann es also nicht geben, und deshalb ist $\overline{A}$ zusammenhängend. ■

Korollar 8.32 *Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist abgeschlossen.*

Beweis. Nach Lemma 8.31 lässt sich jede zusammenhängende Menge zu einer abgeschlossenen zusammenhängenden Menge vergrößern.

Zusammenhangskomponenten sind aber maximale zusammenhängende Mengen und müssen daher selber schon abgeschlossen sein. ■

Die Eigenschaft ***zusammenhängend*** ist wie Kompaktheit eine so genannte „topologische Eigenschaft", die unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

Lemma 8.33 *Seien X und Y topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung.*

Sei $A \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist $f(A)$ eine zusammenhängende Teilmenge von Y.

Beweis. Sei $U \subseteq f(A)$ eine Teilmenge, die in der Unterraumtopologie sowohl offen als abgeschlossen ist.

Dann ist $f^{-1}(U)$ offen und abgeschlossen in der Unterraumtopologie von $A \subseteq X$, und weil A zusammenhängend ist, ist entweder $f^{-1}(U) = \emptyset$, und dann ist $U = \emptyset$, oder $f^{-1}(U) = A$, und dann ist $U = f(A)$.

Also, jede offen und abgeschlossene Teilmenge von $f(A)$ ist leer oder ist ganz $f(A)$. Das besagt, dass $f(A)$ zusammenhängend ist. ■

Lemma 8.33 ist auch nützlich, um zusammenhängende Mengen in einem topologischen Raum zu finden oder um zu zeigen, dass gewisse Mengen zusammenhängend sind.

Beispiele 8.34 a) Für jedes Intervall $A \subseteq [0, \infty) \subseteq \mathbf{R}$ ist die Teilmenge

$$KR_A := \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; |z| \in A \right\} \subseteq \mathbf{C}$$

zusammenhängend.

Insbesondere ist jeder Kreis, jeder Kreisring, jede offene oder abgeschlossene Scheibe und der Außenraum jeder offenen oder abgeschlossenen Scheibe in $\mathbf{C}$ zusammenhängend.

b) Jede konvexe Teilmenge von $\mathbf{C}$ ist zusammenhängend.

c) In $\mathbf{C}$ sind die obere Halbebene

$$H_+ := \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

und die untere Halbebene

$$H_- := \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z < 0 \}$$

zusammenhängend.

d) Sei $B \subsetneqq \mathbf{R}$ eine echte Teilmenge von $\mathbf{R}$. Dann ist $\mathbf{C} \setminus B$ zusammenhängend.

Beweis. a): Wir können davon ausgehen, dass $A \neq \emptyset$, denn sonst ist $KR_A = \emptyset$ und es ist nichts zu beweisen. Sei also $x \in A$ und sei Z die Zusammenhangskomponente von x in KR_A.

Offensichtlich ist $A \subseteq KR_A$ und A ist zusammenhängend nach Beispiel 8.26. Also ist $A \subseteq Z$.

Für jedes $y \in A$ ist der Kreis

$$C_y := \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; |z| = y \right\}$$

von Radius y zusammenhängend, denn er ist das Bild des nach Beispiel 8.26 zusammenhängenden Intervalls $[0, 2\pi]$ unter der stetigen Abbildung $t \mapsto ye^{it}$.

Weil $y \in Z$ ist auch $C_y \subseteq Z$ für jedes $y \in A$.

Da

$$KR_A = \bigcup_{y \in A} C_y,$$

ist ganz $KR_A \subseteq Z$. Das zeigt, dass $KR_A = Z$ ist und KR_A ist deshalb zusammenhängend.

KR_A ist ein Kreis, wenn A nur aus einem Punkt ungleich 0 besteht, eine Scheibe, wenn A ein Intervall der Gestalt $[0, a)$ oder $[0, a]$ ist, und der Außenraum einer Scheibe, wenn A ein Strahl nach ∞ ist; in allen anderen Fällen außer $A = \{ 0 \}$ ist KR_A ein Kreisring.

Damit ist gezeigt, dass die genannten Mengen zusammenhängend sind, wenn sie 0 als Mittelpunkt haben. Aber durch eine Translation kann man den Mittelpunkt beliebig verschieben, und da Translationen stetig sind, sind auch Mengen der genannten Gestalt mit beliebigen Mittelpunkten zusammenhängend.

b): Sei $K \subseteq \mathbf{C}$ konvex.

Die leere Menge ist zusammenhängend. Wenn $K \neq \emptyset$, sei $x \in K$. Für jedes $y \in K$ ist die Verbindungsgerade von x nach y zusammenhängend als stetiges Bild eines Intervalls, und sie liegt ganz in K weil K konvex ist.

K ist die Vereinigung aller dieser Verbindungsgeraden, und sie haben alle den gemeinsamen Punkt x. Nach Lemma 8.28 ist K zusammenhängend.

c): Jede Halbebene ist konvex und deshalb zusammenhängend.

d):Nach Voraussetzung gibt es mindestens einen Punkt $x \in \mathbf{R} \setminus B$. Weil $B \subseteq \mathbf{R}$ liegt für jeden solchen Punkt die ganze Gerade

$$\{ x \} \times \mathbf{R} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = x \} = \{ x + it \mid t \in \mathbf{R} \}$$

in $\mathbf{C} \setminus B$, und als stetiges Bild der reellen Geraden ist sie zusammenhängend.

Für jedes $x \in \mathbf{R} \setminus B$ enthält die Zusammenhangskomponente $Z(x) \subseteq \mathbf{C} \setminus B$ die Gerade $\{ x \} \times \mathbf{R}$ und trifft sowohl die obere wie auch die untere Halbebene. Weil diese Halbebenen zusammenhängend sind nach Teil c), liegen sie ganz in $Z(x)$.

Weil das für alle $x \in \mathbf{R} \setminus B$ gilt, schneiden sich die Zusammenhangskomponenten dieser Punkte, woraus folgt, dass alle Punkte $x \in \mathbf{R} \setminus B$ die gleiche Zusammenhangskomponente haben, und diese enthält alle Punkte, die nicht auf der reellen Geraden liegen.

Somit besteht ganz $\mathbf{C} \setminus B$ aus einer einzigen Zusammenhangskomponente und ist zusammenhängend. ■

Definition 8.35 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Wir definieren den ***Rand*** von A als die Menge

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zu ∂A, wenn jede offene Menge um x die Menge A schneidet aber nicht ganz in A enthalten ist.

In anderen Worten, x gehört genau dann zu ∂A, wenn jede offene Menge um x sowohl A wie auch $X \setminus A$ schneidet.

Deshalb kann man auch schreiben

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}. \tag{8.26}$$

Bemerkung 8.36 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Aus (8.26) folgt sofort, dass

$$\partial A = \partial(X \setminus A).$$

Hilfssatz 8.37 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $U \subseteq V$ offene Teilmengen von X, so dass*

$$V \cap \partial U = \emptyset.$$

Dann ist U eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von V.

Beweis. U ist offen in X und deshalb auch offen in V, und es gilt $\mathring{U} = U$. Weil

$$V \cap \partial U = V \cap (\overline{U} \setminus \mathring{U}) = \emptyset,$$

ist

$$V \cap \overline{U} = V \cap \mathring{U} = V \cap U = U$$

und es folgt, dass U auch abgeschlossen ist in V (denn $V \cap \overline{U}$ ist abgeschlossen in V).

U ist also offen *und* abgeschlossen in V und schneidet deshalb jede Zusammenhangskomponente Z von V in einer in Z offenen und abgeschlossenen Teilmenge, und weil Z zusammenhängend ist muss also $U \cap Z = \emptyset$ oder Z sein.

Also ist jede Zusammenhangskomponente von V, die U schneidet, ganz in U enthalten und U ist eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von V. ∎

Mit diesem topologischen Hintergrund sind wir jetzt in der Lage, noch detailliertere Kenntnisse über die Menge der invertierbaren Elemente einer Banachalgebra und somit indirekt über Spektren zu erlangen.

Eine natürliche Frage ist folgende: wenn eine Folge von invertierbaren Elementen einer Banachalgebra gegen ein nichtinvertierbares Element konvergiert, woran kann es liegen, dass dieses Element nicht auch invertierbar ist? Passiert das auf zufällige Weise, oder gibt es einen festen Grund, der verhindert, dass das Limeselement ein Inverses haben kann?

Folgendes Lemma gibt darüber Auskunft.

Lemma 8.38 *Sei A eine Banachalgebra und sei $G(A)$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von A. Sei $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge aus $G(A)$, die gegen ein Element $x \in \partial G(A)$ konvergiert (weil $G(A)$ offen ist, ist x dann* nicht *invertierbar).*

Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x_n^{-1} \right\| = \infty.$$

Beweis. Das Element x kann nicht invertierbar sein, weil es sonst im Innern der offenen Menge $G(A)$ liegen würde und kein Randpunkt wäre.

Wenn $\lim_{n\to\infty} \|x_n^{-1}\| \neq \infty$, dann gibt es eine Teilfolge $\{ x_{n_k} \}_{k\in\mathbf{N}}$, so dass die $\left\|x_{n_k}^{-1}\right\|$ beschränkt sind, sagen wir durch $M > 0 \in \mathbf{R}$.

Weil die Teilfolge auch gegen x konvergiert, finden wir in ihr ein Element x_n mit

$$\left\|x_n^{-1}\right\| \leq M \qquad \text{und} \qquad \|x_n - x\| < \frac{1}{M} \leq \frac{1}{\|x_n^{-1}\|}.$$

Aus Lemma 8.7 folgt dann, dass x invertierbar ist, in Widerspruch zu unserer Feststellung am Anfang. Also gilt doch $\lim_{n\to\infty} \|x_n^{-1}\| = \infty$. ∎

Satz 8.39 *Sei B eine Banachalgebra und A eine abgeschlossene Unteralgebra von B, die das Element $\mathbf{1} \in B$ enthält. Dann gilt*

a) *$G(B) \cap \partial_A G(A) = \emptyset$ (wo ∂_A den in A gebildeten Rand bezeichnet).*

b) *$G(A)$ ist eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten der in A offenen Menge $A \cap G(B)$.*

c) *Für jedes $x \in A$ ist $\sigma_A(x)$ die Vereinigung von $\sigma_B(x)$ mit gewissen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\rho_B(x)$.*

d) *Für jedes $x \in A$ ist $\partial\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$.*

Beweis. a): Sei $x \in G(B) \cap \partial_A G(A) = \overline{G(A)} \setminus \overset{\circ}{G(A)}$.

Dann gibt es eine Folge $\{ x_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus $G(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Die Elemente x_n sind natürlich auch in B invertierbar, und weil x in B invertierbar ist und die Inversenbildung stetig ist nach Korollar 8.8, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x_n^{-1}\right\| = \left\|x^{-1}\right\| < \infty,$$

in Widerspruch zu Lemma 8.38.

Also gibt es kein solches x und $G(B) \cap \partial_A G(A) = \emptyset$.

b) ist die Aussage von Hilfssatz 8.37 angewendet auf die in A offenen Mengen $G(A)$ in der Rolle von U und $A \cap G(B)$ in der Rolle von V, die nach Teil a) die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllen.

c): Sei $x \in A$. Wir wissen nach Bemerkung 8.24 a), dass $\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$. Folglich ist $\rho_A(x) \subseteq \rho_B(x)$ und beide Mengen sind offen nach Lemma 8.16.

Die Punkte von $\partial\rho_A(X)$ gehören deshalb nicht zu $\rho_A(X)$ (da jeder Punkt von $\rho_A(X)$ ein innerer Punkt ist).

Wenn $\lambda \in \partial\rho_A(X)$, dann gibt es eine Folge $\{ \lambda_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\rho_A(x)$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$.

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} x - \lambda_n \cdot \mathbf{1} = x - \lambda \cdot \mathbf{1}$$

in A.

Weil $\lambda \notin \rho_A(x)$ ist $x - \lambda \cdot \mathbf{1} \notin G(A)$ und ist somit ein Punkt von

$$\overline{G(A)} \setminus G(A) \subseteq \partial_A G(A).$$

Nach Teil a) ist also $x - \lambda \cdot \mathbf{1} \notin G(B)$ und $\lambda \notin \rho_B(x)$. Wir haben somit gezeigt

$$\rho_B(x) \cap \partial \rho_A(x) = \emptyset. \tag{8.27}$$

Aus Hilfssatz 8.37 folgt, dass $\rho_A(x)$ eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von $\rho_B(x)$ ist.

Folglich ist $\sigma_A(x) \setminus \sigma_B(x) = \sigma_A(x) \cap \rho_B(x)$ die Vereinigung der *restlichen* Zusammenhangskomponenten von $\rho_B(x)$, und diese Komponenten müssen beschränkt sein, weil $\sigma_A(x)$ nach Lemma 8.21 a) beschränkt ist.

d) ist gleichbedeutend mit der Behauptung, dass $\partial \sigma_A(x) \cap \rho_B(x) = \emptyset$, und dies ist die Aussage der oben bewiesenen Beziehung (8.27), wenn man berücksichtigt, dass $\partial \rho_A(x) = \partial \sigma_A(x)$ wegen Bemerkung 8.36. ■

Korollar 8.40 *Sei B eine Banachalgebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei A eine abgeschlossene Unteralgebra von B, die das Element $\mathbf{1} \in B$ enthält. Sei $x \in A$.*

a) Wenn $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ und wenn $\sigma_B(x)$ zusammenhängend ist, dann ist

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(x).$$

b) Wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ und wenn $\rho_B(x)$ zusammenhängend ist, dann ist

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(x),$$

und das gilt insbesondere, wenn $\sigma_B(x) \subseteq \mathbf{R}$.

Beweis. Nach Satz 8.39 c) ist $\sigma_A(x)$ die Vereinigung von $\sigma_B(x)$ mit einigen beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\rho_B(x)$.

a): Wenn $\sigma_B(x)$ zusammenhängend ist, dann ist es ein abgeschlossenes Intervall, und das Komplement $\rho_B(x)$ besteht aus zwei Strahlen und hat keine beschränkten Zusammenhangskomponenten. Also ist $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

b): Die Resolventenmenge $\rho_B(x)$ enthält nach Lemma 8.21 a) das Komplement der abgeschlossenen Scheibe $D_{\|x\|} \subseteq \mathbf{C}$, das nach Beispiel 8.34 a) zusammenhängend ist, und sie hat deshalb mindestens eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

Wenn $\rho_B(x)$ zusammenhängend ist, dann hat sie nur diese unbeschränkte Zusammenhangskomponente, es gibt keine beschränkten Komponenten und $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Wenn $\sigma_B(x) \subseteq \mathbf{R}$, dann ist $\sigma_B(x)$ trotzdem beschränkt und deshalb nicht ganz $\mathbf{R}$, und aus Beispiel 8.34 d) folgt, dass $\rho_B(x)$ zusammenhängend ist, woraus sich der Schluss ergibt. ■

Lemma 8.41 *Sei A eine komplexe Banachalgebra und es gebe eine positive Konstante $M \in \mathbf{R}$, so dass*

$$\|x\| \, \|y\| \leq M \, \|xy\| \tag{8.28}$$

für alle x und $y \in A$.

Dann ist $A = \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$.

Beweis. Sei $x \in \partial G(A)$. Dann gibt es eine Folge $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus $G(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, und nach Lemma 8.38 ist

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x_n^{-1} \right\| = \infty.$$

Andrerseits folgt aus der Voraussetzung (8.28), dass

$$\left\| x_n \right\| \left\| x_n^{-1} \right\| \leq M$$

für jedes n, und deshalb muss gelten

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0.$$

Also ist $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \mathbf{0}$, und wir haben gezeigt, dass

$$\partial G(A) = \{ \mathbf{0} \}.$$

Nun sei $y \in A$ beliebig.

Weil $\sigma(y)$ nichtleer und kompakt ist, enthält es ein Element λ maximalen Betrags, und für dieses gilt

$$y - \lambda \cdot \mathbf{1} \in \partial G(A).$$

Denn $y - c \cdot \mathbf{1}$ hängt stetig von c ab, und beliebig nahe $c = \lambda$, für das $y - \lambda \cdot \mathbf{1} \notin G(A)$ weil $\lambda \in \sigma(y)$, gibt es Zahlen μ mit $|\mu| > |\lambda|$, für die dann $\mu \in \rho(y)$ und deshalb $y - \mu \cdot \mathbf{1} \in G(A)$.

Nach dem ersten Teil des Beweises muss also

$$y - \lambda \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

sein, also $y \in \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$. Das beweist das Lemma. ■

Satz 8.42 *Sei A ein komplexe Banachalgebra und sei $x \in A$.*

Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$, so dass $\sigma(x) \subseteq U$. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass

$$\sigma(x + y) \subseteq U \qquad \text{für jedes } y \in A \text{ mit } \|y\| < \delta.$$

Beweis. Für $\lambda \in \rho(x)$ hängt $\|R_x(\lambda)\|$ stetig von λ ab. Ferner gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} R_x(\lambda) = \mathbf{0},$$

wie man sofort aus Abschätzung (8.21) in Lemma 8.21 b) sieht.

Aus diesen beiden Tatsachen folgt, dass $\|R_x(\lambda)\|$ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge C von $\rho(x)$ beschränkt ist, denn diese Funktion von λ ist beschränkt auf einer Umgebung von ∞, also außerhalb einer genügend großen abgeschlossenen Scheibe $D \subseteq \mathbf{C}$, und sie ist beschränkt auf der abgeschlossenen und beschränkten und somit kompakten Menge $D \cap C$, weil sie stetig ist.

Insbesondere gibt es eine Zahl $M > 0$, so dass

$$\|R_x(\lambda)\| = \|(x - \lambda \cdot \mathbf{1})^{-1}\| < M \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{M} \leq \frac{1}{\|(x - \lambda \cdot \mathbf{1})^{-1}\|}$$

für alle λ in der abgeschlossenen Menge

$$\rho(x) \setminus U = \mathbf{C} \setminus U.$$

Aus Lemma 8.7 folgt direkt, dass dann $x + y - \lambda \cdot \mathbf{1}$ invertierbar ist für alle $y \in A$ mit $\|y\| < 1/M$ und für alle $\lambda \in \mathbf{C} \setminus U$.

Also ist $\sigma(x + y) \subseteq U$ für alle $y \in A$ mit $\|y\| < 1/M$. ■

Nach dieser topologischen Diskussion über Spektren wollen wir einen neuen und aussagekräftigen Bezug zwischen den Spektren der Elemente und der Ringstruktur einer Banachalgebra herstellen.

Vorher führen wir noch einen wichtigen aber leider leicht zu missverstehenden Begriff ein:

Definition 8.43 Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei A eine normierte Algebra über $\mathbf{K}$.

Ein ***Homomorphismus*** auf A ist ein nichtverschwindender Algebrahomomorphismus von A in seinen Koeffizientenkörper, d.h., ein Algebrahomomorphismus

$$\varphi\colon A \longrightarrow \mathbf{K} \qquad \text{mit} \qquad \varphi \neq \mathbf{0}.$$

Mit

$$\operatorname{Hom} A := \{\, \varphi\colon A \longrightarrow \mathbf{K} \mid \varphi \text{ ist ein Homomorphismus} \,\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Homomorphismen von A.

Der schlichte Name ***Homomorphismus*** ist also reserviert für Algebrahomomorphismen von einer normierten Algebra A in den Körper $\mathbf{K}$, und ferner nur für solche, *die nicht konstant* 0 *sind.*

Wie bei linearen Funktionalen tritt die spezielle Situation, dass die Zielalgebra der Koeffizientenkörper ist, so häufig auf, dass man diesen Zustand quasi als den *Standardzustand* behandelt, und deshalb wählt man hierfür einen kürzeren Namen.

Obwohl wir in Definition 8.43 die Stetigkeit nicht explizit verlangen, werden wir gleich sehen, dass Homomorphismen auf Banachalgebren automatisch stetig sind, so dass ein Homomorphismus auf einer Banachalgebra A definiert werden kann als ein Element $\varphi \neq \mathbf{0} \in A^*$, das Gleichung (8.13) erfüllt.

Bemerkung 8.44 Sei A eine normierte Algebra über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei φ ein Homomorphismus auf A.

Dann ist

$$\varphi(\mathbf{1}) = 1 \tag{8.29a}$$

und

$$\varphi(x) \neq 0 \qquad \text{wenn } x \in A \text{ invertierbar ist.} \tag{8.29b}$$

Beweis. Für jedes Element $y \in A$ gilt

$$\varphi(y) = \varphi(\mathbf{1}y) = \varphi(\mathbf{1})\varphi(y). \tag{8.30}$$

Weil $\varphi \neq \mathbf{0}$ gibt es Elemente $y \in A$ mit $\varphi(y) \neq 0 \in \mathbf{K}$, und für ein solches Element y kann man Gleichung (8.30) durch $\varphi(y)$ dividieren und man erhält $\varphi(\mathbf{1}) = 1 \in \mathbf{K}$.

Für jedes invertierbare Element $x \in A$ folgt nun

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(\mathbf{1}) = 1 \neq 0$$

und deshalb $\varphi(x) \neq 0 \in \mathbf{K}$. ■

Lemma 8.45 *Sei A ein Banachalgebra über dem Körper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Für jeden Homomorphismus φ auf A ist*

$$\|\varphi\| = 1, \tag{8.31}$$

und insbesondere ist jeder Homomorphismus stetig, also ein Element von A^*.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\|\varphi\| \leq 1$, indem wir zeigen, dass 1 eine Schranke für φ ist.

Ist das nicht der Fall, so gibt es ein $x \in A$ mit $\left|\varphi(x)\right| > \|x\|$. Sei $\lambda := \varphi(x)$ und sei $z := x/\lambda$.

Dann ist

$$\|z\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$$

und nach Lemma 8.6 a) ist $\mathbf{1} - z$ invertierbar.

Aber nach der Definition von z ist

$$\varphi(\mathbf{1} - z) = 1 - \varphi(z) = 1 - \frac{\varphi(x)}{\lambda} = 1 - 1 = 0,$$

in Widerspruch zu Bemerkung 8.44, (8.29b).

Also gibt es kein solches x und 1 ist eine Schranke für φ.

Weil aber $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ nach Bemerkung 8.44, (8.29a), gibt es keine kleinere Schranke und $\|\varphi\| = 1$. ■

Wir erinnern kurz an einige wichtige Grundbegriffe aus der Algebra.

Definition 8.46 Sei A eine Algebra. Eine Teilmenge $I \subseteq A$ nennt sich ein

a) ***Linksideal***, wenn I ein Untervektorraum ist und wenn für jedes $a \in A$ und jedes $x \in I$ gilt $ax \in I$, d.h., wenn

$$AI \subseteq I;$$

b) ***Rechtsideal***, wenn I ein Untervektorraum ist und wenn für jedes $a \in A$ und jedes $x \in I$ gilt $xa \in I$, d.h., wenn

$$IA \subseteq I;$$

c) ***beidseitiges Ideal***, wenn I gleichzeitig ein Rechtsideal und ein Linksideal ist.

Wenn A eine kommutative Algebra ist, dann fallen diese drei Begriffe natürlich zusammen, und man spricht dann einfach von einem ***Ideal*** von A.

Ganz A und die Menge $\{0\}$ sind offensichtlich immer beidseitige Ideale.

Bemerkung 8.47 Sei A eine Algebra mit einem Einselement $\mathbf{1}$ (zum Beispiel, eine Banachalgebra).

Wenn ein (rechts-, links- oder beidseitiges) Ideal I von A das Element $\mathbf{1}$ oder eine Einheit enthält, dann ist $I = A$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung für Rechtsideale, aber der Beweis für Linksideale ist der Gleiche, mit vertauschten Faktoren der Produkte.

Wenn $\mathbf{1} \in I$, dann ist für jedes $a \in A$ auch $a = a\mathbf{1} \in I$ und $I = A$.

Wenn ein invertierbares Element x zu I gehört, dann ist auch $\mathbf{1} = x^{-1}x$ in I und somit $I = A$. ∎

Lemma 8.48 *Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei I ein beidseitiges Ideal von A.*

Dann ist die abgeschlossene Hülle $\bar{I}$ auch ein beidseitiges Ideal.

Ferner, wenn $I \neq A$, dann ist auch $\bar{I} \neq A$.

Beweis. Schon Lemma 1.27 besagt, dass $\bar{I}$ ein Untervektorraum von A ist. Wir müssen nur zeigen, dass für jedes $x \in \bar{I}$ und jedes $a \in A$ die Elemente ax und xa zu $\bar{I}$ gehören.

Das folgt aus Bemerkung 8.3 a), denn wenn $x \in \bar{I}$, dann gibt es eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ aus I mit

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

und weil die Ringmultiplikation in A stetig ist, haben wir

$$ax = \lim_{n\to\infty} ax_n \qquad \text{und} \qquad xa = \lim_{n\to\infty} x_n a.$$

Weil I ein beidseitiges Ideal ist, gehören die Produkte ax_n und $x_n a$ zu I und somit sind ax und $xa \in \bar{I}$.

Wenn $I \neq A$, dann ist $I \cap G(A) = \emptyset$ nach Bemerkung 8.47, und weil $G(A)$ offen ist gilt auch

$$G(A) \cap \bar{I} = \emptyset.$$

Da $G(A) \neq \emptyset$ (denn $\mathbf{1}$ ist eine Einheit), ist $\bar{I} \neq A$. ∎

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, die für das, was folgt, ohnehin irrelevant wären, beschränken wir uns im Folgenden auf den kommutativen Fall.

Lemma 8.49 *Sei A eine kommutative normierte Algebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei $I \subsetneqq A$ ein echtes Ideal von A.*

Der Quotient A/I trägt eine wohldefinierte natürliche Ringmultiplikation, wenn wir für $\alpha := [a]$ und $\beta := [b]$ definieren

$$\alpha\beta := [ab],$$

und mit dieser Multiplikation und der üblichen Vektorraumstruktur des Quotienten wird A/I zu einer Algebra über $\mathbf{K}$, die das Element

$$\mathbf{1}_{A/I} := [\mathbf{1}_A]$$

als Einselement hat.

Mit der Quotientennorm ist A/I eine normierte Algebra.

Wenn A eine Banachalgebra ist und I ein abgeschlossenes Ideal ist, dann ist A/I sogar eine Banachalgebra.

Beweis. Die algebraischen Behauptungen (dass die angegebene Multiplikation wohldefiniert ist und A/I zu einem Ring und zu einer $\mathbf{K}$-Algebra macht, und dass $\mathbf{1}_{A/I}$ ein Einselement ist) lassen sich sehr leicht nachprüfen mit Standardargumenten, wie sie auch beim Nachweis der entsprechenden Eigenschaften für andere Quotienten in der Algebra auftreten. Die Wohldefiniertheit der algebraischen Operationen im Quotienten folgt dabei direkt aus den Idealeigenschaften des Nenners. Wir verzichten auf weitere Details und beweisen nur die topologischen Behauptungen.

Zunächst zeigen wir, dass die Quotientennorm A/I zu einer normierten Algebra macht. Wir wissen schon, dass der Quotient ein normierter Vektorraum ist. Seien α und β zwei Restklassen in A/I.

Für jedes $a \in \alpha$ und jedes $b \in \beta$ ist $ab \in \alpha\beta$, und nach der Definition der Quotientennorm und weil A eine normierte Algebra ist, haben wir

$$\|\alpha\beta\| \leq \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\| \, .$$

Bilden wir das Infimum über alle $a \in \alpha$ und $b \in \beta$, so erhalten wir

$$\|\alpha\beta\| \leq \inf_{a\in\alpha, b\in\beta} \|a\| \, \|b\| = \big(\inf_{a\in\alpha} \|a\|\big)\big(\inf_{b\in\beta} \|b\|\big) = \|\alpha\| \, \|\beta\| \, ,$$

und das ist Bedingung 8.1 a).

Aus der Definition der Quotientennorm folgt, dass

$$d := \left\|\mathbf{1}_{A/I}\right\| \leq \|\mathbf{1}_A\| = 1.$$

Weil $\mathbf{1}_{A/I} \neq 0$ (sonst wäre $\mathbf{1}_A \in I$ und somit $I = A$, entgegen den Voraussetzungen), ist auch $d \neq 0$.

Aber es kann nicht sein, dass $0 < d < 1$, denn sonst folgte aus der schon bewiesenen Bedingung 8.1 a) der Widerspruch

$$d = \left\|\mathbf{1}_{A/I}\right\| = \left\|\mathbf{1}_{A/I} \cdot \mathbf{1}_{A/I}\right\| \leq \left\|\mathbf{1}_{A/I}\right\| \left\|\mathbf{1}_{A/I}\right\| = d^2 < d.$$

Damit ist auch Bedingung 8.1 b) bewiesen und A/I ist eine normierte Algebra in der Quotientennorm.

Wenn A eine Banachalgebra ist und I abgeschlossen ist, ist A/I ein Banachraum nach Lemma 1.55 c), und somit auch eine Banachalgebra. ■

Definition 8.50 Sei A eine kommutative Algebra. Ein ***maximales Ideal*** von A ist ein Ideal $I \subsetneqq A$, das maximal unter den *echten* Idealen von A ist.

D.h., ein Ideal I ist maximal, wenn

$$I \subsetneqq A$$

und wenn für jedes Ideal J mit

$$I \subseteq J \subseteq A$$

gilt $J = I$ oder $J = A$.

Lemma 8.51 *Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.*

a) Jedes maximale Ideal I von A ist abgeschlossen.

b) Sei $a \in A$. Genau dann gibt es ein maximales Ideal, das a enthält, wenn $a \notin G(A)$.

c) Sei I ein Ideal von A. Genau dann ist I maximal, wenn der Quotient

$$\frac{A}{I}$$

ein Körper ist.

d) Sei $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ und sei I ein maximales Ideal von A. Dann ist

$$\frac{A}{I} \cong \mathbf{C}$$

und die kanonische Inklusion von $\mathbf{C}$ nach A/I aus Bemerkung 8.3 b) ist ein Isomorphismus.

Beweis. a) folgt sofort aus Lemma 8.48, denn für jedes Ideal I ist

$$I \subseteq \bar{I} \subseteq A$$

und wenn I maximal ist, dann ist $\bar{I} \neq A$ weil $I \neq A$, und folglich ist $\bar{I} = I$.

b): Nach Bemerkung 8.47 kann keine Einheit in einem maximalen Ideal liegen.

Wenn $x \in A$ keine Einheit ist, dann gibt es zumindest Ideale $I \neq A$, die x enthalten (zum Beispiel ist $Ax = \{ ax \mid a \in A \}$ ein solches Ideal; $\mathbf{1} \notin Ax$, weil sonst x invertierbar wäre).

Die Familie der echten Ideale, die x enthalten, geordnet durch die Inklusion, erfüllt die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas, wie man leicht nachprüft, und nach dem Zornschen Lemma gibt es dann ein maximales x enthaltendes echtes Ideal von A. Dies ist natürlich auch ein maximales Ideal im Sinne von Definition 8.50.

c): Wie aus der Algebra bekannt ist, ist der Quotient einer Algebra nach einem Ideal wieder eine Algebra und somit ein Ring (der Beweis ist ganz analog zum Beweis in der *Linearen Algebra*, dass der Quotient eines Vektorraums nach einem Untervektorraum wieder ein Vektorraum ist).

Der Ring A/I ist genau dann ein Körper, wenn jedes Element ungleich $\mathbf{0}$ invertierbar ist. Die Elemente $\alpha \neq \mathbf{0}$ von A/I sind genau die Restklassen $\alpha = [a]$ der Elemente $a \in A \setminus I$.

Genau dann ist I ein maximales Ideal, wenn für jedes $a \notin I$ das von a und I erzeugte Ideal $I + Aa$ ganz A ist.

Und das ist genau dann der Fall, wenn es ein Element $x \in I$ und ein Element $b \in A$ gibt mit $\mathbf{1} = x + ba$, oder in anderen Worten, wenn es ein $b \in A$ gibt mit

$$\mathbf{1} - ba \in I.$$

Das ist aber äquivalent dazu, dass es eine Klasse $\beta = [b]$ in A/I gibt mit $\beta\alpha = \mathbf{1}$, also dass α in A/I invertierbar ist.

I ist genau dann maximal, wenn dies für jedes $\alpha \neq \mathbf{0} \in A/I$ gilt, wie zu zeigen war.

d): Das maximale Ideal I ist nicht ganz A und ist abgeschlossen nach Teil a), und A/I ist deshalb eine Banachalgebra, nach Lemma 8.49.

Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 8.23, dem Satz von Gelfand-Mazur, angewendet auf die Banachalgebra A/I, in der jedes nichtverschwindende Element invertierbar ist. ■

Hier ist nun die idealtheoretische Version des Spektralbegriffs. Wir werden sehen, dass dieser neue Begriff des Spektrums einer gesamten Algebra (statt einzelner Elemente) einiges mit dem auf die Elemente bezogenen Spektralbegriff zu tun hat.

Definition 8.52 Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbf{C}$. Wir definieren das ***Spektrum*** von A als die Menge

$$\operatorname{Spec} A := \{\, M \subseteq A \mid M \text{ ist ein maximales Ideal von } A \,\} \tag{8.32}$$

der maximalen Ideale von A.

Lemma und Definition 8.53 *Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbf{C}$.*

Wir konstruieren eine Bijektion

$$\gamma\colon \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Hom} A$$

wie folgt.

Sei $M \in \operatorname{Spec} A$ ein maximales Ideal von A. Die kanonische Inklusion von $\mathbf{C}$ nach A/M aus Bemerkung 8.3 b), die wir hier α_M nennen wollen, ist ein Isomorphismus nach Lemma 8.51 d).

Wir schreiben π_M für die kanonische Projektion $A \longrightarrow A/M$ (die offensichtlich ein Algebrahomomorphismus ist) und definieren einen Homomorphismus $\varphi_M\colon A \longrightarrow \mathbf{C}$ durch

$$\varphi_M := \alpha_M^{-1} \circ \pi_M. \tag{8.33}$$

Wir setzen

$$\gamma(M) := \varphi_M. \tag{8.34}$$

Beweis. Als Verknüpfung von Algebrahomomorphismen ist φ_M für jedes maximale Ideal M ein Algebrahomomorphismus nach $\mathbf{C}$, und offensichtlich gilt $\varphi_M(\mathbf{1}_A) = 1 \in \mathbf{C}$, so dass $\varphi_M \neq \mathbf{0}$. Also ist φ_M tatsächlich ein Homomorphismus und γ eine wohldefinierte Abbildung nach $\operatorname{Hom} A$.

Wir haben zu zeigen, dass diese Abbildung bijektiv ist.

Es gilt

$$\operatorname{Ker} \varphi_M = \operatorname{Ker} \pi_M = M,$$

denn α_M^{-1} ist ja injektiv. Es folgt, dass die Zuordnung γ injektiv ist (denn sie hat ein Linksinverses, die Bildung des Kerns).

Jeder Homomorphismus φ ist surjektiv, denn sein Bild ist ein Untervektorraum von $\mathbf{C}$ und kann nach der Definition von „Homomorphismus“ nicht $\{\,0\,\}$ sein. Es folgt, dass φ einen Vektorraumisomorphismus

$$\overline{\varphi}\colon \frac{A}{\operatorname{Ker}\varphi} \longrightarrow \mathbf{C}$$

induziert mit
$$\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi_M. \tag{8.35}$$
Die Algebra $A/\operatorname{Ker}\varphi$ ist als Vektorraum isomorph zu $\mathbf{C}$ und deshalb komplex eindimensional, als Algebra also gleich $\mathbf{C}\cdot\mathbf{1}$ und somit ein Körper. Also ist $M := \operatorname{Ker}\varphi$ ein maximales Ideal nach Lemma 8.51 c). Wir behaupten, dass $\varphi = \varphi_M$. Wegen (8.35) reicht es zu zeigen, dass
$$\overline{\varphi} = \alpha_M^{-1}.$$

Nach Gleichung (8.29a) in Bemerkung 8.44 ist $\varphi(\mathbf{1}_A) = 1$ und deshalb
$$\overline{\varphi}(\mathbf{1}_{A/M}) = 1 = \alpha_M^{-1}(\mathbf{1}_{A/M}).$$
Weil der Vektorraum $A/M \cong \mathbf{C}$ von jedem nichtverschwindenden Element erzeugt wird, ist tatsächlich $\overline{\varphi} = \alpha_M^{-1}$, wie gewünscht.

Damit haben wir bewiesen, dass jeder Homomorphismus von der Form φ_M ist für ein geeignetes maximales Ideal M, und das zeigt, dass γ auch surjektiv ist und somit bijektiv ist. ■

Lemma 8.53 erlaubt uns, $\operatorname{Spec} A$ mit einer Topologie zu versehen.

Definition 8.54 Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbf{C}$. Vermöge der Bijektion γ zu $\operatorname{Hom} A \subseteq A^*$ und in Anbetracht von Lemma 8.45 können wir $\operatorname{Spec} A$ mit der Teilmenge
$$\operatorname{Bild}\gamma = \operatorname{Hom} A \subseteq S_1(A^*)$$
identifizieren.

Als Standardtopologie versehen wir $\operatorname{Spec} A$ (aufgefasst als Teilmenge von A^* oder von der Einheitssphäre in A^*) mit der Relativtopologie der schwach-$*$-Topologie von A^*. Nach Lemma 5.16 ist dies eine Hausdorffsche Topologie.

Lemma 8.55 *Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{C}$.*

Dann ist $\operatorname{Hom} A$ *abgeschlossen in A^* (und somit auch in $S_1(A^*)$) in der schwach-$*$-Topologie.*

Folglich ist $\operatorname{Spec} A$ *kompakt in der in Definition 8.54 definierten Topologie.*

Beweis. Sei $i\colon A \longrightarrow A^{**}$ die kanonische Abbildung.

Seien a und $b \in A$. Nach Definition der schwach-$*$-Topologie auf A^* als die Initialtopologie der Familie $i(A) \subseteq A^{**}$ sind die drei Abbildungen $i(a)$, $i(b)$ und $i(ab)$ stetig auf A^* bezüglich der schwach-$*$-Topologie, und weil $\{0\}$ abgeschlossen ist in $\mathbf{C}$ ist die Menge
$$\begin{aligned} H_{ab} &:= \left\{ \psi \in A^* \;\middle|\; \psi(ab) - \psi(a)\psi(b) = 0 \right\} \\ &:= \left\{ \psi \in A^* \;\middle|\; \big(i(ab)\big)(\psi) - \Big(\big(i(a)\big)(\psi)\Big)\Big(\big(i(b)\big)(\psi)\Big) = 0 \right\} \end{aligned}$$

eine schwach-$*$-abgeschlossene Teilmenge von A^*.

Es gilt

$$\operatorname{Hom} A = S_1(A^*) \cap \bigcap_{(a,b)\in A\times A} H_{ab},$$

da die Homomorphismen genau die $\mathbf{C}$-wertigen Algebrahomomorphismen außer $\mathbf{0}$ sind und wir wissen, dass sie alle Norm 1 haben.

Auf der rechten Seite dieser Gleichheit steht ein Durchschnitt schwach-$*$-abgeschlossener Mengen. Also ist $\operatorname{Hom} A$ abgeschlossen in der schwach-$*$-Topologie.

Als abgeschlossene Teilmenge der nach dem Satz von Alaoglu schwach-$*$-kompakten Menge $S_1(A^*)$ ist auch $\operatorname{Hom} A$ (oder der dazu homöomorphe Raum $\operatorname{Spec} A$) kompakt. ■

Eine kurze Bestandsaufnahme an dieser Stelle wäre hilfreich, um das weitere Vorgehen und seinen Zweck zu erhellen. Wir haben in den letzten Punkten durch die Einführung des Spektrums einer Algebra im Sinne von Definition 8.52 jeder komplexen kommutativen Algebra A einen kompakten Hausdorffschen topologischen Raum $\operatorname{Spec} A$ zugeordnet.

Umgekehrt kann man auf ganz einfache Weise jedem kompakten topologischen Raum eine kommutative komplexe Banachalgebra zuordnen, wie wir im nächsten Satz erläutern werden, und unser Ziel wird dann sein, zu beweisen, dass unter geringen Zusatzvoraussetzungen über die Algebra A diese Konstruktion, angewendet auf $\operatorname{Spec} A$, uns die ursprüngliche Algebra A zurückliefert. Das ist der Hauptsatz, der dieses Kapitel abschließen wird und auf den wir mit einiger Vorbereitung zusteuern werden.

Zunächst die erwähnte einfache Konstruktion.

Definition 8.56 Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$$

die $\mathbf{K}$-Algebra der stetigen Abbildungen

$$f\colon X \longrightarrow \mathbf{K},$$

wo die algebraischen Operationen in der Algebra $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ und die skalare Multiplikation mit Elementen von $\mathbf{K}$ „punktweise“ definiert sind.

D.h., die Ergebnisfunktion einer solchen Operation zwischen zwei Funktionen f und g, oder zwischen einem Skalar c und einer Funktion f, hat an jeder Stelle $x \in X$ jeweils den Wert, den man erhält, wenn man die entsprechende Operation im Körper $\mathbf{K}$ zwischen $f(x)$ und $g(x)$ oder zwischen c und $f(x)$ ausführt.

Es ist fast trivial nachzuweisen, dass diese Definition tatsächlich eine **K**-Algebra liefert.

Diese Algebra hat ein Einselement gegeben durch die konstante Funktion $\mathbf{1}$, die an jeder Stelle in X den Wert $1 \in \mathbf{K}$ annimmt.

Weil die Körper $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ eine kommutative Multiplikation haben, ist die Algebra $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ offensichtlich kommutativ.

Satz 8.57 *Sei X ein kompakter topologischer Raum.*

Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ nimmt die stetige reellwertige Funktion $|f|$ auf X ein Maximum an, weil X kompakt ist, und wir setzen

$$\|f\| := \sup_{x \in X} \bigl|f(x)\bigr| = \max_{x \in X} \bigl|f(x)\bigr|. \tag{8.36}$$

Dann ist $\| \; \|$ eine Norm auf $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ und mit dieser Norm ist $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ eine kommutative Banachalgebra über $\mathbf{K}$.

Beweis. In Definition 8.56 wurde schon begründet, warum $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ eine kommutative **K**-Algebra mit Eins ist. Wir müssen nur die Normeigenschaften nachprüfen.

Es ist leicht, nachzuprüfen, dass $\| \; \|$ eine Norm ist.

Offensichtlich ist $\|f\| \geq 0$ für jedes $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{K})$, und $\|f\| = 0$ genau dann, wenn f die konstante Nullfunktion $\mathbf{0}$ ist.

Für jeden Skalar $c \in \mathbf{K}$ ist $\|cf\| = |c| \, \|f\|$, weil für jedes $x \in X$ gilt $\bigl\|(cf)(x)\bigr\| = \bigl|cf(x)\bigr| = |c| \, \bigl|f(x)\bigr|$

Sind f und g zwei Funktionen aus $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$, so gilt für jedes $x \in X$, dass

$$\bigl\|(f+g)(x)\bigr\| = \bigl|f(x) + g(x)\bigr| \leq \bigl|f(x)\bigr| + \bigl|g(x)\bigr| \leq \|f\| + \|g\| \,.$$

Daraus folgt die Dreiecksungleichung

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \,,$$

und $\| \; \|$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$.

Entsprechend gilt für jedes $x \in X$, dass

$$\bigl\|(fg)(x)\bigr\| = \bigl|f(x)g(x)\bigr| = \bigl|f(x)\bigr|\bigl|g(x)\bigr| \leq \|f\| \, \|g\| \,.$$

Das beweist Bedingung 8.1 a) in der Definition einer normierten Algebra, und Bedingung 8.1 b) ist trivial, denn offensichtlich ist $\|\mathbf{1}\| = 1$, da die Funktion $\mathbf{1}$ konstant den Wert 1 annimmt.

Die Norm $\| \; \|$ macht $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ also zu einer normierten Algebra. Wir zeigen noch, dass die Norm vollständig ist und dass $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ eine Banachalgebra ist.

Sei $\{ f_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}(X,\mathbf{K})$. Dann ist aus der Definition der Norm klar, dass für jedes $x \in X$ die Folge $\{ f_n(x) \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{K}$ ist und konvergiert, da $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ ja vollständig sind.

Die Folge $\{ f_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert also zumindest *punktweise* gegen eine Grenzfunktion $f\colon X \longrightarrow \mathbf{K}$. Weil $\{ f_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ aber bezüglich der Norm Cauchy ist, ist sie gleichmäßig Cauchy und konvergiert deshalb gleichmäßig. Weil sie gleichmäßig konvergiert, ist die Grenzfunktion f auch stetig (das kann man genau so beweisen, wie in der reellen Analysis), und die Folge $\{ f_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert in der Norm $\|\ \|$ gegen f in $\mathcal{C}(X,\mathbf{K})$.

Folglich ist $\mathcal{C}(X,\mathbf{K})$ eine Banachalgebra. ∎

Wenn wir mit einer schon vorher gegebenen kommutativen komplexen Banachalgebra A anfangen, können wir die soeben beschriebene Konstruktion einer Banachalgebra aus einem kompakten topologischen Raum insbesondere auf den kompakten topologischen Raum $\operatorname{Spec} A$ anwenden, und es macht Sinn zu fragen, in welcher Beziehung die entstehende neue Banachalgebra $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A,\mathbf{C})$ zur ursprünglichen Algebra A steht. Das wollen wir jetzt untersuchen.

Definition 8.58 Sei A eine kommutative Algebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Das ***Jacobson-Radikal*** $\operatorname{Jac}(A)$ von A ist definiert als der Durchschnitt aller maximalen Ideale von A:

$$\operatorname{Jac}(A) := \bigcap_{M\in\operatorname{Spec} A} M.$$

Satz und Definition 8.59 *Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbf{C}$. Wir definieren eine Abbildung*

$$\tau\colon A \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A,\mathbf{C})$$

durch die Vorschrift

$$\big(\tau(a)\big)(M) := \varphi_M(a) \tag{8.37}$$

für jedes $a \in A$ und jedes maximale Ideal M von A.

Diese Abbildung ist wohldefiniert (d.h., $\tau(a)$ ist tatsächlich eine stetige Abbildung $\operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbf{C}$) und τ ist ein stetiger Algebrahomomorphismus mit $\tau(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ und mit

$$\|\tau\| = 1 \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{Ker}\tau = \operatorname{Jac}(A).$$

Beweis. Wenn $i\colon A \longrightarrow A^{**}$ die kanonische Abbildung ist, so können wir $\tau(a)$ schreiben als

$$\tau(a) = i(a) \circ \gamma,$$

wo γ die in Lemma und Definition 8.53 definierte Bijektion $\operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Hom} A \subseteq A^*$ ist.

Die Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ ist so definiert, dass γ ein Homöomorphismus nach $\operatorname{Hom} A$ ist, wenn wir $\operatorname{Hom} A$ mit der schwach-$*$-Topologie versehen, und $i(a)$ ist stetig bezüglich der schwach-$*$-Topologie nach Definition dieser Topologie. Als Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen ist also $\tau(a)$ stetig für jedes $a \in A$ und gehört deshalb tatsächlich zu $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$.

Die Abbildung τ ist ein Algebrahomomorphismus mit $\tau(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, weil die algebraischen Operationen im Funktionenraum $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$ „punktweise“ definiert sind und weil für jedes einzelne $M \in \operatorname{Spec} A$ die Abbildung φ_M ein Algebrahomomorphismus ist und nach Bemerkung 8.44, Gleichung (8.29a) gilt $\varphi_M(\mathbf{1}) = 1$.

Für jedes einzelne maximale Ideal $M \in \operatorname{Spec} A$ gilt $\|\varphi_M\| = 1$ nach Lemma 8.45, und deshalb ist

$$\big\|\varphi_M(a)\big\| \leq \|a\|$$

für jedes $a \in A$ und jedes $M \in \operatorname{Spec} A$. Hieraus folgt mit (8.37) und nach Definition der Norm auf $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$, dass $\|\tau\| \leq 1$.

Weil aber $\tau(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \in \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$ und $\mathbf{1}$ in jeder normierten Algebra Norm 1 hat, kann $\|\tau\|$ nicht kleiner als 1 sein. Es gilt also $\|\tau\| = 1$.

Insbesondere ist τ beschränkt und somit stetig.

Aus (8.33) ist klar, dass $\operatorname{Ker} \varphi_M = M$ für jedes maximale Ideal M, und somit ist nach (8.37) die Funktion $\tau(a)$ identisch 0 genau dann, wenn a in jedem maximalen Ideal M liegt, also wenn $a \in \operatorname{Jac}(A)$.

Das zeigt, dass $\operatorname{Ker} \tau = \operatorname{Jac}(A)$. ■

Die soeben definierte Abbildung τ stellt eine Verbindung her zwischen dem Spektrum der Algebra A und den Spektren der einzelnen Elementen von A.

Satz 8.60 *Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbf{C}$ und sei τ der in Definition 8.59 erklärte Homomorphismus $A \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$.*

Sei $a \in A$. Dann ist

a) $\sigma(a) = \big(\tau(a)\big)(\operatorname{Spec} A)$*;*

b) $r(a) = \big\|\tau(a)\big\|$.

Beweis. a): Nach Lemma 8.51 b) gehört ein Element von A genau dann zu mindest einem maximalen Ideal, wenn es nicht invertierbar ist.

Also ist $\lambda \in \sigma(a)$ genau dann, wenn es mindestens ein maximales Ideal M gibt mit $a - \lambda \cdot \mathbf{1} \in M$ oder gleichbedeutend, mit $\varphi_M(a - \lambda \cdot \mathbf{1}) = 0$.

Weil φ_M ein Homomorphismus ist, ist $\varphi_M(\mathbf{1}) = 1$ und die letzte Bedingung lässt sich umformen zu

$$\big(\tau(a)\big)(M) = \varphi_M(a) = \varphi_M(\lambda \cdot \mathbf{1}) = \lambda.$$

D.h., $\sigma(a)$ ist genau das Bild von $\tau(a)$. Das beweist Teil a).

b) folgt sofort aus a), da der Spektralradius das Supremum der Beträge der Elemente von $\sigma(a)$ ist und die Norm von $\tau(a)$ das Supremum der Beträge der Werte aus $\big(\tau(a)\big)(\operatorname{Spec} A)$ ist. ■

Satz 8.59 liefert eine Beziehung zwischen einer kommutativen Banachalgebra A und der Algebra der stetigen komplexwertigen Funktionen auf ihrem Spektrum, aber die Beziehung ist noch ziemlich vage — wir haben einen stetigen Algebrahomomorphismus zwischen diesen Banachalgebren und wir kennen dessen Kern genau, aber mehr nicht. Vor allem wissen wir nicht, ob der Algebrahomomorphismus τ surjektiv ist.

Mit einer kleinen Zusatzvoraussetzung über A verbessert sich die Situation erheblich und wir erhalten ein wesentlich schöneres und genaueres Ergebnis.

Bevor wir sagen, welche Zusatzvoraussetzung das ist, wollen wir an einen wichtigen und inzwischen klassischen Satz über Algebren stetiger Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum erinnern, um dann die funktionanalytische Untersuchung der angedeuteten Zusatzeigenschaft ohne Unterbrechung abhandeln zu können.

Satz 8.61 (Stone-Weierstraß) *Sei X ein kompakter topologischer Raum, sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, und sei A eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$, so dass*

a) $\mathbf{1} \in A$;

*b) A **trennt Punkte**, d.h., für je zwei verschiedene Punkte $x \neq y \in X$ gibt es eine Funktion $f \in A$, so dass $f(x) \neq f(y)$;*

c) A ist unter komplexer Konjugation abgeschlossen, d.h., für jede Funktion $f \in A$ ist auch die komplex konjugierte Funktion $\bar{f} \in A$ (diese Bedingung ist automatisch erfüllt wenn $K = \mathbf{R}$).

Dann ist A dicht in $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes wird in mehreren Schritten durchgeführt, und um zu verstehen, warum diese Schritte uns überhaupt näher zum Ziel bringen, wäre es angebracht, die Beweisstrategie kurz zu erläutern.

Man muss nicht lange nachgrübeln, um sich klar zu werden, dass dieser Satz keineswegs trivial ist. Wenn eine Funktion $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ gegeben ist, die durch Funktionen aus A zu approximieren ist, hat man zunächst überhaupt keine Vorstellung, wie man solche Approximierende aus A finden oder konstruieren kann.

Aber auch wenn die gestellte Aufgabe sehr schwierig erscheint, kann man wenigstens Ideen sammeln, die vielleicht einen winzigen Abschnitt des Lösungsweges abdecken könnten oder eine Teillösung bieten, sei sie noch so schwach, sowie Ideen, die dazu beitragen können, viele Elemente der Algebra A zu finden, die als approximierende Funktionen dienen könnten.

Zwei solche Ideen liegen auf der Hand: da die Algebra die Funktion $\mathbf{1}$ enthält, kann man f trivialerweise in der Nähe eines beliebigen Punktes aus X durch eine Funktion aus A approximieren, und weil die Algebra Punkte trennt kann man diesen Ansatz etwas modifizieren, um die Funktion f an zwei verschiedenen Stellen gut zu approximieren, wie wir sehen werden.

Die Verfeinerung dieser Idee zu einem vollständigen Beweis wird dadurch ermöglicht, dass es ein allgemeines, leistungsfähiges und gut überblickbares Verfahren gibt, um aus bekannten Funktionen in A viele neue zu gewinnen: A ist eine Algebra und deshalb unter Addition und Multiplikation und Skalierung abgeschlossen, und das heißt, dass jedes *Polynom* aus Funktionen in A wieder zu A gehört.

Weit mehr Funktionen als nur die Polynome aus A gehören zur abgeschlossenen Hülle $\overline{A}$, und diese Funktionen kann man ganz allgemein beschreiben durch eine Untersuchung der durch Polynome approximierbaren Funktionen auf $\mathbf{K}$. Wegen Bedingung c) reicht es sogar, diese Untersuchung für $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ durchzuführen.

Diese Motivation erklärt die tatsächlich eingeschlagene Vorgehensweise. Wir werden als Erstes ausgiebig untersuchen, welche stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen in $\mathbf{R}$ sich durch Polynome approximieren lassen (das ist nichts anderes als der Spezialfall des Satzes, in dem X ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbf{R}$ ist und A die Algebra der Polynomialfunktionen auf diesem Intervall ist, obwohl wir diesen Fall am Anfang des Beweises nicht komplett behandeln werden, sondern nur einige uns nützliche Funktionen in der abgeschlossenen Hülle suchen werden).

Mit Hilfe solcher Funktionen können wir dann die Funktionen aus der vorgegebenen Funktionenalgebra A innerhalb $\overline{A}$ „zurechtschnitzen“, um die Zielfunktion f zumindest in der Nähe einzelner Punkte gut zu approximieren.

Unter Ausnutzung der Kompaktheit von X, die daraus ein endliches Problem macht, kann man dann solche lokalen Näherungen, wieder mit Hilfe der Kenntnisse über polynomial approximierbare Funktionen auf $\mathbf{R}$, zu einer globalen Näherung aus $\overline{A}$ zusammenfügen.

Beginnen wir also mit dem eigentlichen Beweis. Wir beweisen den Satz zuerst nur für den Fall $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Schritt 1. Die Funktion $t \mapsto \sqrt{t}$ ist gleichmäßig approximierbar durch Polynome auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ mit $0 < a < b$.

Beweis: Die Funktion $z \mapsto \sqrt{z}$ ist holomorph an jeder Stelle in $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ und ist eine einwertige holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, wenn man für den Wert von $\sqrt{z}$ die eindeutig bestimmte Quadratwurzel mit positivem Realteil nimmt.

Folglich hat sie um jeden Punkt z mit positivem Realteil eine konvergente Potenzreihenentwicklung von Konvergenzradius mindestens $\operatorname{Re} z$, und diese Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Scheibe von Radius kleiner als dem Konvergenzradius.

Es folgt, dass auf $\mathbf{R}$ die positive Quadratwurzelfunktion $t \mapsto \sqrt{t}$ eine Potenzreihenentwicklung um $\frac{a+b}{2}$ besitzt mit Konvergenzradius $\frac{a+b}{2}$, und diese Potenzreihenentwicklung konvergiert gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq (0, a + b)$ (die Inklusion gilt weil $a > 0$).

Die Partialsummen dieser Potenzreihe sind Polynome in t, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{t}$ konvergieren.

Schritt 2. Die Funktion $t \mapsto \sqrt{t}$ ist gleichmäßig approximierbar durch Polynome auf jedem abgeschlossenen Intervall $[0, a] \subseteq \mathbf{R}$ mit $0 < a$.

Beweis: Aus Schritt 1 folgt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktion $t \mapsto \sqrt{t + \varepsilon}$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar ist auf $[0, a]$. Es reicht deshalb zu zeigen, dass diese Funktion, für ε genügend klein, die Funktion $t \mapsto \sqrt{t}$ auf $[0, a]$ gleichmäßig approximiert.

Das ist aber der Fall, denn für jedes $t \geq 0$ gilt

$$\sqrt{t + \varepsilon} - \sqrt{t} \leq \sqrt{2\varepsilon}.$$

Dies ist klar, wenn $t \leq \varepsilon$, und für $t > \varepsilon$ folgt es aus dem Mittelwertsatz, der besagt, dass

$$\sqrt{t + \varepsilon} - \sqrt{t} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\xi}}$$

für ein geeignetes $\xi \in [t, t + \varepsilon]$. Weil $\xi \geq t > \varepsilon$, ist

$$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\xi}} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} < \sqrt{2\varepsilon}$$

wie behauptet.

Schritt 3. Die Funktion $t \mapsto |t|$ ist gleichmäßig approximierbar durch Polynome auf jedem abgeschlossenen Intervall $[-a, a] \subseteq \mathbf{R}$ mit $0 < a$.

Denn $|t| = \sqrt{t^2}$, und weil $\sqrt{s}$ gleichmäßig approximierbar ist durch Polynome in s auf $[0, a^2]$, ist $\sqrt{t^2}$ gleichmäßig approximierbar durch die gleichen Polynome mit t^2 eingesetzt für s auf $[-a, a]$.

Weil t^2 ein Polynom in t ist, werden die approximierenden Polynome nach dem Einsetzen von t^2 für s auch tatsächlich wieder Polynome in t.

Schritt 4. Die Funktionen von zwei Variablen

$$(s,t) \mapsto \max(s,t) \qquad \text{und} \qquad (s,t) \mapsto \min(s,t)$$

sind für jedes $a > 0 \in \mathbf{R}$ gleichmäßig approximierbar durch Polynome in den zwei Variablen s und t auf dem Quadrat $[-a,a]^2 \subseteq \mathbf{R}^2$.

Denn

$$\max(s,t) = \frac{s+t+|s-t|}{2}$$

und

$$\min(s,t) = \frac{s+t-|s-t|}{2}.$$

Weil $|x|$ gleichmäßig approximierbar ist durch Polynome in x auf $[-2a, 2a]$, ist $|s-t|$ gleichmäßig approximierbar durch Polyonome in s und t auf $[-a,a]^2$.

Die rechten Seiten der obigen Ausdrücke für $\max(s,t)$ und $\min(s,t)$ sind Polynome in s, t und $|s-t|$ und sind stetig in $|s-t|$. Sie sind deshalb auch gleichmäßig approximierbar durch Polynome in s und t auf $[-a,a]^2$.

Schritt 5. Sei k ein positive natürliche Zahl und sei

$$h\colon \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}$$

eine Funktion, die für jedes $a > 0 \in \mathbf{R}$ gleichmäßig approximierbar ist durch Polynome auf dem Würfel $[-a,a]^k \subseteq \mathbf{R}^k$.

Dann gilt für je k Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ aus A, dass die auf X definierte Funktion

$$x \mapsto h\big(f_1(x), \ldots, f_k(x)\big)$$

zu $\overline{A}$ gehört. Wir nennen diese Funktion etwas informeller $h(f_1, \ldots, f_k)$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist X kompakt, und weil die Funktionen f_i stetig sind, sind sie beschränkt auf X. D.h., es gibt eine Zahl $a > 0 \in \mathbf{R}$, so dass $\big|f_i(x)\big| \leq a$ für jedes i, $1 \leq i \leq k$ und für jedes $x \in X$.

Weil h gleichmäßig approximierbar ist durch Polynome in k Variablen auf $[-a,a]^k$, ist $h(f_1, \ldots, f_k)$ gleichmäßig approximierbar (d.h., in der Norm von $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ beliebig gut approximierbar!) durch Polynome in $f_1, \ldots, f_k$.

Aber weil A eine Algebra ist und die konstante Funktion $\mathbf{1}$ enthält, gehört jedes Polynom in $f_1, \ldots, f_k$ wieder zu A, und es folgt, dass $h(f_1, \ldots, f_k) \in \overline{A}$.

Schritt 6. Für je zwei Funktionen f und $g \in A$ sind die Funktionen $\max(f,g)$ und $\min(f,g) \in \overline{A}$.

Dies folgt sofort aus Schritt 5 und Schritt 4.

Schritt 7. Für je endlich viele Funktionen $f_1, \dots, f_k \in \overline{A}$ sind die Funktionen $\max(f, \dots, f_k)$ und $\min(f, \dots, f_k) \in \overline{A}$.

Beweis: Es ist nicht schwer zu sehen, dass auch $\overline{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ ist, und sie erfüllt offensichtlich die Voraussetzungen dieses Satzes, weil A das tut.

Der Fall $k = 2$ von Schritt 7 folgt nun aus Schritt 6 angewendet auf die Algebra $\overline{A}$, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Der allgemeine Fall folgt durch Induktion über k.

Schritt 8. Für je zwei Punkte $x \neq y \in X$ gibt es eine Funktion $\alpha_{xy} \in A$ mit

$$\alpha_{xy}(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha_{xy}(y) = 1.$$

Denn nach Voraussetzung b) gibt es eine Funktion $\beta \in A$ mit $\beta(x) \neq \beta(y)$, und die Funktion

$$\alpha_{xy} := \frac{\beta - \beta(x)}{\beta(y) - \beta(x)}$$

hat die gewünschten Eigenschaften.

Schritt 9. Sei $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Für jedes $x \in X$ und für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $g_x \in \overline{A}$ mit $g_x(x) = f(x)$, so dass

$$g_x(y) > f(y) - \varepsilon \qquad \text{für alle } y \in X.$$

Beweis: Für jedes $z \neq x \in X$ definiere eine Funktion $\gamma_z \in A$ durch die Vorschrift

$$\gamma_z(y) := f(x) + \alpha_{xz}(y)\big(f(z) - f(x)\big) \qquad \text{für alle } y \in X,$$

und für $z = x$ sei γ_x die (ebenfalls zu A gehörende) konstante Funktion mit Wert $f(x)$. Es gilt

$$\gamma_z(x) = f(x) \qquad \text{und} \qquad \gamma_z(z) = f(z).$$

Weil die Funktionen γ_z stetig sind und $\gamma_z(z) = f(z)$, gibt es für jedes $z \in X$ eine offene Menge $U_z \ni z$, so dass $\gamma_z(y) > f(y) - \varepsilon$ für alle $y \in U_z$.

Weil X kompakt ist, gibt es endlich viele Stellen $z_1, \dots, z_k$, so dass

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{z_i},$$

und die nach Schritt 7 zu $\overline{A}$ gehörende Funktion

$$g_x := \max(\gamma_{z_1}, \gamma_{z_2}, \dots, \gamma_{z_k})$$

nimmt bei x den Wert $f(x)$ an und ist überall auf X größer als $f - \varepsilon$.

Schritt 10. Sei $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $h \in \overline{A}$ mit $\|h - f\| < \varepsilon$.

Beweis: Für jedes $x \in X$ gibt es nach Schritt 9 eine Funktion $g_x \in \overline{A}$ mit $g_x(x) = f(x)$ und $g_x(y) > f(y) - \varepsilon$ für alle $y \in X$.

Weil die Funktionen g_x stetig sind und $g_x(x) = f(x)$, gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Menge $V_x \ni x$, so dass $g_x(y) < f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in V_x$.

Weil X kompakt ist, gibt es endlich viele Stellen $x_1, \ldots, x_m$, so dass

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i},$$

und die nach Schritt 7 xu $\overline{A}$ gehörende Funktion

$$h := \min(g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_m})$$

ist an jeder Stelle $y \in X$ kleiner als $f(y) + \varepsilon$, weil dies für mindestens ein $g_{x_i}(y)$ gilt, aber sie ist an jeder Stelle $y \in X$ größer als $f(y) - \varepsilon$, weil dies für alle $g_{x_i}(y)$ gilt.

D.h., sie erfüllt, wie gewünscht, die Bedingung $\|h - f\| < \varepsilon$.

Damit haben wir den Satz bewiesen im Fall, wo $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ist.

Beweis im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{C}$: Es gilt

$$\mathcal{C}(X, \mathbf{C}) = \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) + i\mathcal{C}(X, \mathbf{R}),$$

denn jede Funktion $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ kann man zerlegen als $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ und der Realteil und der Imaginärteil von f sind stetige reellwertige Funktionen auf X.

Die Menge

$$A_{\mathbf{R}} := \left\{ f \in A \;\middle|\; f(X) \subseteq \mathbf{R} \right\}$$

ist offensichtlich eine reelle Unteralgebra von A mit $\mathbf{1} \in A_{\mathbf{R}}$.

Aus Voraussetzung c) folgt, dass für jede Funktion $f \in A$ die Funktionen

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

zu A gehören, und da sie reellwertig sind, gehören sie zu $A_{\mathbf{R}}$.

Hieraus folgt, dass auch $A_{\mathbf{R}}$ Punkte trennt, denn für je zwei verschiedene Stellen $x \neq y \in X$ gibt es eine Funktion $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$, und dann ist entweder $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ oder $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$.

Das heißt, dass $A_{\mathbf{R}} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ die Voraussetzungen des Satzes für den reellen Fall erfüllt. Aus dem schon bewiesenen reellen Fall erhalten wir, dass

$$\overline{A_{\mathbf{R}}} = \mathcal{C}(X, \mathbf{R}).$$

Somit haben wir

$$\mathcal{C}(X, \mathbf{C}) = \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) + i\mathcal{C}(X, \mathbf{R}) = \overline{A_{\mathbf{R}}} + i\overline{A_{\mathbf{R}}} \subseteq \overline{A},$$

und das zeigt, dass A dicht ist in $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$. ■

Die Zusatzvoraussetzung über die Banachalgebra A, die es uns sogar ermöglichen wird, den Homomorphismus τ als einen *Isomorphismus* zwischen A und $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$ zu identifizieren, ist folgende.

Definition 8.62 Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{C}$.
Eine ***Involution*** auf A ist eine Abbildung

$$^*\colon A \longrightarrow A,$$

so dass

a) $(a+b)^* = a^* + b^*$ für je zwei Elemente a und $b \in A$.

b) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ für jedes $\lambda \in \mathbf{C}$ und jedes $a \in A$.

c) $(ab)^* = b^* a^*$ für je zwei Elemente a und $b \in A$.

d) $(a^*)^* = a$ für jedes $a \in A$.

e) $\|a^* a\| = \|a\|^2$ für jedes $a \in A$.

Wegen Bedingung d) ist jede Involution automatisch *bijektiv.*
Eine C^****-Algebra*** ist ein Paar $(A, ^*)$, wo A eine Banachalgebra ist und * eine Involution auf A, oder salopper, eine Banachalgebra A versehen mit einer Involution.

Beispiele 8.63 a) Sei H ein Hilbertraum. Die Adjunktion ^{t} hat nach Bemerkung 7.10 und Korollar 7.13 die Eigenschaften 8.62 a)–e) und ist somit eine Involution auf der Banachalgebra $\operatorname{End} H$.

Es folgt, dass $\operatorname{End} H$ eine C^*-Algebra ist.

b) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist die Konjugation $f \mapsto \overline{f}$ eine Involution auf $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$, wie man sofort nachprüfen kann, und $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ mit dieser Involution ist eine *kommutative* C^*-Algebra.

Das wird sich in der Folge als sehr nützlich erweisen.

Bemerkung 8.64 Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt:

a) $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$.

b) $\|a^*\| = \|a\|$ für jedes $a \in A$.

c) Wenn $aa^* = a^*a$, dann ist

$$\left\|a^2\right\| = \|a\|^2 .$$

Insbesondere gilt dies für jedes $a \in A$, wenn A kommutativ ist.

Beweis. a): Da die Involution bijektiv ist, gibt es ein Element $e \in A$ mit $e^* = \mathbf{1}$.

Aus der Gleichung $\mathbf{1} \cdot e = e$ folgt mit Eigenschaft 8.62 c), dass

$$\mathbf{1} = e^* = e^* \cdot \mathbf{1}^* = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^* = \mathbf{1}^*$$

wie behauptet.

b): Sei $a \in A$. Aus 8.62 e) folgt, dass

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \, \|a\| .$$

Hieraus erhalten wir

$$\|a\| \leq \|a^*\|$$

(durch Division durch $\|a\|$ wenn $a \neq 0$, und tautologisch wenn $a = 0$).

Da diese Ungleichung aber auch für a^* an Stelle von a gilt und da $a^{**} = a$, ist auch

$$\|a^*\| \leq \|a\|$$

und wir haben somit die Gleichheit.

c): Sei $a \in A$ und a kommutiere mit a^*. Mit dieser Voraussetzung finden wir aus Eigenschaften 8.62 c)–e), dass

$$\begin{aligned}\left\|a^2\right\|^2 = \left\|\left(a^2\right)^* a^2\right\| = \left\|(a^*)^2 a^2\right\| = \|a^*aa^*a\| \\ = \left\|a^*(a^*)^* a^*a\right\| = \left\|(a^*a)^* a^*a\right\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4\end{aligned}$$

und wenn wir Quadratwurzeln ziehen, erhalten wir die gewünschte Behauptung. ■

Beispiel 8.63 a) legt es nahe, einige der markanten Eigenschaften, die Endomorphismen bezüglich ihrer Adjungierten haben können, auf C^*-Algebren und Involute zu übertragen.

Definition 8.65 Sei $(A,^*)$ eine C^*-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt

a) ***hermitesch***, wenn $a = a^*$;

b) ***unitär***, wenn $aa^* = a^*a = \mathbf{1}$;

c) ***normal***, wenn $aa^* = a^*a$.

Lemma 8.66 *Sei $(A,^*)$ eine C^*-Algebra.*

a) Für jedes $a \in A$ sind $\frac{1}{2}(a + a^*)$ und $\frac{i}{2}(a^* - a)$ hermitesch.

b) Für jedes $a \in A$ sind aa^* und a^*a hermitesch.

c) $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ sind hermitesch.

d) Für jedes $a \in A$ gibt es eindeutig bestimmte hermitesche Elemente x und $y \in A$, so dass

$$a = x + iy.$$

Beweis. a) und b) lassen sich leicht mit den Eigenschaften 8.62 a)–d) der Involution nachprüfen.

c): $\mathbf{0}^* = \mathbf{0}$ weil die Involution nach 8.62 a)–b reell-linear ist. Bemerkung 8.64 a) besagt, dass $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$.

d): Sei $a \in A$. Nach Teil a) sind die Elemente

$$x := \frac{1}{2}(a + a^*) \qquad \text{und} \qquad y := \frac{i}{2}(a^* - a)$$

hermitesch, und wie man sofort nachrechnet ist $a = x + iy$.

Sind $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ beliebige hermitesche Elemente von A mit $a = \tilde{x} + i\tilde{y}$, so ist

$$a^* = \tilde{x}^* - i\tilde{y}^* = \tilde{x} - i\tilde{y}$$

und folglich ist

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}(a + a^*) = x \qquad \text{und} \qquad \tilde{y} = \frac{i}{2}(a^* - a) = y,$$

was die Eindeutigkeit beweist. ∎

Lemma 8.67 *Sei $(A,^*)$ eine C^*-Algebra und sei $a \in A$ hermitesch.*

Dann ist $\sigma(a) \subseteq \mathbf{R}$.

Beweis. Sei $\mu \in \sigma(a)$ und sei

$$\alpha := \operatorname{Re}\mu \qquad \text{und} \qquad \beta := \operatorname{Im}\mu.$$

Für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ gilt dann offenbar $\mu + i\lambda = \alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(a + i\lambda \cdot \mathbf{1})$ und aus Ungleichung 8.19 in Lemma 8.21 a) erhalten wir

$$\left|\alpha + i(\beta + \lambda)\right| \leq \|a + i\lambda \cdot \mathbf{1}\|.$$

Ausrechnen von beiden Seiten dieser Ungleichung liefert nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\lambda + \lambda^2 &= \alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 \\
&= \left|\alpha + i(\beta + \lambda)\right|^2 \\
&\leq \|a + i\lambda \cdot \mathbf{1}\|^2 \\
&= \left\|(a + i\lambda \cdot \mathbf{1})^*(a + i\lambda \cdot \mathbf{1})\right\| \\
&= \left\|(a^* - i\lambda \cdot \mathbf{1})(a + i\lambda \cdot \mathbf{1})\right\| \\
&= \left\|(a - i\lambda \cdot \mathbf{1})(a + i\lambda \cdot \mathbf{1})\right\| \qquad (\ a \text{ hermitesch}) \\
&= \left\|a^2 + \lambda^2 \cdot \mathbf{1}\right\| \\
&\leq \left\|a^2\right\| + \left\|\lambda^2 \cdot \mathbf{1}\right\| \\
&= \left\|a^2\right\| + \lambda^2.
\end{aligned}$$

Wenn wir λ^2 von beiden Seiten abziehen, finden wir

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\lambda \leq \left\|a^2\right\|$$

für jede reelle Zahl λ.

Das ist nur möglich, wenn $\beta = 0$, also wenn $\mu \in \mathbf{R}$, wie die Aussage des Lemmas behauptet. ■

Lemma 8.68 *Sei A eine kommutative C^*-Algebra. Laut Beispiel 8.63 ist auch $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$ eine C^*-Algebra mit der Konjugation von Funktionen als die Involution.*

Der Algebrahomomorphismus

$$\tau\colon A \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$$

ist ein *-Homomorphismus, d.h., für jedes $a \in A$ gilt

$$\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}. \tag{8.38}$$

Beweis. Sei $a \in A$.

Wenn a hermitesch ist, dann ist $\tau(a)$ eine rein reellwertige Funktion, denn nach Satz 8.60 a) ist $\operatorname{Bild} \tau(a) = \sigma(a)$ und nach Lemma 8.67 ist $\sigma(a) \subseteq \mathbf{R}$ für hermitesches a.

Wenn nun a ein beliebiges Element von A ist, dann können wir nach Lemma 8.66 d) hermitesche Elemente x und y finden, so dass

$$a = x + iy$$

und somit

$$\tau(a) = \tau(x) + i\tau(y),$$

wo $\tau(x)$ und $\tau(y)$ für diese hermiteschen Elemente reellwertig sind.

Wir haben $a^* = x - iy$ und deshalb ist

$$\tau(a^*) = \tau(x) - i\tau(y) = \overline{\tau(x) + i\tau(y)} = \overline{\tau(a)},$$

womit das Lemma bewiesen ist. ■

Dieses Lemma ist aber nur eine Vorbereitung für den eigentlichen, von Gel'fand und Najmark bewiesenen Satz über die Bedeutung von τ:

Satz 8.69 (Gel'fand-Najmark) *Sei A eine kommutative C^*-Algebra. Dann ist der Algebrahomomorphismus*

$$\tau \colon A \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$$

ein isometrischer *-Isomorphismus.

Beweis. Nach Lemma 8.68 ist τ ein *-Homomorphismus.

Wir zeigen als Nächstes, dass τ eine Isometrie ist. Sei $a \in A$. Nach Satz 8.60 b) und Satz 8.22 b) ist

$$\left\|\tau(a)\right\| = r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\left\|a^{2^k}\right\|}.$$

Weil A eine kommutative C^*-Algebra ist, gilt nach wiederholter Anwendung von Bemerkung 8.64 c), dass

$$\left\|a^{2^k}\right\| = \|a\|^{2^k}$$

und folglich ist $\sqrt[2^k]{\left\|a^{2^k}\right\|} = \|a\|$ für jedes $k \in \mathbf{N}$ und wir haben

$$\left\|\tau(a)\right\| = \|a\|.$$

Wir haben damit gezeigt, dass τ eine Isometrie ist. Daraus folgt nicht nur, dass τ injektiv ist, sondern auch, dass $\tau(A)$ vollständig und somit eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$ ist.

Es ist leicht zu sehen, dass $\tau(A)$ die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt.

Schon in Definition 8.59 wurde festgestellt, dass $\tau(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ und somit gehört $\mathbf{1}$ zu $\tau(A)$.

$\tau(A)$ trennt Punkte, denn wenn M und $N \in \operatorname{Spec} A$ zwei verschiedene maximale Ideale von A sind, dann gibt es ein Element $a \in M \setminus N$ (sonst wäre $M \subseteq N$ und wegen der Maximalität wären die Ideale gleich). Weil aber $\operatorname{Ker} \varphi_M = M$ und $\operatorname{Ker} \varphi_N = N$, ist

$$\big(\tau(a)\big)(M) = \varphi_M(a) = 0 \qquad \text{und} \qquad \big(\tau(a)\big)(N) = \varphi_N(a) \neq 0,$$

so dass $\tau(a)$ für jedes $a \in M \setminus N$ die Punkte M und N aus $\operatorname{Spec} A$ trennt.

Weil τ ein *-Homomorphismus ist, ist $\tau(A)$ abgeschlossen unter Konjugation, denn für jedes Element $f := \tau(a) \in \tau(A)$ ist

$$\tau(a^*) = f^* = \overline{f}.$$

Damit sind alle drei Voraussetzungen von Satz 8.61, dem Satz von Stone-Weierstraß, nachgeprüft, und nach diesem Satz ist $\tau(A)$ dicht in $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$. Wir hatten aber schon gesehen, dass $\tau(A)$ eine abgeschlossene Unteralgebra ist. Deshalb kann sie nur dicht sein, wenn sie gleich $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$ ist, also wenn τ surjektiv ist.

Die Abbildung τ ist also

- ein *-Homomorphismus,
- eine Isometrie,
- deshalb injektiv,
- wie wir gerade gesehen haben auch surjektiv,
- deshalb umkehrbar,
- mit einer Umkehrabbildung τ^{-1}, die automatisch ein Algebraisomorphismus ist,
- die auch genau so wie τ eine Isometrie ist,
- die deshalb stetig ist,
- und die natürlich auch ein *-Homomorphismus ist.

Alle diese Punkte zusammen besagen wie behauptet, dass τ ein isometrischer *-Isomorphismus ist. ■

Mit diesem wichtigen Satz wissen wir also, dass jede kommutative C^*-Algebra eine Algebra von stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum ist, mit der üblichen C^*-Algebra Struktur solcher Funktionenalgebren.

Wir wollen diesen Satz zum vorläufigen Abschluss unserer Untersuchung von abstrakten Banachalgebren nehmen, aber natürlich sind die schönen Ergebnisse, die wir in diesem Kapitel erzielt haben, nur dann wirklich interessant, wenn es tatsächlich Situationen gibt, in denen man sie sinnvoll anwenden kann.

Gerade beim letzten Satz drängt sich diese Frage auf, denn die Endomorphismenalgebra eines Hilbertraumes, die in Anwendungen oft vorkommt, ist in der Regel keine *kommutative* C^*-Algebra.

Trotzdem ist der Satz von Gel'fand-Najmark nützlich, wenn man für einen Hilbertraum H nicht die ganze Algebra $\operatorname{End} H$ betrachtet, sondern geeignete kommutative Unteralgebren davon untersucht. Dass es solche Unteralgebren gibt, und dass man aus einer solchen Untersuchung nicht nur leere Schlüsse ziehen kann, werden die nächsten Kapitel zeigen, in denen wir zu unserem ursprünglichen Untersuchungsobjekt, Endomorphismen von Hilberträumen, zurückkehren und die in diesem Abschnitt gewonnenen allgemeinen Erkenntnisse für verschiedene Klassen von Operatoren anwenden und angepasst auf die jeweilige Situation weiter entwickeln.

Es gibt übrigens eine Version des Satzes von Gel'fand-Najmark für *nichtkommutative* C^*-Algebren, mit der Aussage, dass jede C^*-Algebra isometrisch *-isomorph ist zur Algebra $\operatorname{End} H$ für einen geeigneten Hilbertraum H.

Da unser Hauptinteresse der Untersuchung von Operatoren und nicht von C^*-Algebren gilt, auch wenn letztere bei der Untersuchung der Operatoren eine wichtige Rolle spielen, verzichten wir aus Zeitgründen auf den Beweis dieser allgemeineren Version.

Kapitel 9

Normale Elemente und das Funktionalkalkül

Das krönende Ergebnis des vorigen Kapitels, in dem wir im Rahmen der Banachalgebren die Grundlagen der Spektraltheorie entwickelt haben, ist der wichtige Struktursatz 8.69 von Gel'fand und Najmark, der besagt, dass jede kommutative C^*-Algebra sich als eine Algebra von komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffschen topologischen Raum schreiben lässt.

Diesen Satz möchten wir anwenden, um mehr über die Spektren von Operatoren auf einem Hilbertraum H zu erfahren, aber den zitierten Satz haben wir nur für *kommutative* C^*-Algebren bewiesen, und obwohl es auch eine nichtkommutative Version gibt, würde diese Version uns nicht viel weiterbringen.

Weil Algebren von Funktionen mit Werten im (kommutativen) Körper $\mathbf{C}$ auch automatisch kommutativ sind, können nichtkommutative Algebren nicht diese einfache Gestalt haben. Die allgemeinere Version des Satzes von Gel'fand-Najmark klassifiziert nichtkommutative C^*-Algebren als *Endomorphismenalgebren* geeigneter Hilberträume, und diese Beschreibung bewegt uns leider überhaupt nicht vom Fleck.

Wenn aber die Algebra $\operatorname{End} H$, wie es leider so ist, im allgemeinen nicht kommutativ ist, und wir nur einen Satz für kommutative Algebren zur Verfügung haben, was können wir tun, um den Satz dennoch anwenden zu können?

Die Idee ist ganz einfach: wir untersuchen nicht die ganze Algebra $\operatorname{End} H$ auf einmal, sondern nur einen einzelnen Operator T aus dieser Algebra, und wir beschränken unser Blickfeld auf die von T erzeugte Unteralgebra von $\operatorname{End} H$.

Sie ist sicher kommutativ, aber leider im Allgemeinen keine C^*-Algebra. Um die Involution ^{t} von $\operatorname{End} H$ auch auf die Unteralgebra wirken zu lassen, müssen wir sie nicht von T alleine, sondern von T und T^t zusammen erzeugen lassen — dann ist sie aber nicht mehr kommutativ, *es sei denn,* T und T^t kommutieren miteinander.

In anderen Worten, für ***normale Operatoren*** klappt dieser Plan, und im jetzigen Kapitel 9 wollen wir sehen, welche schöne Konsequenzen wir aus dem Satz von Gelfand-Najmark für die Spektraltheorie normaler Operatoren auf Hilberträumen ziehen können.

Da hierbei eine gewisse Vorbereitung nötig ist, bei der es immer noch nicht darauf ankommt, dass wir tatsächlich Operatoren im Sinn haben, wollen wir aus den schon in Kapitel 8 geltend gemachten Gründen so lange wie möglich noch die klare Sprache der C^*-Algebren beibehalten, d.h., wir betrachten in Kapitel 9 zunächst nicht normale Operatoren, sondern normale Elemente einer C^*-Algebra A.

Wir werden unter anderem feststellen, dass für die von einem normalen Element x und dem Element x^* erzeugte Unteralgebra von A das Spektrum der Unteralgebra im Sinne der Idealtheorie homöomorph zum Spektrum des Elements x ist. Das rechtfertigt nachträglich den Namen Spec A für die Menge der maximalen Ideale von A.

Aus der Verbindung zwischen einem normalen Element und einer Funktionenalgebra, den der Satz von Gel'fand-Najmark herstellt, lässt sich ein so genanntes ***Funktionalkalkül*** entwickeln, das es erlaubt, beliebige stetige Funktionen auf normale Elemente anzuwenden und für die neuen Elemente, die sich so gewinnen lassen, sofort die Spektren zu berechnen.

Dieses Funktionalkalkül liefert auf einfache Art neue Erkenntnisse über hermitesche und unitäre Elemente, die ja Spezialfälle der normalen Elemente darstellen.

Erst am Ende des Kapitels werden wir dann zur Betrachtung hermitescher Operatoren auf Hilberträumen übergehen, da einige unserer Ergebnisse im Rahmen der Theorie der C^*-Algebren nur den Anschein netter Kuriositäten haben und ihren wirklichen Sinn erst entfalten, wenn man sieht, dass sie wichtigen analytischen und algebraischen Eigenschaften von stetigen Operatoren entsprechen.

Dies gibt den Auftakt zu einer intensiveren Untersuchung und leistungsfähigeren Beschreibung der Spektraltheorie hermitescher Operatoren, die wir im nächsten Kapitel ausarbeiten werden.

Es sei noch bemerkt, dass die intensive weitere Beschäftigung mit C^*-Algebren in diesem Kapitel, wobei wir in Wirklichkeit die Operatortheorie auf Hilberträumen anpeilen wollen, weder eine wesentliche Einschränkung noch eine wesentliche Verallgemeinerung darstellt. Obwohl wir die nichtkommutative Version des Satzes von Gel'fand-Najmark nicht bewiesen haben, so versichert sie uns im Hintergrund, dass die genannten Theorien im Grunde die *gleiche* Theorie sind und wir in Prinzip alle Sätze über die Endomorphismenalgebren von Hilberträumen und ihre Elemente im Rahmen der C^*-Algebren beweisen können.

Die Übersetzung in die am Ende gemeinte Sprache der Hilbertraumoperatoren ist direkt und unproblematisch, da jede Endomorphismenalgebra eines Hilbertraumes nach Beispiel 8.63 a) auf kanonische und einfache Weise eine C^*-Algebra ist.

Definition 9.1 Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei A eine Algebra über $\mathbf{K}$ mit einem Einselement $\mathbf{1}$.

Eine ***Unteralgebra*** von A ist ein $\mathbf{K}$-Untervektorraum B von A, der $\mathbf{1}$ enthält und so dass für je zwei Elemente x und y von B auch xy zu B gehört. Daraus folgt, dass B selber, mit den von A geerbten Operationen der Addition, der skalaren Multiplikation und der Algebramultiplikation, eine $\mathbf{K}$-Algebra mit Einselement ist.

Wenn A eine normierte Algebra mit Norm $\|\ \|$ ist, dann ist jede algebraische Unteralgebra B von A auch eine normierte Algebra mit der Einschränkung von $\|\ \|$ auf B als Norm, wie man unmittelbar nachprüfen kann.

Wenn A eine Banachalgebra ist, dann ist eine algebraische Unteralgebra B genau dann auch eine Banachalgebra, wenn B abgeschlossen ist in der Normtopologie auf A. (Das ist im Wesentlichen die Aussage von Bemerkung 1.53.)

Eine abgeschlossene Unteralgebra einer Banachalgebra A nennen wir aus diesem Grund eine ***Banachunteralgebra***.

Wenn A eine C^*-Algebra ist mit Involution *, dann nennen wir eine Banachunteralgebra B von A eine ***C^*-Unteralgebra***, wenn für jedes $x \in B$ auch x^* in B liegt.

Die Eigenschaften a)–e) aus Definition 8.62 vererben sich automatisch auf B, so dass jede C^*-Unteralgebra von A auch tatsächlich eine C^*-Algebra ist.

Bemerkung 9.2 Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei A eine Algebra über $\mathbf{K}$ mit einem Einselement $\mathbf{1}$.

a) Man überlegt sich leicht, dass jeder Durchschnitt von Unteralgebren von A wieder eine Unteralgebra ist.

   Wenn A eine normierte Algebra ist, dann ist auch jeder Durchschnitt von abgeschlossenen Unteralgebren von A wieder eine abgeschlossene Unteralgebra.

   Insbesondere, wenn A eine Banachalgebra ist, dann ist jeder Durchschnitt von Banachunteralgebren von A wieder eine Banachunteralgebra.

Und wenn A ein C^*-Algebra ist, dann ist jeder Durchschnitt von C^*-Unteralgebren von A offensichtlich wieder eine C^*-Unteralgebra.

b) Sei A eine normierte Algebra und sei $B \subseteq A$ eine Unteralgebra. Weil die algebraischen Operationen von A alle stetig sind (für die Algebramultiplikation ist das die Aussage von Bemerkung 8.3 a)), ist die abgeschlossene Hülle von B auch eine Unteralgebra von A, wie man sehr einfach nachprüfen kann.

Die Unteralgebra $\overline{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Unteralgebra um B, weil sie überhaupt die kleinste abgeschlossene *Menge* um B ist.

Definition 9.3 Sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei A eine Algebra über $\mathbf{K}$ mit einem Einselement $\mathbf{1}$.

Sei M eine Teilmenge von A. Wir setzen

$$\langle M \rangle := \bigcap_{\substack{B \supseteq M \\ B \text{ Unteralgebra von } A}} B. \tag{9.1}$$

Man beachte, dass der Durchschnitt auf der rechten Seite nicht über eine leere Familie von Unteralgebren gebildet wird, denn zumindest die ganze Algebra A ist eine M enthaltende Unteralgebra von A.

Nach Bemerkung 9.2 a) ist $\langle M \rangle$ eine Unteralgebra von A, und nach Konstruktion enthält sie die Menge M und ist die *kleinste* Unteralgebra von A, die M enthält. Wir nennen sie die ***von M erzeugte Unteralgebra*** von A.

Wenn A eine normierte Algebra ist, dann können wir entsprechend die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von A um M erhalten als

$$\bigcap_{\substack{C \supseteq M \\ C \text{ abgeschlossene} \\ \text{Unteralgebra von } A}} C,$$

und wir nennen sie die ***von M erzeugte abgeschlossene Unteralgebra*** von A, oder wenn A eine Banachalgebra war, die ***von M erzeugte Banachunteralgebra***.

Wenn A eine C^*-Algebra ist, dann können wir die kleinste C^*-Unteralgebra von A um M erhalten als

$$\bigcap_{\substack{D \supseteq M \\ D \text{ eine } C^*\text{-} \\ \text{Unteralgebra von } A}} D$$

und wir nennen sie die ***von M erzeugte C^*-Unteralgebra*** von A.

Auch diese Durchschnitte werden nicht über eine leere Familie gebildet, da ganz A immer die gewünschten Eigenschaften hat.

Im folgenden Lemma 9.4 werden wir eine einfachere Beschreibung dieser Varianten geben, und deshalb verzichten wir hier auf die Vergabe einer Notation für sie, da geeignete Bezeichnungen sich aus dieser anderen Beschreibung ergeben werden.

Lemma und Definition 9.4 *Sei* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *oder* $\mathbf{C}$ *und sei* A *eine Algebra über* $\mathbf{K}$ *mit einem Einselement* $\mathbf{1}$. *Sei* M *eine Teilmenge von* A.

a) *Die Unteralgebra* $\langle M \rangle$ *besteht aus allen endlichen* $\mathbf{K}$*-Linearkombinationen von endlichen Produkten aus* M*, d.h., sie ist gleich dem* $\mathbf{K}$*-Untervektorraum von* A *erzeugt von der Menge*

$$P := \{ m_1 m_2 \cdots m_k \mid k \in \mathbf{N},\ m_i \in M \text{ für alle } 1 \leq i \leq k \}.$$

Zur Präzisierung soll gesagt werden, dass die Anzahl der Faktoren der Produkte in P *auch 0 sein darf, und in diesem Fall hat das „leere" Produkt den Wert* $\mathbf{1}$.

In anderen Worten, $\mathbf{1}$ *gehört automatisch zu* P *(auch wenn* M *leer ist).*

b) *Wenn* A *eine normierte Algebra ist, dann ist die von* M *erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von* A *die Algebra* $\overline{\langle M \rangle}$.

c) *Wenn* A *eine* C^**-Algebra ist, dann ist die von* M *erzeugte* C^**-Unteralgebra von* A *die Algebra*

$$A_M := \overline{\langle M \cup M^* \rangle}, \tag{9.2}$$

wo $M^* := \{ m^* \mid m \in M \}$.

Weil wir die von einer Menge erzeugte C^**-Unteralgebra oft benötigen werden, haben wir hierfür in Gleichung* (9.2) *einen kurzen Namen* A_M *eingeführt.*

Wenn die Menge M *aus einem einzigen Element* m *besteht, schreiben wir* A_m *statt* $A_{\{m\}}$.

Beweis. a): Der von P erzeugte Untervektorraum von A ist in Wirklichkeit schon eine M enthaltende Unteralgebra, denn er ist ein Untervektorraum, er enthält $\mathbf{1} \in P$ und $M \subseteq P$, und er ist abgeschlossen unter Multiplikation, weil man mit dem Distributivgesetz jedes Produkt von Linearkombinationen aus P als eine Linearkombination von Produkten aus P umschreiben kann, und solche Produkte offensichtlich wieder zu P gehören.

Jede M enthaltende Unteralgebra B von A muss nach unserer Definition 9.1 das Element $\mathbf{1}$ enthalten und muss alle endlichen Produkte aus M mit mindestens einem Faktor enthalten, weil B unter der Algebramultiplikation abgeschlossen ist und $M \subseteq B$.

Also muss B die Menge P enthalten, und als Untervektorraum von A auch den von P erzeugten Untervektorraum.

Dieser Untervektorraum ist somit die *kleinste* Unteralgebra von A, die M enthält, also die Algebra $\langle M \rangle$.

b): Jede abgeschlossene Unteralgebra C von A um M ist insbesondere eine Unteralgebra um M und enthält deshalb $\langle M \rangle$, und weil C abgeschlossen ist, auch die abgeschlossene Hülle $\overline{\langle M \rangle}$.

Diese Menge ist aber nach Bemerkung 9.2 b) selber eine abgeschlossene Unteralgebra von A und enthält M. Somit ist sie die kleinste abgeschlossene Unteralgebra um M.

c): Jede C^*-Unteralgebra D um M muss unter der Involution * abgeschlossen sein und somit auch M^* enthalten. Außerdem ist eine C^*-Algebra nach Definition immer eine Banachalgebra. Es folgt, dass $D \supseteq \overline{\langle M \cup M^* \rangle}$, die kleinste M und M^* enthaltende Banachunteralgebra von A.

Wir werden zeigen, das $\overline{\langle M \cup M^* \rangle}$ sogar eine C^*-Unteralgebra ist und deshalb die kleinste C^*-Unteralgebra von A ist, die M enthält. Wir müssen nur zeigen, dass diese Unteralgebra unter der Involution * abgeschlossen ist, da wir schon wissen, dass sie eine Banachunteralgebra ist.

Wegen der Eigenschaft 8.62 d) ist $M \cup M^*$ unter der Operation * abgeschlossen, und wegen der Eigenschaft 8.62 c) ist auch die Menge P aller endlicher Produkte aus $M \cup M^*$ unter * abgeschlossen. Die Eigenschaften 8.62 a) und 8.62 b) haben zur Folge, dass auch der von P erzeugte Untervektorraum $\langle M \cup M^* \rangle$ unter der Involution abgeschlossen ist.

Nach Bemerkung 8.64 b) ist die Involution eine Isometrie und somit stetig. Wenn also $x \in \overline{\langle M \cup M^* \rangle}$ und wenn $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge aus $\langle M \cup M^* \rangle$ ist, dann gehören auch die Elemente x_n^* zu $\langle M \cup M^* \rangle$ und deshalb ist

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n^* \in \overline{\langle M \cup M^* \rangle}.$$

Also ist $\overline{\langle M \cup M^* \rangle}$ wie gewünscht unter der Involution abgeschlossen und wir sind fertig. ■

Lemma 9.5 *Sei A eine Banachalgebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Sei $M \subseteq A$ und sei $B := \overline{\langle M \rangle}$ die von M erzeugte Banachunteralgebra von A.*

Sei C eine weitere normierte Algebra. Dann ist ein stetiger Algebrahomomorphismus

$$\varphi\colon B \longrightarrow C$$

mit $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ eindeutig bestimmt durch seine Werte auf M, d.h., wenn auch $\psi\colon B \longrightarrow C$ ein stetiger Algebrahomomorphismus ist mit

$$\varphi(\mathbf{1}) = \psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \qquad \textit{und} \qquad \varphi|M = \psi|M,$$

dann ist $\varphi = \psi$.

Beweis. Weil φ und ψ Algebrahomomorphismen sind, ist

$$D := \left\{\, x \in B \;\middle|\; \varphi(x) = \psi(x) \,\right\}$$

eine Unteralgebra von B, wovon man sich schnell überzeugt, und sie enthält nach Voraussetzung die Menge M.

Weil φ und ψ stetig sind, ist

$$D = \left\{\, x \in B \;\middle|\; \varphi(x) - \psi(x) = 0 \,\right\}$$

abgeschlossen in B, als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{\,0\,\}$ unter der stetigen Abbildung $\varphi - \psi$. Deshalb kann man D als den Durchschnitt von B mit einer abgeschlossenen Menge von A schreiben, aber weil B in A abgeschlossen ist, ist auch D in A abgeschlossen.

Wir haben $D \subseteq B$ und D ist eine abgeschlossene und somit eine Banachunteralgebra von A, die M enthält. Da B die kleinste Banachunteralgebra von A um M ist, ist $D = B$ und wir haben $\varphi \equiv \psi$ auf ganz B. ∎

Aus der Beschreibung der durch eine Menge erzeugten C^*-Unteralgebra einer C^*-Algebra in Lemma und Definition 9.4 c) erhalten wir sofort

Korollar 9.6 *Sei A eine C^*-Algebra. Sei $M \subseteq A$ und sei $B := \overline{\langle\, M \cup M^* \,\rangle}$ die von M erzeugte C^*-Unteralgebra von A.*

Sei C eine weitere normierte Algebra. Dann ist ein stetiger Algebrahomomorphismus

$$\varphi\colon B \longrightarrow C$$

mit $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ eindeutig bestimmt durch seine Werte auf $M \cup M^*$.

Wenn auch die Zielalgebra C eine C^*-Algebra ist, dann ist ein C^*-Algebrahomomorphismus $\varphi\colon B \longrightarrow C$ mit $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ eindeutig festgelegt durch seine Werte auf M, denn diese bestimmen, weil φ mit * kommutiert, eindeutig die Werte auf M^*.

Wir erinnern an die Idee, nichtkommutative Endomorphismenalgebren oder allgemeinere C^*-Algebren mit Hilfe des Satzes von Gel'fand-Najmark zu untersuchen, indem wir unsere Betrachtung auf eine kommutative C^*-Unteralgebra beschränken. Wir wissen jetzt, wie wir C^*-Unteralgebren durch Vorgabe einiger Elemente erzeugen können, aber wie können wir dafür sorgen, dass die erzeugte Algebra kommutativ ist? Hier ein paar nützliche Kriterien.

Lemma 9.7 *Sei A eine normierte Algebra und sei B eine kommutative Unteralgebra von A. Dann ist auch $\overline{B}$ kommutativ.*

Beweis. Das folgt sofort aus der Stetigkeit der Multiplikation in A. Wenn x und $y \in \overline{B}$ und wenn $\{ x_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge aus B ist und $\{ y_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine gegen y konvergierende Folge aus B ist, dann ist

$$xy = \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} y_n x_n = yx.$$

■

Lemma 9.8 *Sei A eine normierte Algebra über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei $M \subseteq A$. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

a) Die Algebra $\langle M \rangle$ ist kommutativ.

b) Die Algebra $\overline{\langle M \rangle}$ ist kommutativ.

c) Je zwei Elemente von M kommutieren miteinander.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) nach Lemma 9.7.

b) $\Rightarrow$ c) weil $M \subseteq \overline{\langle M \rangle}$.

c) $\Rightarrow$ a): Zunächst sei

$$B := \{ x \in A \mid xm = mx \text{ für alle } m \in M \} .$$

Es ist sehr leicht nachzuprüfen mit Hilfe des Assoziativgesetzes und des Distributivgesetzes, dass B eine Unteralgebra von A ist, und aus der Voraussetzung c) folgt, dass $M \subseteq B$.

Nun sei

$$C := \{ x \in A \mid xy = yx \text{ für alle } y \in B \} .$$

Auch C ist eine Unteralgebra von A und $M \subseteq C$ nach der Definition von B.

Weil $M \subseteq B$, ist C eine Unteralgebra von B, denn die Elemente von C kommutieren unter anderem mit allen Elementen von M. Weil die Elemente von C mit allen Elementen von B kommutieren, kommutieren sie insbesondere mit allen Elementen von C, d.h., C ist kommutativ.

Da $M \subseteq C$, gilt auch $\langle M \rangle \subseteq C$ und deshalb ist $\langle M \rangle$ kommutativ. ■

Die wichtige Konsequenz für unser Vorhaben in diesem Kapitel ist

Korollar 9.9 *Sei A eine C^*-Algebra und sei $x \in A$.*

A_x, die von x erzeugte C^*-Unteralgebra von A, ist genau dann kommutativ, wenn x normal ist.

Beweis. A_x ist nach Lemma und Definition 9.4 c) die Algebra $\overline{\langle x, x^* \rangle}$, und sie ist nach Lemma 9.8 genau dann kommutativ, wenn x und x^* miteinander kommutieren, also wenn x normal ist. ■

Bemerkung 9.10 Sei A eine C^*-Algebra und sei $x \in A$ ein normales Element. Sei B der „Polynomring" in x und x^*, d.h., die Menge

$$\mathbf{C}[x, x^*] := \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x^i (x^*)^j \mid m, n \in \mathbf{N}, c_{ij} \in \mathbf{C} \right\}.$$

Offensichtlich ist B eine Unteralgebra von A, und offensichtlich gehört jedes Polynom in x und x^* zu jeder Unteralgebra, die x und x^* enthält, so dass $B \subseteq \langle x, x^* \rangle \subseteq A_x$.

Die abgeschlossene Hülle $\overline{B}$ ist eine Banachunteralgebra von A, die x und x^* enthält, und $A_x = \overline{\langle x, x^* \rangle}$ ist die kleinste x und x^* enthaltende Banachunteralgebra von A. Somit ist

$$A_x = \overline{B} = \overline{\mathbf{C}[x, x^*]}. \tag{9.3}$$

Wir wollen jetzt, für ein normales Element x einer C^*-Algebra A, den Satz von Gel'fand-Najmark auf die kommutative C^*-Algebra A_x anwenden, und wir werden sehen, dass der in der Aussage erscheinende topologische Raum $\operatorname{Spec} A_x$ homöomorph zu $\sigma(x)$ ist.

Aber Vorsicht! Hier sind zwei verschiedene Algebren im Spiel, nämlich A und A_x, und wir müssen deshalb, wenigstens vorerst, zwischen den Spektren von x in diesen beiden Algebren unterscheiden (später werden wir allerdings feststellen, dass sie gleich sind).

Nach unserer bisherigen Notationskonvention können wir diese Spektren durch einen Index am Buchstaben σ unterscheiden — $\sigma_A(x)$ ist das Spektrum von x in A und $\sigma_{A_x}(x)$ das Spektrum in A_x.

Da wir es aber am Anfang eher mit dem Spektrum von x in A_x zu tun haben und hierfür die Notation besonders kompliziert ist, führen wir jetzt die Konvention ein, dass wir für das Spektrum in A_x schlicht $\sigma(x)$ schreiben, und nur das Spektrum in A durch den Index kennzeichnen. Später wird auch dies überflüssig sein.

Mit diesen Vorbemerkungen zum richtigen Verständnis der Notation haben wir nun den folgenden ***Spektralsatz für normale Elemente einer*** C^****-Algebra***, den wir auch, nach Übersetzung in die Sprache der Hilbertraumoperatoren, den ***Spektralsatz für normale Operatoren auf einem Hilbertraum*** nennen können.

Satz 9.11 (Der Spektralsatz für normale Operatoren) *Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A.*

Dann gibt es einen kanonischen isometrischen C^*-Algebra Isomorphismus

$$\gamma\colon A_x \longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$$

mit der Eigenschaft, dass $\gamma(x)$ die Inklusion von $\sigma(x)$ in $\mathbf{C}$ ist, d.h.,

$$\big(\gamma(x)\big)(\lambda) = \lambda \tag{9.4}$$

für jedes $\lambda \in \sigma(x)$.

Durch diese Bedingung ist γ eindeutig bestimmt.

Weil γ ein *-Isomorphismus ist, ist

$$\big(\gamma(x^*)\big)(\lambda) = \overline{\lambda} \tag{9.5}$$

für jedes $\lambda \in \sigma(x)$.

Beweis. In Satz und Definition 8.59 wurde ein Homomorphismus

$$\tau\colon A_x \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A_x, \mathbf{C})$$

definiert, der nach dem Satz von Gel'fand-Najmark ein isometrischer *-Isomorphismus ist, und nach Satz 8.60 a) ist $\sigma(x) = \big(\tau(x)\big)(\operatorname{Spec} A_x)$.

Wir werden zeigen, dass $\tau(x)$ ein Homöomorphismus $\operatorname{Spec} A_x \longrightarrow \sigma(x)$ ist.

Dazu reicht es zu zeigen, dass $\tau(x)$ injektiv ist, denn dann ist $\tau(x)$ eine Bijektion $\operatorname{Spec} A_x \longrightarrow \sigma(x)$, und stetig als Element von $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A_x, \mathbf{C})$.

Weil $\operatorname{Spec} A_x$ kompakt ist, ist jede abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} A_x$ kompakt, und ihr Bild unter der stetigen Abbildung $\tau(x)$ ist auch kompakt im Hausdorffschen Raum $\mathbf{C}$ und somit abgeschlossen.

Für die Umkehrabbildung von $\tau(x)$ bedeutet das, dass Urbilder unter ihr von abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} A_x$ abgeschlossen sind in $\sigma(x)$, d.h., auch die Umkehrabbildung ist stetig und die Abbildung $\tau(x)$ ist automatisch ein Homöomorphismus auf ihr Bild, sobald wir wissen, dass sie injektiv ist.

Wir erinnern daran, dass für jedes Element von $\operatorname{Spec} A_x$, also für jedes maximale Ideal M von A_x, gilt

$$\big(\tau(x)\big)(M) = \varphi_M(x), \tag{9.6}$$

wo φ_M der eindeutige Homomorphismus mit Kern M ist.

Weil τ ein *-Homomorphismus ist, impliziert (9.6), dass

$$\varphi_M(x^*) = \big(\tau(x^*)\big)(M) = \overline{\big(\tau(x)\big)(M)} = \overline{\varphi_M(x)},$$

und somit ist $\varphi_M(x^*)$ durch $\varphi_M(x)$ eindeutig bestimmt.

Jeder Homomorphismus bildet $\mathbf{1}$ nach $1 \in \mathbf{C}$ ab. Nach Korollar 9.6 ist der Homomorphismus φ_M, und somit das maximale Ideal $M = \operatorname{Ker} \varphi_M$, eindeutig durch die beiden Werte $\varphi_M(x)$ und $\varphi_M(x^*)$ bestimmt, und deshalb letztendlich schon durch den einzelnen Wert $\varphi_M(x) = \big(\tau(x)\big)(M)$.

Diese Aussage besagt, dass $\tau(x)$ injektiv ist.

Die Abbildung $\tau(x)$ liefert also einen Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen $\operatorname{Spec} A_x$ und $\sigma(x) \subseteq \mathbf{C}$, und die Verknüpfung mit dieser Abbildung bestimmt eine Abbildung

$$\begin{aligned} \beta\colon \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A_x, \mathbf{C}) &\longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big) \\ f &\longmapsto f \circ \big(\tau(x)\big)^{-1}, \end{aligned} \tag{9.7}$$

die offensichtlich ein Algebrahomomorphismus ist und mit der komplexen Konjugation vertauschbar ist und deshalb ein *-Homomorphismus ist, und die eine bijektive Isometrie der normierten Funktionenalgebren ist, weil $\big(\tau(x)\big)^{-1}$ ein Homöomorphismus ist.

Die Abbildung β ist also ein isometrischer *-Isomorphismus zwischen den genannten Funktionen-C^*-Algebren. Die in Kapitel 8 definierte Abbildung τ ist ein isometrischer *-Isomorphismus zwischen A_x und $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A_x, \mathbf{C})$, und die Verknüpfung liefert den gewünschten isometrischen *-Isomorphismus

$$\gamma := \beta \circ \tau,$$

so dass für jedes $a \in A_x$ gilt

$$\gamma(a) = \tau(a) \circ \big(\tau(x)\big)^{-1}. \tag{9.8}$$

Für den speziellen Fall $a = x$ besagt (9.8), dass

$$\gamma(x) = \tau(x) \circ \big(\tau(x)\big)^{-1} = \operatorname{id}_{\sigma(x)},$$

wie in Gleichung (9.4) behauptet.

Gleichung (9.5) folgt, wie erwähnt, sofort aus der Tatsache, dass γ ein *-Isomorphismus ist.

Jeder Algebraisomorphismus $\kappa\colon A \longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$ bildet $\mathbf{1}$ auf die konstante Funktion $\mathbf{1} \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$ ab, denn es gibt ein Element $e \in A$ mit $\kappa(e) = \mathbf{1}$, und

$$\kappa(\mathbf{1}) = \kappa(\mathbf{1})\mathbf{1} = \kappa(\mathbf{1})\kappa(e) = \kappa(\mathbf{1}e) = \kappa(e) = \mathbf{1}.$$

Nach Korollar 9.6 wird γ eindeutig durch Bedingung (9.4) bestimmt, denn A_x ist die von x erzeugte C^*-Unteralgebra von A und γ ein *-Homomorphismus. ■

Korollar 9.12 *Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A. Dann ist*

$$r(x) = \|x\| .$$

Man beachte, dass es nach Bemerkung 8.24 b) hier egal ist, in welcher x enthaltenden Unteralgebra von A wir den Spektralradius $r(x)$ berechnen.

Beweis. Unter Verwendung von Gleichung (9.4) haben wir

$$r(x) := \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} \Big|\big(\gamma(x)\big)(\lambda)\Big| = \big\|\gamma(x)\big\| = \|x\| ,$$

weil γ eine Isometrie ist. ■

Bemerkung 9.13 Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A und sei

$$\gamma\colon A_x \longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$$

der im Spektralsatz 9.11 definierte isometrische *-Isomorphismus.

Für jedes $\lambda \in \sigma(x)$ gibt es genau ein maximales Ideal M von A_x mit

$$x - \lambda \cdot \mathbf{1} \in M,$$

und für jedes $a \in A_x$ ist $\big(\gamma(a)\big)(\lambda)$ das *einzige Element* $\mu \in \sigma(a)$, so dass $a - \mu \cdot \mathbf{1}$ in diesem Ideal M liegt.

Beweis. Für ein beliebiges Element $b \in A_x$ und ein beliebiges maximales Ideal M von A_x und eine beliebige Zahl $\mu \in \mathbf{C}$ gilt

$$\big(\tau(b)\big)(M) := \varphi_M(b) = \mu$$

genau dann, wenn

$$\varphi_M(b - \mu \cdot \mathbf{1}) = 0$$

(da φ_M ein Homomorphismus ist), und diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass

$$b - \mu \cdot \mathbf{1} \in M.$$

Im Beweis von Satz 9.11 wurde gezeigt, dass für ein normales Element $x \in A$ die Abbildung $\tau(x)\colon \operatorname{Spec} A_x \longrightarrow \sigma(x)$ bijektiv ist, und nach Gleichung (9.8) ist

$$\big(\gamma(a)\big)(\lambda) = \big(\tau(a)\big)(M)$$

für das eindeutig bestimmte maximale Ideal $M \in \operatorname{Spec} A_x$, so dass

$$\lambda = \big(\tau(x)\big)(M).$$

In Anbetracht der einleitenden Bemerkungen können wir diese Aussage so umformulieren: das Element $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ liegt in einem eindeutigen maximalen Ideal M von A_x, und $\big(\gamma(a)\big)(\lambda)$ ist die eindeutig bestimmte Zahl $\mu \in \mathbf{C}$, für die $a - \mu \cdot \mathbf{1}$ zu diesem Ideal gehört.

Natürlich gehört diese Zahl μ zu $\sigma(a)$, denn sonst wäre $a - \mu \cdot \mathbf{1}$ invertierbar und könnte zu keinem maximalen Ideal gehören. ■

Eine sehr nützliche Konsequenz des Spektralsatzes 9.11 ist die einfache und unkomplizierte Einführung eines so genannten ***Funktionalkalküls*** für normale Operatoren auf Hilberträumen oder allgemeiner für normale Elemente von C^*-Algebren.

Definition 9.14 Sei A eine C^*-Algebra und sei $x \in A$ normal.

Für jede stetige Funktion $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$ notieren wir mit

$$f(x) \in A$$

dasjenige Element $a \in A_x$, für das gilt

$$\gamma(a) = f, \tag{9.9}$$

und wir nennen $f(x)$ die ***Anwendung von f auf x***.

(In anderen Worten, $f(x) := \gamma^{-1}(f)$.)

Auf diese Weise können wir beliebige auf $\sigma(x)$ definierte stetige komplexwertige Funktionen auf das Element x anwenden, oder anders gesehen, wir können x in jede stetige Funktion „einsetzen“.

Diese Einsetzung von Elementen von A_x in stetige Funktionen definiert auf $\sigma(x)$ nennt man das ***Funktionalkalkül*** für x.

Die meisten stetigen Funktionen auf $\sigma(x)$, für die wir das Funktionalkalkül anwenden wollen, werden nicht nur auf $\sigma(x)$, sondern in der Regel auf ganz $\mathbf{C}$ oder zumindest auf einer echten Obermenge von $\sigma(x)$ definiert und stetig sein. Auch wenn die Funktion f nicht nur auf $\sigma(x)$ definiert ist, werden wir trotzdem das Ergebnis des Funktionalkalküls für diese Funktion schlicht „$f(x)$“ nennen, obwohl es richtiger und genauer „$\big(f|\sigma(x)\big)(x)$“ heißen müsste.

Man sollte sich aber im Klaren darüber sein, dass $f(x)$ *nur von der Einschränkung von* f *auf* $\sigma(x)$ abhängt, und dass für zwei stetige Funktionen f und g definiert auf Obermengen von $\sigma(x)$ genau dann gilt $f(x) = g(x)$, wenn f und g auf $\sigma(x)$ die gleichen Werte annehmen (egal wie sie sich außerhalb dieser Menge verhalten).

Insbesondere können $f(x)$ und $g(x)$ aber *nicht* gleich sein, wenn $f|\sigma(x) \neq g|\sigma(x)$, denn γ nimmt ja an jeder Stelle in A_x nur einen Wert an.

Bemerkung 9.15 Sei A eine C^*-Algebra und sei $x \in A$ ein normales Element. Sei $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$.

Nach Konstruktion gehört $f(x)$ zur kommutativen C^*-Unteralgebra A_x, und natürlich gehört $\big(f(x)\big)^*$ auch dazu. Deshalb kommutieren diese beiden Elemente.

Also ist $f(x)$ auch normal. In anderen Worten, das Funktionalkalkül liefert nur normale Werte.

Das Funktionalkalkül hat in kanonischen Situationen ein sehr vernünftiges Verhalten.

Lemma 9.16 *Sei* A *eine* C^**-Algebra und sei* $x \in A$ *normal.*

a) *Ist* $p\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ *eine Polynomialfunktion der Gestalt*

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i,$$

so ist

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in A.$$

b) *Ist* $\{\, f_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ *eine Folge von Funktionen aus* $\mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$, *die gleichmäßig gegen eine Funktion* $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$ *konvergiert, so ist*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in A.$$

c) *Ist* f *eine Funktion aus* $\mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$, *so ist*

$$\overline{f}(x) = \big(f(x)\big)^*.$$

Beweis. a): Gleichung (9.4) im Spektralsatz 9.11 besagt, dass die Funktion $\mathrm{id}_{\sigma(x)}$ der Wert von γ bei x ist, so dass nach Definition 9.14 des Funktionalkalküls gilt

$$\mathrm{id}_{\sigma(x)}(x) = x.$$

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist die Funktion $z \mapsto z^n$ die n-te Potenz von $\mathrm{id}_{\sigma(x)}$ in der Algebrastruktur von $\mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$. Weil γ ein Algebrahomomorphismus ist, ist die Funktion $z \mapsto z^n$ der Wert von γ bei x^n, und daraus folgt schließlich, dass

$$p|\sigma(x) = \gamma\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\Big),$$

oder in anderen Worten, dass

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i.$$

b) folgt sofort aus der Stetigkeit von $\gamma^{-1}\colon \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big) \longrightarrow A_x$.

c) folgt sofort aus der Tatsache, dass γ ein *-Homomomorphismus ist und dass die Konjugation die Involution von $\mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$ ist. ■

Bemerkung 9.17 Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A.

Das Funktionalkalkül für x ergibt sich ohne weiteren Aufwand aus dem Spektralsatz für normale Operatoren, aber die ersten beiden in Lemma 9.16 erwähnten Eigenschaften würden auch ausreichen, um das Funktionalkalkül ohne den Spektralsatz, aber mit erheblich mehr Mühe zu konstruieren.

Denn die Algebra der Polynome trennt bekanntlich Punkte auf jeder Teilmenge von $\mathbf{C}$, die konstante Funktion $\mathbf{1}$ ist ein Polynom und das Konjugierte jedes Polynoms ist wieder ein Polynom.

Deshalb folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß, dass die Polynomialfunktionen auf der kompakten Menge $\sigma(x)$ dicht in der Algebra der stetigen Funktionen liegen, und somit kann man mit Lemma 9.16 a) und b) den Wert von $f(x)$ für jede stetige Funktion f bestimmen.

Wollte man das aber als Programm für die Definition des Funktionalkalküls verwenden, so wären noch viele Lücken in der Herleitung einzufüllen. Als Erstes müsste man zum Beispiel zeigen, dass für eine gleichmäßig konvergente Folge $\{\, p_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ von Polynomen die Werte $p_n(x)$ in A überhaupt konvergieren, um für die Grenzfunktion $f = \lim_{n \to \infty} p_n$ den Wert $f(x)$ zu bestimmen.

Dieser Aufwand würde sich nicht lohnen, denn im Prinzip haben wir ihn schon auf uns genommen bei der Herleitung des Satzes von Gel'fand-Najmark, wo ja auch der Satz von Stone-Weierstraß zum Einsatz kam.

Das Funktionalkalkül hat eine ganze Reihe von interessanten und erstaunlich einfachen Konsequenzen und Anwendungen. Die erste beantwortet die auf Seite 353 aufgestellte Frage über die Interpretation des Spektrums eines normalen Elementes einer C^*-Algebra.

Lemma 9.18 *Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A. Dann ist*

$$\sigma(x) := \sigma_{A_x}(x) = \sigma_A(x),$$

d.h., das Spektrum von x als Element der ganzen Algebra A ist gleich dem Spektrum von x als Element von A_x.

Beweis. Aus Bemerkung 8.24 a) folgt, dass $\sigma_A(x) \subseteq \sigma(x)$.

Wenn die Inklusion echt ist, sei $\lambda \in \sigma(x) \setminus \sigma_A(x)$, und sei

$$y := (x - \lambda \cdot \mathbf{1})^{-1} \in A$$

(in A_x ist $x - \lambda \cdot \mathbf{1}$ natürlich nicht invertierbar).

Weil y in A invertierbar ist, ist $\|y\| > 0$.

Auf $\mathbf{C}$ ist die Funktion

$$f(z) := \min\Big(\|y\| + 1, \frac{1}{|z - \lambda|}\Big)$$

überall definiert und stetig, denn sie ist konstant $\|y\| + 1$ auf der abgeschlossenen Scheibe um λ von Radius $1/\big(\|y\| + 1\big)$, und auf dem Komplement der offenen Scheibe mit diesem Radius ist sie der Kehrwert der dort nirgends verschwindenden stetigen Funktion $|z - \lambda|$.

Nach Definition ist $f(\lambda) = \|y\| + 1$ und

$$\big|(z - \lambda)f(z)\big| \leq 1 \text{ für alle } z \in \mathbf{C}. \tag{9.10}$$

Weil $\lambda \in \sigma(x)$, ist die Norm von $f|\sigma(x) \geq \|y\| + 1 > \|y\|$, und da γ eine Isometrie ist, ist

$$\big\|f(x)\big\| = \big\|\gamma^{-1}(f)\big\| > \|y\|.$$

Aber aus Ungleichung (9.10) folgt, dass

$$\big\|(x - \lambda \cdot \mathbf{1})f(x)\big\| = \Big\|\gamma^{-1}\big((z - \lambda)f\big)\Big\| = \big\|(z - \lambda)f\big\| \leq 1.$$

Mit Hilfe dieser Abschätzungen erhalten wir in A die widerspruchsvolle Kette von Ungleichungen

$$\|y\| < \big\|f(x)\big\| = \big\|y(x - \lambda \cdot \mathbf{1})f(x)\big\| \leq \|y\| \, \big\|(x - \lambda \cdot \mathbf{1})f(x)\big\| \leq \|y\| \cdot 1 = \|y\|.$$

Also ist $\sigma(x) \setminus \sigma_A(x) = \emptyset$, und die Spektren von x in A_x und in x sind gleich.

■

Notation 9.19 Sei x ein normales Element einer C^*-Algebra A.

Wegen der Aussage von Lemma 9.18 brauchen wir auch in der Notation nicht mehr zwischen den Spektren $\sigma(x)$ und $\sigma_A(x)$ zu unterscheiden, und wir werden schlicht $\sigma(x)$ schreiben für das Spektrum von x in einer *beliebigen* x enthaltenden C^*-Unteralgebra von A.

Das ist erlaubt, weil nach Bemerkung 8.24 a) das Spektrum eines Elementes eine bezüglich der Mengeninklusion monoton fallende Funktion der Unteralgebra ist, in der man das Element betrachtet. Wegen der Gleichheit von $\sigma(x)$ in der ganzen Algebra A und in der kleinsten C^*-Unteralgebra A_x, in der x liegt, sind die Spektren auch in allen dazwischen liegenden x enthaltenden Unteralgebren von A gleich.

Der nächste Satz besagt, dass das Funktionalkalkül auch auf Spektren anwendbar ist.

Korollar 9.20 (Spektraler Abbildungssatz) *Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A. Sei $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$.*

Dann ist $\sigma\big(f(x)\big) = f\big(\sigma(x)\big) \subseteq \mathbf{C}$.

Beweis. Wir beginnen mit der Bemerkung, dass nach Definition des Funktionalkalküls $f(x) \in A_x$, und weil A_x eine C^*-Unteralgebra von A ist, umfasst sie die von $f(x)$ erzeugte C^*-Unteralgebra und wir haben die Inklusionen

$$A_{f(x)} \subseteq A_x \subseteq A.$$

Nach der unter Notation 9.19 gemachten Bemerkung ist $\sigma\big(f(x)\big)$ gleich dem Spektrum von $f(x)$ in der Algebra A_x.

Genau dann gehört eine komplexe Zahl λ *nicht* zu $\sigma\big(f(x)\big)$, wenn das Element $f(x) - \lambda \cdot \mathbf{1}$ invertierbar ist in A_x, und weil γ ein Isomorphismus ist, gilt das genau dann, wenn die Funktion $f - \lambda$ invertierbar ist in $\mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$.

Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn $f - \lambda$ nie 0 wird auf $\sigma(x)$, also wenn $\lambda \notin f\big(\sigma(x)\big)$.

Damit ist gezeigt, dass $\sigma\big(f(x)\big) = f\big(\sigma(x)\big)$. ∎

Eine sofortige Konsequenz des Spektralen Abbildungssatzes ist, dass man in der Situation dieses Satzes jede stetige komplexwertige Funktion auf der Menge $\sigma\big(f(x)\big)$ mit f verknüpfen kann und man erhält eine stetige komplexwertige Funktion auf $\sigma(x)$. So kommt die natürliche Frage auf, ob diese Verknüpfung von stetigen Funktionen, die ja auf den passenden Definitionsbereichen erklärt sind, mit dem Funktionalkalkül verträglich ist, und man hat Glück: die Antwort ist „ja“.

Korollar 9.21 *Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A. Sei $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$, und sei $g \in \mathcal{C}\Big(\sigma\big(f(x)\big), \mathbf{C}\Big)$.*

Weil nach Korollar 9.20 der Definitionsbereich von g das Bild von f ist, kann man die Verknüpfung $g \circ f \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$ bilden.

Das mit dem Funktionalkalkül für x gebildete Element $f(x)$ ist nach Bemerkung 9.15 selber normal und besitzt deshalb ein eigenes Funktionalkalkül. In diesem Funktionalkalkül ist das Element $g\big(f(x)\big)$ definiert.

Dieses Element erhält man auch im Funktionalkalkül für x aus der Verknüpfung von g mit f, d.h., in A gilt

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big). \tag{9.11}$$

Beweis. Die stetige Funktion

$$f\colon \sigma(x) \longrightarrow \sigma\big(f(x)\big)$$

induziert eine „Zurückholabbildung“

$$\begin{aligned} F\colon \mathcal{C}\Big(\sigma\big(f(x)\big), \mathbf{C}\Big) &\longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big) \\ h &\longmapsto h \circ f, \end{aligned}$$

die offensichtlich ein *-Homomorphismus ist, da die algebraischen Operationen und die Involutionen der Funktionenalgebren nur auf die einzelnen Werte der Funktionen wirken. Ferner ist $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \circ f = \mathbf{1}$.

Sei γ der in Satz 9.11 definierte C^*-Algebra Isomorphismus

$$A_x \longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$$

und sei γ' der entsprechende C^*-Algebra Isomorphismus

$$A_{f(x)} \longrightarrow \mathcal{C}\Big(\sigma\big(f(x)\big), \mathbf{C}\Big).$$

Beide bilden $\mathbf{1}$ nach $\mathbf{1}$ ab.

Die Abbildungen $\gamma|A_{f(x)}$ und $F \circ \gamma'$ sind $\mathbf{1}$ erhaltende *-Homomorphismen

$$A_{f(x)} \longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big),$$

die auf dem erzeugenden Elementen $f(x)$ der Unteralgebra $A_{f(x)}$ übereinstimmen. Denn wenn wir mit j die Inklusion $\sigma\big(f(x)\big) \longrightarrow \mathbf{C}$ bezeichnen, dann ist

$$\begin{aligned} (F \circ \gamma')\big(f(x)\big) &= F(j) && \text{nach Eigenschaft (9.4)} \\ &= j \circ f = f \\ &= \gamma\big(f(x)\big) && \text{nach Definition 9.14 von } f(x). \end{aligned}$$

Weil nach Korollar 9.6 ein die **1** erhaltender *-Homomorphismus auf einer C^*-Algebra eindeutig bestimmt wird durch seine Werte auf einer Erzeugendenmenge, ist

$$F \circ \gamma' \equiv \gamma$$

auf ganz $A_{f(x)}$.

Es folgt, dass

$$\gamma\big((g \circ f)(x)\big) = g \circ f = F(g) = F\Big(\gamma'\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\Big) = \gamma\Big(g\big(f(x)\big)\Big).$$

Weil γ injektiv ist, folgt Behauptung (9.11). ■

Mit diesem Korollar haben wir jetzt ein vollwertiges Funktionalkalkül, das es erlaubt, jede stetige komplexwertige Funktion definiert auf dem Spektrum eines normalen Elementes einer C^*-Algebra auch *in dieser Algebra* auf das Element anzuwenden, wobei die normalen Rechen- und Verknüpfungsregeln für Funktionen gelten und verwendet werden dürfen.

Ferner, Gleichungen, die die komplexwertigen Funktionen erfüllen, stimmen auch für ihre algebrawertigen Varianten, weil die Algebrahomomorphismen γ, die zur Definition des Funktionalkalküls herangezogen werden, injektiv sind.

Das Erstaunlichste am Funktionalkalkül ist die Einfachheit der Handhabung und die Zulässigkeit des völlig naiven Umgangs mit den algebrawertigen Funktionen. Man muss dafür keine expliziten Annäherungsverfahren oder Potenzreihenentwicklungen angeben, und keine weitere Vorbereitung oder Begründung ist für seine Anwendung nötig, als die (zugegenebermaßen nichttrivialen) Sätze, die wir schon bewiesen haben.

Eben in diesen Sätzen und letztendlich im Satz von Stone-Weierstraß sind die Annäherungsverfahren und Potenzreihenentwicklungen verborgen, auf die das Funktionalkalkül sich natürlich doch irgendwie stützen muss. Die Eleganz dieser Konstruktion liegt darin, dass diese „schmutzigen“ Details im Endergebnis nicht mehr zum Vorschein kommen und vom Anwender vergessen werden dürfen.

Wir wollen im Folgenden ein paar wichtige Beispiele für die Nutzung des Funktionalkalküls präsentieren, wobei wir bald beginnen werden, die Ergebnisse nicht mehr im Rahmen der C^*-Algebren zu formulieren, sondern direkt für Operatoren auf Hilberträumen, weil einige Aspekte dann leichter zu verstehen sind. Dies stellt, wie schon erläutert, keine Einschränkung der Allgemeinheit dar.

Lemma 9.22 *Sei A ein C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A.*

a) *Sei p ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, so dass $p(x) = \mathbf{0}$. Dann ist*
$$\sigma(x) \subseteq p^{-1}\big(\{\,0\,\}\big),$$
d.h., das Spektrum von x besteht nur aus Wurzeln von p.

b) *Wenn $x^2 = x$, dann ist $\sigma(x) \subseteq \{\,0,1\,\}$.*

c) *Wenn $\sigma(x) \subseteq \{\,0,1\,\}$, dann ist $x^2 = x$.*

d) *Wenn $\sigma(x)$ nicht zusammenhängend ist, dann existiert ein Element $y \in A_x \setminus \{\,\mathbf{0},\mathbf{1}\,\}$ mit $y^2 = y$.*

Beweis. a): Es gilt $\sigma(\mathbf{0}) = \{\,0\,\}$, denn für $\lambda \in \mathbf{C}$ ist $\mathbf{0} - \lambda \cdot \mathbf{1} = -\lambda \cdot \mathbf{1}$ genau dann nicht invertierbar, wenn $\lambda = 0$.

Nach dem Spektralen Abbildungssatz ist
$$p\big(\sigma(x)\big) = \sigma\big(p(x)\big) = \sigma(\mathbf{0}) = \{\,0\,\},$$
d.h.,
$$\sigma(x) \subseteq p^{-1}\big(\{\,0\,\}\big).$$

b): Dies folgt aus Teil a) mit $p(X) := X^2 - X$. Die Wurzeln dieses Polynoms sind 0 und 1.

c): Die Zahlen 0 und 1 sind ihre eigenen Quadrate, und das heißt, dass
$$\big(\mathrm{id}_{\sigma(x)}\big)^2 = \mathrm{id}_{\sigma(x)} \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big).$$

Weil $\mathrm{id}_{\sigma(x)} = \gamma(x)$ und weil γ ein injektiver Algebrahomomorphismus ist, gilt $x^2 = x$.

d): Wenn $\sigma(x)$ nicht zusammenhängend ist, gibt es eine Zerlegung
$$\sigma(x) = Y \cup Z,$$
wo Y und Z disjunkt, nichtleer, und beide abgeschlossen in der Relativtopologie auf $\sigma(x)$ sind.

Die komplexwertige Funktion f mit $f|Y \equiv 0$ und $f|Z \equiv 1$ ist stetig auf $\sigma(x)$, da sie jeden der beiden Werte auf einer abgeschlossenen Menge annimmt.

Sei $y := f(x)$. Nach dem Spektralen Abbildungssatz ist
$$\sigma(y) = f\big(\sigma(x)\big) = \{\,0,1\,\}$$
und nach Teil c) gilt $y^2 = y$.

Weil f beide Werte 0 und 1 tatsächlich annimmt, ist f weder $\mathbf{0}$ noch $\mathbf{1} \in \mathcal{C}\big(\sigma(x), \mathbf{C}\big)$.

Folglich ist $y = f(x)$ weder $\mathbf{0} = \mathbf{0}(x)$ noch $\mathbf{1} = \mathbf{1}(x) \in A_x$ (für die Anwendung der Polynome $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ auf x können wir Lemma 9.16 a) zitieren). ■

Das Funktionalkalkül erlaubt uns, die Aussage von Lemma 8.67 zu verstärken und zu erweitern.

Lemma 9.23 *Sei A ein C^*-Algebra und sei x ein normales Element von A.*

a) x ist hermitesch genau dann, wenn $\sigma(x) \subseteq \mathbf{R}$.

b) x ist unitär genau dann, wenn $\sigma(x) \subseteq \big\{\, \lambda \in \mathbf{C} \;\big|\; |\lambda| = 1 \,\big\}$.

Beweis. Wir wenden Gleichungen (9.4) und (9.5) an.

a): Genau dann gilt $x = x^*$, wenn $\gamma(x) = \gamma(x^*)$, also wenn

$$\lambda = \big(\gamma(x)\big)(\lambda) = \big(\gamma(x^*)\big)(\lambda) = \overline{\lambda}$$

für jedes $\lambda \in \sigma(x)$.

b): Genau dann gilt $xx^* = x^*x = 1$, wenn $\gamma(x)\gamma(x^*) = \gamma(xx^*) = \gamma(1) = \mathbf{1}$, also wenn

$$\|\lambda\|^2 = \lambda\overline{\lambda} = \Big(\big(\gamma(x)\big)(\lambda)\Big)\Big(\big(\gamma(x^*)\big)(\lambda)\Big) = 1$$

für jedes $\lambda \in \sigma(x)$. ■

Wenn das Spektrum eines hermiteschen Elementes einer C^*-Algebra nicht nur reell, sondern nichtnegativ reell ist, können wir mit dem Funktionalkalkül die Quadratwurzel des Elementes ziehen, und das wird sich in der Folge als sehr nützlich erweisen.

Hilfssatz 9.24 *Sei A eine C^*-Algebra und sei x ein hermitesches Element von A. Sei $a \in A$ und a kommutiere mit x (also es sei $ax = xa$).*

Dann kommutiert a mit jedem Element von A_x.

Beweis. A_x war definiert als die von x erzeugte C^*-Unteralgebra von A und dies ist nach Lemma 9.4 das Gleiche, wie die von x und x^* erzeugte Banachunteralgebra von A. Aber weil x hermitesch ist, ist $x^* = x$ und A_x ist in diesem Fall einfach die von x erzeugte Banachunteralgebra von A.

Wir betrachten die Menge

$$B := \{\, b \in A \mid ab = ba \,\}$$

der mit a kommutierenden Elemente von A.

Man prüft sofort nach, dass B eine Unteralgebra von A ist, natürlich gehört $\mathbf{1}$ zu B, und B ist abgeschlossen weil die arithmetischen Operationen von A stetig sind. Folglich ist B eine Banachunteralgebra von A.

Weil a mit x kommutiert, ist $x \in B$ und somit $A_x \subseteq B$, da A_x die kleinste x enthaltende Banachunteralgebra von A ist. Also kommutiert jedes Element von A_x mit a. ■

Lemma 9.25 *Sei A eine C^*-Algebra und sei $x \in A$ ein hermitesches Element.*

Genau dann besitzt x eine hermitesche Quadratwurzel in A, d.h., genau dann gibt es gibt ein hermitesches Element $y \in A$ mit $y^2 = x$, wenn

$$\sigma(x) \subseteq \mathbf{R}_+ := \{ c \in \mathbf{R} \mid c \geq 0 \}. \tag{9.12}$$

In diesem Fall kann man die Quadratwurzel y eindeutig so wählen, dass auch

$$\sigma(y) \subseteq \mathbf{R}_+,$$

und diese Quadratwurzel y gehört zu A_x und kommutiert deshalb mit jedem Element von A, dass mit x kommutiert.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wenn $y^2 = x$ und wenn y hermitesch ist, dann ist $\sigma(y) \subseteq \mathbf{R}$ und

$$\sigma(x) = \sigma(y^2) = \left\{ \lambda^2 \,\middle|\, \lambda \in \sigma(y) \right\}$$

besteht nur aus Quadraten von reellen Zahlen, also nur aus nichtnegativen reellen Zahlen.

„$\Leftarrow$“: Wenn $\sigma(x) \subseteq \mathbf{R}_+$, dann ist die positive Quadratwurzelfunktion $\sqrt{}$ definiert und stetig auf ganz $\sigma(x)$, und mit dem Funktionalkalkül erhalten wir ein Element

$$y := \sqrt{x} \in A_x \subseteq A, \tag{9.13}$$

für das $y^2 = x$ weil für jedes $\lambda \in \sigma(x)$ gilt $\left(\sqrt{\lambda}\right)^2 = \lambda$ und weil $\mathrm{id}_{\sigma(x)}(x) = x$.

Das Spektrum

$$\sigma(y) = \left\{ \sqrt{\lambda} \,\middle|\, \lambda \in \sigma(x) \right\}$$

besteht nur aus nichtnegativen reellen Zahlen, und insbesondere aus reellen Zahlen, so dass y hermitesch ist nach Lemma 9.23 a).

Ist z eine beliebige Quadratwurzel von x in A mit $\sigma(z) \subseteq \mathbf{R}_+$, so ist z automatisch hermitesch und $x = z^2 \in A_z$. Folglich ist $A_x \subseteq A_z$ und deshalb $y \in A_z$.

Zu z gehört nach dem Spektralsatz ein isometrischer C^*-Algebra Isomorphismus

$$\gamma\colon A_z \longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(z), \mathbf{C}\big).$$

Sei $f := \gamma(y)$. Weil $\sigma(y) = f\big(\sigma(z)\big) \subseteq \mathbf{R}_+$, nimmt f auf $\sigma(z)$ nur nichtnegative reelle Werte an.

Weil $y^2 = x = z^2$ und $\gamma(z) = \mathrm{id}_{\sigma(z)}$ nach Gleichung (9.4), ist

$$\big(f(\lambda)\big)^2 = \lambda^2$$

für jedes $\lambda \in \sigma(z)$; da λ^2 aber nur *eine* nichtnegative Quadratwurzel hat, gilt

$$f(\lambda) = \lambda$$

für jedes λ, d.h., $\gamma(y) = \mathrm{id}_{\sigma(z)}$ und $y = z$ nach Gleichung (9.4).

Also ist die „nichtnegative" Quadratwurzel y von x in A eindeutig bestimmt.

Wir haben y in (9.13) als Element von A_x konstruiert. Nach Hilfssatz 9.24 kommutiert y also mit jedem Element von A, das mit x kommutiert. ∎

In den letzten Ergebnissen haben wir zwei kleine Sätze über Quadrate von normalen Elementen bewiesen. In Lemma 9.22 ging es um ***Idempotente***, also um Elemente x mit $x^2 = x$, wobei es nicht klar ist, warum diese Eigenschaft interessant ist. In Lemma 9.25 ging es um die Existenz von Quadratwurzeln von hermiteschen Elementen mit nichtnegativen Spektren, und obwohl die Aussage sicher interessant ist, ist es nicht klar, für welche Elemente die Voraussetzung des Satzes erfüllt ist.

Hier lohnt es sich tatsächlich, endlich dazu überzugehen, normale Operatoren auf einem Hilbertraum zu betrachten, denn die genannten Bedingungen erhalten dann eine klare und wesentliche Bedeutung. Wir beginnen mit den Idempotenten.

Auf Grund von Lemma 9.22 und Lemma 9.23 a) sind normale Idempotente automatisch hermitesch, da sie reelle Spektra haben.

Definition 9.26 Sei H ein Hilbertraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Ein ***Projektor*** auf H ist ein hermitescher Operator P, so dass

$$P \circ P = P. \tag{9.14}$$

Dieser Name scheint zu dieser Eigenschaft überhaupt nicht zu passen, aber der nächste Satz zeigt, dass die Projektoren *genau die orthogonalen Projektionen des Hilbertraums auf seine abgeschlossenen Unterräume* sind.

Satz 9.27 *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei P ein Projektor auf H. Sei Q der Operator $\mathrm{id}_H - P$.*

a) *Q ist auch ein Projektor (genannt der **komplementäre Projektor** zu P, und natürlich ist*
$$\mathrm{id}_H - Q = P. \tag{9.15}$$

b)
$$P + Q = \mathrm{id}_H. \tag{9.16}$$

c) $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Ker} Q$ *und* $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Bild} Q$. *Insbesondere ist*
$$P \circ Q = Q \circ P = \mathbf{0}. \tag{9.17}$$

d) *Sei $V := \operatorname{Bild} P$ und $W := \operatorname{Bild} Q$. Dann ist $W = V^{\perp}$ und*
$$H = V \oplus W. \tag{9.18}$$

Bezüglich dieser Zerlegung ist P die Projektion auf den Summanden V und Q die Projektion auf den Summanden W.

e) *Sei E ein abgeschlossener Untervektorraum von H und sei $F := E^{\perp}$. Sei T die Projektion von H auf E bezüglich der Direktesummenzerlegung*
$$H = E \oplus F.$$

Dann ist T ein Projektor.

Beweis. a): Weil $P \circ P = P$, ist
$$\begin{aligned} Q \circ Q &= (\mathrm{id}_H - P) \circ (\mathrm{id}_H - P) \\ &= \mathrm{id}_H \circ \mathrm{id}_H - P \circ \mathrm{id}_H - \mathrm{id}_H \circ P + P \circ P \\ &= \mathrm{id}_H - P - P + P \\ &= \mathrm{id}_H - P \\ &= Q, \end{aligned}$$

und Q ist auch ein Projektor. Gleichung (9.15) folgt trivialerweise aus der Definition von Q.

b) ist nur eine Umformung von der Definition von Q.

c): Sei $v \in H$. Offensichtlich ist $v \in \operatorname{Ker} Q$ genau dann, wenn $v = P(v)$.

Jedes v mit dieser Eigenschaft ist sein eigenes Bild unter P und gehört deshalb zu $\operatorname{Bild} P$.

Jedes Element $v = P(u)$ von $\operatorname{Bild} P$ erfüllt $P(v) = v$, weil $P \circ P = P$.

Also ist $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Bild} P$, und $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Bild} Q$ weil $P = \mathrm{id}_H - Q$ und man deshalb die Rollen von P und Q vertauschen kann.

Gleichung (9.17) folgt sofort, weil in jeder Verknüpfung das Bild des rechten Operators gleich dem Kern des linken Operators ist.

d): Ein Vektor $w \in H$ gehört zu $V^\perp = (\operatorname{Bild} P)^\perp$ genau dann, wenn für jedes $u \in H$ gilt

$$0 = \langle P(u), w\rangle = \langle u, P^t(w)\rangle = \langle u, P(w)\rangle,$$

da P selbstadjungiert ist.

Diese Beziehung gilt für jedes $u \in H$ genau dann, wenn $P(w) = 0$, also wenn $w \in \operatorname{Ker} P = \operatorname{Bild} Q = W$. Das zeigt, dass

$$W = V^\perp,$$

und daraus folgt nach Lemma 6.14 b), dass H die direkte Summe von V und W ist.

Weil $P \circ P = P$ ist P die Identität auf $V = \operatorname{Bild} P$, und P verschwindet auf $W = \operatorname{Bild} Q = \operatorname{Ker} P$.

Folglich ist P die Projektion auf den Summanden V der Direktesummenzerlegung $H = V \oplus W$.

Entsprechend ist Q die Identität auf $W = \operatorname{Bild} Q$ und verschwindet auf $V = \operatorname{Bild} P = \operatorname{Ker} Q$, und ist somit die Projektion auf den Summanden W.

e): $\operatorname{Bild} T \subseteq E$ und T ist die Identität auf E. Also ist $T \circ T = T$.

Wir müssen noch zeigen, dass T hermitesch ist. Seien v und w beliebige Vektoren in H und man schreibe sie als Summen

$$v = e + f \qquad \text{und} \qquad w = e' + f'$$

von Vektoren aus den Summanden E und F der Direktesummenzerlegung.

Dann ist $T(v) = e$ und $T(w) = e'$, und weil $E \perp F$ haben wir

$$\langle T(v), w\rangle = \langle e, e' + f'\rangle = \langle e, e'\rangle = \langle e + f, e'\rangle = \langle v, T(w)\rangle.$$

Da dies für je zwei Vektoren v und w aus H gilt, ist $T = T^t$.

D.h., T ist hermitesch und hat Eigenschaft (9.14) und ist somit ein Projektor. ■

Bemerkung 9.28 Wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, dann besagt Lemma 9.22 b), dass 0 und 1 die einzig möglichen Spektralwerte eines Projektors sind, aber das gilt auch wenn $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, wie man leicht feststellen kann.

Nämlich, sei H ein Hilbertraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ und sei P ein Projektor auf H. Sei $V := \operatorname{Bild} P$ und sei $W := \operatorname{Ker} P$. Diese Räume sind invariant unter P und H ist ihre direkte Summe.

Für jede Zahl $\lambda \in \mathbf{K}$ operiert $P - \lambda \operatorname{id}_H$ auf V durch Multiplikation mit dem Skalar $1 - \lambda$ und auf W durch Multiplikation mit dem Skalar $-\lambda$; beide Einschränkungen von $P - \lambda \operatorname{id}_H$ sind invertierbar wenn $\lambda \neq 0$ oder 1, denn dann sind die Skalare $1 - \lambda$ und $-\lambda$ nicht 0, also invertierbar.

Weil $H = V \oplus W$ ist $P - \lambda \operatorname{id}_H$ in diesem Fall auf ganz H invertierbar.

Die Spektralwerte 0 und 1 (falls sie tatsächlich vorkommen) sind immer *Eigenwerte* von P, und V ist der Eigenraum zum Eigenwert 1, W der Eigenraum zum Eigenwert 0, sofern diese Räume nicht $\{ 0 \}$ sind.

Dass die Spektren von Projektoren die genannte sehr einfache Gestalt haben ist äußerst nützlich. Für *endlichdimensionale* komplexe Hilberträume H erhält man daraus unmittelbar den endlichdimensionalen Spektralsatz, der besagt, dass für jeden normalen Operator N auf H der Hilbertraum H die direkte Summe der Eigenräume von N ist und N sich als eine endliche komplexe Linearkombination der orthogonalen Projektionen auf diese Eigenräume schreibt.

Denn im endlichdimensionalen Fall sind alle Spektralwerte Eigenwerte und ein Operator kann nur endlich viele verschiedene Spektralwerte $\lambda_1, \ldots,$ λ_k haben (unter anderem, weil zu jedem Eigenwert ein positivdimensionaler Eigenraum gehört).

Weil

$$\sigma(N) = \{ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \}$$

eine endliche Punktmenge ist, ist jede auf $\sigma(N)$ definierte komplexwertige Funktion automatisch stetig, und wenn wir durch f_i die Funktion bezeichnen mit

$$f_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = i; \\ 0, & \text{wenn } j \neq i, \end{cases}$$

dann ist $f_i(N)$ für jedes i nach Lemma 9.22 c) ein Projektor P_i, dessen Bildraum wir E_i nennen wollen.

Die Funktionen f_i bilden eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathcal{C}\big(\sigma(N), \mathbf{C}\big)$, und in der Algebra $\mathcal{C}\big(\sigma(N), \mathbf{C}\big)$ gilt

$$\mathbf{1} = \sum_{i=0}^{k} f_i, \quad \operatorname{id}_{\sigma(N)} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i, \qquad \text{und} \qquad f_i f_j = \mathbf{0} \text{ wenn } i \neq j. \quad (9.19)$$

Daraus folgt nach Anwendung des Funktionalkalküls, dass

$$\mathrm{id}_H = \sum_{i=0}^{k} P_i, \tag{9.20a}$$

$$N = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i, \tag{9.20b}$$

und

$$P_i \circ P_j = \mathbf{0} \text{ wenn } i \neq j. \tag{9.20c}$$

Bedingung (9.20a) besagt, dass H die Summe der Räume E_i ist.

Gleichung (9.20c) besagt , dass $E_j \subseteq \operatorname{Ker} P_i$ für jedes $j \neq i$ und somit

$$\sum_{j \neq i} E_j \subseteq \operatorname{Ker} P_i$$

für jedes i. Weil für jeden einzelnen Projektor P_i gilt $\operatorname{Bild} P_i \cap \operatorname{Ker} P_i = \{ 0 \}$, folgt daraus, dass

$$E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{ 0 \}$$

für jedes i und die Summe der Räume E_i ist direkt.

Gleichung (9.20b) ist die behauptete Darstellung für N. Weil jeder Projektor P_i auf $E_i = \operatorname{Bild} P_i$ die Identität ist und auf allen anderen E_j verschwindet, operiert N auf E_i durch Multiplikation mit λ_i und an der Darstellung sieht man leicht, dass E_i genau der Eigenraum von N zum Eigenwert λ_i ist.

Dieser endlichdimensionale Satz ist ja wohlbekannt aus der Anfängervorlesung *Lineare Algebra*, aber der hier skizzierte Beweis öffnet einen Weg, um den Satz auch im unendlichdimensionalen Fall zu beweisen.

Man verwendet dafür auch Funktionen auf dem Spektrum, die nur Werte 0 und 1 annehmen (so dass ihre Anwendung auf den untersuchten Operator immer einen Projektor liefert), aber die endlichen Summen in den Formeln (9.19) würden in dieser Erweiterung unendlich viele Summanden beinhalten und müssen deshalb durch Integrale ersetzt werden.

Die Übersetzung in die Operatorsichtweise liefert, dazu entsprechend, Integrale von Funktionen bezüglich operatorwertiger Maße, eine faszinierende Theorie, die wir im nächsten Kapitel ausarbeiten werden.

Idempotente normale Elemente entpuppen sich also in Endomorphismenalgebren von Hilberträumen als ***Projektoren*** und werden eine Schlüsselrolle in der weiteren Entwicklung der Spektraltheorie in dieser Vorlesung spielen.

Wie sieht es aus mit den Elementen mit nichtnegativem reellem Spektrum, die der Gegenstand von Lemma 9.25 sind und die, nach diesem Lemma, in der C^*-Algebra immer eine hermitesche Quadratwurzel besitzen?

Auch hier stellt sich heraus, dass die entsprechende Eigenschaft für Operatoren eine wichtige ist, und in diesem Fall ist es eine, die uns schon wohlbekannt ist.

Wir beginnen mit einem einfachen Hilfssatz.

Hilfssatz 9.29 *Sei $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum über $\mathbf{C}$ und sei $T \in \operatorname{End} H$. Wir definieren den **numerischen Wertebereich** $W(T)$ von T als die Menge*

$$W(T) := \{ \langle T(v), v \rangle \bigm| v \in H, \|v\| = 1 \}. \tag{9.21}$$

Weil T beschränkt ist, ist $W(T)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbf{C}$ und die abgeschlossene Hülle $\overline{W(T)}$ ist somit kompakt.

Für jedes $T \in \operatorname{End} H$ gilt

$$\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}. \tag{9.22}$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \overline{W(T)}$. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass

$$\bigl|\mu - \lambda\bigr| \geq \delta$$

für jedes $\mu \in W(T)$.

Für jeden Vektor $v \in H$ mit $\|v\| = 1$ ist deshalb

$$\begin{aligned} 0 < \delta &\leq \bigl|\langle T(v), v \rangle - \lambda\bigr| \\ &= \bigl|\langle T(v), v \rangle - \langle \lambda v, v \rangle\bigr| \\ &= \bigl|\langle (T - \lambda \operatorname{id}_H)(v), v \rangle\bigr| \\ &\leq \bigl\|(T - \lambda \operatorname{id}_H)(v)\bigr\| \, \|v\| \\ &= \bigl\|(T - \lambda \operatorname{id}_H)(v)\bigr\|. \end{aligned}$$

Also ist

$$\bigl\|(T - \lambda \operatorname{id}_H)(v)\bigr\| \geq \delta \, \|v\|$$

für jeden Vektor v von Norm 1, und folglich für jeden Vektor $v \in H$ überhaupt.

Aus Korollar 2.17 zum Banachschen Isomorphiesatz folgt zunächst, dass $T - \lambda \operatorname{id}_H$ injektiv ist und ein abgeschlossenes Bild hat.

Sei S der adjungierte Operator zu $T - \lambda \operatorname{id}_H$. Auch er ist injektiv, denn wenn nicht enthält sein Kern einen Vektor v von Norm 1, für den dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, 0 \rangle = \langle v, S(v) \rangle &= \langle (T - \lambda \operatorname{id}_H)(v), v \rangle \\ &= \langle T(v), v \rangle - \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle - \lambda, \end{aligned}$$

in Widerspruch zur Tatsache, dass $\lambda \notin W(T)$.

Aus Formel (7.14b) in Lemma 7.14 erhalten wir, dass

$$\mathrm{Bild}(T - \lambda\, \mathrm{id}_H) = \overline{\mathrm{Bild}(T - \lambda\, \mathrm{id}_H)} = (\mathrm{Ker}\, S)^{\perp} = \{\, 0 \,\}^{\perp} = H,$$

d.h., $T - \lambda\, \mathrm{id}_H$ ist auch surjektiv, somit bijektiv und nach dem Banachschen Isomorphiesatz invertierbar.

Also ist λ kein Spektralwert von T. ■

Lemma 9.30 *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbf{C}$ und sei $T \in \mathrm{End}\, H$ ein hermitescher Operator. Folgende drei Bedingungen sind äquivalent.*

a) $\sigma(T) \subseteq \mathbf{R}_+$.

b) $\sigma(T) \subseteq \big[0, \|T\|\big]$.

c) T ist ein positiver Operator.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) folgt sofort aus der Tatsache, dass $r(T) \leq \|T\|$ nach Lemma 8.21 a).

b) $\Rightarrow$ c): Nach Lemma 9.25 besitzt T, da er nur nichtnegative reelle Spektralwerte hat, eine hermitesche Quadratwurzel $S \in \mathrm{End}\, H$ (und T ist selber hermitesch).

Für jedes $v \in H$ gilt nun

$$\langle T(v), v\rangle = \langle (S \circ S)(v), v\rangle = \langle S(v), S^t(v)\rangle = \langle S(v), S(v)\rangle = \big\|S(v)\big\|^2 \geq 0.$$

Also ist T ein positiver Operator.

c) $\Rightarrow$ a): Weil T ein positiver Operator ist, besteht der numerische Wertebereich $W(T)$ nur aus nichtnegativen reellen Zahlen und somit ist auch

$$\overline{W(T)} \subseteq \mathbf{R}_+.$$

Aus Hilfssatz 9.29 folgt, dass $\sigma(T) \subseteq \mathbf{R}_+$. ■

Korollar 9.31 *Sei H ein komplexer Hilbertraum. Jeder positive Operator T auf H hat eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel in* $\mathrm{End}\, H$*, und sie kommutiert mit jedem Operator, der mit T kommutiert.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Äquivalenz a) $\Leftrightarrow$ c) in Lemma 9.30 und aus Lemma 9.25. ■

Korollar 9.32 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und seien S und T hermitesche Operatoren auf H.*

a) *$S \circ T$ ist genau dann hermitesch, wenn $S \circ T = T \circ S$.*

b) *Wenn S und T positiv sind und wenn $S \circ T = T \circ S$, dann ist $S \circ T$ positiv.*

Beweis. a) folgt sofort aus der Tatsache, dass

$$(S \circ T)^t = T^t \circ S^t = T \circ S.$$

b): $S \circ T$ ist hermitesch nach Teil a).

Nach Korollar 9.31 hat T eine positive Quadratwurzel Q, und Q kommutiert mit jedem Operator, der mit T kommutiert, insbesondere also mit S.

Weil S positiv und Q hermitesch ist, gilt für jeden Vektor $v \in H$, dass

$$\begin{aligned}\langle (S \circ T)(v), v\rangle &= \langle (S \circ Q \circ Q)(v), v\rangle \\ &= \langle (Q \circ S \circ Q)(v), v\rangle = \langle S\big(Q(v)\big), Q(v)\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

und das zeigt, dass $S \circ T$ positiv ist. ■

Wir wollen noch einige nützliche einfache Implikationen von Lemma 9.30 und der früheren Lemmata für das Funktionalkalkül mit Operatoren festhalten.

Korollar 9.33 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator auf H.*

Wir bezeichnen mit A_T die von T erzeugte C^*-Unteralgebra von End H *und mit $A_T^{\mathbf{R}}$ die von T erzeugte* reelle *Banachunteralgebra von* End H.

Es gilt

a) *A_T ist die von T erzeugte komplexe Banachunteralgebra von* End H.

b) *Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$ ist $f(T) \in A_T^R$ genau dann, wenn f reellwertig ist.*

c) *$A_T^{\mathbf{R}}$ besteht genau aus den hermiteschen Elementen von A_T.*

d) *Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$ ist $f(T)$ ein positiver Operator genau dann, wenn f nur nichtnegative reelle Werte annimmt, also wenn $f \geq 0$.*

e) *Für je zwei reellwertige Funktionen f und $g \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$, also für je zwei Funktionen f und $g \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, ist $f(T) \le g(T)$ genau dann, wenn $f \le g$ als Funktionen, also wenn*

$$f(\lambda) \le g(\lambda)$$

für jedes $\lambda \in \sigma(T)$.

Beweis. a): Nach Lemma c ist A_T die von T und T^t erzeugte Banachunteralgebra von $\operatorname{End} H$, aber da T hermitesch ist, ist $T = T^t$ und diese Algebra wird als Banachunteralgebra schon alleine von T erzeugt.

b): Sei j die Inklusion $\sigma(T) \longrightarrow \mathbf{C}$. Weil T hermitesch ist, ist $\sigma(T) \subseteq \mathbf{R}$ nach Lemma 8.67 und j ist somit reellwertig.

Wir haben nach dem Spektralsatz 9.11 einen isometrischen C^*-Algebra Isomorphismus

$$\gamma\colon A_T \longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big),$$

eindeutig bestimmt durch die Tatsache, dass $\gamma(T) = j$. Das Funktionalkalkül ist so definiert, dass $\gamma\big(f(T)\big) = f$ für jede Funktion f.

Die Aussage von Teil b) behauptet einfach, dass $\gamma(A_T^{\mathbf{R}}) = \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$. Sie B die linke Seite von dieser Gleichung; sie ist die von $\gamma(T) = j$ erzeugte reelle Banachunteralgebra von $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$, weil $A_T^{\mathbf{R}}$ die von T erzeugte reelle Banachunteralgebra von $\operatorname{End} H$ aber auch von A_T ist.

Nach Satz 8.57 ist $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ eine reelle Banachalgebra, und sie enthält j. Deshalb ist $B \subseteq \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, und wir müssen nur noch beweisen, dass B keine echte Teilmenge ist.

B enthält die Funktion $\mathbf{1}$ und trennt Punkte, weil schon die erzeugende Funktion j, als identische Abbildung, offensichtlich Punkte in $\sigma(T)$ trennt. Aus der reellen Version des Satzes von Stone-Weierstraß folgt, dass B dicht in $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ ist, aber als Banachunteralgebra ist B selber schon abgeschlossen und somit gleich $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, was wir zu zeigen hatten.

c): Wegen Teil b) reicht es zu zeigen, dass für $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$ der nach dem Funktionalkalkül erhaltene Operator $f(T)$ genau dann hermitesch ist, wenn f reellwertig ist.

Aber das folgt aus Lemma 9.23 a) und dem Spektralen Abbildungssatz, denn genau, wenn f reellwertig ist, ist $\sigma\big(f(T)\big) = f\big(\sigma(T)\big) \subseteq \mathbf{R}$.

d): Nach dem Spektralen Abbildungssatz und nach Lemma 9.30 ist $f(T)$ genau dann positiv, wenn

$$f\big(\sigma(T)\big) = \sigma\big(f(T)\big) \subseteq \mathbf{R}_+,$$

also genau dann, wenn f nur nichtnegative reelle Werte auf $\sigma(T)$ annimmt.

e): Für reellwertige Funktionen f und g sind $f(T)$ und $g(T)$ automatisch hermitesch, und nach Definition ist $f(T) \leq g(T)$ genau dann, wenn

$$(g - f)(T) = g(T) - f(T)$$

positiv ist.

Nach Teil d) ist das genau dann der Fall, wenn $g - f \geq 0$, also wenn $f \leq g$. ■

Das Funktionalkalkül liefert, wie wir gesehen haben, nicht nur eine schöne Methode, um mit normalen und spezieller mit hermiteschen Operatoren auf Hilberträumen zu rechnen, sondern übersetzt wichtige Eigenschaften dieser Operatoren in einfache und leicht nachzuprüfende Eigenschaften von stetigen komplexwertigen Funktionen auf Spektren.

Der Spektrale Abbildungssatz besagt, dass das Funktionalkalkül auch auf Spektren anwendbar ist, und das folgende Lemma zeigt, dass dabei Eigenwerte von Operatoren wieder in Eigenwerte übergehen.

Lemma 9.34 *Sei T ein normaler Operator auf einem komplexen Hilbertraum H und sei $v \in H$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ.*

Sei $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$. Dann ist v auch ein Eigenvektor von $f(T)$, und zwar zum Eigenwert $f(\lambda)$.

Beweis. Sei

$$B := \Big\{ f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big) \;\Big|\; \big(f(T)\big)(v) = f(\lambda)v \Big\}.$$

Dies ist die Menge der Funktionen, für die die Behauptung des Lemmas stimmt, und wir müssen zeigen, dass $B = \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$.

Nach Voraussetzung ist $T(v) = \lambda v$, und das bedeutet, dass die Inklusion $j\colon \sigma(T) \longrightarrow \mathbf{C}$ zu B gehört, da $j(T) = T$ und $j(\lambda) = \lambda$.

Wir behaupten, dass auch $\overline{j}$, die Funktion $\mu \mapsto \overline{\mu}$, in B liegt. Nach Gleichung (9.5) ist $\overline{j}(T) = T^t$, und wir müssen also zeigen, dass $T^t(v) = \overline{\lambda}v$.

Weil $T(v) = \lambda v$, ist $(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(v) = \mathbf{0}$. Der adjungierte Operator zu $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ ist $T^t - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_H$, und er kommutiert mit $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ weil T normal ist, wie man leicht nachrechnet wenn man berücksichtigt, dass die Vielfachen von id_H mit jedem Operator kommutieren.

Also ist $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ normal. Aus Lemma 7.39 folgt, dass

$$\big\|(T^t - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_H)(v)\big\| = \big\|(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(v)\big\| = 0,$$

und das zeigt, dass $(T^t - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_H)(v) = \mathbf{0}$, oder $T^t(v) = \overline{\lambda}v$ wie behauptet.

Offensichtlich ist B ein komplexer Untervektorraum von $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{C}\big)$.

Wenn f und $g \in B$, dann ist auch $fg \in B$, denn

$$\begin{aligned}\big((fg)(T)\big)(v) &= \big(f(T)\circ g(T)\big)(v) = \big(f(T)\big)\big(g(\lambda)v\big)\\ &= g(\lambda)\big(f(T)\big)(v) = g(\lambda)f(\lambda)v = f(\lambda)g(\lambda)v = (fg)(\lambda)v.\end{aligned}$$

Und die konstante Funktion $\mathbf{1}$ gehört zu B, weil $\mathbf{1}(T) = \mathrm{id}_H$ und $\mathrm{id}_H(v) = 1 \cdot v$.

Also ist B eine Unteralgebra von $\mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big)$, die das Einselement enthält.

B ist auch abgeschlossen (und somit eine Banachunteralgebra), denn die Auswertungsfunktion $\alpha\colon \mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big) \longrightarrow \mathbf{C}$ mit $\alpha(f) := f(\lambda)$ ist offensichtlich stetig nach Definition der Norm auf $\mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big)$, somit ist die Funktion

$$\begin{aligned}\beta\colon \mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big) &\longrightarrow \mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big)\\ f &\longmapsto f - f(\lambda)\cdot\mathbf{1}\end{aligned}$$

stetig, das Funktionalkalkül γ^{-1} ist stetig, und die Auswertungsfunktion $\omega\colon A_T \longrightarrow H$ mit $\omega(S) = S(v)$ ist stetig (hier ist A_T die von T erzeugte Banachunteralgebra von $\operatorname{End} H$). Eine Funktion f gehört zu B genau dann, wenn

$$(\omega\circ\gamma^{-1}\circ\beta)(f) = \big(f(T) - f(\lambda)\,\mathrm{id}_H\big)(v) = \mathbf{0},$$

d.h., B ist die Nullstellenmenge einer stetigen Abbildung nach H und ist somit abgeschlossen.

Das bedeutet, dass B eine Banachunteralgebra von $\mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big)$ ist, die die Funktionen j und $\overline{j}$ enthält.

Aber j und $\overline{j}$ erzeugen $\mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big)$, weil das Funktionalkalkül ein Algebrenisomorphismus ist und $j(T) = T$ und $\overline{j}(T) = T^t$ die Banachalgebra A_T erzeugen. Also muss $B = \mathcal{C}\big(\sigma(T),\mathbf{C}\big)$ sein und wir sind fertig. ■

Es ist nun Zeit, dass wir neben dem Funktionalkalkül noch andere und leistungsfähigere Methoden entwickeln, um Spektren zu untersuchen und mit ihrer Hilfe Operatoren auf einem Hilbertraum zu konstruieren, zu beschreiben und zu studieren.

Diese Methoden werden wir in der *Maßtheorie* finden, die wir im nächsten Kapitel anwenden und „hinbiegen“ wollen, um die Ideen der auf Seite 370 beginnenden Diskussion in unendlichdimensionale Hilberträume übertragen zu können.

Mit diesen Ideen und Methoden wollen wir die klassische Spektralzerlegung eines endlichdimensionalen Hilbertraumes als direkte Summe der Eigenräume eines normalen Operators auch für unendlichdimensionale Räume geeignet realisieren.

Kapitel 10

Die Spektraldarstellung hermitescher Operatoren auf Hilberträumen

Spektralsätze für Operatoren auf einem Hilbertraum H beschreiben die Operatoren, oder die von ihnen erzeugten Unteralgebren der Endomorphismenalgebra, durch ihre Spektra oder durch auf dem Spektrum fußende Konstruktionen.

Einen solchen Spektralsatz haben wir im letzten Kapitel für normale Operatoren N schon bewiesen. Satz 9.11 stellt einen Isomorphismus auf zwischen der von N erzeugten C^*-Unteralgebra A_N von $\operatorname{End} H$ und der Algebra der stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem Spektrum von N, und begründet auf diese Weise das ***stetige Funktionalkalkül***.

Im jetzigen Kapitel 10 wollen wir dieses Funktionalkalkül zu einer neuen detaillerteren Gestalt erweitern, die normale Operatoren N auf einem Hilbertraum H, und die Elemente der von ihnen erzeugten C^*-Unteralgebra $A_N \subseteq \operatorname{End} H$, als *Integrale stetiger Funktionen* über $\sigma(N)$ darstellt!

Das scheint zunächst wenig Sinn zu ergeben, denn das Integral einer zahlenwertigen Funktion über einen festen Bereich müsste doch wieder eine Zahl liefern — wie kann man dann einen *Operator* als Integral einer Funktion erhalten? Das erreichen wir durch die Verwendung ***operatorwertiger Lebesgue-Stieltjes Maße*** anstelle des üblichen Lebesgue-Maßes auf $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

Ein ***Lebesgue-Stieltjes Maß*** auf $\mathbf{R}$ im üblichen (zahlenwertigen) Sinn ist nichts anderes als ein Lebesgue-Maß, bei dem der Inhalt eines Intervalls nicht durch seine Länge, sondern durch das Wachstum einer fest gewählten monotonen Funktion auf dem Intervall gegeben ist.

Für die Konstruktion eines *operatorwertigen* Lebesgue-Stieltjes Maßes ersetzt man bei dieser Konstruktion die reelle Gerade und die auf ihr definierte monotone Funktion durch eine monoton steigende Schar von ***Projektoren***. Weil Projektoren hermitesch sind, ist für sie eine Ordnung erklärt, und „monoton steigend“ ist im Sinne von dieser Ordnung zu verstehen.

Die Bedeutung eines Integrals bezüglich eines projektorwertigen Maßes wird allerdings letztendlich doch durch zahlenwertige Integrale erklärt, die man erhält, indem man die vorkommenden hermiteschen Operatoren durch den Wert ihrer quadratischen Form auf Testvektoren ersetzt.

Das stetige Funktionalkalkül war einerseits eine elegante Methode, um mit normalen Operatoren oder normalen Elementen einer C^*-Algebra zu rechnen, aber es war auch mehr als das. Zum Beispiel war es hilfreich bei der Berechnung und der Untersuchung von Spektra normaler Operatoren.

Auch die Integraldarstellung ist mehr als nur eine weitere leistungsfähige Methode, um Operatoren zu beschreiben, zu zerlegen und mit ihnen zu rechnen. Angewendet auf die richtigen Integranden liefert sie auch nützliche Informationen über den Hilbertraum selber, die man aus der Kenntnis des Spektrums eines Operators gewinnen kann. So liefert das Integral der konstanten Funktion $\mathbf{1}$ zum Beispiel eine Spektralzerlegung des Identitätsoperators als eine „Integralsumme“ von Projektoren, und dies entspricht dem bekannten endlichdimensionalen Spektralsatz, der einen Hilbertraum zerlegt als die direkte Summe der Eigenräume eines normalen Operators.

Eine letzte Erklärung, bevor wir mit unserem neuen Thema beginnen: in dieser Motivation, in den Vorarbeiten im letzten Kapitel und im endlichdimensionalen Spektralsatz, den wir erweitern wollen, geht es immer um ***normale*** Operatoren, aber im Inhalt dieses Kapitels, wie der Titel schon verrät, werden wir nur hermitesche Operatoren betrachten.

Das vereinfacht die Integraldarstellung erheblich, denn da wir über Spektren integrieren, müssen wir bei hermiteschen Operatoren nur Integrale über Bereiche in $\mathbf{R}$ betrachten und nicht über Gebiete in $\mathbf{C}$.

Andrerseits bedingt die Beschränkung auf hermitesche Operatoren keine wesentliche Abschwächung der Ergebnisse, denn jeder normale Operator hat einen hermiteschen „Real-“ und „Imaginärteil“, und weil diese miteinander kommutieren, kann man aus den operatorwertigen Maßen für Real- und Imaginärteil ein zweidimensionales operatorwertiges Maß auf $\mathbf{C}$ konstruieren, um die entsprechenden Ergebnisse auch für normale Operatoren zu erhalten.

Somit liefert der hermitesche Fall ausreichend Information auch über den allgemeineren Fall, wo der Operator normal ist.

Wie oben schon angedeutet, sind die an den erwähnten operatorwertigen Maßen beteiligten Operatoren eigentlich ***Projektoren***. In Kapitel 9 haben wir Projektoren kurz kennen gelernt, weil ihre sehr einfachen Spektren sie mit Hilfe des Funktionalkalküls genau charakterisieren und das eine sehr nahe liegende und schöne Anwendung dieses damals gerade eingeführten Werkzeugs war.

Um aus Projektoren Maße zu bauen, müssen wir ein paar weitere elementare Tatsachen über sie wissen, und damit beginnen wir die Fortsetzung unserer Untersuchungen.

Lemma 10.1 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und seien P und Q Projektoren auf H.*

a) Für jedes $v \in H$ ist

$$\langle P(v), v \rangle = \left\| P(v) \right\|^2. \tag{10.1}$$

b) $P \geq 0$ (d.h., P ist ein positiver Operator).

c) Die Nullabbildung $\mathbf{0} \in \operatorname{End} H$ und id_H sind Projektoren, und

$$\mathbf{0} \leq P \leq \mathrm{id}_H,$$

d.h., $\mathbf{0}$ ist der kleinste und id_H der größte Projektor.

d) Wenn $P \neq 0$, dann ist $\|P\| = 1$.

e) Folgende Bedingungen für zwei Projektoren P und Q sind äquivalent:

i) $P \leq Q$;
ii) $\operatorname{Bild} P \subseteq \operatorname{Bild} Q$;
iii) $\operatorname{Ker} Q \subseteq \operatorname{Ker} P$;
iv) $QP = P$;
v) $PQ = P$;
vi) $Q - P$ ist ein Projektor.

f) Folgende Bedingungen für zwei Projektoren P und Q sind äquivalent:

i) $P + Q$ ist ein Projektor;
ii) $PQ = QP = \mathbf{0}$;
iii) $PQ = \mathbf{0}$ oder $QP = \mathbf{0}$;
iv) $\operatorname{Bild} P \perp \operatorname{Bild} Q$.

g) Sei $\{ P_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine monoton steigende Folge von Projektoren. Dann gibt es einen Operator P auf H, so dass $\lim_{n \to \infty} P_n(v) = P(v)$ für jedes $v \in H$. Dieser Operator ist ein Projektor und es gilt

$$\operatorname{Ker} P = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} P_n \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{Bild} P = \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Bild} P_n}. \tag{10.2}$$

h) Sei $\{ Q_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ *eine monoton fallende Folge von Projektoren. Dann gibt es einen Operator* Q *auf* H*, so dass* $\lim_{n\to\infty} Q_n(v) = Q(v)$ *für jedes* $v \in H$*. Dieser Operator ist ein Projektor und es gilt*

$$\operatorname{Ker} Q = \overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker} Q_n} \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{Bild} Q = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Bild} Q_n. \tag{10.3}$$

Beweis. a): P ist hermitesch und $P \circ P = P$. Also gilt für jedes $v \in H$, dass

$$\langle P(v), v\rangle = \langle (P \circ P)(v), v\rangle = \langle P(v), P(v)\rangle = \left\|P(v)\right\|^2.$$

b) folgt sofort aus Teil a), da $\left\|P(v)\right\|^2 \geq 0$.

c): Alle reellen Vielfachen von id_H, darunter $\mathrm{id}_H = 1\cdot\mathrm{id}_H$ und $\mathbf{0} = 0\cdot\mathrm{id}_H$, sind hermitesch, und id_H und $\mathbf{0}$ sind ihre eigenen Quadrate in $\operatorname{End} H$ und somit Projektoren.

Nach Teil b) ist $P - \mathbf{0} = P \geq 0$ und somit $P \geq \mathbf{0}$ im Sinne der Ordnung für hermitesche Operatoren.

Auch $\mathrm{id}_H - P$ ist ein Projektor und deshalb gilt $\mathrm{id}_H - P \geq \mathbf{0}$, was äquivalent ist zu $P \leq \mathrm{id}_H$.

d): Jeder Projektor P ist normal und $\sigma(P) \subseteq \{ 0, 1 \}$. Wenn $P \neq \mathbf{0}$, dann ist 1 ein Eigenwert von P.

Aus Korollar 9.12 folgt, dass $\left\|P\right\| = r(P) = 1$.

e): Wir zeigen zuerst, dass iv) $\iff$ v). Als Projektoren sind P und Q hermitesch und die beiden Behauptungen gehen durch Adjungieren auseinander hervor. Wenn $QP = P$, dann ist nämlich

$$PQ = P^t Q^t = (QP)^t = P^t = P$$

und umgekehrt, so dass iv) und v) sich gegenseitig implizieren.

i) $\Rightarrow$ iii): Wenn $v \in \operatorname{Ker} Q$ und wenn $P \leq Q$, dann gilt

$$0 \leq \langle P(v), v\rangle \leq \langle Q(v), v\rangle = \langle \mathbf{0}, v\rangle = 0.$$

Aus Teil a) folgt, dass $\left\|P(v)\right\| = 0$, also dass $P(v) = \mathbf{0}$ und $v \in \operatorname{Ker} P$.

iii) $\Rightarrow$ v): Die Beziehung $PQ = P$ gilt genau dann, wenn $P(\mathrm{id}_H - Q) = \mathbf{0}$, und das ist gleichbedeutend damit, dass $\operatorname{Bild}(\mathrm{id}_H - Q) \subseteq \operatorname{Ker} P$. Aber nach Satz 9.27 c) ist $\operatorname{Bild}(\mathrm{id}_H - Q) = \operatorname{Ker} Q$. Also ist $PQ = P$ sogar äquivalent zu $\operatorname{Ker} Q \subseteq \operatorname{Ker} P$.

v) $\Rightarrow$ vi): Wir haben schon gesehen, dass wenn v) gilt, auch iv) gilt.

$Q - P$ ist hermitesch, und man rechnet jetzt einfach nach, dass

$$(Q - P)(Q - P) = Q^2 - PQ - QP + P^2 = Q - P - P + P = Q - P.$$

Also ist $Q - P$ ein Projektor.

Damit haben wir die Implikationen i) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ vi) bewiesen.

Wir beweisen jetzt die „übersprungenen“ Implikationen i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ vi).

i) $\Rightarrow$ ii) erhalten wir, wenn wir in der bewiesenen Implikation i) $\Rightarrow$ iii) statt der Projektoren P und Q die komplementären Projektoren betrachten, und Folgendes berücksichtigen:

- die komplementären Projektoren erfüllen i) in der Reihenfolge
$$\mathrm{id}_H - Q \leq \mathrm{id}_H - P;$$
- die oben schon bewiesene Folgerung iii) für die komplementären Projektoren ist äquivalent zur Behauptung ii) für P und Q, denn nach Satz 9.27 c) haben wir
$$\operatorname{Bild} P = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_H - P) \subseteq \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_H - Q) = \operatorname{Bild} Q.$$

ii) $\Rightarrow$ iv): Als Projektor operiert Q identisch auf sein eigenes Bild, und wenn $\operatorname{Bild} P \subseteq \operatorname{Bild} Q$, dann folgt daraus sofort $Q \circ P = P$.

iv) $\Rightarrow$ vi), da wir schon bewiesen haben, dass iv) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ vi).

Wir haben zwei ineinander verzahnte Ketten von Implikationen bewiesen, und beide schließen sich zu Zyklen, aus denen die Äquivalenz aller Behauptungen hervorgeht, sobald wir noch zeigen, dass vi) $\Rightarrow$ i).

Das folgt aber sofort aus der Tatsache, dass alle Projektoren und insbesondere $Q - P$ positiv sind.

f):

i) $\Leftrightarrow$ ii): Genau dann ist $P + Q$ ein Projektor, wenn

$$(P+Q)(P+Q) = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + PQ + QP + Q = P + Q,$$

also wenn

$$PQ = -QP. \tag{10.4}$$

Wenn man diese Gleichung rechts mit P verknüpft, erhält man

$$PQP = -QPP = -QP,$$

d.h., $\operatorname{Bild}(QP)$ besteht (neben der $\mathbf{0}$) aus Eigenvektoren von P zum Eigenwert -1.

Als Projektor hat P aber nur 0 und 1 als Spektralwerte. Wenn (10.4) gilt, ist also $QP = \mathbf{0}$ und damit auch $PQ = \mathbf{0}$.

Umgekehrt, wenn $PQ = QP = \mathbf{0}$, dann gilt (10.4) natürlich und $P + Q$ ist ein Projektor.

ii) $\Rightarrow$ iii) ist klar.

iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ ii): Mit Satz 9.27 c) und d) sehen wir, dass $PQ = \mathbf{0}$ genau dann, wenn

$$\operatorname{Bild} Q \subseteq \operatorname{Ker} P = \operatorname{Bild}(\mathrm{id}_H - P) = (\operatorname{Bild} P)^{\perp} \tag{10.5}$$

und diese Aussage $\operatorname{Bild} Q \subseteq (\operatorname{Bild} P)^{\perp}$ gilt natürlich genau dann, wenn $\operatorname{Bild} Q \perp \operatorname{Bild} P$.

Entsprechend zeigt man, dass $\operatorname{Bild} P \perp \operatorname{Bild} Q$ genau dann, wenn $QP = \mathbf{0}$.

Wenn iv) gilt, gelten also *beide* Gleichungen $PQ = \mathbf{0}$ und $QP = \mathbf{0}$ und wir haben ii).

Insgesamt haben wir gezeigt, dass i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ ii), und damit sind alle Teile äquivalent.

g): Die Folge $\{ P_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ ist beschränkt nach Teil d).

Nach Satz 7.36 gibt es einen hermiteschen Operator P, so dass

$$\lim_{n \to \infty} P_n(v) = P(v) \tag{10.6}$$

für jedes $v \in H$.

Mit Teil a) und weil P hermitesch ist, folgt für jedes $v \in H$, dass

$$\begin{aligned} \langle P(v), v \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle P_n(v), v \rangle = \lim_{n \to \infty} \left\| P_n(v) \right\|^2 \\ = \left\| P(v) \right\|^2 = \langle P(v), P(v) \rangle = \langle P^2(v), v \rangle. \end{aligned}$$

Aus Korollar 7.23 können wir schließen, dass $P = P^2$, d.h., dass P ein Projektor ist.

Aus Teil a) folgt, dass $v \in \operatorname{Ker} P$ genau dann, wenn $\langle P(v), v \rangle = 0$, und die entsprechende Aussage gilt auch für die P_n.

Weil die Folge $\{ P_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ monoton steigend ist, ist für jedes $v \in V$ die Folge $\left\{ \langle P_n(v), v \rangle \right\}_{n \in \mathbf{N}}$ auch monoton steigend, und ihr Supremum ist $\langle P(v), v \rangle$ wegen (10.6).

Daraus folgt einerseits, dass $P_n \leq P$ für jedes n.

Außerdem folgt aus der Monotonizität, dass $\langle P(v), v \rangle = 0$ genau dann, wenn für alle n gilt $\langle P_n(v), v \rangle = 0$. Dies zeigt, dass

$$\operatorname{Ker} P = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} P_n.$$

Aus Formel (10.6) ist klar, dass

$$\operatorname{Bild} P \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Bild} P_n}.$$

Nach Satz 9.27 c) ist Bild $P = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$ und somit abgeschlossen.

Weil $P_n \le P$ für jedes n, ist auch Bild $P_n \subseteq$ Bild P nach Bedingung ii) in Teil e), und folglich enthält Bild P die Vereinigung der Bild P_n, und auch ihre abgeschlossene Hülle, weil Bild P ja abgeschlossen ist.

Das zeigt die Inklusion in der anderen Richtung und beendet den Beweis von (10.2) und von Teil g).

h) folgt sofort durch Anwendung von Teil g) auf die monoton steigende Folge $\{ \mathrm{id}_H - Q_n \}_{n \in \mathbf{N}}$, wenn wir noch berücksichtigen, dass nach Satz 9.27 c) $\mathrm{Ker}\, Q_n = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_H - Q_n)$ und $\mathrm{Bild}\, Q_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - Q_n)$, und entsprechend für den Grenzwertoperator Q. ■

In diesem Kapitel wollen wir beliebige hermitesche Operatoren auf einem Hilbertraum in Projektoren „zerlegen“, und diese Zerlegung wird durch eine Art Integral beschrieben und nicht durch eine endliche Summe. Das verkompliziert natürlich die mathematische Beschreibung der Zerlegung erheblich.

Ein möglicher Zugang zu einer brauchbaren Beschreibung besteht darin, den Integranden nicht direkt anzugeben, sondern ihn durch seine kumulative Wirkung zu allen Zwischenzeitpunkten festzulegen, das heißt mehr oder weniger, durch seine (später noch im Detail zu konstruierenden) Integrale über Teilintervalle bis zu einer beliebigen Stelle.

Definition 10.2 Sei H ein komplexer Hilbertraum. Eine ***Spektralschar*** auf H ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Sigma \colon \mathbf{R} &\longrightarrow \mathrm{End}\, H \\ \lambda &\longmapsto E_\lambda \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

a) für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ ist E_λ ein Projektor;

b) wenn $\lambda \le \mu \in \mathbf{R}$, dann ist $E_\lambda \le E_\mu$;

c) für jedes $v \in H$ gilt

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda(v) = \mathbf{0} \qquad \text{und} \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda(v) = v; \tag{10.7}$$

d) die Familie $\{ E_\lambda \}$ von Projektoren ist rechtsseitig halbstetig in dem Sinne, dass für jedes $v \in H$ gilt

$$\lim_{\mu \downarrow \lambda} E_\mu(v) = E_\lambda(v). \tag{10.8}$$

Man beachte, dass man unter Verwendung von Bedingungen iv) und v) aus Lemma 10.1 e) die Eigenschaft 10.2 b) durch eine der äquivalenten Bedingungen

b') $E_\lambda \circ E_\mu = E_\lambda$ für alle $\lambda \le \mu \in \mathbf{R}$

oder

b") $E_\mu \circ E_\lambda = E_\lambda$ für alle $\lambda \le \mu \in \mathbf{R}$

ersetzen kann.

Der triviale oder „uninteressante“ Fall eines Projektors sind $\mathbf{0}$ und id_H. Wir definieren den ***Träger*** der Spektralschar $\Sigma = \{ E_\lambda \}$ als die Menge

$$\mathrm{Tr}(\Sigma) := \overline{\{ \lambda \in \mathbf{R} \mid \mathbf{0} \ne E_\lambda \ne \mathrm{id}_H \}}, \tag{10.9}$$

die abgeschlossene Hülle der Menge der Indizes der nichttrivialen Projektoren in der Spektralschar.

Weil die Schar monoton ist (Bedingung b)) und weil $\mathbf{0}$ und id_H nach Lemma 10.1 c) die kleinsten und größten aller Projektoren sind in der Ordnung für hermitesche Operatoren, ist die Menge der λ, so dass E_λ weder $\mathbf{0}$ noch id_h ist, ein Intervall.

Folglich ist $\mathrm{Tr}(\Sigma)$ ein abgeschlossenes Intervall oder ein abgeschlossener Strahl (oder ganz $\mathbf{R}$).

Noch ein Wort zur Notation oder zur Terminologie. Üblicherweise betrachtet man eine Spektralschar nicht unbedingt als eine projektorwertige Funktion auf $\mathbf{R}$, sondern als eine durch $\mathbf{R}$ indizierte monoton steigende Familie von Projektoren auf H (was ja rein formal das Gleiche ist). Aus diesem Grund spricht man oft einfach von einer Spektralschar $\{ E_\lambda \}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ und verwendet keinen Namen oder Notation für die Funktion, die wir hier Σ genannt haben.

Eine Spektralschar besteht zwar aus Projektoren und nicht aus Zahlen, aber man erhält durch Auswertung der Normen ihrer hermiteschen Sesquilinearformen auf Vektoren in H monoton steigende zahlenwertige Funktionen, die wiederum einen Inhalt für Intervalle und somit ein Maß auf $\mathbf{R}$ bestimmen.

Dieses Maß ist immer endlich (weil alle Projektoren Operatornorm ≤ 1 haben) und deshalb kann man jede beschränkte messbare Funktion danach integrieren. Eine stetige Funktion auf ganz $\mathbf{R}$ kann allerdings unbeschränkt sein, aber wenn das Maß auf einem endlichen Intervall getragen wird, d.h., wenn der Träger der Spektralschar kompakt ist, tritt dieses Problem nicht auf.

Deshalb wollen wir in der Regel Spektralscharen mit kompaktem Träger betrachten. Das wird keine große Einschränkung darstellen, denn wenn wir, wie immer das auch gehen mag, hermitesche Operatoren mit Hilfe dieser Integrale darstellen wollen, wird sich herausstellen, dass wir nur über ihre Spektra integrieren müssen und diese sind ohnehin kompakt.

Eine Spektralschar liefert, wie wir gerade gesehen haben, monoton steigende Funktionen, die Inhalte für Intervalle in $\mathbf{R}$ bestimmen, aus denen man ein Maß gewinnen kann. Wir können auch diese Maße (ohne auf ihre Herleitung zu schauen) direkt betrachten und die Eigenschaften ihrer projektorwertigen Gestalt festhalten. Das sieht wie folgt aus:

Definition 10.3 Sei X eine Menge, sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra auf X.

Ein ***Spektralmaß*** auf $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung

$$E\colon \mathcal{R} \longrightarrow \operatorname{End} H,$$

so dass

a) $E(\emptyset) = \mathbf{0}$ und $E(X) = \mathrm{id}_H$;

b) für jede messbare Menge $M \in \mathcal{R}$ ist $E(M)$ ein Projektor;

c) für je zwei Mengen M und $N \in \mathcal{R}$ ist

$$E(M \cap N) = E(M) \circ E(N);$$

d) für je zwei Mengen M und $N \in \mathcal{R}$ mit $M \cap N = \emptyset$ ist

$$E(M \cup N) = E(M) + E(N);$$

e) für jeden Vektor $v \in H$ ist die Mengenfunktion

$$E_v(M) := \langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle = \langle v, v\rangle_{E(M)}$$

ein Maß auf $\mathcal{R}$.

Wir bemerken, dass das Maß in e) automatisch endlich und positiv ist, denn weil $E(M)$ ein Projektor ist, ist

$$0 \leq E_v(M) = \left\| \big(E(M)\big)(v) \right\|^2 \leq \|v\|^2$$

nach Lemma 10.1 a) und d).

Die Beziehung von Spektralscharen zu Spektralmaßen wollen wir jetzt herleiten (um später daraus eine Integraldarstellung für hermitesche Operatoren zu gewinnen).

Dazu erinnern wir kurz an die Konstruktion von ***Lebesgue-Stieltjes Maßen*** auf **R**. Wir hatten in Kapitel 0 das übliche Lebesgue Maß auf **R** konstruiert, in dem wir in Definition 0.12 die Länge eines offenen Intervalls zu seinem ***Inhalt*** erklärt haben, daraus in Definition 0.14 ein ***äußeres Maß*** μ^* definiert haben und das ***Lebesgue Maß*** μ durch Einschränkung des äußeren Maßes auf die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen erhielten.

In Bemerkung und Definition 0.13 haben wir angedeutet, dass man auch andere Inhalte als die einfache Länge eines Intervalls verwenden kann, um Varianten des Lebesgue Maßes zu konstruieren, und es wurde der nahe liegende Vorschlag gemacht, die euklidische Länge eines Intervalls durch das Wachstum einer vorgegebenen monoton steigenden Funktion α zu ersetzen. Diese Abwandlung führt dann nach der gleichen allgemeinen Konstruktionsmethode zum ***Lebesgue-Stieltjes Maß*** für die Funktion α.

Jetzt ist die Zeit gekommen, wo wir Lebesgue-Stieltjes Maße tatsächlich benötigen, und wir skizzieren die Konstruktion deshalb etwas genauer als damals.

Definition 10.4 Sei $\alpha\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine monoton steigende Funktion. Für jedes offene Intervall $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$ (eventuell mit $a = -\infty$ oder $b = \infty$) definiere man den α-***Inhalt*** des Intervalls (a,b) durch

$$I_\alpha(a,b) := \lim_{t\uparrow b} \alpha(t) - \lim_{t\downarrow a} \alpha(t). \tag{10.10}$$

Manchmal ist es auch nützlich, dies anders zu beschreiben. Für ein abgeschlossenes Intervall $[c,d]$ setzen wir

$$\Delta_\alpha\big([c,d]\big) := \alpha(d) - \alpha(c). \tag{10.11}$$

Weil α monoton steigend ist, gilt offensichtlich

$$I_\alpha(a,b) = \sup_{[c,d]\subseteq(a,b)} \alpha(d) - \alpha(c) = \sup_{[c,d]\subseteq(a,b)} \Delta_\alpha\big([c,d]\big). \tag{10.12}$$

Wir werden mit der neuen Inhaltsfunktion I_α die Konstruktion aus Kapitel 0 nachmachen und werden hier nur die notwendigen Anpassungen kommentieren und darauf hinweisen, welche Merkmale der damaligen Konstruktion für die neue Version nicht mehr gelten.

Weil wir das Lebesgue-Stieltjes Maß nur auf **R** benötigen, werden wir keine mehrdimensionalen Quader betrachten und verwenden die Bezeichnung

Quader nur aus Gründen der Übertragbarkeit der damaligen Erklärungen weiter, einfach als Synonym für ***offenes Intervall***.

Mit der veränderten Inhaltsfunktion I_α und der Beschränkung auf den eindimensionalen Fall können wir Definition 0.14 wörtlich übernehmen, um den α-***Gesamtinhalt*** $I_\alpha(\mathcal{Q})$ einer abzählbaren Familie $\mathcal{Q}$ von offenen Intervallen zu definieren (als die Summe der α-Inhalte der Quader in der Familie).

Sei $A \subseteq \mathbf{R}$. Durch wörtliche Anwendung der Formel (0.12) definieren wir das α-***äußere Maß*** $\mu_\alpha^*(A)$ als das Infimum der α-Gesamtinhalte aller A überdeckenden abzählbaren Familien von offenen Intervallen.

Bemerkung 0.15 gilt nach wie vor, und Lemma 0.16 über die Grundeigenschaften des äußeren Maßes gilt weitgehend, bis auf die Teile c) (also die Translationsinvarianz) und e) (abzählbare Mengen haben Maß 0). Einzelne Punkte können sehr wohl jetzt positives Maß haben, wenn α dort eine Sprungunstetigkeit hat.

Die **leere Menge** ist aber immer noch eine μ_α^*-Nullmenge, da sie von der leeren Familie von offenen Quadern überdeckt wird und diese Familie natürlich α-Gesamtinhalt 0 hat.

Wir wollen kurz beschreiben, warum Lemma 0.16 f) noch gültig ist. Die Aussage ist, dass für ein offenes Intervall $Q := (a, b)$ gilt

$$\mu_\alpha^*(Q) = I_\alpha(Q) = \lim_{t\uparrow b} \alpha(t) - \lim_{t\downarrow a} \alpha(t) = \sup_{[c,d]\subseteq(a,b)} \Delta_\alpha\big([c, d]\big).$$

Ist $\mathcal{Q}$ eine abzählbare Familie von offenen Intervallen Q_i, die (a, b) überdeckt, so überdeckt sie auch jedes in (a, b) enthaltene abgeschlossene Intervall $[c, d]$, aber weil abgeschlossene Intervalle kompakt sind, hat diese Überdeckung eine Lebesguezahl und es gibt deshalb eine endliche Unterteilung von $[c, d]$, so dass jedes Teilintervall J_k in einer der Mengen Q_i enthalten ist.

Wir ordnen jedem Teilintervall eine solche umgebende Menge Q_i zu, aber wir möchten das gerne so machen, dass die Zuordnung injektiv ist.

Das muss sie von Haus aus nicht sein, aber wir können es erreichen, indem wir beginnend am linken Ende von $[c, d]$ aufeinanderfolgende Teilintervalle so lange zu einem größeren Teilintervall zusammenfügen, bis das nächste ursprüngliche Teilintervall nicht mehr im gleichen Q_i enthalten ist, wie die vorhergehenden.

Weil die Q_i zusammenhängend sind, kann es nicht vorkommen, dass mehrere Teilintervalle in einem der Q_i liegen aber ein zwischen ihnen liegendes Teilintervall nicht. D.h., sobald wir beim Zusammenfügen gezwungen sind, ein neues „großes“ Teilintervall zu beginnen, kommt das bisher benutzte Q_i später nie wieder als Obermenge der betrachteten Teilintervalle J_k vor, und die Zuordnung wird auf diese Weise injektiv.

Aus der Definition (10.11) von Δ_α ist klar, dass $\Delta_\alpha\big([c,d]\big)$ die Summe der Werte von Δ_α für die Teilintervalle ist, und diese Werte von Δ_α sind kleiner oder gleich dem Inhalt der umgebenden offenen Intervalle Q_i, von denen wegen der Injektivität der Zuordnung keines zweimal mitgezählt wird.

Daraus folgt, dass $\Delta_\alpha\big([c,d]\big) \le I_\alpha(\mathcal{Q})$ und somit wegen (10.12)

$$I_\alpha(a,b) \le I_\alpha(\mathcal{Q})$$

für jede abzählbare Überdeckung $\mathcal{Q}$ von (a,b) durch offene Intervalle.

Da das Intervall (a,b) alleine schon eine offene Quaderüberdeckung von sich bildet, können wir nach Definition des äußeren Maßes schließen, dass

$$\mu_\alpha^*(a,b) = I_\alpha(a,b).$$

Die beiden Teile von Lemma 0.16, die für μ_α^* nicht mehr gelten, werden in der Folge auch nicht gebraucht.

Mit Definition 0.18 können wir definieren, wann eine Teilmenge von $\mathbf{R}$ ***α-meßbar*** ist, und obwohl dieser Begriff von der genauen Gestalt von μ_α^* abhängt und deshalb nicht unbedingt mit dem üblichen Begriff der Lebesgue-messbaren Teilmengen übereinstimmen muss, gelten die darauf folgenden Sätze aus Kapitel 0 bis einschließlich Lemma 0.21 mit unveränderten Beweisen (vereinfacht auf den eindimensionalen Fall) immer noch.

Lemma 0.21 liefert uns das ***α-Maß*** μ_α, das wir auch das ***Lebesgue-Stieltjes Maß zur Funktion*** α nennen wollen, und dieses Maß ist nichttrivial, wie das Lemma behauptet, solange α **nicht konstant** ist.

(Der niederländische Mathematiker Thomas Jan Stieltjes, 1856-1894, hat die nach ihm benannte Variante des Riemannschen Integrals 1894 kurz vor seinem Tode in einer berühmten und viel gelobten Arbeit über Kettenbrüche eingeführt.)

Obwohl es für unsere jetzige Anwendung nicht unbedingt wichtig ist, gelten auch Lemmata 0.23 und 0.24 nach wie vor und beschreiben Grundeigenschaften von α-Nullmengen (geändert hat sich nur, um welche Mengen es sich dabei handelt).

Notation 10.5 Um die übernommenen Ergebnisse aus Kapitel 0 in ihrer Abwandlung für die Lebesgue-Stieltjes Maßtheorie zu zitieren, wollen wir die Satznummern aus Kapitel 0 verwenden aber mit einem Index α versehen.

So verweisen wir zum Beispiel auf Definition 0.18_α für den Begriff der α-messbaren Teilmengen von $\mathbf{R}$, und in Lemma 0.21_α wird das Lebesgue-Stieltjes Maß μ_α eingeführt.

Die in Definition 10.4 beschriebene Konstruktion hat wie versprochen ein Maß auf der σ-Algebra der α-messbaren Teilmengen von $\mathbf{R}$ geliefert.

Die einzige Frage, die uns noch daran hindert, dieses Maß effektiv anzuwenden, ist das Unwissen darüber, genau welche Teilmengen α-messbar sind. Sie müssen nicht mit den üblichen Lebesgue-messbaren Mengen übereinstimmen, aber diese Frage wollen wir nicht weiter besprechen, denn für uns ist nur wichtig, dass alle ***Borelmengen*** α-messbar sind, für jede monoton steigende Funktion α.

Lemma 10.6 *Sei* $\alpha\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *eine monoton steigende Funktion.*
Jede Borelmenge in $\mathbf{R}$ *ist* α*-messbar.*

Beweis. Da die α-messbaren Mengen nach Lemma 0.21_α eine σ-Algebra bilden und da die σ-Algebra der Borelmengen von den offenen Mengen erzeugt wird, in $\mathbf{R}$ sogar von den offenen Intervallen, reicht es zu zeigen, dass jedes offene Intervall α-messbar ist.

Wir passen den Beweis von Lemma 0.25 auf die jetzige Situation an.

Für jedes $t \in \mathbf{R}$ sei
$$H_t := (t, \infty)$$
der von t ausgehende offene rechte Strahl.

Sei $Q := (a, b)$ ein offenes Intervall. Wir werden zeigen, dass
$$\mu_\alpha^*\big((a,b)\big) = I_\alpha(a,b) = \mu_\alpha^*\big((a,b) \cap H_t\big) + \mu_\alpha^*\big((a,b) \setminus H_t\big) \tag{10.13}$$
(die linke Gleichheit gilt nach Lemma 0.16 f)$_\alpha$ und nur die rechte Gleichheit muss bewiesen werden).

Wenn $t \notin (a,b)$, dann ist entweder $(a,b) \subseteq H_t$ oder $(a,b) \cap H_t = \emptyset$, und ein Summand auf der rechten Seite von (10.13) ist gleich der linken Seite und der andere ist $\mu_\alpha^*(\emptyset) = 0$. In diesem Fall ist nichts zu beweisen.

Wir können also annehmen, dass $t \in (a,b)$. Dann ist
$$(a,b) \cap H_t = (t,b) \qquad \text{und} \qquad (a,b) \setminus H_t = (a,t],$$
beide nichtleer. Die zu beweisende Beziehung (10.13) schreibt sich jetzt einfacher als
$$\mu_\alpha^*\big((a,b)\big) = I_\alpha(a,b) = \mu_\alpha^*\big((a,t]\big) + \mu_\alpha^*\big((t,b)\big).$$
Die Beziehung $\leq$ gilt schon auf Grund der Subadditivität von μ_α^*.

Die Ungleichung in der anderen Richtung zeigen wir zunächst nur näherungsweise.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Formel (10.12) können wir nacheinander abgeschlossene Intervalle $[s,d] \subseteq (t,b)$ und dann $[c,r] \subseteq (a,s)$ finden, so dass
$$\Delta_\alpha\big([s,d]\big) \geq I_\alpha(t,b) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \Delta_\alpha\big([c,r]\big) \geq I_\alpha(a,s) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.14}$$

Die gewählten Punkte liegen in $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ in der Reihenfolge

$$a < c \leq r < s \qquad \text{und} \qquad -\infty < t < s \leq d < b,$$

und wegen der gegebenen Intervallinklusionen und der Ungleichungen (10.14) haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha^*\big((a,t]\big) + \mu_\alpha^*\big((t,b)\big) &\leq I_\alpha(a,s) + I_\alpha(t,b) \\
&\leq \Delta_\alpha\big([c,r]\big) + \frac{\varepsilon}{2} + \Delta_\alpha\big([s,d]\big) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \Delta_\alpha\big([c,r]\big) + \Delta_\alpha\big([r,s]\big) + \Delta_\alpha\big([s,d]\big) + \varepsilon \\
&= \Delta_\alpha\big([c,d]\big) + \varepsilon \\
&\leq I_\alpha(a,b) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist

$$\mu_\alpha^*\big((a,t]\big) + \mu_\alpha^*\big((t,b)\big) \leq I_\alpha(a,b),$$

und das war die fehlende Richtung zu Gleichung (10.13).

Nun sei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbf{R}$ und sei

$$\mathcal{Q} = \{\, Q_i \mid i \in \mathbf{N} \,\}$$

eine abzählbare Familie von offenen Intervallen in $\mathbf{R}$, die A überdeckt.

Wir haben

$$A \cap H_t \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} (Q_i \cap H_t) \qquad \text{und} \qquad A \setminus H_t \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} (Q_i \setminus H_t),$$

und weil μ_α^* monoton und subadditiv ist, erhalten wir unter Verwendung von (10.13) die Absschätzung

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha^*(A \cap H_t) + \mu_\alpha^*(A \setminus H_t) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu_\alpha^*(Q_i \cap H_t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu_\alpha^*(Q_i \setminus H_t) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \big(\mu_\alpha^*(Q_i \cap H_t) + \mu_\alpha^*(Q_i \setminus H_t)\big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} I_\alpha(Q_i) && \text{nach (10.13)} \\
&= I_\alpha(\mathcal{Q}).
\end{aligned}$$

Da dies für jede abzählbare offene Quaderüberdeckung $\mathcal{Q}$ von A gilt, können wir den letzten Term oben durch sein Infimum über alle solche Überdeckungen ersetzen und erhalten

$$\mu_\alpha^*(A \cap H_t) + \mu_\alpha^*(A \setminus H_t) \leq \mu_\alpha^*(A).$$

Die Ungleichung in der anderen Reihenfolge folgt aus der Subadditivität von μ_α^*, so dass die Gleichheit gilt.

Das zeigt, dass H_t eine α-messbare Menge ist. Auch sein Komplement

$$\mathbf{R} \setminus H_t = (-\infty, t]$$

ist α-messbar, und da jeder linke offene Strahl $(-\infty, s)$ sich als eine abzählbare Vereinigung von linken abgeschlossenen Strahlen schreiben läßt, ist auch $(-\infty, s)$ für jedes s eine α-messbare Menge.

Jedes offene Intervall (a, b) ist der Durchschnitt des offenen linken Strahls $(-\infty, b)$ mit dem offenen rechten Strahl (a, ∞). Deshalb sind alle offenen Intervalle α-messbar, wie wir zeigen wollten.

Wir haben damit bewiesen, dass alle Borelmengen α-messbar sind. ■

Notation 10.7 Sei $\alpha\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine monoton steigende Funktion. Sie bestimmt, wie wir gesehen haben, ein positives Maß μ_α auf den Borelmengen von $\mathbf{R}$, und die allgemeine Theorie der Lebesgue Integration auf einem Maßraum definiert das Lebesgue-Integral bezüglich dieses Maßes und bestimmt seine Eigenschaften.

Wir müssen die Entwicklung der Integrationstheorie also nicht weiterverfolgen für die neue Inhaltsfunktion, denn die Lebesguesche Integration ist für jeden Maßraum, auch für diesen neuen, schon vorhanden und wurde in Kapitel 0 ausgiebig besprochen.

Das Integral einer integrierbaren oder messbaren Funktion f über eine Borelmenge B bezüglich des Lebesgue-Stieltjes Maßes kann man ganz konventionell durch

$$\int_B f\, d\mu_\alpha$$

notieren, aber da hier über die reelle Gerade (oder Teilmengen davon) integriert wird, ist auch eine klassischere Notation gebräuchlich, die sich an die übliche Notation $\int f(x)\, dx$ für das Riemann Integral anlehnt.

Für das Lebesgue-Stieltjes Integral, das wir oben hingeschrieben haben, benutzt man auch die angenehme Schreibweise

$$\int_B f(x)\, d\alpha(x) \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

wenn über ein abgeschlossenes Intervall integriert wird.

Natürlich kann man die „Laufvariable“ x durch eine beliebige andere, etwa t oder λ, ersetzen.

Bevor wir beginnen, die Lebesgue-Stieltjes Maße ein bisschen besser kennen zu lernen und in der Spektraltheorie anzuwenden, wollen wir noch einen maßtheoretischen Begriff einführen, der uns diese Aufgabe erleichtern wird.

Definition 10.8 Sei X ein topologischer Raum und sei μ ein positives Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen von X.

Wir nennen μ ***regulär***, wenn für jede Borelmenge B gilt

$$\mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \text{ offen}}} \mu(U) = \sup_{\substack{K \subseteq B \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K). \tag{10.15}$$

Satz 10.9 *Jedes positive Maß μ auf der σ-Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen von $\mathbf{R}$, das auf endlichen Intervallen endlich ist, ist regulär.*

Beweis. Sei

$$\mathcal{R} := \left\{ A \in \mathcal{B} \;\middle|\; \mu(A) = \inf_{\substack{U \supseteq A \\ U \text{ offen}}} \mu(U) = \sup_{\substack{K \subseteq A \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K) \right\}.$$

Wir würden gerne zeigen, dass $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra ist, die alle offenen Intervalle enthält, denn daraus würde folgen, dass $\mathcal{R} = \mathcal{B}$ und dass die Behauptung des Satzes stimmt.

Leider wird uns der Beweis nicht ganz gelingen, aber wir beginnen ihn trotzdem, denn die Teilergebnisse, die wir erzielen werden, brauchen wir und können wir anwenden, wenn wir später den Plan leicht abwandeln, um für eine andere Mengenfamilie den Beweis erfolgreich bis zum Ende durchzuführen.

(Zum Schluss wird dann doch feststehen, dass $\mathcal{R} = \mathcal{B}$, aber dieses Ziel können wir nur über Umwege erreichen.)

Jedes Borelmaß μ auf $\mathcal{B}$ ist monoton und σ-additiv.

Daraus folgt zunächst, dass jedes offene Intervall $A := (a, b) \in \mathcal{R}$, denn wegen der Monotonizität und weil A selber offen ist, ist

$$\mu(A) = \inf_{\substack{U \supseteq A \\ U \text{ offen}}} \mu(U),$$

und weil jedes offene Intervall sich offensichtlich als eine abzählbare Vereinigung einer monoton steigenden Folge von abgeschlossenen Intervallen $[c_n, d_n]$ schreiben lässt und diese kompakt sind, haben wir

$$\mu(A) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \mu\big([c_n, d_n]\big) \leq \sup_{\substack{K \subseteq A \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K) \leq \mu(A)$$

und die andere Hälfte von Bedingung (10.15) gilt auch.

Aus der σ-Additivität von μ folgt auch, dass $\mathcal{R}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Dazu seien A_n für $n \in \mathbf{N}$ Mengen aus $\mathcal{R}$ und sei A ihre Vereinigung.

Wir können annehmen, dass $\mu(A_n)$ endlich ist für jedes n, denn wenn dies für $n_0 \in \mathbf{N}$ nicht stimmt, dann ist $\mu(A) = \infty$, jede offene Menge um A_{n_0} und somit erst recht jede offene Menge um A hat unendliches Maß, und es gibt kompakte Teilmengen von $A_{n_0} \subseteq A$ von beliebig großem Maß, so dass alle drei Terme in (10.15) unendlich sind und nichts Weiteres bewiesen werden muss.

Es seien also alle $\mu(A_n)$ endlich.

Wenn auch $\mu(A) < \infty$, sei eine Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben.

Es ist aber auch möglich, dass $\mu(A) = \infty$, und in diesem Fall setze $\varepsilon = 2$ im Folgenden und wähle eine beliebige Zahl $M > 0$ (die die gewünschte Nähe zu ∞ beschreibt).

Weil die $A_n \in \mathcal{R}$, finden wir für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine offene Menge $U_n \supseteq A_n$ und eine kompakte Menge $K_n \subseteq A_n$ mit

$$\mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \leq \mu(K_n) \leq \mu(A_n) \leq \mu(U_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Daraus folgt natürlich wegen der Additivität von μ, dass

$$\mu(A_n \setminus K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \qquad \text{und} \qquad \mu(U_n \setminus A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ bilden wir die Vereinigungen der ersten $n+1$ Glieder der drei Folgen von Mengen und setzen

$$B_n := \bigcup_{k=0}^{n} A_k, \qquad V_n := \bigcup_{k=0}^{n} U_k \qquad \text{und} \qquad L_n := \bigcup_{k=0}^{n} K_k.$$

Die B_n, die V_n und die L_n bilden monoton steigende Folgen von Mengen. Man beachte, dass

$$V_n \setminus B_n \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} (U_k \setminus A_k) \qquad \text{und} \qquad B_n \setminus L_n \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} (A_k \setminus K_k),$$

woraus folgt

$$\mu(V_n \setminus B_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(U_k \setminus A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon \tag{10.16a}$$

und entsprechend

$$\mu(B_n \setminus L_n) \le \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k \setminus K_k) \le \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.16b}$$

Als Erstes betrachten wir

$$U := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} V_n.$$

Dies ist eine offene Menge um A. Wenn $\mu(A) = \infty$, dann ist auch

$$\mu(U) = \infty = \mu(A)$$

und wir müssen für U nichts weiteres beweisen.

Wenn $\mu(A)$ endlich ist, müssen wir noch rechnen. Die Mengen $V_n \setminus A$ bilden eine monoton steigende Folge von Mengen mit Vereinigung $U \setminus A$, und für jedes n gilt nach (10.16a)

$$\mu(V_n \setminus A) \le \mu(V_n \setminus B_n) \le \varepsilon.$$

Weil μ σ-additiv ist, gilt

$$\mu(U \setminus A) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \mu(V_n \setminus A) \le \varepsilon,$$

und aus der Additivität von μ folgt

$$\mu(U) \le \mu(A) + \varepsilon.$$

Wir haben also gezeigt, dass $\mu(A)$ sich beliebig genau durch das Maß einer offenen Obermenge approximieren lässt.

Jetzt betrachten wir die Abschätzung von unten. Weil die B_n eine monoton steigende Folge mit Vereinigung A bilden, ist $\mu(A) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \mu(B_n)$ und wir finden einen Index m, so dass

$$\mu(B_m) \ge \begin{cases} \mu(A) - \varepsilon/2, & \text{wenn } \mu(A) \text{ endlich ist;} \\ M + 1, & \text{wenn } \mu(A) = \infty. \end{cases}$$

Die Menge $L_m \subseteq B_m$ ist eine endliche Vereinigung von kompakten Mengen und somit selber kompakt, und nach (10.16b) ist

$$\mu(B_m \setminus L_m) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

(und dies ist 1 wenn $\mu(A) = \infty$, da dann $\varepsilon = 2$).

Weil μ additiv ist, erhalten wir aus der Kombination der beiden Abschätzungen

$$\mu(L_m) \geq \begin{cases} \mu(A) - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \mu(A) - \varepsilon, & \text{wenn } \mu(A) \text{ endlich ist;} \\ M + 1 - 1 = M, & \text{wenn } \mu(A) = \infty. \end{cases}$$

Das zeigt, dass $\mu(A)$ beliebig gut approximierbar ist durch das Maß einer kompakten Teilmenge.

Wir haben also gezeigt, dass A die Eigenschaft (10.15) erfüllt und somit zu $\mathcal{R}$ gehört.

Als Nächstes müsste jetzt eigentlich gezeigt werden, dass $\mathcal{R}$ unter der Bildung von Mengendifferenzen abgeschlossen ist, d.h., dass für A und $B \in \mathcal{R}$ auch $A \setminus B \in \mathcal{R}$. Das ist aber sehr schwer unmittelbar zu beweisen, besonders wenn A und B unendliches Maß haben. Deshalb wandeln wir die Aufgabe leicht ab.

Sei

$$\mathcal{S} := \{\, A \in \mathcal{B} \mid A \cap (a,b) \in \mathcal{R} \text{ für jedes beschränkte offene Intervall } (a,b) \,\}.$$

Wir werden zeigen, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, die alle offenen Intervalle enthält und deshalb gleich $\mathcal{B}$ ist.

Damit werden wir dann fertig sein, denn weil $\mathbf{R}$ sich als eine abzählbare Vereinigung von beschränkten offenen Intervallen schreiben lässt, ist jedes Element $A \in \mathcal{S}$ eine abzählbare Vereinigung von seinen Durchschnitten mit beschränkten offenen Intervallen, und weil diese Durchschnitte nach Definition von $\mathcal{S}$ zu $\mathcal{R}$ gehören und $\mathcal{R}$ unter abzählbarer Vereinigung abgeschlossen ist, ist $A \in \mathcal{R}$.

Das bedeutet, dass $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$. Wenn $\mathcal{S} = \mathcal{B}$, dann ist auch $\mathcal{R} = \mathcal{B}$ und wir haben den Satz bewiesen.

Jedes offene Intervall gehört zu $\mathcal{S}$, weil der Durchschnitt eines offenen Intervalls mit einem beschränkten offenen Intervall wieder ein offenes Intervall ist und somit zu $\mathcal{R}$ gehört.

$\mathcal{S}$ ist unter der Bildung von abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen, denn wenn $A_n \in \mathcal{S}$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ und wenn A ihre Vereinigung ist, dann gilt für jedes beschränkte offene Intervall (a,b), dass

$$A \cap (a,b) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigl(A_n \cap (a,b)\bigr)$$

und zu $\mathcal{R}$ gehört, weil die Terme auf der rechten Seite zu $\mathcal{R}$ gehören und $\mathcal{R}$ unter abzählbarer Vereinigung abgeschlossen ist. Deshalb ist dann $A \in \mathcal{S}$.

Nun zeigen wir, dass $\mathcal{S}$ unter Bildung von Mengendifferenzen abgeschlossen ist. Seien A und $B \in \mathcal{S}$ und sei $C := A \setminus B$.

Sei $J := (a, b)$ ein beschränktes offenes Intervall. Wir haben zu zeigen, dass $C \cap J = (A \cap J) \setminus (B \cap J) \in \mathcal{R}$.

Weil sich in diesem Beweis alles innerhalb des beschränkten offenen Intervalls J abspielt, das nach Voraussetzung endliches Maß hat, haben alle hier betrachteten Mengen endliches Maß, denn μ ist monoton.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen eine offene Menge U und eine kompakte Menge K finden, so dass $K \subseteq C \cap J \subseteq U$ und so dass

$$\mu(K) \geq \mu(C \cap J) - \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \mu(U) \leq \mu(C \cap J) + \varepsilon. \tag{10.17}$$

Zunächst zu K. Weil $A \cap J \in \mathcal{R}$, gibt es eine kompakte (also beschränkte abgeschlossene) Menge $L \subseteq A \cap J$ mit

$$\mu\big(L\big) \geq \mu(A \cap J) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{d.h., mit} \quad \mu\big((A \cap J) \setminus L\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weil $B \cap J \in \mathcal{R}$, gibt es eine offene Menge $V \supseteq B \cap J$ mit

$$\mu(V) \leq \mu(B \cap J) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{d.h., mit} \quad \mu\big(V \setminus (B \cap J)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze $K := L \setminus V$. Dies ist eine beschränkte abgeschlossene Menge (da V offen ist) und ist somit kompakt. Wir haben $K \subseteq (A \cap J) \setminus (B \cap J) = C \cap J$ und

$$(C \cap J) \setminus K = \big((A \cap J) \setminus (B \cap J)\big) \setminus \big(L \setminus V\big) \subseteq \big((A \cap J) \setminus L\big) \cup \big(V \setminus (B \cap J)\big).$$

Folglich ist

$$\mu\big((C \cap J) \setminus K\big) \leq \mu\big((A \cap J) \setminus L\big) + \mu\big(V \setminus (B \cap J)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $\mu(K) \geq \mu(C \cap J) - \varepsilon$.

Die offene Menge U finden wir auf ähnliche Weise. Weil $A \cap J \in \mathcal{R}$, gibt es eine offene Menge $W \supseteq A \cap J$ mit

$$\mu(W) \leq \mu(A \cap J) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{d.h., mit} \quad \mu\big(W \setminus (A \cap J)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weil $B \cap J \in \mathcal{R}$, gibt es eine kompakte (insbesondere abgeschlossene) Menge $M \subseteq B \cap J$ mit

$$\mu\big(M\big) \geq \mu(B \cap J) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{d.h., mit} \quad \mu\big((B \cap J) \setminus M\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze $U := W \setminus M = W \cap (\mathbf{R} \setminus M)$, eine offene Menge. Wir haben $U \supseteq (A \cap J) \setminus (B \cap J) = C \cap J$ und es gilt

$$U \setminus (C \cap J) = (W \setminus M) \setminus \big((A \cap J) \setminus (B \cap J)\big) \subseteq \big(W \setminus (A \cap J)\big) \cup \big((B \cap J) \setminus M\big).$$

Folglich ist

$$\mu\big(U \setminus (C \cap J)\big) \leq \mu\big(W \setminus (A \cap J)\big) + \mu\big((B \cap J) \setminus M\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $\mu(U) \leq \mu(C \cap J) + \varepsilon$.

Wir haben also (10.17) erfüllt, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$.

Das heißt, $C \cap J$ erfüllt Bedingung (10.15) und gehört somit zu $\mathcal{R}$ für jedes beschränkte offene Intervall J. Deshalb ist

$$C = A \setminus B \in \mathcal{S}.$$

Weil $\mathcal{S}$ jedes offene Intervall enthält und weil ganz $\mathbf{R}$ ein offenes Intervall ist, ist $\mathbf{R} \in \mathcal{S}$. Wir haben gesehen, dass $\mathcal{S}$ unter Differenzenbildung und unter abzählbarer Vereinigung abgeschlossen ist. Es folgt, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, wie wir zeigen wollten.

Weil $\mathcal{S}$ alle offenen Intervalle enthält und weil jede offene Teilmenge von $\mathbf{R}$ eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, gehört jede offene Teilmenge zu $\mathcal{S}$. Folglich enthält $\mathcal{S}$ die ganze Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$.

Daraus folgt, wie schon erklärt, dass auch $\mathcal{R} = \mathcal{B}$, und der Satz ist bewiesen. ∎

Korollar 10.10 *Ein Borelmaß μ auf $\mathbf{R}$ (d.h., ein positives Maß auf den Borelmengen von $\mathbf{R}$), das auf beschränkten Intervallen endlich ist, ist eindeutig bestimmt durch seine Werte auf offenen Intervallen.*

Beweis. Nach Satz 10.9 ist μ regulär, und die linke Gleichung in Bedingung (10.15) bestimmt $\mu(B)$ für eine beliebige Borelmenge B aus den Werten von μ auf den B umgebenden offenen Mengen.

Diese sind wiederum von den Werten auf offenen Intervallen eindeutig festgelegt, weil μ σ-additiv ist und weil jede offene Menge eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist. ∎

Mit dieser gründlichen Vorbereitung können wir nun einfacher mit Lebesgue-Stieltjes Maßen umgehen.

Nützlich ist es, etwas darüber zu wissen, wie das Lebesgue-Stieltjes Maß μ_α von der Funktion α abhängt.

Bemerkung 10.11 a) Jedes Lebesgue-Stieltjes Maß μ_α ist endlich auf beschränkten Intervallen.

Denn für jedes endliche offene Intervall (a, b) folgt aus der Monotonizität von α und aus Gleichung (10.10) in Definition 10.4, dass

$$\mu_\alpha\big((a, b)\big) = I_\alpha(a, b) \leq \alpha(b) - \alpha(a) < \infty.$$

Jedes andere beschränkte Intervall ist in einem endlichen offenen Intervall enthalten und hat somit auch endliches α-Maß.

Insbesondere erfüllt jedes Lebesgue-Stieltjes Maß μ_α die Voraussetzung von Korollar 10.10.

b) Seien α und β monoton steigende Funktionen auf $\mathbf{R}$. Sei $c \geq 0 \in \mathbf{R}$ (dann ist die Funktion $c\alpha$ auch monoton steigend).

Aus der Definition 10.4 des Lebesgue-Stieltjes Inhalts, Formel (10.10) oder Formel (10.12), ist klar, dass

$$I_{\alpha+\beta} = I_\alpha + I_\beta \qquad \text{und} \qquad I_{c\alpha} = cI_\alpha.$$

Weil der α-Inhalt eines offenen Intervalls gleich seinem α-Maß ist, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage für Borelmaße, Korollar 10.10 (anwendbar wegen Teil a) dieser Bemerkung), dass die selben Beziehungen wie oben auch für die Lebesgue-Stieltjes Maße gelten, d.h.,

$$\mu_{\alpha+\beta} = \mu_\alpha + \mu_\beta \qquad \text{und} \qquad \mu_{c\alpha} = c\mu_\alpha \text{ für jedes } c \geq 0. \tag{10.18}$$

Wir sind jetzt in der Lage, aus einer Spektralschar ein Spektralmaß zu gewinnen. Dazu zunächst eine weitere hilfreiche Bemerkung.

Bemerkung 10.12 Sei V ein Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$.

a) Sei $\langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf V und sei q ihre quadratische Form. Dann erfüllt q für je zwei Vektoren v und $w \in V$ die ***Parallelogrammgleichung***

$$q(v + w) + q(v - w) = 2q(v) + 2q(w). \tag{10.19}$$

Das wurde in Kapitel 6 schon bewiesen, als Gleichung (6.10) in Korollar 6.7 e); man muss nur die Normquadrate in dieser Gleichung durch die quadratische Form ersetzen, aber die Herleitung aus Kapitel 6 bleibt gültig, denn sie stützt sich letztendlich auf Gleichung (6.3) in Hilfssatz 6.4, und dieser Hilfssatz gilt für beliebige hermitesche Formen. Es wird nicht vorausgesetzt, dass die Form positiv (semi)definit ist oder eine Norm definiert.

b) Sei V ein topologischer Vektorraum über $\mathbf{K}$ und sei $q\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion, die die Parallelogrammgleichung (10.19) erfüllt.

Auch wenn q nicht das Quadrat einer Norm ist, gilt Satz 6.8 und besagt jetzt, dass es auf V eine eindeutige hermitesche Sesquilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ gibt mit q als ihre quadratische Form.

Der Beweis von Satz 6.8 verwendet nur die Parallelogrammgleichung zur Konstruktion von $\langle\ ,\ \rangle$ (zunächst nur als reelle symmetrische Form) und zum Nachweis, dass sie in jeder Variablen additiv ist.

An wenigen anderen Stellen im Beweis des Satzes geht versteckt und ohne besonderen Hinweis (da es sich um eine bekannte Eigenschaft von Normen handelt) die Tatsache ein, dass $\|\lambda v\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2$ für Skalare λ und Vektoren v. Aber diese Eigenschaft wird nur für die Skalare 0, -1 und 2 benutzt (wobei die Fälle 0 und -1 durch eine leichte Beweisänderung sogar überflüssig würden), und für die genannten Fälle folgt die entsprechende Eigenschaft für q schon aus der Parallelogrammgleichung und muss nicht extra vorausgesetzt werden.

Für den Skalar 0 setze man in (10.19) $w = \mathbf{0}$ ein und schließe leicht

$$q(\mathbf{0}) = 0,$$

für den Skalar -1 setze man in (10.19) $v = \mathbf{0}$ ein und erhalte

$$q(w) + q(-w) = 2q(\mathbf{0}) + 2q(w) = 0 + 2q(w),$$

woraus folgt

$$q(-w) = q(w),$$

und für den Skalar 2 nehme man $v = w$ und schließe

$$q(2v) + q(\mathbf{0}) = q(2v) + 0 = 4q(v),$$

wie gewünscht.

Die Stetigkeit von q impliziert, dass auch die reelle Form $\langle\ ,\ \rangle$ stetig ist, und nur das wurde neben der Additivität verwendet, um zu zeigen, dass $\langle\ ,\ \rangle$ auch bezüglich Multiplikation mit reellen Skalaren in jeder Variablen linear ist, also eine stetige symmetrische reelle Bilinearform ist.

Im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ wurde dann rein algebraisch aus der reellen Form eine komplexe hermitesche Form $\langle\ ,\ \rangle$ konstruiert, deren quadratische Form ebenfalls q ist. In diesen Teil des Beweises gehen keine Eigenschaften von q direkt ein.

Nirgendswo im Beweis von Satz 6.8 wird verwendet, dass q weitere Eigenschaften als die oben genannten hat oder dass q nur spezielle (zum Beispiel nichtnegative) reelle Werte annehmen darf. Deshalb ist dieser Satz für beliebige reellwertige stetige Funktionen auf einem topologischen Vektorraum anwendbar, nicht nur für Normen.

Auch der Nachweis der Eindeutigkeit der hermiteschen Form $\langle\ ,\ \rangle$ benutzt keine speziellen Eigenschaften von q außer der vorausgesetzten. Die Eindeutigkeit wird aber auch von Korollar 7.35 bestätigt.

Satz und Definition 10.13 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $\{ E_\lambda \}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ eine Spektralschar auf H.*

Für jeden Vektor $v \in H$ definiere man eine Funktion α_v auf $\mathbf{R}$ durch

$$\alpha_v(\lambda) := \langle E_\lambda(v), v \rangle. \tag{10.20}$$

Wegen Bedingung b) in Definition 10.2 ist α_v eine monoton steigende Funktion und definiert deshalb ein Lebesgue-Stieltjes Maß

$$\mu_{\langle E_\lambda(v),v\rangle} := \mu_{\alpha_v}$$

auf der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbf{R}$. Dieses Maß ist endlich.

Es existiert ein eindeutiges Spektralmaß E auf $\mathcal{B}$, so dass für jedes $v \in H$ die in Definition 10.3 e) definierte Mengenfunktion E_v gleich μ_{α_v} ist.

Ferner, jeder hermitesche Operator S auf H, der mit allen Projektoren E_λ der Spektralschar kommutiert, kommutiert auch mit allen Projektoren $E(M)$ (für $M \in \mathcal{B}$) des Spektralmaßes E.

Beweis. Sei $v \in H$.

Aus dem Lebesgue-Stieltjes Maß μ_{α_v} wollen wir die Werte der Operatoren $E(M)$ des zu konstruierenden Spektralmaßes an der Stelle v gewinnen. Diese Werte werden Vektoren sein, aber sie sind eindeutig bestimmt durch ihre inneren Produkte mit anderen Vektoren, und eigentlich werden wir aus μ_{α_v} nicht die Vektorwerte direkt erhalten, sondern diese zahlenwertigen inneren Produkte, die sie bestimmen.

Natürlich klappt das nur, wenn die Zahlenwerte, die auftreten, endlich sind! Deshalb werden wir als Erstes nachweisen, dass die Maße μ_{α_v} wie behauptet endliche Maße sind.

Weil $\mathbf{R}$ das offene Intervall $(-\infty, \infty)$ ist, folgt aus den Eigenschaften von

Lebesgue-Stieltjes Maßen und Eigenschaft 10.2 c) einer Spektralschar, dass

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha_v}(\mathbf{R}) &= I_{\alpha_v}(-\infty,\infty) \\
&= \lim_{t\to+\infty}\alpha_v(t) - \lim_{t\to-\infty}\alpha_v(t) && \text{(Definition von } I_{\alpha_v}) \\
&= \lim_{t\to+\infty}\langle E_t(v),v\rangle - \lim_{t\to-\infty}\langle E_t(v),v\rangle \\
&= \langle v,v\rangle - \langle 0,v\rangle && \text{wegen 10.2 c)} \\
&= \langle v,v\rangle = \|v\|^2, && (10.21)
\end{aligned}$$

und dies ist wie behauptet endlich.

Nun zur Konstruktion des Spektralmaßes E.

Sei $v \in H$ und $\lambda \in \mathbf{R}$. Nach (10.20) ist

$$\alpha_v(\lambda) = \langle\!\langle v,v\rangle\!\rangle_{E_\lambda} = q_{E_\lambda}(v), \tag{10.22}$$

wo die Form $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_{E_\lambda}$ die hermitesche Sesquilinearform des hermiteschen Operators E_λ ist und q_{E_λ} seine quadratische Form ist.

Als quadratische Form einer hermiteschen Sesquilinearform erfüllt q_{E_λ} nach Bemerkung 10.12 a) die Parallelogrammgleichung (10.19), die man angesichts (10.22) auch schreiben kann als die Beziehung

$$\alpha_{v+w}(\lambda) + \alpha_{v-w}(\lambda) = 2\alpha_v(\lambda) + 2\alpha_w(\lambda)$$

für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$.

Daraus folgt aber, nach Bemerkung 10.11 b), für die Lebesgue-Stieltjes Maße die entsprechende Beziehung

$$\mu_{\alpha_{v+w}} + \mu_{\alpha_{v-w}} = 2\mu_{\alpha_v} + 2\mu_{\alpha_w}. \tag{10.23}$$

Für jedes $M \in \mathcal{B}$ definieren wir nun eine Funktion $q_M\colon H \longrightarrow \mathbf{R}$ durch die Vorschrift

$$q_M(v) := \mu_{\alpha_v}(M). \tag{10.24}$$

Wenn man in die Maßfunktionen in Gleichung (10.23) die Menge M einsetzt, erhält man die Parallelogrammgleichung für die Funktion q_M.

Wir wollen noch zeigen, dass q_M stetig ist.

Für je zwei Vektoren v und $w \in H$ erhalten wir, weil E_λ hermitesch ist, für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ aus (10.20) die Gleichung

$$\begin{aligned}
\alpha_v(\lambda) - \alpha_w(\lambda) &= \langle E_\lambda(v),v\rangle - \langle E_\lambda(w),w\rangle \\
&= \langle E_\lambda(v-w),v\rangle + \langle E_\lambda(w),v-w\rangle \\
&= \langle E_\lambda(v-w),v\rangle + \langle w,E_\lambda(v-w)\rangle && (10.25)
\end{aligned}$$

Wir machen nun einige Bemerkungen zu den Projektoren E_λ. Erstens, wenn $\lambda \le \mu$, dann ist $E_\lambda \le E_\mu$ und deshalb ist nach Lemma 10.1 e) vi) auch

$$E_{[\lambda,\mu]} := E_\mu - E_\lambda$$

ein Projektor.

Zweitens, wenn $\kappa < \lambda \le \mu$, dann folgt aus Lemma 10.1 e) iv) und Lemma 10.1 e) v), dass

$$E_{[\lambda,\mu]} \circ E_\kappa = E_\mu \circ E_\kappa - E_\lambda \circ E_\kappa = E_\kappa - E_\kappa = \mathbf{0}$$

und

$$E_\kappa \circ E_{[\lambda,\mu]} = E_\kappa \circ E_\mu - E_\kappa \circ E_\lambda = E_\kappa - E_\kappa = \mathbf{0}.$$

Daraus folgt, dass wenn $K := [\gamma, \kappa]$ und $L := [\lambda, \mu]$ zwei disjunkte abgeschlossene Intervalle sind, sagen wir mit $\gamma \le \kappa < \lambda \le \mu$, dann sind

$$E_L \circ E_K = E_L \circ E_{[\gamma,\kappa]} = E_L \circ E_\kappa - E_L \circ E_\gamma = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

und

$$E_K \circ E_L = E_{[\gamma,\kappa]} \circ E_L = E_\kappa \circ E_L - E_\gamma \circ E_L = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Damit lässt sich aber leicht nachrechnen, dass für jede endliche Familie

$$\mathcal{K} := \{ K_1, K_2, \dots , K_n \}$$

von disjunkten abgeschlossenen Intervallen der Endomorphismus

$$E_{\mathcal{K}} := E_{K_1} + E_{K_2} + \cdots + E_{K_n}$$

auch ein Projektor ist.

Nun sei

$$U := U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$$

eine endliche Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen $U_i = (a_i, b_i)$.

Sei r eine Zahl kleiner als die Hälfte der minimalen Länge der endlich vielen Intervalle U_i, und für jedes $m \in \mathbf{N}$ setze

$$c_i^m := a_i + \frac{r}{2^m}, \qquad d_i^m := b_i - \frac{r}{2^m}, \qquad \text{und} \qquad K_i^m := [c_i^m, d_i^m].$$

Sei $\mathcal{K}_m$ die Familie $\{ K_1^m, \dots , K_n^m \}$.

Für jede monoton steigende Funktion α gilt

$$I_\alpha(a_i, b_i) = \sup_{m\in\mathbf{N}} \Delta_\alpha(K_i^m) = \lim_{m\to\infty} \Delta_\alpha(K_i^m)$$

wegen (10.12) und wegen der Monotonizität der Intervallenfolge $\{ K_i^m \}_{m\in\mathbf{N}}$, und deshalb ist

$$\mu_\alpha(U) = \sum_{i=1}^n \mu_\alpha(U_i) = \sum_{i=1}^n I_\alpha(a_i, b_i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n \Delta_\alpha(K_i^m). \tag{10.26}$$

Man beachte an dieser Stelle zur späteren Verwendung, dass wenn $\alpha = \alpha_v$ für einen Vektor v aus H, die Summanden $\Delta_\alpha(K_i^m)$ rechts in (10.26) die Gestalt

$$\langle E_{d_i^m}(v), v\rangle - \langle E_{c_i^m}(v), v\rangle = \langle E_{K_i^m}(v), v\rangle$$

haben und die Summe hat deshalb die Gestalt

$$\sum_{i=1}^n \langle E_{K_i^m}(v), v\rangle = \langle E_{\mathcal{K}_m}(v), v\rangle,$$

d.h., wir haben in diesem Fall

$$\mu_{\alpha_v}(U) = \lim_{m\to\infty} \langle E_{\mathcal{K}_m}(v), v\rangle = \sup_{m\in\mathbf{N}} \langle E_{\mathcal{K}_m}(v), v\rangle. \tag{10.27}$$

Der Limes ist gleich dem Supremum, weil die an $\mathcal{K}_m$ beteiligten Intervalle K_i^m mit steigendem m größer werden und die Projektoren $E_{\mathcal{K}_m}$ deshalb eine monoton steigende Folge bilden.

Wenn wir für zwei Vektoren v und $w \in H$ die Differenz $\mu_{\alpha_v}(U) - \mu_{\alpha_w}(U)$ bilden, so berechnet sie sich nach (10.26) als

$$\mu_{\alpha_v}(U) - \mu_{\alpha_w}(U) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n \big(\Delta_{\alpha_v}(K_i^m) - \Delta_{\alpha_w}(K_i^m)\big), \tag{10.28}$$

und offenbar erlaubt uns Gleichung (10.25), die Summanden auf der rechten Seite zu ersetzen durch die Differenz der rechten Ausdrücke in (10.25) an den beiden Enden des Intervalls K_i^m, und das ist

$$\begin{aligned}\langle E_{d_i^m}(v-w), v\rangle &+ \langle w, E_{d_i^m}(v-w)\rangle \\ &- \langle E_{c_i^m}(v-w), v\rangle - \langle w, E_{c_i^m}(v-w)\rangle \\ &\qquad = \langle E_{K_i^m}(v-w), v\rangle + \langle w, E_{K_i^m}(v-w)\rangle\end{aligned}$$

wegen der Additivität des inneren Produkts in jeder Variablen.

Die Summe auf der rechten Seite von (10.28) können wir aus dem gleichen Grund jetzt durch

$$\langle E_{\mathcal{K}_m}(v-w), v\rangle + \langle w, E_{\mathcal{K}_m}(v-w)\rangle$$

ersetzen.

Wir erhalten also

$$\mu_{\alpha_v}(U) - \mu_{\alpha_w}(U) = \lim_{m\to\infty}\big(\langle E_{\mathcal{K}_m}(v-w), v\rangle + \langle w, E_{\mathcal{K}_m}(v-w)\rangle\big).$$

Weil die Operatornorm eines Projektors 0 oder 1 ist, gilt für jedes Glied in der Folge auf der rechten Seite die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\big|\langle E_{\mathcal{K}_m}(v-w), v\rangle &+ \langle w, E_{\mathcal{K}_m}(v-w)\rangle\big| \\
&\leq \big|\langle E_{\mathcal{K}_m}(v-w), v\rangle\big| + \big|\langle w, E_{\mathcal{K}_m}(v-w)\rangle\big| \\
&\leq \big\|E_{\mathcal{K}_m}(v-w)\big\|\,\|v\| + \|w\|\,\big\|E_{\mathcal{K}_m}(v-w)\big\| \\
&\leq \|v-w\|\,\|v\| + \|w\|\,\|v-w\| \\
&= \|v-w\|\,\big(\|v\| + \|w\|\big),
\end{aligned}$$

und somit gilt die gleiche Abschätzung für den Grenzwert, d.h., wir haben

$$\big|\mu_{\alpha_v}(U) - \mu_{\alpha_w}(U)\big| \leq \|v-w\|\,\big(\|v\|+\|w\|\big). \tag{10.29}$$

Diese Abschätzung, in der nur die Vektoren v und w aber keine Merkmale von U eingehen, gilt unabhängig von der Anzahl der beteiligten Intervalle für jede endliche Vereinigung U von disjunkten offenen Intervallen.

Weil aber jede offene Menge sich als die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von endlichen Vereinigungen von offenen Intervallen schreiben lässt und weil die Maße σ-additiv sind, gilt die Abschätzung durch Grenzwertbildung dann auch für jede offene Menge U überhaupt.

Die Maße μ_{α_v} und μ_{α_w} sind nach Bemerkung 10.11 a) endlich auf beschränkten Intervallen, und nach Satz 10.9 deshalb regulär.

Sei M eine beliebige Borelmenge. Weil μ_{α_v} regulär ist, ist

$$\mu_{\alpha_v}(M) = \inf_{\substack{U\supseteq M\\ U \text{ offen}}} \mu_{\alpha_v}(U)$$

und wir finden deshalb eine Folge $\{\, V_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ von offenen Obermengen von M mit

$$\mu_{\alpha_v}(M) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha_v}(V_n).$$

Dabei ist wegen der Monotonizität von μ_{α_v} jedes Glied auf der rechten Seite $\geq \mu_{\alpha_v}(M)$, und aus diesem Grund bleibt die Konvergenz bestehen (und wird höchstens schneller), wenn wir die Mengen V_n durch kleinere Obermengen von M ersetzen.

Es gibt eine entsprechende Folge $\{ W_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ von offenen Obermengen von M mit

$$\mu_{\alpha_w}(M) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha_v}(W_n),$$

und wenn wir sowohl V_n wie auch W_n durch $X_n := V_n \cap W_n$ ersetzen, bleiben die Konvergenzaussagen richtig, aber wir verwenden die gleichen offenen Obermengen $X_n \supseteq M$ für beide Lebesgue-Stieltjes Maße.

Die vorherige Abschätzung für die Differenz der beiden Maße gilt für die offenen Mengen X_n und vererbt sich deshalb auf den Grenzwert:

$$\big|\mu_{\alpha_v}(M) - \mu_{\alpha_w}(M)\big| = \lim_{n\to\infty}\big|\mu_{\alpha_v}(X_n) - \mu_{\alpha_w}(X_n)\big| \leq \|v-w\| \, \big(\|v\| + \|w\|\big),$$

da für jedes Glied in der Folge diese Abschätzung gilt.

Dies ist aber gerade die Stetigkeitsaussage für die Funktion q_M, denn für jedes fest gewählte v wird die rechte Seite klein, wenn $\|v-w\|$ klein ist.

Um zusammenzufassen: q_M erfüllt für jede Borelmenge M die Parallelogrammgleichung und ist stetig.

Nach Bemerkung 10.12 b) gibt es eine eindeutig bestimmte stetige hermitesche Sesquilinearform $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_M$ mit quadratischer Form q_M, und nach Lemma 7.27 gibt es einen hermiteschen Operator $E(M)$ mit

$$\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_M = \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle_{E(M)},$$

und er ist eindeutig bestimmt wegen Korollar 7.23.

Weil q_M durch die Werte von positiven Maßen gegeben ist, sind seine Werte auch nichtnegativ und es folgt, dass $E(M)$ für jede Borelmenge M ein positiver Operator ist.

Wir zeigen, dass die Operatoren $E(M)$ ein Spektralmaß E auf $\mathcal{B}$ konstituieren.

Wir beginnen mit einigen nützlichen Bemerkungen über die Gestalt dieser Operatoren für spezielle Mengen M und über das Verhalten von E als operatorwertige Mengenfunktion.

Für jeden einzelnen Vektor $v \in H$ ist die Funktion

$$E_v(M) := \langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle \tag{10.30}$$

nach Konstruktion definiert als $\mu_{\alpha_v}(M)$, oder kurz und bündig gesagt,

$$E_v = \mu_{\alpha_v} \tag{10.31}$$

für jedes $v \in H$ und E_v ist deshalb ein endliches Maß auf $\mathcal{B}$.

Damit ist schon Eigenschaft 10.3 e) nachgewiesen, und die dort erwähnte Mengenfunktion E_v ist tatsächlich, wie im jetztigen Satz verlangt, μ_{α_v}, und dies bestimmt die quadratischen Formen q_M und somit E eindeutig.

Weil die leere Menge für jedes Maß eine Nullmenge ist, ist

$$\langle \big(E(\emptyset)\big)(v), v\rangle = E_v(\emptyset) = 0$$

für jedes $v \in H$ und aus Korollar 7.23 folgt, dass $E(\emptyset) = \mathbf{0}$. Aus Gleichung (10.21) und Korollar 7.23 folgt entsprechend, dass $E(\mathbf{R}) = \mathrm{id}_H$, und damit erfüllt E Bedingung 10.3 a).

Weil E_v als Maß eine monotone Mengenfunktion ist, folgt aus Korollar 7.23 für je zwei Mengen M und N mit $M \subseteq N$, dass $E(M) \leq E(N)$, und für jede monotone Folge $\{ M_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ von Mengen, dass die Operatoren $E(M_n)$ eine entsprechend monotone Folge von hermiteschen Operatoren bilden.

Aus (10.31) erhält man weiter, dass E_v σ-additiv von M abhängt.

Insbesondere verhält sich E_v additiv bezüglich endlicher disjunkter Vereinigungen von Borelmengen und die Operatoren $E(M)$ hängen deshalb auch additiv von M ab, wie man wieder mit Korollar 7.23 aus (10.30) schließen kann.

Ferner, nach Lemma 0.8 e)_{α_v} und g)_{α_v} nimmt E_v auf der Vereinigung einer abzählbaren monoton steigenden Folge von Mengen das Supremum der Werte auf den Mengen der Folge an, und auf dem Durchschnitt einer monoton fallenden Folge das Infimum der Werte auf der Folge. Die Voraussetzung in Lemma 0.8 g)_{α_v}, dass der Wert auf der größten Menge einer absteigenden Folge endlich sein muss, ist hier wegen der Endlichkeit von μ_{α_v} automatisch erfüllt.

Für Bedingung 10.3 b) ist zu zeigen, dass jeder Operator $E(M)$ ein Projektor ist. Wir schauen uns einmal an, für welche Mengen M das gilt.

Sei

$$U := U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$$

eine endliche Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen $U_i = (a_i, b_i)$.

In der auf Seite 404 beginnenden Diskussion zu dieser Situation hatten wir in Gleichung (10.27) schon festgestellt, dass

$$\mu_{\alpha_v}(U) = \lim_{m\to\infty} \langle E_{\mathcal{K}_m}(v), v\rangle$$

für eine monoton steigende Folge von Projektoren $E_{\mathcal{K}_m}$.

Nach Lemma 10.1 g) gibt es einen Projektor P, so dass

$$\lim_{m\to\infty} E_{\mathcal{K}_m}(v) = P(v) \tag{10.32a}$$

für jedes v, und wegen der Stetigkeit des inneren Produktes und der Definition des Operators $E(U)$ haben wir

$$\langle \big(E(U)\big)(v), v\rangle = \mu_{\alpha_v}(U) = \langle P(v), v\rangle.$$

Das gilt für jedes $v \in H$ und aus Korollar 7.23 folgt, dass

$$E(U) = P. \tag{10.32b}$$

Also ist $E(U)$ ein Projektor für jede *endliche* disjunkte Vereinigung U von offenen Intervallen.

Für jede monoton steigende Folge $\{ M_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ von Borelmengen mit Vereinigung M, so dass die Operatoren $E(M_n)$ alle Projektoren sind, ist auch $E(M)$ ein Projektor.

Denn die Projektoren $E(M_n)$ bilden eine monoton steigende Folge und es gibt, wieder nach Lemma 10.1 g), einen Projektor Q mit

$$\lim_{n\to\infty} \big(E(M_n)\big)(v) = Q(v) \tag{10.33a}$$

für jedes $v \in H$. Weil die μ_{α_v} σ-additiv sind, haben wir

$$\begin{aligned}\langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle &= \mu_{\alpha_v}(M)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha_v}(M_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \big(E(M_n)\big)(v), v\rangle\\ &= \langle Q(v), v\rangle.\end{aligned}$$

Wieder folgt, dass

$$E(M) = Q \tag{10.33b}$$

und somit ist $E(M)$ ein Projektor.

Jede offene Teilmenge V von R ist eine abzählbare Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen J_m (für $m \in \mathbf{N}$) und kann auch geschrieben werden als das Supremum der monoton steigenden Folge der Mengen

$$U_n := J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_n.$$

Wir haben gerade gesehen, dass die Operatoren $E(U_n)$ Projektoren sind. Also ist auch $E(V)$ ein Projektor, für jede offene Menge $V \subseteq \mathbf{R}$.

Für hermitesche Operatoren wie die Operatoren $E(M)$ gilt auch eine Umkehrung zu Lemma 10.1 a): ein hermitescher Operator T ist *genau dann* ein Projektor, wenn

$$\langle T(v), v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle \quad \text{für jedes } v \in H,$$

denn wenn T hermitesch ist, ist auch $T \circ T$ hermitesch und aus obiger Bedingung erhalten wir

$$\langle T(v), v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle (T^t \circ T)(v), v\rangle = \langle (T \circ T)(v), v\rangle$$

für jedes v, woraus folgt $T \circ T = T$ als Konsequenz von Korollar 7.23.

Sei nun M eine beliebige Borelmenge und sei $v \in H$. Das Maß μ_{α_v} ist, wie wir gesehen haben, regulär. Deshalb ist

$$\mu_{\alpha_v}(M) = \inf_{\substack{U \supseteq M \\ U \text{ offen}}} \mu_{\alpha_v}(U)$$

und wir finden eine Folge $\{ V_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ von offenen Obermengen von M mit

$$\mu_{\alpha_v}(M) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha_v}(V_n).$$

Wir können natürlich annehmen, dass die Folge $\{ V_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ monoton fallend ist (um das zu erreichen ersetzen wir notfalls jedes V_n durch seinen Durchschnitt mit seinen endlich vielen Vorgängern in der Folge, ohne die Konvergenz zu beeinträchtigen) und die Projektoren $E(V_n)$ bilden dann auch eine monoton fallende Folge.

Nach Lemma 10.1 h) gibt es einen Projektor T_v (der allerdings von v abhängt, weil die Auswahl der Folge $\{ V_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ vom speziellen Maß μ_{α_v} und deshalb von v abhängt!), so dass für jedes $w \in H$ gilt

$$T_v(w) = \lim_{n\to\infty} \big(E(V_n)\big)(w).$$

Weil $V_n \supseteq M$, ist $E(V_n) \geq E(M)$ für alle n und deshalb ist offensichtlich auch

$$T_v \geq E(M).$$

Leider stimmt T_v aber nicht unbedingt mit $E(M)$ überein (denn M muss nicht der Durchschnitt der V_n sein!), so dass wir noch nicht unmittelbar schließen können, dass $E(M)$ ein Projektor ist.

Aber an der Stelle v geht alles gut, denn dort gilt

$$\begin{aligned}
\langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle &= \mu_{\alpha_v}(M) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha_v}(V_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \big(E(V_n)\big)(v), v\rangle \\
&= \langle T_v(v), v\rangle.
\end{aligned}$$

Das gilt zwar nur an der *einen* Stelle v, aber weil $T_v - E(M)$ ein positiver Operator ist, reicht das, um aus Korollar 7.31 zu schließen, dass zumindest dort

$$T_v(v) = \big(E(M)\big)(v).$$

Weil T_v ein Projektor ist, erhalten wir jetzt an dieser Stelle

$$\langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle = \langle T_v(v), v\rangle = \langle T_v(v), T_v(v)\rangle = \langle \big(E(M)\big)(v), \big(E(M)\big)(v)\rangle.$$

Die Gleichheit der *äußeren* Terme in dieser Kette gilt für jedes $v \in H$, und das impliziert, wie wir gesehen haben, dass $E(M)$ ein Projektor ist.

Damit haben wir nun Eigenschaft 10.3 b) nachgewiesen, und der Rest ist leicht daraus herzuleiten.

Wir haben auf Seite 408 schon gezeigt, dass $E(M)$ eine monotone und additive operatorwertige Mengenfunktion ist.

Bedingung 10.3 d) ist nichts anderes als die Additivität und somit bewiesen.

Seien M und N zwei beliebige Borelmengen. Wenn M und N disjunkt sind, dann folgt aus der Additivität von E, dass $E(M) + E(N) = E(M \cup N)$ ein Projektor ist, und somit aus Lemma 10.1 f) ii), dass

$$E(M)E(N) = E(N)E(M) = \mathbf{0}.$$

Wenn M und N beliebige Borelmengen sind, dann sind $M \cap N$, $M \setminus N$ und $N \setminus M$ paarweise disjunkt mit

$$M = (M \cap N) \cup (M \setminus N) \qquad \text{und} \qquad N = (M \cap N) \cup (N \setminus M),$$

der Operator $E(M \cap N)$ ist ein Projektor und deshalb sein eigenes Quadrat, und wir rechnen aus, dass

$$\begin{aligned} E(M) \circ E(N) &= \big(E(M \cap N) + E(M \setminus N)\big) \circ \big(E(M \cap N) + E(N \setminus M)\big) \\ &= E(M \cap N) \circ E(M \cap N) + E(M \setminus N) \circ E(M \cap N) \\ &\qquad + E(M \cap N) \circ E(M \setminus N) + E(M \setminus N) \circ E(M \setminus N) \\ &= E(M \cap N) + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \\ &= E(M \cap N). \end{aligned}$$

Das beweist Eigenschaft 10.3 c), und wir haben gezeigt, dass E ein Spektralmaß ist.

Jetzt müssen wir nur noch beweisen, dass ein hermitescher Operator S, der mit allen E_λ kommutiert, auch mit allen Projektoren $E(M)$ für $M \in \mathcal{B}$ vertauschbar ist.

Wir bemerken als Erstes dazu, dass wenn T ein Operator auf H ist, und wenn es eine Folge $\{ T_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ von Operatoren gibt, mit denen S kommutiert, und so dass

$$\lim_{n\to\infty} T_n(v) = T(v)$$

für jedes $v \in V$, dann folgt sofort aus der Stetigkeit von S, dass S auch mit T kommutiert.

Sei U eine endliche Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen. Aus den Gleichungen (10.32) lässt sich entnehmen, dass

$$\big(E(U)\big)(v) = \lim_{m\to\infty} E_{\mathcal{K}_m}(v)$$

für jedes $v \in V$, wobei wir uns daran erinnern, dass die Projektoren $E_{\mathcal{K}_m}$ eine endliche Summe und Differenz von Operatoren E_λ aus der Spektralschar waren.

Wenn S mit allen E_λ kommutiert, kommutiert er auch mit den $E_{\mathcal{K}_m}$ und somit mit ihrem punktweisen Grenzwert $E(U)$.

Wir betrachten nun die Familie

$$\mathcal{R} := \left\{ M \in \mathcal{B} \;\middle|\; S \circ E(M) = E(M) \circ S \right\}.$$

Diese Familie ist unter abzählbarer Vereinigung monoton steigender Mengenfolgen abgeschlossen, denn in den Gleichungen (10.33) haben wir gesehen, dass wenn $\{ M_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine monoton steigende Folge mit Vereinigung M ist, dann ist $E(M)$ der punktweise Limes der $E(M_n)$. Wenn S mit allen $E(M_n)$ kommutiert, dann kommutiert er auch mit $E(M)$.

Insbesondere, da jede offene Menge V die Vereinigung einer monoton steigenden Folge von endlichen Vereinigungen von offenen Intervallen ist, und da solche endlichen Vereinigungen wie wir gesehen haben zu $\mathcal{R}$ gehören, enthält $\mathcal{R}$ alle offenen Mengen.

Die ganze Menge $\mathbf{R}$ ist offen und gehört also zu $\mathcal{R}$.

Die Vereinigung $M \cup N$ von zwei disjunkten Mengen M und N aus $\mathcal{R}$ gehört zu $\mathcal{R}$, weil nach 10.3 d) gilt

$$E(M \cup N) = E(M) + E(N).$$

Wenn S mit $E(M)$ und $E(N)$ kommutiert, kommutiert er auch mit der Summe.

Die Familie $\mathcal{R}$ ist auch unter Bildung von Mengendifferenzen abgeschlossen, denn wenn M und $N \in \mathcal{R}$, so ist

$$M = (M \cap N) \cup (M \setminus N)$$

und nach Eigenschaften 10.3 c) und d) haben wir

$$E(M \setminus N) = E(M) - E(M \cap N) = E(M) - E(M) \circ E(N).$$

Hiermit kommutiert offensichtlich jeder Operator, der mit $E(M)$ und $E(N)$ kommutiert.

Nun können wir zeigen, dass $\mathcal{R}$ unter der Bildung beliebiger abzählbarer Vereinigungen abgeschlossen ist (und nicht nur unter Vereinigungen monotoner Folgen).

Denn jede *endliche* Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ lässt sich mit Differenzenbildung umschreiben als eine endliche *disjunkte* Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ und bleibt also in $\mathcal{R}$.

Für jede Menge M, die eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ ist, bilden die Vereinigungen der ersten n Glieder der Folge für $n \in \mathbf{N}$ eine monotone Folge, die sich ebenfalls zu M vereinigt, und deren Glieder nach dem letzten Absatz zu $\mathcal{R}$ gehören. Weil $\mathcal{R}$ auf jeden Fall unter monotoner abzählbarer Vereinigung abgeschlossen ist, ist $M \in \mathcal{R}$.

Die Familie $\mathcal{R}$ enthält also $\mathbf{R}$ und ist unter Differenzenbildung und abzählbarer Vereinigung abgeschlossen. Sie ist also eine σ-Algebra.

Da sie alle offenen Mengen enthält, ist die Borelalgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}$, und folglich kommutiert S mit $E(M)$ für jede Borelmenge M. ∎

Hilfssatz 10.14 *Sei H ein komplexer Hilbertraum, sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum und sei E ein* End H*-wertiges Spektralmaß auf $\mathcal{R}$.*

Seien $M \subseteq N$ Mengen aus $\mathcal{R}$. Dann ist $E(M) \leq E(N)$.

Beweis. $E(M)$ und $E(N)$ sind Projektoren und nach Eigenschaft 10.3 c) ist

$$E(M) = E(M \cap N) = E(M) \circ E(N).$$

Also ist Bedingung 10.1 e) v) erfüllt und aus Lemma 10.1 e) folgt, dass auch Bedingung 10.1 e) i) gilt, d.h., dass $E(M) \leq E(N)$. ∎

Lemma 10.15 *Sei H ein komplexer Hilbertraum, sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum und sei E ein* End H*-wertiges Spektralmaß auf $\mathcal{R}$.*

Seien M_n für $n \in \mathbf{N}$ Mengen aus $\mathcal{R}$. Es gelten folgende Aussagen der punktweisen *Konvergenz an jeder Stelle $v \in H$.*

a) *Wenn*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$$

und wenn M die Vereinigung der M_n ist, dann ist

$$\big(E(M)\big)(v) = \lim_{n \to \infty} \big(E(M_n)\big)(v); \tag{10.34}$$

b) Wenn die M_n paarweise disjunkt sind und M ihre Vereinigung ist, dann ist

$$\big(E(M)\big)(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(E(M_k)\big)(v); \tag{10.35}$$

c) Wenn

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

und wenn M der Durchschnitt der M_n ist, dann ist

$$\big(E(M)\big)(v) = \lim_{n\to\infty} \big(E(M_n)\big)(v). \tag{10.36}$$

Beweis. Nach Definition 10.3 e) ist die Mengenfunktion

$$E_v(M) := \langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle$$

ein Maß auf $\mathcal{R}$ und somit σ-additiv.

a): Für die monoton steigende Mengenfolge gilt deshalb an jeder Stelle $v \in H$, dass

$$\langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle = E_v(M) = \lim_{n\to\infty} E_v(M_n) = \lim_{n\to\infty} \langle \big(E(M_n)\big)(v), v\rangle.$$

Wegen Hilfssatz 10.14 ist die Folge von Operatoren $\{\, E(M_n)\,\}_{n\in\mathbf{N}}$ monoton steigend und ist beschränkt, weil die $E(M_n)$ Projektoren sind und Operatornorm ≤ 1 haben. Satz 7.36 besagt, dass es einen hermiteschen Operator T gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} \big(E(M_n)\big)(v) = T(v)$$

für jedes $v \in H$.

Wegen der Stetigkeit des inneren Produkts ist

$$\langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \big(E(M_n)\big)(v), v\rangle = \langle T(v), v\rangle$$

für jedes $v \in H$, und aus Korollar 7.23 können wir schließen, dass $T = E(M)$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \big(E(M_n)\big)(v) = \big(E(M)\big)(v)$$

für jedes $v \in H$, wie gewünscht.

b): Wenn die M_n disjunkt sind, sei

$$L_n := \bigcup_{k=0}^{n} M_k$$

für jedes n. Aus Bedingung 10.3 d) folgt, dass

$$E(L_n) = \sum_{k=0}^{n} E(M_k)$$

und wenn wir diesen Operator auf v anwenden, erhalten wir die n-te Partialsumme der Reihe auf der rechten Seite von (10.35).

Die Mengen L_n bilden aber eine monoton steigende Folge mit Vereinigung M, und aus Teil a) folgt deshalb, dass diese Partialsummen gegen $\big(E(M)\big)(v)$ konvergieren. Das beweist Formel (10.35).

c): Für jedes n setze $L_n := X \setminus M_n$. Dann bilden die L_n eine monoton steigende Folge von messbaren Mengen und $L := X \setminus M$ ist ihre Vereinigung.

Die Aussage folgt jetzt sofort aus Teil a) angewendet auf die L_n und L, wenn wir berücksichtigen, dass für jedes n und für die Mengen L und M gilt

$$\big(E(M_n)\big)(v) = v - \big(E(L_n)\big)(v) \qquad \text{und} \qquad \big(E(M)\big)(v) = v - \big(E(L)\big)(v),$$

weil E additiv ist und weil $E(X) = \mathrm{id}_H$. ■

Korollar 10.16 *Sei H ein komplexer Hilbertraum, sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum und sei E ein* $\operatorname{End} H$*-wertiges Spektralmaß auf $\mathcal{R}$.*

Für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ sei eine Menge $M_\lambda \in \mathcal{R}$ gegeben, so dass $M_\lambda \subseteq M_\mu$ wenn $\lambda < \mu$.

Für jede Zahl $\lambda \in \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ sei

$$L_\lambda := \bigcap_{\mu > \lambda} M_\mu \qquad \textit{und} \qquad N_\lambda := \bigcup_{\nu < \lambda} M_\nu.$$

Dann gilt für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ (und auch für $L_{-\infty}$ und N_∞) und für jedes $v \in V$, dass

$$\big(E(L_\lambda)\big)(v) = \lim_{\mu \downarrow \lambda} \big(E(M_\mu)\big)(v) \tag{10.37a}$$

und

$$\big(E(N_\lambda)\big)(v) = \lim_{\nu \uparrow \lambda} \big(E(M_\nu)\big)(v). \tag{10.37b}$$

(Natürlich gilt der Satz auch wenn die Mengen M_λ nur für λ in einem Teilintervall von $\mathbf{R}$ definiert sind. L_λ und N_λ sind dann auf diesem Intervall und an jeweils einem Endpunkt definiert.)

Beweis. Wenn (10.37a) für ein gewisses λ und v nicht stimmt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine von oben gegen λ konvergierende Folge $\{\, \mu_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$, die man monoton fallend wählen kann, so dass

$$\left\| \big(E(M_{\mu_n})\big)(v) - \big(E(L_\lambda)\big)(v) \right\| \geq \varepsilon$$

für jedes n.

Aber das widerspricht Lemma 10.15 c), denn weil die Mengen M_μ eine monotone Schar bilden, ist auch die Folge von Mengen $\{\, M_{\mu_n} \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ monoton fallend und

$$L_\lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{\mu_n}.$$

Nach 10.15 c) müsste also $\big(E(M_{\mu_n})\big)(v)$ gegen $\big(E(L_\lambda)\big)(v)$ konvergieren.

Entsprechend folgert man (10.37b) aus Lemma 10.15 a). ■

Lemma 10.17 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei E ein Spektralmaß definiert auf der Borel σ-Algebra von $\mathbf{R}$ mit Werten in $\operatorname{End} H$.*

Für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ setze

$$E_\lambda := E\big((-\infty, \lambda]\big). \tag{10.38}$$

Die Familie $\{\, E_\lambda \,\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ ist eine Spektralschar, deren zugehöriges Spektralmaß im Sinne von Satz 10.13 gerade E ist, und $\{\, E_\lambda \,\}$ ist die einzige Spektralschar mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Nach Definition ist jedes E_λ ein Projektor, so dass Bedingung 10.2 a) erfüllt ist.

Bedingung 10.2 b), die Monotonizität der Schar, folgt direkt aus Hilfssatz 10.14.

Bedingung 10.2 c) folgt aus Korollar 10.16, denn die Mengen

$$M_\lambda := (-\infty, \lambda]$$

für $\lambda \in \mathbf{R}$ bilden eine monotone Schar mit Durchschnitt $L_{-\infty} = \emptyset$ und mit Vereinigung $N_\infty = \mathbf{R}$.

Nach den Gleichungen (10.37) ist

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda(v) = \lim_{\lambda \to -\infty} \big(E(M_\lambda)\big)(v) = \big(E(\emptyset)\big)(v) = \mathbf{0}$$

und

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda(v) = \lim_{\lambda \to +\infty} \big(E(M_\lambda)\big)(v) = \big(E(\mathbf{R})\big)(v) = \operatorname{id}_H(v) = v.$$

Auch Bedingung 10.2 d) (die rechtsseitige Halbstetigkeit der Familie $\{ E_\lambda \}$) folgt direkt aus Gleichung (10.37a) in Korollar 10.16, denn

$$(-\infty, \lambda] = \bigcap_{\mu > \lambda} (-\infty, \mu].$$

Also ist die Familie $\{ E_\lambda \}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ eine Spektralschar.

Nach Satz 10.13 bestimmt diese Spektralschar wieder ein Spektralmaß E', eindeutig dadurch charakterisiert, das die Mengenfunktion

$$E'_v(M) := \langle \big(E'(M)\big)(v), v\rangle$$

gerade das Lebesgue-Stieltjes Maß der monoton steigenden Funktion

$$\alpha_v(\lambda) := \langle E_\lambda(v), v\rangle := \langle \Big(E\big((-\infty, \lambda]\big)\Big)(v), v\rangle$$

ist.

Weil $E'(\mathbf{R}) = E(\mathbf{R}) = \mathrm{id}_H$, ist $E'_v(\mathbf{R}) = E_v(\mathbf{R}) = \|v\|^2$ und auf jeden Fall immer endlich. Deshalb sind E'_v und E_v endliche Maße auf $\mathcal{B}$ für jeden Vektor v.

Sei (a, b) ein offenes Intervall in $\mathbf{R}$. Weil

$$(a, b) = \bigcup_{d < b} (a, d]$$

haben wir für jedes $v \in H$ nach Korollar 10.16

$$\begin{aligned}
\Big(E\big((a, b)\big)\Big)(v) &= \lim_{d \uparrow b} \Big(E\big((a, d]\big)\Big)(v) \\
&= \lim_{d \uparrow b} \Big(E\big((-\infty, d]\big) - E\big((-\infty, a]\big)\Big)(v) \\
&= \lim_{d \uparrow b} (E_d - E_a)(v) \\
&= \big(\lim_{d \uparrow b} E_d(v)\big) - E_a(v) \\
&= \lim_{d \uparrow b} E_d(v) - \lim_{c \downarrow a} E_c(v) && \text{nach 10.2 d).}
\end{aligned}$$

Bilden wir von diesen Ausdrücken das innere Produkt mit v, so bleiben die Grenzwertaussagen aus Stetigkeitsgründen erhalten und wir finden

$$E_v\big((a, b)\big) = \lim_{d \uparrow b} \alpha_v(d) - \lim_{c \downarrow a} \alpha_v(c) = I_{\alpha_v}(a, b) = \mu_{\alpha_v}\big((a, b)\big) = E'_v\big((a, b)\big).$$

Nach Korollar 10.10 sind die endlichen Maße E_v und E'_v eindeutig bestimmt durch ihre Werte auf offenen Intervallen und deshalb gleich.

Für jedes $M \in \mathcal{B}$ ist die Funktion $v \mapsto E_v(M)$ die quadratische Form des hermiteschen Operators $E(M)$ und bestimmt $E(M)$ eindeutig nach Korollar 7.35. Folglich ist $E = E'$ wie behauptet.

Sei nun $\{\, \tilde{E}_\lambda \,\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ eine beliebige Spektralschar mit Spektralmaß E, und für jedes $v \in H$ sei

$$\tilde{\alpha}_v(\lambda) := \langle \tilde{E}_\lambda(v), v \rangle,$$

so dass $E_v = \mu_{\tilde{\alpha}_v}$.

Für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ und $v \in H$ ist dann

$$\begin{aligned}
\langle \Big(E\big((\lambda,\infty)\big)\Big)(v), v \rangle &= E_v\big((\lambda,\infty)\big) \\
&= \mu_{\tilde{\alpha}_v}\big((\lambda,\infty)\big) \\
&= I_{\tilde{\alpha}_v}(\lambda,\infty) \\
&= \lim_{t\to\infty} \tilde{\alpha}_v(t) - \lim_{\mu\downarrow\lambda} \tilde{\alpha}_v(\mu) \\
&= \lim_{t\to\infty} \langle \tilde{E}_t(v), v \rangle - \lim_{\mu\downarrow\lambda} \langle \tilde{E}_\mu(v), v \rangle \\
&= \langle v, v \rangle - \langle \tilde{E}_\lambda(v), v \rangle \qquad \text{nach 10.2 d)} \\
&= \langle (\mathrm{id}_H - \tilde{E}_\lambda)(v), v \rangle
\end{aligned}$$

Daraus folgt wie üblich, dass $E\big((\lambda,\infty)\big) = \mathrm{id}_H - \tilde{E}_\lambda$. Weil E additiv ist mit $E(\mathbf{R}) = \mathrm{id}_H$, ist

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_\lambda = \mathrm{id}_H - (\mathrm{id}_H - \tilde{E}_\lambda) &= E(\mathbf{R}) - E\big((\lambda,\infty)\big) \\
&= E\big(\mathbf{R} \setminus (\lambda,\infty)\big) = E\big((-\infty,\lambda]\big) = E_\lambda,
\end{aligned}$$

und das zeigt, dass die Schar $\{\, E_\lambda \,\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ eindeutig bestimmt ist. ∎

Unser nächstes Ziel ist es, für einen gegebenen hermiteschen Operator $T \in \operatorname{End} H$ ein geeignetes Spektralmaß zu konstruieren, so dass das stetige Funktionalkalkül für T aus Kapitel 9 sich durch die Integrale der stetigen Funktionen bezüglich dieses Spektralmaßes ausdrückt. Integrieren können wir aber nicht nur die stetigen Funktionen auf dem Spektrum von T, sondern auch beliebige beschränkte messbare Funktionen, und dies liefert eine informationsreiche nützliche Erweiterung des Funktionalkalküls.

Zunächst sollten wir beschreiben, wie das Integral einer Funktion bezüglich eines Spektralmaßes erklärt ist, denn Spektralmaße sind ja operatorwertig. Die Verbindung zu normalen Maßen geschieht wie schon vorexerziert über die quadratische Form der (hermiteschen) Operatoren.

Lemma und Definition 10.18 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $(X, \mathcal{R})$ ein messbarer Raum.*

Sei E ein Spektralmaß auf $\mathcal{R}$ und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ eine beschränkte messbare Funktion.

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten hermiteschen Operator T auf H, so dass für jedes $v \in H$ gilt

$$\langle T(v), v\rangle = \int_X f\,dE_v, \tag{10.39}$$

wo E_v das durch Bedingung Definition 10.3 e) gelieferte Maß

$$E_v(M) := \langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle$$

ist.

Wir benutzen für diesen Operator T die Notation oder Schreibweise

$$T = \int_X f\,dE.$$

Wir wollen zur späteren Verwendung auch festhalten, wie der Operator T in gewissen Situationen aussieht:

a) *Wenn $f = \chi_M$ die charakteristische Funktion einer Menge $M \in \mathcal{R}$ ist, ist*
$$\int_X \chi_M\,dE = E(M). \tag{10.40}$$

b) *Wenn f und g beschränkte messbare Funktionen sind, dann ist*
$$\int_X (f+g)\,dE = \int_X f\,dE + \int_X g\,dE. \tag{10.41}$$

c) *Wenn f eine beschränkte messbare Funktion ist und wenn $c \in \mathbf{R}$, dann ist*
$$\int_X (cf)\,dE = c\int_X f\,dE. \tag{10.42}$$

d) *Wenn f und g beschränkte messbare Funktionen sind mit $f \le g$, dann ist*
$$\int_X f\,dE \le \int_X g\,dE. \tag{10.43}$$

e) *Wenn $\{ f_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine monoton steigende Folge beschränkter nichtnegativer messbarer Funktionen ist und wenn $f := \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n$ auch beschränkt ist, dann gilt für jedes $v \in H$, dass*
$$\Big(\int_X f\,dE\Big)(v) = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_X f_n\,dE\Big)(v) \tag{10.44}$$

f) Wenn f eine beschränkte messbare Funktion ist, dann ist

$$\int_X f\,dE = \int_X f_+\,dE - \int_X f_-\,dE \tag{10.45}$$

und beide Operatoren auf der rechten Seite sind positiv.

Beweis. Wir beginnen mit der Feststellung, dass der Operator $T = \int_X f\,dE$, wenn er für eine bestimmte Funktion f tatsächlich existiert, eindeutig bestimmt ist, weil Gleichung (10.39) seine quadratische Form eindeutig festlegt, und diese bestimmt den Operator eindeutig nach Korollar 7.35.

Wir wollen eine messbare Funktion ***E-integrierbar*** nennen, wenn das Operatorintegral $\int_X f\,dE$ existiert. Für die Existenz reicht es natürlich, einfach einen Kandidaten für den Operator T anzugeben und (10.39) für jedes $v \in H$ nachzuprüfen.

Wir werden jetzt die Behauptungen a)– f) beweisen und sie aber gleichzeitig benutzen, um die Existenz des Operators $\int_X f\,dE$ für alle beschränkten messbaren Funktionen f nachzuweisen.

Beim Beweis der einzelnen Behauptungen müssen wir vorerst natürlich annehmen, dass die in den Voraussetzungen jedes Teils erscheinenden Funktionen E-integrierbar sind, aber wir können dann schließen, dass die im Ergebnis erscheinende Funktion auch E-integrierbar ist (denn wir geben jeweils einen korrekten Kandidaten für den hermiteschen Operator an, der durch das Integral gegeben sein soll).

Am Ende des Beweises wird feststehen, dass jede beschränkte messbare Funktion E-integrierbar ist, und dann beziehen sich diese Behauptungen auf *alle* solche Funktionen und sind auch im genauen Wortlaut des Lemmas richtig.

Wenn M eine messbare Menge ist, dann gilt nach der Definition des Maßes E_v, dass

$$\int_X \chi_M\,dE_v = E_v(M) := \langle \big(E(M)\big)(v), v\rangle,$$

und deshalb erfüllt der Projektor $T = E(M)$ die Gleichung (10.39) für jedes v und wir haben

$$\int_X \chi_M\,dE = E(M).$$

Das beweist Behauptung a) und zeigt gleichzeitig, dass jede charakteristische Funktion einer messbaren Menge E-integrierbar ist.

Wenn f und g E-integrierbare messbare Funktionen sind, dann folgen Beziehung (10.41) und für jedes $c \in \mathbf{R}$ die Gleichung (10.42) unmittelbar aus der Linearität des Integrals und des inneren Produkts in der ersten Variablen, und die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Operatorgleichungen sind offensichtlich wieder hermitesch.

Das beweist Behauptungen b) und c) und zeigt zusammen mit Behauptung a), dass jede messbare Treppenfunktion E-integrierbar ist.

Wenn f und g E-integrierbare messbare Funktionen sind mit $f \leq g$, sei $S := \int_X f\,dE$ und $T := \int_X g\,dE$. Aus (10.39) und der Monotonizität des Lebesgue Integrals folgt, dass für jedes $v \in H$ gilt

$$\langle S(v), v \rangle = \int_X f\,dE_v \leq \int_X g\,dE_v = \langle T(v), v \rangle.$$

Das zeigt, dass $T-S$ positiv ist, also dass $S \leq T$, und beweist Behauptung d).

Nun sei $\{ f_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine beschränkte monoton steigende Folge nichtnegativer E-integrierbarer messbarer Funktionen und sei f ihr Supremum. Diese Funktion ist auch messbar und beschränkt.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$T_n := \int_X f_n\,dE.$$

Weil die Folge $\{ f_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ monoton steigend ist, folgt aus Behauptung d), dass die Operatorenfolge $\{ T_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ monoton steigend ist.

Weil die Folge $\{ f_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine Zahl C mit $f_n(\lambda) \leq C$ für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$. Nach Behauptungen a) und c) ist die konstante Funktion mit Wert C, also die Funktion $C\chi_X$, E-integrierbar mit Integral

$$\int_X C\,dE = CE(X) = C\,\mathrm{id}_H\,.$$

Nach Behauptung d) ist also $T_n \leq C\,\mathrm{id}_H$ für jedes H und die Folge $\{ T_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ ist beschränkt.

Aus Satz 7.36 folgt, dass es einen hermiteschen Operator $T \in \operatorname{End} H$ gibt, so dass

$$\lim_{n \to \infty} T_n(v) = T(v) \tag{10.46}$$

für jedes $v \in H$. Dann gilt auch für jedes v, dass

$$\begin{aligned} \langle T(v), v \rangle &= \lim_{n \to \infty} \langle T_n(v), v \rangle \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_X f_n\,dE_v \\ &= \int_X f\,dE_v. && \text{(Beppo Levi)} \end{aligned}$$

Folglich ist f E-integrierbar und

$$\int_X f\,dE = T.$$

Wenn man in (10.46) für T_n und T die operatorwertigen Integrale einsetzt, erhält man Gleichung (10.44) in Behauptung e) und diese Behauptung ist somit bewiesen.

Da sich nach Lemma 0.43 jede beschränkte nichtnegative messbare Funktion als das Supremum einer (natürlich beschränkten) monoton steigenden Folge nichtnegativer messbarer Treppenfunktionen schreiben lässt und diese nach unseren bisherigen Erkenntnissen E-integrierbar sind, sind alle *nichtnegativen* beschränkten messbaren Funktionen E-integrierbar.

Für eine allgemeine beschränkte messbare Funktion f sind die positiven und negativen Anteile f_+ und f_- beschränkt, messbar und nichtnegativ, und deshalb E-integrierbar. Aus Behauptungen b) und c) folgt, dass auch $f = f_+ - f_-$ E-integrierbar ist mit

$$\int_X f\,dE = \int_X f_+\,dE - \int_X f_-\,dE.$$

Ferner, weil $f_\pm \geq 0$ sind, ist

$$\int_X f_\pm\,dE \geq \int_X 0\,dE = \int_X \chi_\emptyset\,dE = E(\emptyset) = \mathbf{0}$$

und somit sind $\int_X f_\pm\,dE$ positiv.

Das beweist die letzte Behauptung, Behauptung f), und zeigt nebenbei, dass jede beschränkte messbare Funktion E-integrierbar ist. Damit sind wir fertig. ■

Bemerkung 10.19 Sei H ein komplexer Hilbertraum.

Wir haben in Satz und Definition 10.13 und in Lemma 10.17 gesehen, dass Spektralscharen und Spektralmaße auf den Borelmengen von $\mathbf{R}$ im Wesentlichen zwei Seiten einer einzigen Münze sind und den gleichen Sachverhalt wiedergeben, wobei jede Variante die andere eindeutig festlegt.

Eine Spektralschar spielt in der Funktionalanalysis die Rolle einer monoton steigenden aber operatorwertigen Funktion und das entsprechende Spektralmaß die Rolle des operatorwertigen Lebesgue-Stieltjes Maßes dieser Funktion.

Deshalb kann man das in Definition 10.18 erklärte Integral einer Funktion f bezüglich eines Spektralmaßes E auf den Borelmengen von $\mathbf{R}$ genauso gut als Lebesgue-Stieltjes Integral bezüglich der zugehörigen Spektralschar $\{ E_\lambda \}$ schreiben.

Wegen der beide Aspekte verbindenden Bedingung, dass für jeden Vektor $v \in H$ die in Definition 10.3 e) angegebene Mengenfunktion E_v gleich dem

Maß μ_{α_v} sein soll, kann man Gleichung (10.39) im Falle $X = \mathbf{R}$ und $\mathcal{R} = \mathcal{B}$ auch wie folgt schreiben.

Für einen hermiteschen Operator $T \in \operatorname{End} H$ ist

$$T = \int_{\mathbf{R}} f \, dE$$

genau dann, wenn für jedes $v \in H$ gilt

$$\langle T(v), v\rangle = \int_{\mathbf{R}} f \, d\mu_{\alpha_v} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, d\alpha_v(\lambda). \tag{10.47}$$

Wenn nicht das Spektralmaß E sondern die Spektralschar $\{ E_\lambda \}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ gegeben ist, benutzen wir aus diesem Grund für T die Alternativnotation

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dE_\lambda.$$

Wir wissen jetzt, wie man eine beschränkte Borel-messbare reelwertige Funktion auf $\mathbf{R}$ bezüglich einer Spektralschar oder eines Spektralmaßes integrieren kann, aber uns fehlt noch die Angabe einer *sinnvollen* Spektralschar oder Spektralmaßes auf den Borelmengen von $\mathbf{R}$, für die das Ergebnis einen tatsächlichen Nutzen haben wird.

Uns fehlt aber nicht ein *Kriterium* für nützliche Spektralmaße oder -scharen, denn das Integral liefert ja eine Zuordnung von hermiteschen Operatoren zu Funktionen auf $\mathbf{R}$, und zumindest für stetige Funktionen gibt es für jeden hermiteschen Operator T schon eine solche Zuordnung durch das in Kapitel 9 konstruierte stetige Funktionalkalkül.

Sinnvoll wäre es deshalb, wenn die Integraldarstellung diese schon vorhandene Zuordnung nur erweitert, aber nicht widerspricht oder durch völlig andere Werte ersetzt.

Weil das stetige Funktionalkalkül eines gegebenen hermiteschen Operators T eindeutig bestimmt ist durch die Bedingung, dass $\mathrm{id}_{\sigma(T)}(T) = T$, suchen wir also zu jedem hermiteschen Operator T ein Spektralmaß E, für das gelten soll $T = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{id}_{\mathbf{R}} \, dE$, oder gleichbedeutend und leichter zu verwirklichen, eine Spektralschar $\{ E_\lambda \}_{\lambda\in\mathbf{R}}$, so dass $T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$.

Wenn man genau hinschaut, sieht man, dass diese Wunschbedingung nicht ganz zulässig ist, denn die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ ist leider nicht beschränkt. Das ist aber nicht weiter schlimm, weil, wie sich herausstellt, alles sich auf dem Spektrum von T abspielt und $\sigma(T)$ auch der Träger der zu konstruierenden Spektralschar sein wird. Die Bedingung, die wir zu verwirklichen haben, kann man deshalb auch in „kosherer“ Form schreiben als

$$T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}_{\mathbf{R}} \, dE = \int_{-r(T)}^{r(T)} \lambda \, dE_\lambda.$$

Im endlichdimensional Fall ist einigermaßen klar, wie man eine solche Spektralschar konstruieren kann, denn das Spektrum besteht nur aus den endlich vielen Eigenwerten von T und die Spektralschar muss deshalb aus Projektoren E_λ bestehen, die bei jedem Eigenwert μ einen „Sprung" machen im Werte der Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert μ.

Das Spektral*maß* dieses Eigenwerts ist dann einfach diese Projektion P_μ und das Integral enthält einen Beitrag μP_μ, der genau das Verhalten von T auf diesem Eigenraum wiedergibt, nämlich die Multiplikation mit dem Skalar μ.

Nach Gleichung (10.38) hat die Spektral*schar* an einer Stelle λ das Maß von $(-\infty, \lambda]$ als Wert, das heißt, die kumulative Wirkung der Sprünge um P_μ für alle $\mu \leq \lambda$. Diese Summe von P_μ ist nichts anderes als die Projektion auf die Summe der Eigenräume zu allen Eigenwerten $\mu \leq \lambda$.

Der Trick zur Verallgemeinerung dieser Konstruktion für unendlichdimensionale Hilberträume besteht darin, diese Summe von Eigenräumen durch eine Eigenschaft von T zu beschreiben, die auch für Spektralwerte sinnvoll ist, die keine Eigenwerte sind. Welche Eigenschaft könnte das sein?

Wenn $v \in H$ ein Eigenvektor ist zu einem Eigenwert μ, dann ist $T = \mu \,\mathrm{id}_H$ wenigstens an dieser Stelle, oder in der Konvention von Definition 7.28 der Ordnung unter hermiteschen Operatoren ist „$T = \mu$". Für jede andere reelle Zahl λ ist $\mu \leq \lambda$ genau dann, wenn $T \leq \lambda$ oder wenn $T - \lambda \leq 0$.

Genau so wie (und gerade weil!) man jede Funktion f zerlegen kann als Differenz eines positiven und negativen Anteils $f_+ - f_-$ (die beide nichtnegativ sind), kann man jeden hermiteschen Operator zerlegen als die Differenz zweier positiver Operatoren, und genau so wie $f_+ \cdot f_-$ überall 0 ist und jede dieser Anteile auf dem Träger des anderen verschwindet, haben die beiden Anteile eines hermiteschen Operators komplementäre Kerne und jeder ist dort $\mathbf{0}$, wo der andere „getragen" wird.

Das unendlichdimensionale Analogon zur Summe der Eigenräume eines Operators T zu Werten $\leq \lambda$ ist also der „Träger" des negativen Anteils von $T - \lambda$, oder leichter zu definieren, der *Kern* des positiven Anteils. Diese Idee benutzen wir jetzt, um zu jedem hermiteschen Operator T eine Spektralschar zu erhalten, derart, dass Integrale von Funktionen bezüglich dieser Spektralschar das stetige Funktionalkalkül erweitern.

Definition 10.20 Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ ein hermitescher Operator.

Wir definieren Funktionen

$$\mathrm{id}_+ \text{ und } \mathrm{id}_- \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

durch die Vorschrift

$$\mathrm{id}_+(x) = \max(x, 0) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_-(x) = \max(-x, 0) \tag{10.48}$$

für jedes $x \in \mathbf{R}$. Dies sind die positiven und negativen Anteile der Funktion $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ und sind stetige Funktionen mit

$$\mathrm{id}_{\mathbf{R}} = \mathrm{id}_+ - \mathrm{id}_- \qquad \text{und} \qquad |x| = \mathrm{id}_+(x) + \mathrm{id}_-(x) \text{ für jedes x.} \tag{10.49}$$

Nun definieren wir im Rahmen des stetigen Funktionalkalküls

$$T_+ := \mathrm{id}_+(T), \qquad T_- := \mathrm{id}_-(T) \qquad \text{und} \qquad |T| := T_+ + T_- \tag{10.50}$$

(der Operator $|T|$ ist gleich der Absolutbetragsfunktion angewendet auf T im Funktionalkalkül).

Weil id_+ und id_- reellwertig sind, sind T_+, T_- und $|T|$ hermitesche Operatoren. Sie gehören zur von T erzeugten C^*-Unteralgebra A_T von $\mathrm{End}\, H$ und kommutieren deshalb miteinander (denn diese Algebra ist kommutativ).

Wir ordnen jedem hermiteschen Operator T einen ***Projektor*** P_T zu, den wir als die ***orthogonale Projektion auf*** $\mathrm{Ker}\, T_+$ definieren.

Wenn S ein weiterer hermitescher Operator ist, so definieren wir

$$\max(S, T) := \frac{1}{2}\big(S + T + |S - T|\big) \tag{10.51a}$$

und

$$\min(S, T) := \frac{1}{2}\big(S + T - |S - T|\big). \tag{10.51b}$$

Diese Operatoren besitzen folgende einfach nachzuweisende Grundeigenschaften.

Lemma 10.21 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathrm{End}\, H$ ein hermitescher Operator.*

a) $T = T_+ - T_-$.

b) Jeder Operator $S \in \mathrm{End}\, H$, der mit T kommutiert, kommutiert auch mit T_+ und mit T_-.

c) $T_- = (-T)_+$ *und* $T_+ = (-T)_-$.

d) *i)* $T_+ \geq 0$ *und* $T_- \geq 0$.

ii) $|T| \geq 0$.

iii) $T_+ \geq T$ *und* $T_- \geq -T$.

iv) $T_+ \leq |T|$ *und* $T_- \leq |T|$.

e) $T_+ \circ P_T = \mathbf{0} = P_T \circ T_+$

f) *i)* $T_+ \circ T_- = \mathbf{0} = T_- \circ T_+$.

ii) $T_- \circ P_T = T_- = P_T \circ T_-$.

iii) $T \circ P_T = -T_- = P_T \circ T$.

iv) $T \circ (\mathrm{id}_H - P_T) = T_+ = (\mathrm{id}_H - P_T) \circ T$.

g) *Wenn* T *ein positiver Operator ist, dann ist* $T = T_+$ *und* $T_- = \mathbf{0}$.

h) *Jeder Operator aus* End H*, der mit* T *kommutiert, kommutiert mit* P_T.

j) *Sei* $S \in \operatorname{End} H$ *hermitesch und* S *kommutiere mit* T.

i) *Wenn* $S \geq T$ *und* $S \geq -T$*, dann ist* $S \geq |T|$.

ii) *Genau dann ist* $S \geq T_+$*, wenn* S *positiv ist und* $S \geq T$.

iii) *Genau dann ist* $S \geq T_-$*, wenn* S *positiv ist und* $S \geq -T$.

k) *Seien* R *und* S *hermitesche Operatoren in* End H*, die miteinander und mit* T *kommutieren.*

i) *Wenn* $T \geq R$ *und* $T \geq S$*, dann ist* $T \geq \max(R, S)$.

ii) *Wenn* $T \leq R$ *und* $T \leq S$*, dann ist* $T \leq \min(R, S)$.

Beweis. a) folgt im Funktionalkalkül für T direkt aus der ersten Gleichung in (10.49), eine Standardeigenschaft der positiven und negativen Anteile einer Funktion, hier spezialisiert auf die Funktion id_R.

Wenn wir die Funktionen aus dieser Gleichung auf den Operator T anwenden, erhalten wir die behauptete Relation

$$T = \mathrm{id}_R(T) = \mathrm{id}_+(T) - \mathrm{id}_-(T) = T_+ - T_-.$$

b) folgt aus Hilfssatz 9.24, denn T_+ und T_- gehören zu A_T und jeder mit T kommutierende Operator kommutiert nach dem Hilfssatz mit allen Elementen von A_T.

c): Aus der Definition von id_+ und id_- ist klar, dass

$$\mathrm{id}_- = (-\mathrm{id})_+ \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_+ = (-\mathrm{id})_-.$$

Wieder liefert die Anwendung der Funktionen auf T im Funktionalkalkül die behaupteten Beziehungen.

d) folgt im Wesentlichen aus Korollar 9.33 d), in dem steht, dass für eine stetige Funktion f auf dem Spektrum von T der Operator $f(T)$ genau dann positiv ist, wenn die Funktion f nur nichtnegative reelle Werte annimmt.

Die Funktionen id_+, id_- und der Absolutbetrag haben nach Definition nur nichtnegative Werte, und deshalb sind T_+, T_- und $|T|$ positive Operatoren, wie in Unterteil i) und Unterteil ii) behauptet.

Aus Teil a) folgt nun

$$T_+ - T = T_+ - (T_+ - T_-) = T_- \geq 0$$

und

$$T_- - (-T) = T_- - (T_- - T_+) = T_+ \geq 0,$$

womit gezeigt ist, dass $T_+ \geq T$ und $T_- \geq -T$ wie in Unterteil iii).

Aus der Definition von $|T| = T_+ + T_-$ erhalten wir

$$|T| - T_+ = T_- \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |T| - T_- = T_+ \geq 0$$

und somit $|T| \geq T_+$ und $|T| \geq T_-$ wie in Unterteil iv).

Für die folgenden Teile erinnern wir daran, dass zwei hermitesche Operatoren S und T genau dann miteinander kommutieren, wenn auch $S \circ T$ hermitesch ist. Das war die Aussage von Korollar 9.32 a).

e): Weil P_T definiert ist als die orthogonale Projektion auf $\operatorname{Ker} T_+$, ist $T_+ \circ P_T = \mathbf{0}$, und weil $\mathbf{0}$ hermitesch ist gilt auch $P_T \circ T_+ = \mathbf{0}$.

f) i) folgt sofort mit dem Funktionalkalkül für T aus der Tatsache, dass $\mathrm{id}_+ \mathrm{id}_- = \mathrm{id}_- \mathrm{id}_+ = \mathbf{0}$ (weil an jeder Stelle einer der beiden Faktoren verschwindet).

Aus $T_+ \circ T_- = \mathbf{0}$ folgt, dass $\operatorname{Bild} T_- \subseteq \operatorname{Ker} T_+$ und dort operiert P_T als die Identität.

Deshalb ist $P_T \circ T_- = T_-$, und weil T_- hermitesch ist, sind die Operatoren auf der linken Seite vertauschbar und es gilt auch $T_- \circ P_T = T_-$. Das beweist f) ii).

Behauptungen f) iii) und iv) erhält man, wenn man in ihnen T durch $T_+ - T_-$ ersetzt und auf die entstehenden Summanden e) und f) ii) anwendet.

g): P_T kommutiert mit T und ist als Projektor positiv, und wenn T positiv ist, dann folgt aus Korollar 9.32 b), dass auch $P_T \circ T = -T_-$ positiv ist.

Aber da schon $+T_-$ positiv ist, muss dann $T_- = \mathbf{0}$ sein (denn seine hermitesche Form ist gleichzeitig positiv- und negativ-semidefinit und somit identisch 0).

Aus $T_- = \mathbf{0}$ folgt $T = T_+ - T_- = T_+$.

h): Sei $S \in \operatorname{End} H$ ein Operator, der mit T kommutiert. Dann kommutiert auch S^t mit $T^t = T$.

Nach Teil b) kommutiert S mit T_+. Aus diesem Grund haben wir für jeden Vektor $v \in \operatorname{Ker} T_+ = \operatorname{Bild} P_T$, dass

$$T_+\big(S(v)\big) = S\big(T_+(v)\big) = S(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

und deshalb ist $S(\operatorname{Ker} T_+) \subseteq \operatorname{Ker} T_+$ oder für unsere Zwecke treffender gesagt, $S(\operatorname{Bild} P_T) \subseteq \operatorname{Bild} P_T$.

Auch S^t bildet $\operatorname{Bild} P_T$ in sich ab, da auch S^t mit T kommutiert. Sei w ein Vektor aus $\operatorname{Ker} P_T = (\operatorname{Bild} P_T)^\perp$. Dann gilt für jedes $v \in \operatorname{Bild} P_T$, dass

$$\langle S(w), v\rangle = \langle w, S^t(v)\rangle = 0$$

weil $S^t(v) \in \operatorname{Bild} P_T$ und $w \perp \operatorname{Bild} P_T$.

Also gehört auch $S(w)$ zu $(\operatorname{Bild} P_T)^\perp = \operatorname{Ker} P_T$ und S bildet auch $\operatorname{Ker} P_T$ in sich ab.

Nach Satz 9.27 ist $H = \operatorname{Bild} P_T \oplus \operatorname{Ker} P_T$. Sei $u \in H$ und schreibe $u = v + w$ mit $v \in \operatorname{Bild} P_T$ (dann ist $P_T(v) = v$) und $w \in \operatorname{Ker} P_T$. Wir haben dann

$$(S \circ P_T)(u) = S\big(P_T(v) + P_T(w)\big) = S(v + \mathbf{0}) = S(v)$$

und weil S sowohl $\operatorname{Bild} P_T$ wie auch $\operatorname{Ker} P_T$ in sich abbildet,

$$(P_T \circ S)(u) = P_T\big(S(v) + S(w)\big) = S(v) + \mathbf{0} = S(v).$$

Damit ist gezeigt, dass $S \circ P_T = P_T \circ S$.

j): Sei $S \in \operatorname{End} H$ hermitesch und S kommutiere mit T.

j) i): Wenn $S \geq T$ und $S \geq -T$, dann sind $S - T$ und $S + T$ positive Operatoren, die mit T kommutieren und nach Teil h) auch mit P_T, deshalb natürlich auch mit $\operatorname{id}_H - P_T$.

Auch diese Projektoren sind positive Operatoren, und weil sie mit $S \pm T$ kommutieren, sind nach Korollar 9.32 b) die Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(\operatorname{id}_H - P_T) \circ (S - T) &= (\operatorname{id}_H - P_T) \circ S - (\operatorname{id}_H - P_T) \circ T \\ &= (\operatorname{id}_H - P_T) \circ S - T_+ \qquad \text{nach f) iv)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}P_T \circ (S + T) &= P_T \circ S + P_T \circ T \\ &= P_T \circ S - T_- \qquad \text{nach f) iii)}\end{aligned}$$

positiv.

Also ist auch die Summe

$$(\mathrm{id}_H - P_T) \circ S - T_+ + P_T \circ S - T_- = S - T_+ - T_- = S - |T|$$

dieser Verknüpfungen positiv, und das zeigt $S \geq |T|$.

j) ii): Wenn $S \geq T_+$, ist S natürlich positiv, da $T_+ \geq 0$, und $S \geq T$ da nach d) iii) $T_+ \geq T$.

Umgekehrt, wenn S positiv ist und $S \geq T$, dann ist auch $S - T$ positiv, und diese positiven Operatoren kommutieren mit T und deshalb nach Teil h) mit P_T. Nach Korollar 9.32 b) sind ihre Verknüpfungen mit P_T positiv.

Insbesondere gilt das für $P_T \circ S$ und für

$$(\mathrm{id}_H - P_T) \circ (S - T) = (\mathrm{id}_H - P_T) \circ S - (\mathrm{id}_H - P_T) \circ T = (\mathrm{id}_H - P_T) \circ S - T_+.$$

Addiert man diese positiven Operatoren, so findet man, dass auch

$$P_T \circ S + (\mathrm{id}_H - P_T) \circ S - T_+ = S - T_+ \geq 0,$$

d.h., dass $S \geq T_+$.

j) iii) folgt sofort aus j) ii) angewendet auf $-T$, wenn man berücksichtigt, dass $(-T)_+ = T_-$ nach Teil c).

k): Seien R und S hermitesche Operatoren in $\operatorname{End} H$, die mit T und miteinander kommutieren.

Dann kommutieren T und $R+S$ mit $R-S$, so dass auch die hermiteschen Operatoren $T - \frac{1}{2}(R+S)$ und $\frac{1}{2}(R-S)$ miteinander kommutieren. Wir werden Unterteil i) von j) auf diese Situation anwenden.

Wenn $T \geq R$ und $T \geq S$, dann ist

$$T - \frac{1}{2}(R+S) \geq R - \frac{1}{2}(R+S) = \frac{1}{2}(R-S)$$

und

$$T - \frac{1}{2}(R+S) \geq S - \frac{1}{2}(R+S) = -\frac{1}{2}(R-S).$$

Aus Teil j) i) folgt, dass

$$T - \frac{1}{2}(R+S) \geq \frac{1}{2}\,|R-S| \qquad \text{oder} \qquad T \geq \frac{1}{2}\big(R+S+|R-S|\big) = \max(R,S).$$

Das beweist Unterteil i).

Unterteil ii) folgt genau so. Wenn $T \leq R$ und $T \leq S$, dann haben wir

$$\frac{1}{2}(R+S) - T \geq \frac{1}{2}(R+S) - R = -\frac{1}{2}(R-S)$$

und

$$\frac{1}{2}(R+S) - T \geq \frac{1}{2}(R+S) - S = \frac{1}{2}(R-S),$$

und deshalb gilt

$$\frac{1}{2}(R+S)-T \geq \frac{1}{2}|R-S| \qquad \text{oder} \qquad T \leq \frac{1}{2}\big(R+S-|R-S|\big) = \min(R,S).$$

■

Mit Hilfe des positiven Anteils können wir nun nach dem auf Seite 424 entwickelten Plan jedem hermiteschen Operator T eine Spektralschar zuordnen, so dass das Integral einer stetigen Funktion bezüglich dieser Spektralschar dem Anwenden der Funktion auf T im stetigen Funktionalkalkül entspricht.

Lemma und Definition 10.22 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ ein hermitescher Operator.*

Für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ sei

$$E_\lambda := P_{T-\lambda\,\mathrm{id}_H}, \tag{10.52}$$

wo $P_{T-\lambda\,\mathrm{id}_H}$ im Sinne von Definition 10.20 die Projektion auf den Kern von $(T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+$ ist.

Dann ist $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ eine Spektralschar mit beschränktem Träger (enthalten im abgeschlossenen Intervall zwischen dem Infimum und dem Supremum der Spektralwerte von T).

*Wir nennen $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ die **Spektralschar von** T. Das zugehörige Spektralmaß E nennen wir das **Spektralmaß von** T.*

Alle Projektoren $E(M)$ (für M eine Borelmenge von $\mathbf{R}$) kommutieren mit T und mit jedem Element der von T erzeugten C^* Algebra A_T.

Beweis. Wir müssen zunächst zeigen, dass $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ die vier Eigenschaften einer Spektralschar hat.

Da jedes E_λ als eine orthogonale Projektion definiert ist, gilt Eigenschaft 10.2 a).

Die Operatoren $T-\lambda\,\mathrm{id}_H$ kommutieren offensichtlich alle miteinander, und wenn $\lambda \leq \mu \in \mathbf{R}$, dann ist $(T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+$ positiv nach Lemma 10.21 d) i) und aus Lemma 10.21 d) iii) folgt

$$(T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+ \geq T-\lambda\,\mathrm{id}_H \geq T-\mu\,\mathrm{id}_H\,.$$

Eine Anwendung von Lemma 10.21 j) ii) liefert

$$(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)_+ \geq (T - \mu\,\mathrm{id}_H)_+.$$

Weil es sich um positive Operatoren handelt, ist klar, dass

$$\operatorname{Ker}\bigl((T - \lambda\,\mathrm{id}_H)_+\bigr) \subseteq \operatorname{Ker}\bigl((T - \mu\,\mathrm{id}_H)_+\bigr), \tag{10.53}$$

und weil diese Räume die Bilder der Projektoren E_λ und E_μ sind, erhalten wir aus Lemma 10.1 e), dass $E_\lambda \subseteq E_\mu$, was Eigenschaft 10.2 b) beweist.

Sei

$$a := \inf_{\mu \in \sigma(T)} \mu \qquad \text{und} \qquad b := \sup_{\mu \in \sigma(T)} \mu.$$

Beide Zahlen sind endlich, weil $\sigma(T)$ kompakt ist.

Wenn $\lambda < a$, dann ist die Funktion $f(x) := x - \lambda$ positiv auf $\sigma(T)$ und folglich ist $f(T) = T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ positiv und somit $(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)_+ = T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ nach Lemma 10.21 g).

Da λ auch kein Eigenwert von T sein kann, ist $(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)_+ = T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ injektiv und hat Kern $\{\,0\,\}$. Folglich ist E_λ die Projektion auf $\{\,0\,\}$, also der Nulloperator, für jedes $\lambda < a$.

Entsprechend, wenn $\lambda \geq b$, dann ist die Funktion $g(x) := \lambda - x$ nichtnegativ auf $\sigma(T)$ und $g(T) = \lambda\,\mathrm{id}_H - T = -(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)$ ist ein positiver Operator.

Somit ist $(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)_+ = \bigl(-(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)\bigr)_- = \mathbf{0}$. Folglich ist E_λ die Projektion auf $\operatorname{Ker}\mathbf{0} = H$, also die Identität von H.

Dies beweist sogar eine stärkere Aussage als Bedingung 10.2 c), da E_λ sogar *gleich* $\mathbf{0}$ ist für alle genügend kleine λ, und *gleich* id_H ist für alle genügend große λ.

Gleichzeitig haben wir gezeigt, dass der Träger der Schar im Intervall $[a, b]$ enthalten ist und somit beschränkt ist.

Für die Rechtshalbstetigkeit, Bedingung 10.2 d), reicht es zu zeigen, dass für jedes $v \in H$ und für jede monoton fallende Folge $\{\,\mu_n\,\}_{n\in\mathbf{N}}$in $\mathbf{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda \in \mathbf{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mu_n}(v) = E_\lambda(v).$$

Aus Lemma 10.1 h) und wegen der Monotonizität der Schar $\{\,E_\lambda\,\}$ wissen wir, dass es einen Projektor P gibt mit $\lim_{n\to\infty} E_{\mu_n}(v) = P(v)$ für jedes $v \in H$, und wir wissen, dass

$$\operatorname{Bild} P = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Bild} E_{\mu_n} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}\bigl((T - \mu_n\,\mathrm{id}_H)_+\bigr).$$

Wir müssen nur zeigen, dass der Durchschnitt auf der rechten Seite gleich $\operatorname{Ker}\bigl((T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+\bigr)$ ist, um zu wissen, dass $P = E_\lambda$ wie gewünscht.

Aus (10.53) folgt

$$\operatorname{Ker}\bigl((T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+\bigr) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}\bigl((T-\mu_n\,\mathrm{id}_H)_+\bigr). \tag{10.54}$$

Wir werden zeigen, dass diese Inklusion nicht echt ist.

In der C^*-Algebra $\mathcal{C}\bigl(\sigma(T),\mathbf{C}\bigr)$ gilt für jedes $x \in \sigma(T) \subseteq \mathbf{R}$ und für je zwei reelle Zahlen $\lambda < \mu$, dass

$$\begin{aligned}
\Bigl|\bigl((\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \lambda\cdot\mathbf{1})_+\bigr)(x) - \bigl((\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \mu\cdot\mathbf{1})_+\bigr)(x)\Bigr|& \\
&= \bigl|\max(x-\lambda,0) - \max(x-\mu,0)\bigr| \\
&= \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \le \lambda; \\ x-\lambda, & \text{wenn } \lambda < x \le \mu; \\ \mu-\lambda, & \text{wenn } \mu < x; \end{cases} \\
&\le \mu - \lambda.
\end{aligned}$$

Weil das Funktionalkalkül eine Isometrie ist, haben wir in der Operatornorm von $\operatorname{End} H$ die Abschätzung

$$\bigl\|(T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+ - (T-\mu\,\mathrm{id}_H)_+\bigr\| \le \mu - \lambda.$$

Wenden wir das auf die μ_n anstelle von μ an, so folgt daraus, dass in der Normtopologie

$$\lim_{n\to\infty} (T-\mu_n\,\mathrm{id}_H)_+ = (T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+,$$

und deshalb

$$\lim_{n\to\infty} (T-\mu_n\,\mathrm{id}_H)_+(v) = (T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+(v)$$

für jedes $v \in H$.

Insbesondere, wenn $v \notin \operatorname{Ker}\bigl((T-\lambda\,\mathrm{id}_H)_+\bigr)$, dann ist auch

$$(T-\mu_n\,\mathrm{id}_H)_+(v) \ne \mathbf{0}$$

für alle genügend große n, und das beweist, dass v auch nicht zur rechten Seite von (10.54) gehört. Die Inklusion ist also nicht echt und es herrscht die Gleichheit.

Damit ist Bedingung 10.2 d) nachgeprüft, und die Familie $\{\, E_\lambda \,\}$ ist eine Spektralschar.

Sei E das zugehörige Spektralmaß. Wir müssen zeigen, dass für jede Borelmenge M der Projektor $E(M)$ mit allen Elementen von A_T kommutiert.

Dazu reicht es nach Hilfssatz 9.24 zu zeigen, dass $E(M)$ mit T kommutiert, oder umgekehrt, T mit $E(M)$.

Für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ kommutiert T mit $T - \lambda \operatorname{id}_H$ und deshalb nach Lemma 10.21 h) auch mit $P_{T-\lambda \operatorname{id}_H} = E_\lambda$.

Die letzte Aussage in Satz 10.13 sagt uns, dass T dann mit allen Projektoren $E(M)$ des Spektralmaßes kommutiert. ■

Lemma 10.23 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ hermitesch. Sei E das Spektralmaß von T.*

Sei M eine Borelmenge von $\mathbf{R}$ und sei $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ eine stetige Funktion auf dem Spektrum von T, so dass

$$f|M \cap \sigma(T) \equiv 0.$$

Dann ist

$$f(T) \circ E(M) = E(M) \circ f(T) = \mathbf{0}.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass M ein offenes Intervall (a, b) ist.

Seien $\lambda < \mu \in (a, b)$. Dann ist $(\operatorname{id}_R - a)_+$ identisch 0 auf $(-\infty, a]$, die Funktion $(\operatorname{id}_R - \mu)_-$ ist identisch 0 auf $[\mu, \infty)$, und f ist nach Annahme 0 auf $(a, b) \cap \sigma(T)$, so dass die stetige Funktion

$$(\operatorname{id}_R - a)_+ (\operatorname{id}_R - \mu)_- f$$

auf ganz $\sigma(T)$ verschwindet und wir aus dem Funktionalkalkül erhalten, dass

$$(T - a \operatorname{id}_H)_+ \circ (T - \mu \operatorname{id}_H)_- \circ f(T) = \mathbf{0}$$

für jedes $\mu \in (a, b)$.

Deshalb ist

$$\operatorname{Bild}\big((T - \mu \operatorname{id}_H)_- \circ f(T)\big) \subseteq \operatorname{Ker}\big((T - a \operatorname{id}_H)_+\big) = \operatorname{Bild} E_a = \operatorname{Ker}(\operatorname{id}_H - E_a)$$

und wir haben

$$(\operatorname{id}_H - E_a) \circ (T - \mu \operatorname{id}_H)_- \circ f(T) = \mathbf{0},$$

woraus natürlich folgt

$$E_\lambda \circ (\operatorname{id}_H - E_a) \circ (T - \mu \operatorname{id}_H)_- \circ f(T) = \mathbf{0} \tag{10.55}$$

für jedes λ und jedes $\mu \in (a, b)$.

Nach Lemma 10.21 f) iii) können wir den Faktor $(T - \mu \operatorname{id}_H)_-$ umschreiben als $-E_\mu \circ (T - \mu \operatorname{id}_H)$.

Wir betrachten jetzt ein festes $\lambda \in (a, b)$ und alle $\mu \in (\lambda, b)$. Weil dann $E_a \leq E_\lambda \leq E_\mu$, ist jede Verknüpfung von zwei dieser Projektoren gleich dem kleineren der beiden, und wir können die in (10.55) entstehende Verknüpfung $E_\lambda \circ (\mathrm{id}_H - E_a) \circ E_\mu$ vereinfachen zu $E_\lambda - E_a$, und wir erhalten, dass für jedes $\mu \in (\lambda, b)$ gilt

$$(E_a - E_\lambda) \circ (T - \mu\, \mathrm{id}_H) \circ f(T) = \mathbf{0}.$$

Weil dies für ein ganzes offenes Intervall von μ's gilt, können wir durch Subtraktion der Gleichungen für zwei verschiedene μ-Werte μ_1 und μ_2 (und Division durch $\mu_2 - \mu_1$) schließen, dass

$$(E_a - E_\lambda) \circ f(T) = \mathbf{0}$$

für jedes $\lambda \in (a, b)$.

Daraus folgt, dass der Operator $E_\lambda \circ f(T)$ für alle $\lambda \in (a, b)$ gleich ist. Ist $v \in H$ und $w := \big(f(T)\big)(v)$, so ist die Funktion

$$\alpha_w(\lambda) := \langle E_\lambda(w), w \rangle = \langle E_\lambda(w), E_\lambda(w) \rangle$$

konstant auf (a, b) und deshalb ist

$$E_w\big((a, b)\big) = \mu_{\alpha_w}\big((a, b)\big) = I_{\alpha_w}(a, b) = 0.$$

Also ist $\Big(E\big((a, b)\big)\Big)(w) = 0$ für jedes $w \in \mathrm{Bild}\, f(T)$, d.h.,

$$E\big((a, b)\big) \circ f(T) = \mathbf{0}.$$

Wenn M eine beliebige offene Menge ist, auf deren Durchschnitt mit $\sigma(T)$ die Funktion f verschwindet, dann folgt die Beziehung

$$E(M) \circ f(T) = \mathbf{0}$$

aus der punktweisen σ-Additivität von E und der Tatsache, dass jede offene Menge eine abzählbare Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen ist.

Es gilt auch

$$f(T) \circ E(M) = \mathbf{0},$$

wenn M offen ist, weil $f(T) \in A_T$ und deshalb mit allen Projektoren des Spektralmaßes von T kommutiert.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Sei $\zeta \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ die stetige Funktion

$$\zeta(t) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } |t| \leq 1; \\ |t| - 1, & \text{wenn } 1 \leq |t| \leq 2; \\ 1, & \text{wenn } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ definiere eine stetige Funktion $f_\varepsilon\colon \sigma(T) \longrightarrow \mathbf{R}$ durch die Vorschrift

$$f_\varepsilon(t) := \zeta\Big(\frac{f(t)}{\varepsilon}\Big) f(t).$$

Wo $\big|f(t)\big| \geq 2\varepsilon$, stimmt die Funktion f_ε mit f überein, aber sie verschwindet auf dem Durchschnitt von $\sigma(T)$ mit der in $\mathbf{R}$ offenen Menge

$$M_\varepsilon := \mathbf{R} \setminus \Big\{\, \lambda \in \sigma(T) \;\Big|\; \big|f(t)\big| \geq \varepsilon \,\Big\}.$$

Die Menge $M_\varepsilon \supseteq M$, weil f auf $M \cap \sigma(T)$ verschwindet und deshalb dort keine Werte von Betrag $\geq \varepsilon$ annimmt.

Aus diesem Grund ist $E(M) \leq E(M_\varepsilon)$ und aus der für offene Mengen M bewiesenen Behauptung erhalten wir

$$E(M) \circ f_\varepsilon(T) = f_\varepsilon(T) \circ E(M) = f_\varepsilon(T) \circ E(M_\varepsilon) \circ E(M) = \mathbf{0} \circ E(M) = \mathbf{0}.$$

Ist $\{\, \varepsilon_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$eine gegen 0 konvergente Folge von positiven Zahlen, so ist klar, dass $\lim_{n\to\infty} f_{\varepsilon_n} = f$ gleichmäßig auf $\sigma(T)$, da schon eine grobe Schätzung ergibt, dass $\|f_\varepsilon - f\| \leq 2\varepsilon$.

Weil das stetige Funktionalkalkül eine Isometrie ist, ist $\lim_{n\to\infty} f_{\varepsilon_n}(T) = f(T) \in \operatorname{End} H$, woraus sofort folgt, dass

$$E(M) \circ f(T) = f(T) \circ E(M) = \mathbf{0}.$$

■

Man beachte, dass in der Aussage und im Beweis von Lemma 10.23 nirgendwo verlangt wird, dass $M \cap \sigma(T)$ nichtleer ist oder dass f tatsächlich Nullstellen haben muss. Deshalb erhalten wir aus diesem Lemma folgendes

Korollar 10.24 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ hermitesch. Sei E das Spektralmaß von T.*

Dann ist

$$E\big(\mathbf{R} \setminus \sigma(T)\big) = \mathbf{0} \qquad \textit{und} \qquad E\big(\sigma(T)\big) = \mathrm{id}_H\,.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Lemma 10.23 mit $M := \mathbf{R} \setminus \sigma(T)$ und $f = \mathbf{1}$ (so dass $f(T) = \mathrm{id}_H$).

Die zweite Aussage folgt dann, weil nach Definition 10.3 a) und d) gilt

$$\mathrm{id}_H = E(\mathbf{R}) = E\big(\sigma(T)\big) + E\big(\mathbf{R} \setminus \sigma(T)\big) = E\big(\sigma(T)\big) + \mathbf{0}.$$

■

Korollar 10.25 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ hermitesch. Sei E das Spektralmaß von T.*

Sei M eine Borelmenge von $\mathbf{R}$ und sei $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ eine stetige Funktion auf dem Spektrum von T, so dass $f \geq 0$ auf $M \cap \sigma(T)$. Dann ist

$$f(T) \circ E(M) = E(M) \circ f(T) \geq 0.$$

Entsprechend, wenn $f \leq 0$ auf $M \cap \sigma(T)$, dann ist

$$f(T) \circ E(M) = E(M) \circ f(T) \leq 0.$$

Beweis. Genau dann ist $f \geq 0$ auf $M \cap \sigma(T)$, wenn f_- dort 0 ist. Aus Lemma 10.23 folgt, dass

$$f_-(T) \circ E(M) = \mathbf{0}.$$

Aus der Beziehung $f(T) = f_+(T) - f_-(T)$ erhält man dann, dass

$$f(T) \circ E(M) = f_+(T) \circ E(M),$$

wobei $f_+(T)$ positiv ist, weil $f_+ \geq 0$, und $E(M)$ als Projektor positiv ist.

Als Element von A_T kommutiert $f_+(T)$ mit $E(M)$ und weil beide positive Operatoren sind, ist nach Korollar 9.32 b) auch ihre Verknüpfung positiv.

Das beweist, dass $f(T) \circ E(M)$ positiv ist, und weil auch $f(T)$ zu A_T gehört ist $E(M) \circ f(T) = f(T) \circ E(M)$ und deshalb auch die Verknüpfung in der anderen Reihenfolge positiv.

Die zweite, „entsprechende“ Aussage folgt durch Anwendung der ersten Aussage auf $-f$. ■

Satz 10.26 (Spektraldarstellungssatz) *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ hermitesch. Sei E das Spektralmaß von T.*

Sei $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$. Dann gilt

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f \, dE. \tag{10.56}$$

Allgemeiner, ist $g \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine beliebige beschränkte messbare Funktion so dass $g|\sigma(T) = f$, dann ist

$$f(T) = \int_{\mathbf{R}} g \, dE.$$

Beweis. Wegen Korollar 10.24 ist das Integral einer beschränkten messbaren Funktion über $\mathbf{R} \setminus \sigma(T)$ immer $\mathbf{0}$, so dass das Integral über ganz $\mathbf{R}$ immer gleich dem Integral über $\sigma(T)$ ist. Deshalb ist die allgemeinere Aussage äquivalent zu Gleichung (10.56) und es reicht, diese zu beweisen.

Zunächst betrachten wir eine Borel-messbare Teilmenge $M \subseteq \sigma(T)$ und Konstanten c und $d \in \mathbf{R}$.

Als Element von A_T kommutiert $f(T)$ mit $E(M)$ und deshalb ist die Verknüpfung $f(T) \circ E(M) = E(M) \circ f(T)$ hermitesch nach Korollar 9.32 a).

Aus Korollar 10.25 folgt, dass wenn $c \leq f(\lambda) \leq d$ für alle $\lambda \in M$, dann ist

$$cE(M) \leq f(T) \circ E(M) = E(M) \circ f(T) \leq dE(M). \tag{10.57}$$

(Man wende das Korollar auf $f - c$ und $d - f$ an.)

Weil f stetig ist, kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{M_i}$$

auf $\sigma(T)$ finden, so dass

$$s \leq f \leq s + \varepsilon$$

überall auf $\sigma(T)$, und so dass die M_i disjunkt sind und $\sigma(T)$ überdecken.

Denn $f\bigl(\sigma(T)\bigr)$ ist kompakt und somit beschränkt. Man kann diese Menge deshalb mit endlich vielen disjunkten halboffenen Intervallen J_i der Länge ε überdecken, sagen wir für $1 \leq i \leq k$.

Sei a_i das linke Ende von J_i und sei $M_i := f^{-1}(J_i)$. Dann hat die Treppenfunktion

$$s := \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{M_i}$$

die gewünschte Eigenschaft.

Für jeden Summanden $a_i \chi_{M_i}$ von s gilt $a_i \leq f(\lambda) \leq a_i + \varepsilon$ für alle $\lambda \in M_i$, und für jedes i haben wir deshalb nach Ungleichung (10.57), dass

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} a_i \chi_{M_i}\, dE &= a_i E(M_i) \\ &\leq E(M_i) \circ f(T) \\ &\leq (a_i + \varepsilon) E(M_i) = \int_{\sigma(T)} (a_i + \varepsilon) \chi_{M_i}\, dE.\end{aligned}$$

Weil die M_i eine endliche disjunkte Überdeckung von $\sigma(T)$ bilden, ist die Summe der Projektoren $E(M_i)$ größer oder gleich, und deshalb gleich, dem Projektor $E\bigl(\sigma(T)\bigr) = \mathrm{id}_H$.

Also liefert die Summe der k Ungleichungen oben die Gesamtungleichung

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} s\,dE \le f(T) \le \int_{\sigma(T)} s+\varepsilon\,dE = \int_{\sigma(T)} s\,dE + \int_{\sigma(T)} \varepsilon\,dE \\ = \int_{\sigma(T)} s\,dE + \varepsilon E\big(\sigma(T)\big) = \int_{\sigma(T)} s\,dE + \varepsilon\,\mathrm{id}_H\,.\end{aligned}$$

Aus Lemma 10.18 d) erhalten wir aber auch die Ungleichung

$$\int_{\sigma(T)} s\,dE \le \int_{\sigma(T)} f\,dE \le \int_{\sigma(T)} s+\varepsilon\,dE = \int_{\sigma(T)} s\,dE + \varepsilon\,\mathrm{id}_H\,.$$

Aus der Differenz der beiden Ungleichungen erhält man die Abschätzung

$$-\varepsilon\,\mathrm{id}_H \le f(T) - \int_{\sigma(T)} f\,dE \le \varepsilon\,\mathrm{id}_H,$$

woraus sich für jedes $v \in H$ mit $\|v\| = 1$ ergibt, dass

$$-\varepsilon = \langle -\varepsilon v, v\rangle \le \Big\langle \Big(f(T) - \int_{\sigma(T)} f\,dE\Big)(v), v\Big\rangle \le \langle \varepsilon v, v\rangle = \varepsilon.$$

Daraus folgt, mit Lemma 7.22, dass

$$\Big\| f(T) - \int_{\sigma(T)} f\,dE \Big\| \le \varepsilon.$$

Da das für alle $\varepsilon \ge 0$ gilt, ist $\big\|f(T) - \int_{\sigma(T)} f\,dE\big\| = 0$ und $f(T) = \int_{\sigma(T)} f\,dE$ wie behauptet. ■

Der Spektraldarstellungssatz erlaubt es, das stetige Funktionalkalkül auf alle beschränkte messbare Funktionen zu erweitern.

Lemma und Definition 10.27 *Sei $(X,\mathcal{R})$ ein messbarer Raum und sei $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Wir setzen*

$$\mathcal{M}(X,\mathbf{K}) := \{\, f\colon X \longrightarrow \mathbf{K} \mid f \text{ beschränkt und messbar} \}$$

und versehen diesen Raum mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup_{x\in X} \big|f(x)\big|.$$

Dies ist tatsächlich eine Norm auf $\mathcal{M}(X,\mathbf{K})$ und macht $\mathcal{M}(X,\mathbf{K})$ mit den üblichen algebraischen Operationen und mit der konstanten Funktion **1** *als Einselement zu einer kommutativen Banachalgebra.*

Wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, dann ist $\mathcal{M}(X,\mathbf{K})$ eine C^*-Algebra mit der komplexen Konjugation von Funktionen als Involution.

Beweis. Lemma 0.32 (in Kombination mit Definition 0.62 im komplexen Fall) zeigt, dass $\mathcal{M}(X, \mathbf{K})$ unter allen arithmetischen Operationen abgeschlossen ist und deshalb eine offensichtlich kommutative Algebra mit $\mathbf{1}$ als Einselement bildet.

Dass $\| \ \|$ eine Norm ist, die $\mathcal{M}(X, \mathbf{K})$ zu einer normierten Algebra macht, ist sehr einfach nachzuprüfen, auf die gleiche Weise wie für $\mathcal{C}(X, \mathbf{K})$ in Satz 8.57. Auch wie dort sieht man ein, dass jede Cauchyfolge von beschränkten messbaren Funktionen punktweise und sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die messbar ist nach Lemma 0.32 e) und die, wie man sich leicht überzeugt, automatisch beschränkt ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz.

Das zeigt, dass $\mathcal{M}(X, \mathbf{K})$ eine Banachalgebra ist, und wenn $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, so ist die komplexe Konjugation offensichtlich eine Involution auf $\mathcal{M}(X, \mathbf{K})$, wie man direkt nachprüfen kann. In diesem Fall ist $\mathcal{M}(X, \mathbf{K})$ also ein C^*-Algebra.
■

Satz 10.28 *Sei H ein komplexer Hilbertraum. Sei $T \in \operatorname{End} H$ ein hermitescher Operator und sei E sein Spektralmaß auf der Borel σ-Algebra von $\mathbf{R}$.*

a) *Die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big) &\longrightarrow \operatorname{End} H \\ f &\longmapsto \int_{\sigma(T)} f \, dE \end{aligned}$$

ist ein reeller Algebrahomomorphismus mit $\eta(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_H$.

b) *η ist stetig. Für jedes $f \in \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ gilt sogar*

$$\big\|\eta(f)\big\| \leq \|f\| \,. \tag{10.58}$$

c) *Für jedes $f \in \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ ist $\eta(f)$ hermitesch.*

d) *Auf $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ stimmt η mit dem stetigen Funktionalkalkül überein, und insbesondere ist*

$$T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}_{\mathbf{R}} \, dE. \tag{10.59}$$

e) *Sei $\{ f_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine beschränkte Folge aus $\mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, die punktweise konvergiert, und sei f die Grenzwertfunktion mit*

$$f(\lambda) = \lim_{n \to \infty} f_n(\lambda) \qquad \text{für jedes } \lambda \in \sigma(T).$$

Dann gilt

$$\Big(\int_{\sigma(T)} f\,dE\Big)(v) = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_{\sigma(T)} f_n\,dE\Big)(v) \tag{10.60}$$

für jedes $v \in H$.

Wir bemerken zum Schluß, dass nur Teil d) wesentlich davon abhängt, dass das Spektralmaß E gerade das Spektralmaß des Operators T ist und dass der messbare Raum $\sigma(T)$ ist.

Alle anderen Teile gelten für beliebige Spektralmaße auf einem beliebigen messbaren Raum. Dazu beachte man einfach beim Lesen, dass die Beweise dieser Teile nur Eigenschaften verwenden, die alle Spektralmaße besitzen.

Beweis. a): Aus Lemma 10.18 und den Eigenschaften eines Spektralmaßes folgt sofort, dass η reell-linear ist und dass

$$\eta(\mathbf{1}) = \int_{\sigma(T)} dE = E\big(\sigma(T)\big) = \mathrm{id}_H\,.$$

Wir müssen nur noch beweisen, dass für zwei beschränkte messbare Funktionen auf $\sigma(T)$ gilt

$$\int_{\sigma(T)} fg\,dE = \int_{\sigma(T)} f\,dE \circ \int_{\sigma(T)} g\,dE. \tag{10.61}$$

Wir bemerken zuerst, dass Gleichung (10.61) gilt, wenn f und g charakteristische Funktionen von Borelmengen M und N sind, denn

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} \chi_M\chi_N\,dE &= \int_{\sigma(T)} \chi_{M\cap N}\,dE\\ &= E(M\cap N)\\ &= E(M)\circ E(N) \qquad\qquad \text{nach Definition 10.3 c)}\\ &= \int_{\sigma(T)} \chi_M\,dE \circ \int_{\sigma(T)} \chi_N\,dE.\end{aligned}$$

Beide Seiten von (10.61) hängen bilinear von f und g ab, und deshalb, weil die Gleichung für charakteristische Funktionen gilt, gilt sie auch für beliebige Treppenfunktionen als f und g.

Nun seien f und g nichtnegative beschränkte messbare Funktionen. Wir finden dann monoton steigende Folgen $\{\, s_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ und $\{\, t_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$f = \sup_{n\in\mathbf{N}} s_n \qquad \text{und} \qquad g = \sup_{n\in\mathbf{N}} t_n.$$

Wir beachten, dass für jede feste nichtnegative beschränkte messbare Funktion h die Folgen $\{ s_n h \}_{n\in\mathbf{N}}$ und $\{ ht_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ monoton steigend sind und es gilt

$$fh = \sup_{n\in\mathbf{N}} s_n h \qquad \text{und} \qquad hg = \sup_{n\in\mathbf{N}} ht_n.$$

Aus Lemma 10.18 e) folgt, dass die operatorwertigen Integrale jede dieser Folgen von Funktionen punktweise gegen das Integral der jeweiligen Supremumsfunktion konvergiert.

Daraus können wir schließen, da (10.61) für jedes Paar von Funktionen s_n und t_m gilt, dass für jedes feste m mit t_m in der Rolle von h oben

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(T)} ft_m\,dE &= \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} s_n t_m\,dE \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{\sigma(T)} s_n\,dE \circ \int_{\sigma(T)} t_m\,dE \Big) \\
&= \Big(\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} s_n\,dE \Big) \circ \int_{\sigma(T)} t_m\,dE \\
&= \int_{\sigma(T)} f\,dE \circ \int_{\sigma(T)} t_m\,dE,
\end{aligned}$$

wo hier natürlich *punktweise Konvergenz* der durch die Integrale definierten Operatoren gemeint ist.

Gleichung (10.61) gilt also für f und jedes t_m, und eine nochmalige Anwendung von Lemma 10.18 e) auf die gleiche Art, diesmal mit f in der Rolle von h, ergibt, da $\int_{\sigma(T)} f\,dE$ stetig ist, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(T)} fg\,dE &= \lim_{m\to\infty} \int_{\sigma(T)} ft_m\,dE \\
&= \lim_{m\to\infty} \Big(\int_{\sigma(T)} f\,dE \circ \int_{\sigma(T)} t_m\,dE \Big) \\
&= \int_{\sigma(T)} f\,dE \circ \Big(\lim_{m\to\infty} \int_{\sigma(T)} t_m\,dE \Big) \\
&= \int_{\sigma(T)} f\,dE \circ \int_{\sigma(T)} g\,dE,
\end{aligned}$$

wo wieder in den Grenzwertübergängen punktweise Konvergenz zu verstehen ist.

Also gilt Gleichung (10.61) für jedes Paar von nichtnegativen beschränkten messbaren Funktionen. Jede sonstige beschränkte messbare Funktion zerlegt sich als die Differenz ihres positiven und negativen Anteils, und diese sind beschränkt, messbar und nichtnegativ.

Wieder weil (10.61) auf beiden Seiten bilinear ist, folgt aus der Gültigkeit für die positiven und negativen Anteile auch die Gültigkeit für ihre Differenz, also für beliebige Paare von beschränkten messbaren Funktionen.

b): Für jedes $f \in \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ und für jedes $v \in H$ mit $\|v\| = 1$ gilt nach Definition von $\eta(f) = \int_{\sigma(T)} f\, dE$, dass

$$\begin{aligned}\big|\langle \eta(f)(v), v\rangle\big| &= \Big|\int_{\sigma(T)} f\, dE_v\Big| \le \int_{\sigma(T)} \|f\|\; dE_v = \|f\|\, E_v\big(\sigma(T)\big)\\ &= \|f\|\,\langle E\big(\sigma(T)\big)(v), v\rangle = \|f\|\,\langle \mathrm{id}_H(v), v\rangle = \|f\|\,\|v\|^2 = \|f\|\,,\end{aligned}$$

woraus nach Lemma 7.22 folgt, dass

$$\big\|\eta(f)\big\| \le \|f\|\,,$$

wie in (10.58) behauptet.

c) gilt nach Lemma 10.18; das Integral einer reellwertigen Funktion bezüglich eines Spektralmaßes ist immer ein hermitescher Operator.

d) ist die Aussage des Spektraldarstellungssatzes 10.26.

e): Sei $\|f_n\| \le C$ für jedes $n \in \mathbf{N}$.

Dann ist offenbar auch $\|f\| \le C$, und f ist automatisch messbar. Als beschränkte messbare Funktion ist f auf jeden Fall integrierbar bezüglich des Spektralmaßes.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$T_n := \int_{\sigma(T)} f - f_n\, dE = \int_{\sigma(T)} f\, dE - \int_{\sigma(T)} f_n\, dE.$$

Wir haben zu zeigen, dass für jedes $v \in H$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} T_n(v) = 0.$$

Betrachten wir die Folge von Funktionen

$$g_n := (f - f_n)^2.$$

Man beachte, dass aus Teil a) folgt, dass

$$\int_{\sigma(T)} g_n\, dE = \int_{\sigma(T)} (f - f_n)^2\, dE = T_n \circ T_n.$$

Die Funktionen g_n sind messbar, konvergieren punktweise auf $\sigma(T)$ gegen $\mathbf{0}$, und wir haben die Abschätzung $\|g_n\| \le 4C^2$ für jedes n.

Weil die konstante Funktion mit Wert $4C^2$ integrierbar ist bezüglich des endlichen Maßes E_v für jedes $v \in H$, können wir aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz 0.46 schließen, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left\|T_n(v)\right\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \langle T_n(v), T_n(v)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle (T_n \circ T_n)(v), v\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} g_n \, dE_v \\ &= \int_{\sigma(T)} \lim_{n\to\infty} g_n \, dE_v \\ &= \int_{\sigma(T)} 0 \, dE_v \\ &= 0\end{aligned}$$

für jedes v, d.h., $\lim_{n\to\infty} T_n(v) = \mathbf{0}$ wie gewünscht. ■

Notation 10.29 Der soeben bewiesene Satz 10.28 liefert, wie wir sehen, eine schöne Erweiterung unseres bisherigen Funktionalkalküls zu beliebigen beschränkten messbaren Funktionen auf dem Spektrum eines hermiteschen Operators, und diese Erweiterung wird gegeben durch die Integration bezüglich des Spektralmaßes des Operators.

Um für dieses ***messbare Funktionalkalkül*** eine handlichere Notation zu haben, als die etwas umständlichen und platzverschwenderischen Integralausdrücke, übernehmen wir die bisherige Funktionsnotation $f(T)$ auch für beschränkte messbare Funktionen f, d.h., wenn T ein hermitescher Operator auf einem komplexen Hilbertraum H ist und wenn E sein Spektralmaß ist, setzen wir

$$f(T) := \int_{\sigma(T)} f \, dE$$

für jede Funktion $f \in \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$.

Auf Grund von Teil d) von Satz 10.28 steht dies nicht in Widerspruch zu unserer bisherigen Verwendung der Notation $f(T)$.

Lemma 10.30 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und seien S und T hermitesche Operatoren auf H. Sei E das Spektralmaß von T.*

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

a) S kommutiert mit T;

b) S kommutiert mit allen Projektoren $E(M)$ des Spektralmaßes E;

c) S kommutiert mit $\int_{\sigma(T)} f\,dE$ für jede Funktion $f \in \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wenn S mit T kommutiert, dann kommutiert S auch mit $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$ und somit nach Lemma 10.21 h) auch mit jedem Projektor $E_\lambda := P_{T-\lambda\,\mathrm{id}_H}$ der Spektralschar von T. Nach dem letzten Absatz in der Aussage von Satz 10.13 kommutiert S mit jedem Projektor des Spektralmaßes E.

b) $\Rightarrow$ c): Wir betrachten die Familie $\mathcal{K}$ aller Funktionen $f \in \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, für die gilt

$$S \circ \Big(\int_{\sigma(T)} f\,dE\Big) = \Big(\int_{\sigma(T)} f\,dE\Big) \circ S. \tag{10.62}$$

$\mathcal{K}$ ist offensichtlich ein reeller Untervektorraum von $\mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, und weil S stetig ist, kann man aus Satz 10.28 e) sehr leicht schließen, dass $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist unter punktweiser Konvergenz beschränkter Funktionenfolgen.

Nach Voraussetzung gilt Gleichung (10.62) für alle charakteristischen Funktionen χ_M von Borelmengen M, und weil $\mathcal{K}$ ein reeller Vektorraum ist gilt diese Gleichung auch für alle Treppenfunktionen.

Da jede beschränkte nichtnegative messbare Funktion das Supremum einer monoton steigenden und deshalb ebenfalls beschränkten Folge nichtnegativer Treppenfunktionen ist, und da $\mathcal{K}$ unter der punktweisen Konvergenz solcher Folgen abgeschlossen ist, kommutiert S mit dem Integral jeder nichtnegativen beschränkten messbaren Funktion, und schließlich mit dem Integral jeder beschränkten messbaren Funktion, da jede solche Funktion eine Differenz von zwei nichtnegativen ist.

D.h., $\mathcal{K} = \mathcal{M}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, wie behauptet.

c) $\Rightarrow$ a) folgt sofort aus der Tatsache, dass $T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}_R\,dE$ das Integral einer beschränkten messbaren Funktion ist. ■

Mit Satz 10.28 haben wir etwas mehr erreicht, als nur das stetige Funktionalkalkül aus Kapitel 9 zu einem stetigen Algebrenhomomorphismus auf einer größeren Banachalgebra zu erweitern.

Diese Erweiterung hat nämlich einen neuen Charakter und eine neue wichtige Eigenschaft, denn sie ist sowohl stetig in der Normtopologie wie auch, nach Teil e) von Satz 10.28, in der Topologie der punktweisen Konvergenz!

Dazu passt auch folgende Charakterisierung der Banachalgebra $\mathcal{M}(X, \mathbf{R})$ für kompakte metrische Räume X.

Lemma 10.31 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathrm{End}\,H$ ein hermitescher Operator. Sei X ein kompakter metrischer Raum.*

Dann ist $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ dicht in $\mathcal{M}(X, R)$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz.

Es gilt sogar, dass jede Funktion aus $\mathcal{M}(X, R)$ sich als den punktweisen Limes einer beschränkten *Folge von Funktionen aus $\mathcal{C}(X, R)$ schreiben lässt.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ haben wir eine „Auswertungsabbildung" $f \mapsto f(x)$ auf $\mathcal{M}(X, R)$, und die Topologie der punktweisen Konvergenz ist die Initialtopologie der Familie aller Auswertungsabbildungen.

Sei $\varphi \colon \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Abbildung. Wenn f_1, f_2, …, f_k Funktionen aus $\mathcal{M}(X, R)$ sind, so dass jedes f_i der punktweise Limes einer Folge $\{ f_{in} \}_{n \in \mathbf{N}}$ von stetigen Funktionen ist, dann ist $\varphi \circ (f_1, \dots, f_k)$ wegen der Stetigkeit von φ der punktweise Limes der Folge von stetigen Funktionen $\big\{ \varphi \circ (f_{1n}, \dots, f_{kn}) \big\}_{n \in \mathbf{N}}$. D.h., $\overline{\mathcal{C}(X, R)}$, die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{C}(X, R)$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz, ist abgeschlossen unter der Anwendung beliebig-stelliger stetiger Funktionen.

Wir zeigen zuerst, dass jede messbare charakteristische Funktion der punktweise Limes einer Folge von stetigen Funktionen ist.

Dazu sei $\mathcal{R}$ die Familie aller Borelmengen von X, deren charakteristische Funktion punktweiser Limes einer Folge von stetigen Funktionen ist.

Wir behaupten, dass $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra ist.

Sicher ist $X \in \mathcal{R}$, denn $\chi_X \equiv 1$ ist stetig.

Wenn $\{ M_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare Familie von Mengen aus $\mathcal{R}$ ist, dann ist

$$M := \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n \in \mathcal{R}.$$

Denn für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$L_n := \bigcup_{k=0}^{n} M_k.$$

Weil

$$\chi_{L_n} = \max(\chi_{M_0}, \dots, \chi_{M_n})$$

und die Maximumsfunktion stetig ist, ist jedes $\chi_{L_n} \in \overline{\mathcal{C}(X, R)}$, und weil

$$\chi_M = \sup_{n \in N} \chi_{L_n} = \lim_{n \to \infty} \chi_{L_n}$$

ist auch $\chi_M \in \overline{\mathcal{C}(X, R)}$ und $M \in \mathcal{R}$.

Jede Differenz $M \setminus N$ von zwei Mengen aus $\mathcal{R}$ gehört zu $\mathcal{R}$ weil

$$\chi_{M \setminus N} = \chi_M (1 - \chi_N)$$

eine stetige Funktion von χ_M und χ_N ist.

Also ist $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra. Wir zeigen als Nächstes, dass jede abgeschlossene Teilmenge von X zu $\mathcal{R}$ gehört, und daraus folgt dann, dass alle offenen Mengen zu $\mathcal{R}$ gehören und dass $\mathcal{R}$ die Borel σ-Algebra ist, wie behauptet.

Sei d die Metrik von X. Wie üblich definieren wir für jedes $x \in X$ und für jede Teilmenge $M \subseteq X$ die Entfernung von x zu M als

$$d(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y).$$

Man beachte, dass $d(x, M) = 0$ genau dann, wenn $x \in \overline{M}$.

Sei $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei ξ_ε die stetige Funktion

$$\xi_\varepsilon(x) := \max\Bigl(1 - \frac{d(x, A)}{\varepsilon}, 0\Bigr).$$

Diese Funktion ist 1 genau auf A, weil genau dort die Entfernung zu A Null ist. Für jeden Punkt $x \notin A$ ist $\xi_\varepsilon(x) = 0$ für alle $\varepsilon \leq d(x, A)$.

Für jede Folge $\varepsilon_n \to 0$ konvergiert aus diesem Grund die Folge von stetigen Funktionen $\{\, \xi_{\varepsilon_n} \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ punktweise gegen χ_A.

Das zeigt, dass $\chi_A \in \overline{\mathcal{C}(X, R)}$, und deshalb, wie schon erwähnt, enthält $\mathcal{R}$ jede Borelmenge, und jede messbare charakteristische Funktion gehört zu $\overline{\mathcal{C}(X, R)}$.

Weil eine Linearkombination von Werten stetig von diesen Werten abhängt, gehört auch jede Linearkombination von charakteristischen Funktionen, also jede Treppenfunktion, zu $\overline{\mathcal{C}(X, R)}$.

Lemma 0.43 besagt, dass jede nichtnegative messbare Funktion der punktweise Limes einer Folge von Treppenfunktionen ist. Also enthält $\overline{\mathcal{C}(X, R)}$ alle nichtnegativen beschränkten messbaren Funktionen, und weil jede beschränkte messbare Funktion f die Differenz $f_+ - f_-$ von zwei nichtnegativen beschränkten messbaren Funktionen ist und die Differenz stetig von den Argumenten abhängt, ist *jede* Funktion aus $\mathcal{M}(X, R)$ der punktweise Limes einer Folge von Treppenfunktionen und gehört somit zu $\overline{\mathcal{C}(X, R)}$.

Damit sind wir fertig mit der Hauptaussage. Die Zusatzaussage lässt sich leicht daraus herleiten.

Sei $f \in \mathcal{M}(X, \mathbf{R})$ der punktweise Limes der Folge $\{\, f_n \,\}_{n \in \mathbf{N}}$ aus $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$, die nicht unbedingt beschränkt sein muss. Die Funktion f ist aber beschränkt und es gibt deshalb eine Zahl $C > 0$, so dass $\bigl|f(x)\bigr| \leq C$ für alle $x \in X$.

Die Funktionen

$$f_n' := \max\bigl(\min(f_n, C), -C\bigr)$$

sind alle stetig, da die f_n und die Maximums- und Minimumsfunktionen stetig sind. Die f_n' bilden nach Konstruktion eine beschränkte Folge, und diese Folge konvergiert auch punktweise gegen f, weil alle Werte von f im Intervall $[-C, C]$ liegen.

Damit haben wir nachgewiesen, dass jede beschränkte messbare Funktion auf X sogar der punktweise Limes einer *beschränkten* Folge von stetigen Funktionen ist. ∎

Definition 10.32 Sei H ein komplexer Hilbertraum, und sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ seine Borel σ-Algebra.

Wir sagen, dass ein Spektralmaß E auf $\mathcal{B}$ mit Werten in $\operatorname{End} H$ ***kompakten Träger*** hat, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ gibt, so dass $E(K) = \mathrm{id}_H$.

Wir nennen jede solche kompakte Menge K ***einen Träger*** von E.

Man beachte, dass wenn K ein kompakter Träger von E ist, dann ist auch jede größere kompakte Menge $L \supseteq K$ ein kompakter Träger von E, da $E(L) \geq E(K)$ und $E(K) = \mathrm{id}_H$ schon der größtmögliche Projektor ist.

Korollar 10.33 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ ein hermitescher Operator.*

Das Spektralmaß von T ist das einzige Spektralmaß E mit kompaktem Träger auf der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbf{R}$, für das gilt

$$T = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{id}_R \, dE. \tag{10.63}$$

(Man beachte, dass dieses Integral einer unbeschränkten *Funktion einen Sinn ergibt, denn E hat einen kompakten Träger K und für die Integrale im Sinne von Definition 10.18 gilt $\int_{\mathbf{R}} \mathrm{id}_R \, dE = \int_K \mathrm{id}_R \, dE$.Auf K ist id_R beschränkt, so dass das Integral immer existiert.)*

Insbesondere gibt es nur ein Spektralmaß auf $\mathcal{B}$, für das Satz 10.28 gilt.

Beweis. Sei E ein Spektralmaß auf $\mathcal{B}$ mit kompaktem Träger K, für das (10.63) gilt. Wir können dann auch schreiben

$$T = \int_K \mathrm{id}_R \, dE,$$

und E ist auch ein Spektralmaß auf den Borelteilmengen von K.

Nach der Bemerkung am Ende von Definition 10.32 können wir K vergrößern, wenn notwendig, und so wählen, dass $K \supseteq \sigma(T)$.

Weil jedes Spektralmaß Eigenschaft 10.28 a) erfüllt, gilt für jedes Polynom p auf K, dass ja nichts anderes ist, als eine Linearkombination von Potenzen von $\mathrm{id}_R |K$ in der Algebra $\mathcal{M}(K, \mathbf{R})$, die Beziehung

$$p(T) = \int_K p \, dE$$

(man beachte, dass das ausdrücklich auch für das Polynom **1** gilt). Hier ist $p(T)$ die dem Polynom p entsprechende Linearkombination von Potenzen von T, aber nach Lemma 9.16 a) ist es auch die Anwendung von p auf T im stetigen Funktionalkalkül.

Die Polynome auf K bilden eine reelle Unteralgebra von $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$, die Punkte trennt (das tut schon das Polynom $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} |K)$ und **1** enthält. Aus dem Satz von Stone-Weierstraß folgt, dass die Polynome eine in der Normtopologie dichte Unteralgebra von $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ bilden.

Sowohl das Funktionalkalkül wie auch die Zuordnung $f \longmapsto \int_K f\, dE$ sind in der Normtopologie stetig. Für das Integral ist dies die Aussage von Satz 10.28 b), und für das Funktionalkalkül, das ja in Wirklichkeit nur von $f|\sigma(T)$ abhängt, ist es trotzdem auch richtig, wenn wir es auf die Norm von ganz $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ beziehen, denn diese ist zwar nicht gleich der Norm von $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, aber weicht in der für die Stetigkeit günstigen Richtung ($\geq$) von ihr ab.

Deshalb gilt

$$f(T) = \int_K f\, dE$$

für jedes $f \in \mathcal{C}(K, \mathbf{R})$.

Nach Satz 10.28 d) gilt die entsprechende Aussage auch, wenn wir K durch die kleinere Menge $\sigma(T)$ und E durch das Spektralmaß von T ersetzen, das wir zur Unterscheidung hier mit E_T bezeichnen wollen. Daraus folgt

$$\int_K f\, dE = \int_{\sigma(T)} f\, dE_T \tag{10.64}$$

für jedes $f \in \mathcal{C}(K, \mathbf{R})$.

Jede Funktion aus $\mathcal{M}(K, \mathbf{R})$ ist nach Lemma 10.31 der punktweise Limes einer beschränkten Folge von Funktionen aus $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$, und die Integrale verhalten sich nach Satz 10.28 e) stetig auch bezüglich solcher Konvergenz. Folglich gilt (10.64) für *alle* beschränkten messbaren Funktionen auf K.

Angewendet auf die charakteristischen Funktionen der Borelmengen M von K sagt uns Gleichung (10.64), dass für jede solche Menge

$$E(M) = \int_K \chi_M\, dE = \int_{\sigma(T)} \chi_M\, dE_T = E_T\big(M \cap \sigma(T)\big).$$

Daraus folgt erstens, dass E und E_T auf Borelteilmengen von $\sigma(T)$ übereinstimmen, und zweitens, als Korollar dazu, dass $\sigma(T)$ auch ein Träger für E ist, weshalb E und E_T auch außerhalb $\sigma(T)$ übereinstimmen (und beide $\mathbf{0}$ sind). Folglich ist $E = E_T$, was zu zeigen war. ■

Wir haben also jetzt ein neues und eindeutig bestimmtes *messbares* Funktionalkalkül entwickelt, das das stetige Funktionalkalkül erweitert. Das stetige Funktionalkalkül war eine Isometrie zwischen $\mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$ und der vom hermiteschen Operator T erzeugten reellen Banachalgebra $A_T^{\mathbf{R}}$, während das messbare Funktionalkalkül keine Isometrie mehr ist und noch nicht einmal injektiv sein muss. Ihr Bild ist natürlich größer als $A_T^{\mathbf{R}}$, ist aber immer noch eine kommutative reelle Banachalgebra bestehend aus hermiteschen Operatoren, die mit T kommutieren.

Was haben wir damit eigentlich gewonnen? Eine schöne Anwendung ist die Fähigkeit, mit dem neuen Funktionalkalkül Eigenwerte von anderen Spektralwerten unterscheiden zu können.

Satz 10.34 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \operatorname{End} H$ ein hermitescher Operator.*

Sei E das Spektralmaß von T und sei $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) *Genau dann ist $\lambda \in \rho(T)$, wenn es eine offene Menge $U \ni \lambda$ gibt mit $E(U) = \mathbf{0}$.*

b) *Genau dann ist λ ein Eigenwert von T, wenn*

$$E\big(\{\,\lambda\,\}\big) \neq \mathbf{0},$$

und in diesem Fall ist $E\big(\{\,\lambda\,\}\big)$ die orthogonale Projektion auf den Eigenraum von T zum Eigenwert λ.

c) *Isolierte Elemente λ von $\sigma(T)$ sind Eigenwerte.*

Beweis. a):Wenn $\lambda \notin \sigma(T)$, dann ist $\mathbf{R} \setminus \sigma(T)$ eine offene Menge um λ, für die nach Korollar 10.24 gilt, dass $E\big(\mathbf{R} \setminus \sigma(T)\big) = \mathbf{0}$.

Umgekehrt, sei U eine offene Menge um λ mit $E(U) = \mathbf{0}$, und sei $\varepsilon > 0$ mit

$$(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \subseteq U.$$

Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ die messbare Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 1/(t-\lambda), & \text{wenn } t \notin U; \\ 0, & \text{wenn } t \in U. \end{cases}$$

Diese Funktion ist beschränkt, denn $|t - \lambda| \geq \varepsilon$ außerhalb von U, und deshalb ist $\big|f(t)\big| \leq 1/\varepsilon$ für alle $t \notin U$ und natürlich auch für alle $t \in U$.

Es gilt $f \cdot (\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \lambda) = (\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \lambda) \cdot f \equiv 1$ überall auf $\mathbf{R} \setminus U$, und aus dem messbaren Funktionalkalkül erhalten wir, weil $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \lambda)(T) = T - \lambda \, \mathrm{id}_H$ und weil $E(U) = \mathbf{0}$, dass

$$\begin{aligned} f(T) \circ (T - \lambda \, \mathrm{id}_H) = (T - \lambda \, \mathrm{id}_H) \circ f(T) &= \int_{\sigma(T)} f \cdot (\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \lambda) \, dE \\ &= \int_{\sigma(T) \setminus U} f \cdot (\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \lambda) \, dE = \int_{\sigma(T) \setminus U} 1 \, dE = \int_{\sigma(T)} 1 \, dE = \mathrm{id}_H \, . \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $T - \lambda \, \mathrm{id}_H$ invertierbar ist und somit $\lambda \in \rho(T)$.

b): Sei $V = \operatorname{Ker}(T - \lambda \, \mathrm{id}_H)$ der Eigenraum von T zum Eigenwert λ, und sei P die orthogonale Projektion auf V. Die Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert von T, wenn $V \neq \{ 0 \}$ oder gleichbedeutend, wenn $P \neq \mathbf{0}$.

Weil die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} - \lambda$ bei λ verschwindet, folgt aus Lemma 10.23, dass

$$(T - \lambda \, \mathrm{id}_H) \circ E\big(\{ \lambda \}\big) = \mathbf{0},$$

so dass $\operatorname{Bild} E\big(\{ \lambda \}\big) \subseteq \operatorname{Ker}(T - \lambda \, \mathrm{id}_H) = \operatorname{Bild} P$.

Weil $E\big(\{ \lambda \}\big)$ und P Projektoren sind, bedeutet das nach Lemma 10.1 e), dass $E\big(\{ \lambda \}\big) \leq P$. Wir zeigen noch die umgekehrte Ordnungsbeziehung.

T wirkt auf $\operatorname{Bild} P$ durch Multiplikation mit λ, und das können wir auch durch die Gleichung $T \circ P = \lambda P$ ausdrücken.

Diese Gleichung lässt sich verallgemeinern, denn nach Lemma 9.34 gilt für jedes $f \in \mathcal{C}\big(\sigma(T), \mathbf{R}\big)$, dass V im Eigenraum von $f(T)$ zum Eigenwert $f(\lambda)$ enthalten ist, d.h., dass

$$f(T) \circ P = f(\lambda) P. \tag{10.65}$$

Wenn diese Gleichung für die Glieder einer beschränkten Folge $\{ f_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ von stetigen Funktionen gilt, die punktweise gegen eine beschränkte messbare Funktion f konvergiert, dann gilt die Gleichung offensichtlich auch für f, denn auf der rechten Seite konvergiert $\big\{ f_n(\lambda) \big\}$ gegen $f(\lambda)$, und auf der linken Seite konvergiert die Operatorenfolge $\big\{ f_n(T) \big\}$ punktweise gegen $f(T)$ nach Satz 10.28 e).

Nach Lemma 10.31 ist aber jede beschränkte messbare Funktion f auf $\sigma(T)$ der punktweise Limes einer beschränkten Folge von stetigen Funktionen, und somit gilt (10.65) für jede beschränkte messbare Funktion, insbesondere für $f := \chi_{\{ \lambda \}}$.

Deshalb ist

$$E\big(\{ \lambda \}\big) \circ P = \chi_{\{ \lambda \}}(T) \circ P = \chi_{\{ \lambda \}}(\lambda) P = 1 \cdot P = P,$$

woraus nach Lemma 10.1 e) folgt, dass $P \leq E\big(\{ \lambda \}\big)$.

Also ist $E\big(\{\lambda\}\big) = P$ und λ ist ein Eigenwert von T genau dann, wenn $E\big(\{\lambda\}\big) \neq \mathbf{0}$.

c): Wenn λ ein isolierter Punkt von $\sigma(T)$ ist, dann ist $\chi_{\{\lambda\}}$ stetig auf $\sigma(T)$. Weil aber das stetige Funktionalkalkül eine Isometrie und somit injektiv ist, ist $E\big(\{\lambda\}\big) = \chi_{\{\lambda\}}(T) \neq \mathbf{0}$ und λ somit ein Eigenwert. ■

Korollar 10.35 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator auf H und E sein Spektralmaß.*

Dann ist $\sigma(T)$ der kleinste kompakte Träger von E.

Beweis. Das Korollar folgt sofort aus Satz 10.34, denn wenn $K \subseteq \sigma(T)$ ein kompakter Träger für E ist, dann ist $U := \mathbf{R} \setminus K$ eine offene Menge mit $E(U) = \mathbf{0}$, und Satz 10.34 a) besagt, dass $\mathbf{R} \setminus K \subseteq \rho(T)$.

Folglich ist $K = \sigma(T)$. ■

An dieser Stelle beenden wir die Untersuchung der Spektraltheorie stetiger hermitescher Operatoren T auf einem komplexen Hilbertraum H.

Wir haben für die Beschreibung des Spektrums dieser Operatoren und für die Untersuchung der mit T kommutierenden weiteren hermiteschen Operatoren auf H ein schönes Funktionalkalkül entwickelt, das es erlaubt, beliebige beschränkte messbare Funktionen definiert auf $\sigma(T)$ auch auf den Operator anzuwenden.

Leider reicht die Zeit nicht aus, diese Theorie fortzusetzen, denn wie sich herausstellt, hat sie trotz ihrer Schönheit und Eleganz nicht so bedeutende Anwendungen, wie man zunächst erwarten würde. Der Grund dafür ist, dass viele Operatoren, die bei Anwendungen der Funktionalanalysis in der Theorie der Differentialgleichungen und in der Quantenmechanik auftreten, zwar die Symmetrieeigenschaften der hermiteschen Operatoren aufweisen, aber nicht beschränkt sind!

Da nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz (Satz 7.20) die Eigenschaft eines linearen Endomorphismus, seine eigene Adjungierte zu sein, schon impliziert, dass er stetig ist, kann das nur passieren, wenn der Operator nicht auf ganz H definiert ist.

Aber solche Operatoren kommen, wie gesagt, in Anwendungen überwiegend vor und es gibt für sie eine geeignete und leider etwas umfangreiche Anpassung und Verallgemeinerung der bisher entwickelten Spektraltheorie, die uns noch einige Wochen beschäftigen könnte, wenn wir die Zeit dafür hätten.

In einem kleinen Anhang werden wir wenigstens eine stark komprimierte Skizze dieser Theorie erläutern.

Anhang A

Die Spektraltheorie unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren auf Hilberträumen

Das in Kapitel 10 entwickelte messbare Funktionalkalkül für hermitesche Operatoren auf Hilberträumen hat schöne Anwendungen in der Theorie der Integralgleichungen, zum Beispiel, aber diese Anwendungen sind nur deshalb möglich, weil die dort auftretenden durch Integrale definierten Operatoren stetig sind, wie es unsere bisherige Theorie verlangt.

Das trifft aber für *Differentialoperatoren*, die auch in der Quantentheorie eine wichtige Rolle spielen, leider nicht zu, wie wir gleich an einem Beispiel klar machen werden. Auch ohne ein spezielles Beispiel durchzurechnen leuchtet es ein, dass bei einem Funktionenraum aus stetigen oder messbaren Funktionen nicht jede Funktion differenzierbar sein muss, und dass auch beschränkte Funktionen, die differenzierbar sind, unbeschränkte Ableitungen haben können.

Trotzdem ist es möglich, die stetige Spektraltheorie auf diese Situation anzupassen. Die Lösung, die wir in diesem Anhang skizzieren wollen, basiert auf einen klugen Trick: wir erweitern die stetige hermitesche Spektraltheorie aus Kapitel 10 zu unitären Operatoren, was ganz einfach geht, und benutzen dann eine Transformation, die so genannte ***Cayley Transformation***, um unbeschränkte nicht überall definierte hermitesche Operatoren in beschränkte und überall definierte unitäre Operatoren zu verwandeln, auf die wir die unitäre Spektraltheorie dann anwenden können.

Beispiel A.1 Sei H der komplexe Hilbertraum $L^2\big([0,1],\mathbf{C}\big)$. Auf H definieren wir eine (partiell definierte) lineare Abbildung D durch die Vorschrift

$$D\big([f]\big) := \Big[i\frac{dg}{dt}\Big],$$

falls es eine Funktion $g \sim f \in \mathcal{L}^2\big([0,1],\mathbf{C}\big)$ gibt, so dass g fast überall differenzierbar ist.

Es gibt bekanntlich stetige aber nirgends differenzierbare Funktionen auf $\mathbf{R}$, und diese können nicht durch Abänderung auf einer Nullmenge fast überall differenzierbar gemacht werden. Das bedeutet, dass D nicht für jedes Element von $L^2\big([0,1],\mathbf{C}\big)$ definiert ist.

Dort wo die Abbildung D definiert ist, verhält sie sich aber offensichlich linear.

Sie hat auch eine gewisse Symmetrieeigenschaft, denn wenn f und g, sagen wir, 1-periodische differenzierbare Funktionen auf $\mathbf{R}$ sind (oder differenzierbare Funktionen auf $[0,1]$ mit $f(0)=f(1)$ und $g(0)=g(1)$), so folgt durch partielle Integration, dass

$$\begin{aligned}
\langle D(f), g\rangle &= \int_0^1 i\frac{df}{dt}\cdot\overline{g}\,dt \\
&= i\int_0^1 \frac{df}{dt}\cdot\overline{g}\,dt \\
&= if(1)g(1) - if(0)g(0) - i\int_0^1 f\cdot\frac{d\overline{g}}{dt}\,dt \\
&= 0 + \int_0^1 f\cdot\overline{\Big(i\frac{dg}{dt}\Big)}\,dt \\
&= \langle f, D(g)\rangle.
\end{aligned}$$

Dennoch ist D, auch für schöne Funktionen von der eben vorgeschlagenen Art, nicht stetig, denn wenn wir D z.B. auf die periodischen differenzierbaren Funktionen

$$f_n(t) := \exp(2\pi int)$$

anwenden, so finden wir $\|f_n\| = 1$ für jedes n, aber

$$\big(D(f_n)\big)(t) = i\frac{d\exp(2\pi int)}{dt} = -2\pi n\exp(2\pi int),$$

d.h., $D(f_n) = -2\pi n f_n$ und hat Norm $2\pi n$, und dies ist unbeschränkt für $n\in\mathbf{N}$.

Dennoch ist der Operator in diesem Beispiel von großer Bedeutung für Anwendungen, und wir wollen überlegen, wie man ihn trotz seiner „Mängel“ mit der Spektraltheorie behandeln kann.

Das ist zumindest möglich für Operatoren T, die auf einer *dichten* Teilmenge von H definiert sind und im wesentlichen die angegebene Symmetrieeigenschaft besitzen (man muss ein bisschen mehr verlangen, als nur dass diese Eigenschaft zu gelten hat, wann immer die in ihr vorkommenden Ausdrücke definiert sind).

Die Idee besteht darin, auf T die stetige Funktion

$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

anzuwenden, die für reelle z als Wert den Quotienten zweier konjugierter komplexer Zahlen liefert, die nicht reell sind und deshalb verschieden sind. Dieser Quotient hat also immer Betrag 1, ist aber nicht gleich 1.

Die Anwendung auf einen „hermiteschen" Operator T liefert den Operator

$$U_T := (T - i\,\mathrm{id}_H)(T + i\,\mathrm{id}_H)^{-1},$$

der *unitär* ist, und der bei dicht definiertem T *überall* definiert ist, wie wir sehen werden.

Dieser unitäre Operator heißt die ***Cayley Transformierte*** von T und ihr Spektrum ist eng mit dem Spektrum von T verbunden, aber auch leicht mit einer Abwandlung der Spektraltheorie für beschränkte Operatoren zu untersuchen. Wir beginnen die folgenden Erläuterungen deshalb mit dem zuletzt genannten Punkt, der Spektraltheorie für unitäre Operatoren.

Die Anwendung der Spektraltheorie für beschränkte hermitesche Operatoren auf beschränkte unitäre Operatoren wird ermöglich durch folgenden

Satz A.2 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $U \in \operatorname{End} H$ ein unitärer Operator. Dann gibt es einen hermiteschen Operator $T \in \operatorname{End} H$ mit*

$$\sigma(T) \subseteq [-\pi, \pi]$$

und so, dass

$$U = \exp(iT) = \cos T + i \sin T. \tag{A.1}$$

Der Beweis dieses Satzes ist nicht trivial, und verwendet die Reihenentwicklungen der Arcus Funktionen und als Hilfssatz das so genannte Lemma von Wecken.

„Der Spektralsatz für unitäre Operatoren fällt uns jetzt als reife Frucht in den Schoß," schreibt Heuser[1] an dieser Stelle.

[1] Heuser, *Funktionalanalysis*, 2. Auflage, S. 563.

Korollar A.3 (Spektralsatz für unitäre Operatoren) *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei U ein unitärer Operator auf H. Dann gibt es ein Spektralmaß E mit Träger $[-\pi, \pi]$, so dass*

$$U = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda}\, dE = \int_{[-\pi,\pi]} \cos\lambda\, dE + \int_{[-\pi,\pi]} i \sin\lambda\, dE. \tag{A.2}$$

Ferner, für jede stetige Funktion $f\colon \sigma(U) \longrightarrow \mathbf{C}$ ist

$$f(U) = \int_{[-\pi,\pi]} f(e^{i\lambda})\, dE. \tag{A.3}$$

Jetzt betrachten wir lineare Operatoren auf Hilberträumen, die nicht überall definiert sein müssen und die auch nicht stetig sein müssen.

Definition A.4 Sei H ein komplexer Hilbertraum. Eine lineare Abbildung T definiert auf einem Untervektorraum von H mit Werten in H nennen wir einen ***linearen Operator in*** H. Wir führen die Standardnotation D_T ein für den Definitionsbereich von T.

Ein linearer Operator T in H heißt ***dicht definiert***, wenn

$$\overline{D_T} = H,$$

das heißt ganz wörtlich, wenn D_T dicht in H ist. Wir werden in der Regel dicht definierte Operatoren betrachten wollen.

Wir nennen T ***abgeschlossen***, wenn sein Graph $\Gamma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $H \times H$ ist.[2]

Wenn T abgeschlossen ist und wenn D_T abgeschlossen ist, dann besagt der Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 2.20, dass T stetig ist, aber wenn D_T nicht abgeschlossen ist, auch wenn D_T dicht aber ungleich H ist, kann T unbeschränkt sein und trotzdem eine abgeschlossene Abbildung sein.

Sind S und T zwei lineare Operatoren in H, so nennen wir T eine ***Erweiterung*** von S, und schreiben

$$S \subset T,$$

wenn $\Gamma(S) \subseteq \Gamma(T)$, oder in anderen Worten, wenn $D_S \subseteq D_T$ und $T|D_S = S$.

Wir wollen jetzt nachschauen, wie die hermitesche Eigenschaft für nicht überall definierte Operatoren formuliert werden kann.

---

[2] Diese Definition weicht geringfügig von unserer früheren Definition 2.18 ab, weil dort davon ausgegangen wurde, dass die Abbildung überall definiert war. Die frühere Definition würde hier also nur verlangen, dass $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist in $D_T \times H$, und das ist nicht gemeint.

Definition A.5 Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein dicht definierter linearer Operator in H. Wir setzen

$$D^t := \left\{ w \in H \;\middle|\; \exists w^t \in H \text{ mit } \langle T(v), w \rangle = \langle v, w^t \rangle \ \forall v \in D_T \right\}. \tag{A.4}$$

Offensichtlich ist D^t ein komplexer Untervektorraum von H.

Weil D_T dicht ist in H und weil das innere Produkt stetig ist, ist w^t eindeutig bestimmt durch w, falls es überhaupt existiert (zwei Kandidaten für w^t hätten gleiche innere Produkte mit Vektoren aus der dichten Teilmenge D_T von H, also mit allen Vektoren in H, und müssten deshalb gleich sein).

Deshalb gibt es eine wohldefinierte Abbildung T^t definiert auf D^t, die jedem $w \in D^t$ das eindeutig bestimmte zugehörige w^t zuordnet. Man prüft leicht nach, dass diese Abbildung $\mathbf{C}$-linear ist. Wir nennen sie den ***adjungierten Operator*** zu T oder die ***Adjungierte*** von T.

Statt D^t nennen wir den Definitionsbereich von T^t passend zur allgemeinen Notation D_{T^t}.

Natürlich wenn T überall definiert und stetig ist, ist T^t gleich der Adjungierten von T im „klassischen" Sinn von Definition 7.9.

Lemma A.6 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein dicht definierter linearer Operator in H.*

Dann ist T^t abgeschlossen.

Beweis. Sei $\{ w_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge aus D_{T^t} und sei $\{ w^t \}_{n \in \mathbf{N}}$ die Folge der wie in (A.4) entsprechenden Elemente zu den w_n, d.h.,

$$w_n^t := T^t(w_n) \qquad \text{für jedes } n \in \mathbf{N}.$$

.

Sei $(w, w^t) \in H \times H$ ein Element, so dass

$$\lim_{n \to \infty} w_n = w \qquad \text{und} \qquad \lim_{n \to \infty} w_n^t = w^t.$$

Zu zeigen ist, dass $w^t = T^t(w)$. Das folgt aber sofort aus der Stetigkeit des inneren Produkts, denn für jedes $v \in D_T$ gilt

$$\langle T(v), w \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle T(v), w_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle v, w_n^t \rangle = \langle v, w^t \rangle$$

und das ist die definierende Bedingung, die zeigt, dass $T^t(w) = w^t$. ■

Lemma A.7 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein abgeschlossener dicht definierter linearer Operator in H.*

Dann ist T^t dicht definiert und es gilt $(T^t)^t = T$.

Beweis. Die Teilmenge

$$\Gamma(T) := \left\{ \big(v, T(v)\big) \;\middle|\; v \in D_T \right\}$$

ist nach Voraussetzung abgeschlossen in $H \times H = H \oplus H$, und $H \oplus H$ ist ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle.$$

Man beachte, dass

$$\begin{aligned} \big(\Gamma(T)\big)^{\perp} &= \left\{ (u, w) \in H \oplus H \;\middle|\; \langle v, u \rangle + \langle T(v), w \rangle = 0 \text{ für alle } v \in D_T \right\} \\ &= \left\{ (u, w) \in H \oplus H \;\middle|\; \langle v, -u \rangle = \langle T(v), w \rangle \text{ für alle } v \in D_T \right\} \\ &= \left\{ (u, w) \in H \oplus H \;\middle|\; w \in D_{T^t} \text{ und } u = -T^t(w) \right\} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Aus Lemma 6.14 d) folgt, dass D_{T^t} genau dann dicht ist in H, wenn $(D_{T^t})^{\perp} = \{ 0 \}$. Aus obiger Beschreibung von $\big(\Gamma(T)\big)^{\perp}$ sieht man, dass für einen Vektor $v \in H$ genau dann $v \perp D_{T^t}$, wenn $(0, v) \perp \big(\Gamma(T)\big)^{\perp}$, und das ist genau dann der Fall, wenn

$$(0, v) \in \Big(\big(\Gamma(T)\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = \Gamma(T)$$

(da $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist).

Weil T linear ist, ist das nur möglich, wenn $v = 0$, und das bedeutet, wie wir gesehen haben, dass T^t dicht definiert ist.

Wir wissen schon aus Lemma A.6, dass T^t abgeschlossen ist.

Sei $U \colon H \oplus H \longrightarrow H \oplus H$ die lineare Abbildung $(u, w) \mapsto (w, -u)$. Man beachte, dass $U \circ U$ einfach die Negation $(u, w) \mapsto (-u, -w)$ ist.

U ist unitär, wie man direkt nachprüfen kann, und deshalb gilt für jeden Untervektorraum $V \subseteq H \oplus H$, dass

$$\big(U(V)\big)^{\perp} = U(V^{\perp}).$$

Gleichung (A.5) zeigt, dass für dicht definierte abgeschlossene Operatoren T der Graph des adjungierten Operators gegeben ist durch

$$\Gamma(T^t) = U\Big(\big(\Gamma(T)\big)^{\perp}\Big).$$

Wenden wir dies auf die ebenfalls dicht definierte und abgeschlossene Abbildung T^t anstelle von T an, so finden wir, dass

$$\begin{aligned}
\Gamma\big((T^t)^t\big) &= U\Big(\big(\Gamma(T^t)\big)^{\perp}\Big) \\
&= U\bigg(\Big(U\Big(\big(\Gamma(T)\big)^{\perp}\Big)\Big)^{\perp}\bigg) \\
&= U\bigg(U\Big(\Big(\big(\Gamma(T)\big)^{\perp}\Big)^{\perp}\Big)\bigg) \\
&= U\Big(U\big(\Gamma(T)\big)\Big) \\
&= -\Gamma(T) \\
&= \Gamma(T)
\end{aligned}$$

weil T linear ist.

Das zeigt, dass $(T^t)^t = T$. ∎

Lemma A.8 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein dicht definierter linearer Operator in H, so dass auch T^t dicht definiert ist.*

Dann ist $T \subset (T^t)^t$.

Beweis. Nach Definition von T^t gilt für jedes $v \in D_T$ und für jedes $w \in D_{T^t}$ die Beziehung

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^t(w)\rangle,$$

und wiederum nach der Definition des adjungierten Operators von T^t bedeutet das, dass jedes $v \in D_T$ zum Definitionsbereich von $(T^t)^t$ gehört und dass $(T^t)^t(v) = T(v)$.

Das ist gerade die Definition davon, dass $T \subset (T^t)^t$. ∎

Definition A.9 Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein linearer Operator in H. Wir nennen T

a) ***symmetrisch***, wenn

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$$

für jedes v und jedes w aus D_T;

b) ***hermitesch***, wenn T dicht definiert ist und $T^t = T$.

Bemerkung A.10 Sei H ein komplexer Hilbertraum.

a) Offensichtlich ist jeder hermitesche Operator in H symmetrisch.

b) Ein dicht definierter Operator T ist genau dann symmetrisch, wenn $T \subset T^t$.

Das folgt direkt aus der Definition des adjungierten Operators und der Bedingung für Symmetrie.

c) Um die Grundeigenschaften zusammenzufassen, jeder hermitescher Operator ist dicht definiert, symmetrisch und nach Lemma A.6 auch abgeschlossen.

Er muss aber nicht beschränkt sein.

Lemma A.11 *Sei H ein komplexer Hilbertraum. Ein hermitescher Operator T auf H hat keine echten symmetrischen Erweiterungen, d.h., wenn T hermitesch und S symmetrisch ist mit $T \subset S$, dann ist $T = S$.*

Beweis. Wenn T ein dicht definierter Operator ist und $T \subset S$, dann ist natürlich S auch dicht definiert, und offenbar ist $S^t \subset T^t$.

Wenn aber T hermitesch ist und S symmetrisch, dann haben wir nach Bemerkung A.10 b)

$$S \subset S^t \subset T^t = T \subset S,$$

woraus offenbar folgt, dass hier überall die Gleichheit gilt und insbesondere $T = S$. ∎

Wir wollen jetzt das Spektralverhalten von symmetrischen und hermiteschen Operatoren näher untersuchen und im Rahmen dieser Untersuchung die schon angekündigte Cayley Transformierte definieren und zeigen, dass sie global definiert ist.

Definition A.12 Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein linearer Operator in H.

Die ***Resolventenmenge*** $\rho(T)$ von T besteht aus allen komplexen Zahlen λ, für die $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ eine Bijektion von D_T auf ganz H ist und

$$(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)^{-1} \colon H \longrightarrow D_T \subseteq H$$

stetig ist.

Wir nennen

$$\sigma(T) := \mathbf{C} \setminus \rho(T)$$

das ***Spektrum*** von T.

Lemma A.13 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein symmetrischer Operator in H.*

Für jedes $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ ist $T - \lambda \,\mathrm{id}_H$ injektiv auf D_T.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbf{C}$. Wenn $T - \lambda \,\mathrm{id}_H$ nicht injektiv ist, dann gibt es einen Vektor $v \neq \mathbf{0} \in D_T$ mit $T(v) = \lambda v$. Wir haben dann

$$\lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \|v\|^2 ,$$

und weil $\|v\| \neq 0$ ist das nur möglich, wenn $\lambda \in \mathbf{R}$. ∎

Hilfssatz A.14 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein symmetrischer Operator in H.*

Für jeden Vektor $v \in D_T$ ist

$$\big\|(T \pm i \,\mathrm{id}_H)(v)\big\|^2 = \big\|T(v)\big\|^2 + \|v\|^2 . \tag{A.6}$$

Beweis. Wir rechnen einfach aus, dass

$$\begin{aligned} \big\|(T \pm i \,\mathrm{id}_H)(v)\big\|^2 &= \langle (T \pm i \,\mathrm{id}_H)(v), (T \pm i \,\mathrm{id}_H)(v) \rangle \\ &= \big\|T(v)\big\|^2 \pm \langle iv, T(v) \rangle \pm \langle T(v), iv \rangle + \|iv\|^2 \\ &= \big\|T(v)\big\|^2 \pm i\big(\langle v, T(v) \rangle - \langle T(v), v \rangle\big) + \|v\|^2 \\ &= \big\|T(v)\big\|^2 + \|v\|^2 , \end{aligned}$$

weil T symmetrisch ist. ∎

Lemma A.15 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator in H.*

Dann sind i und $-i \in \rho(T)$.

Beweis. Nach Lemma A.13 sind $T \pm i \,\mathrm{id}_H$ injektive Operatoren.

Sie sind dicht definiert, weil T dicht definiert ist, und sie sind zueinander adjungiert, wie man leicht nachrechnet, weil T hermitesch ist. Aus Lemma A.6 folgt, dass diese Operatoren abgeschlossene Graphen haben.

Wir behaupten, dass $\mathrm{Bild}(T \pm i \,\mathrm{id}_H)$ für jede Wahl des Vorzeichens abgeschlossen ist. Wenn das nicht der Fall ist, so gibt es eine Wahl des Vorzeichens, eine Folge $\{ v_n \}_{n \in \mathbf{N}}$ aus D_T und einen Vektor $w \in H$, so dass für die gegebene Wahl der Vorzeichens

$$\lim_{n\to\infty} (T \pm i \,\mathrm{id})(v_n) = w \qquad \text{aber} \qquad w \notin \mathrm{Bild}(T \pm i \,\mathrm{id}_H).$$

Die Folge $\left\{ (T \pm i\,\mathrm{id})(v_n) \right\}$ ist aber Cauchy, weil sie in H konvergiert.

Aus Hilfssatz A.14 folgt für jedes $v \in D_T$, dass

$$\left\|(T \pm i\,\mathrm{id}_H)(v)\right\|^2 \geq \|v\|^2 .$$

Angewendet auf die oben gewählten Folgen bedeutet das, dass auch die Folge $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge sein muss, weil ihre Bildfolge $\left\{ (T \pm i\,\mathrm{id})(v_n) \right\}$ Cauchy ist und die Abstände in der Bildfolge größer sind.

Also konvergiert $\{ v_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ in H gegen einen Vektor v. In $H \times H$ konvergiert die Folge $\left\{ \big(v_n, (T \pm i\,\mathrm{id})(v_n)\big) \right\}$ gegen (v, w) und weil $\Gamma(T \pm i\,\mathrm{id}_H)$ abgeschlossen ist, gehört auch (v, w) zum Graphen und w gehört doch zu $\mathrm{Bild}(T \pm i\,\mathrm{id}_H)$.

Also ist $\mathrm{Bild}(T \pm i\,\mathrm{id}_H)$ abgeschlossen. Wir behaupten, dass $T \pm i\,\mathrm{id}_H$ surjektiv ist. Weil das Bild abgeschlossen ist, reicht es zu zeigen, dass sein orthogonales Komplement $\{ 0 \}$ ist.

Sei $w \in \mathrm{Bild}(T \pm i\,\mathrm{id}_H)^\perp$. Dann gilt für alle $v \in D_T = D_{T \pm i\,\mathrm{id}_H}$, dass

$$\langle (T \pm i\,\mathrm{id}_H)(v), w\rangle = 0 = \langle v, \mathbf{0}\rangle.$$

Daraus folgt nach Definition des adjungierten Operators, dass

$$w \in D_{(T \pm i\,\mathrm{id}_H)^t} \qquad \text{und} \qquad (T \pm i\,\mathrm{id}_H)^t(w) = \mathbf{0}.$$

Aber

$$(T \pm i\,\mathrm{id}_H)^t = T^t \mp i\,\mathrm{id}_H = T \mp i\,\mathrm{id}_H$$

und weil diese Abbildung injektiv ist, wie wir am Anfang des Beweises festgestellt haben, ist $w = \mathbf{0}$.

Damit ist gezeigt, dass $T \pm i\,\mathrm{id}_H$ surjektiv ist. Es ist auch injektiv, und hat somit zumindest eine lineare Umkehrabbildung $(T \pm i\,\mathrm{id}_H)^{-1} \colon H \longrightarrow D_T$.

Wegen der Abschätzung $\left\|(T \pm i\,\mathrm{id}_H)(v)\right\|^2 \geq \|v\|^2$ ist $(T \pm i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ auch stetig, und damit gilt nach Definition A.12, dass $\mp i \in \rho(T)$. ■

Bemerkung A.16 Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator in H.

Sei $c \neq 0 \in \mathbf{R}$. Die Operatoren cT und $T - c\,\mathrm{id}_H$ haben offensichtlich den gleichen Definitionsbereich wie T, und man rechnet leicht nach, dass auch sie hermitesch sind.

Korollar A.17 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator in H.*

Dann ist $\sigma(T) \subseteq \mathbf{R}$.

Beweis. Sei $\lambda = a + bi \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, wo $a = \operatorname{Re}\lambda$ und $b = \operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Offensichtlich ist $T - \lambda \operatorname{id}_H$ genau dann surjektiv mit einer stetigen Umkehrabbildung $S\colon H \longrightarrow H$, wenn $(1/b)T - (\lambda/b)\operatorname{id}_H$ surjektiv ist und eine stetige Umkehrabbildung hat, nämlich bS.

Das heißt, $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn $\lambda/b \in \sigma(\frac{1}{b}T)$.

Aber λ/b hat die Gestalt $(a/b) + i$ und gehört genau dann zum Spektrum von $\frac{1}{b}T$, wenn $i \in \sigma\big(\frac{1}{b}(T - a\operatorname{id}_H)\big)$. Weil aber $\frac{1}{b}(T - a\operatorname{id}_H)$ nach Bemerkung A.16 wieder ein hermitescher Operator ist, kann er nach Lemma A.15 i nicht als Spektralwert haben.

Somit ist $\lambda \notin \sigma(T)$. ■

Wir kommen jetzt zur entscheidenden Konstruktion dieses Abschnitts.

Lemma und Definition A.18 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator in H.*

Die Operatoren $T + i\operatorname{id}_H$ und $T - i\operatorname{id}_H$ haben offensichtlich den gleichen Definitionsbereich D_T wie T, und nach Lemma A.15 sind sie surjektiv und haben stetige Umkehrabbildungen.

Daraus folgt, dass

$$U_T := (T - i\operatorname{id}_H) \circ (T + i\operatorname{id}_H)^{-1} \tag{A.7}$$

auf ganz H definiert ist (denn $(T + i\operatorname{id}_H)^{-1}$ ist auf ganz H definiert und auf seinem Bild D_T ist $T - i\operatorname{id}_H$ überall definiert).

Dieser Operator ist unitär im Sinne von Definition 7.19 b). Dazu gehört, dass er stetig ist, surjektiv ist, und invertierbar ist in $\operatorname{End} H$.

U_T heißt die ***Cayley Transformierte*** von T.

Beweis. U_T ist surjektiv, weil $\operatorname{Bild}\big((T + i\operatorname{id}_H)^{-1}\big) = D_T = D_{T - i\operatorname{id}_H}$ und weil $T - i\operatorname{id}_H$ surjektiv ist.

Aus Hilfssatz A.14 folgt, dass für jedes $v \in D_T$ gilt

$$\big\|(T + i\operatorname{id}_H)(v)\big\| = \big\|(T - i\operatorname{id}_H)(v)\big\|,$$

und daraus ergibt sich, dass U_T eine Isometrie (und insbesondere stetig) ist.

Aus Lemma 7.38 und Bemerkung 7.37 können wir nun sofort schließen, dass U_T unitär ist. ■

Lemma A.19 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator in H. Sei U_T seine Cayley Transformierte.*

a) *1 ist kein Eigenwert von U_T.*

b) $\mathrm{id}_H - U_T$ *ist invertierbar als Abbildung*

$$H \longrightarrow \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_H - U_T) = D_T,$$

und es gilt

$$T = i(\mathrm{id}_H + U_T) \circ (\mathrm{id}_H - U_T)^{-1}. \tag{A.8}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_H \pm U_T &= (T + i\,\mathrm{id}_H) \circ (T + i\,\mathrm{id}_H)^{-1} \pm (T - i\,\mathrm{id}_H) \circ (T + i\,\mathrm{id}_H)^{-1} \\ &= \begin{cases} 2T \circ (T + i\,\mathrm{id}_H)^{-1} & \text{für } \mathrm{id}_H + U_T; \\ 2i(T + i\,\mathrm{id}_H)^{-1} & \text{für } \mathrm{id}_H - U_T. \end{cases} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Insbesondere ist $\mathrm{id}_H - U_T$ injektiv mit Bild $D_{T+i\,\mathrm{id}_H} = D_T$, und hat eine Umkehrabbildung mit D_T als Definitionsbereich.

a): Auch $U_T - \mathrm{id}_H$ ist injektiv. Also ist 1 kein Eigenwert von U_T.

b): Nach (A.9) ist $(\mathrm{id}_H - U_T)^{-1} = (1/2i)(T + i\,\mathrm{id}_H)$ und

$$i(\mathrm{id}_H + U_T) \circ (\mathrm{id}_H - U_T)^{-1} = 2iT \circ (T + i\,\mathrm{id}_H)^{-1} \circ (1/2i)(T + i\,\mathrm{id}_H) = T.$$

■

Satz A.20 (Spektralsatz für unbeschränkte hermitesche Operatoren) *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator in H.*

Sei U_T seine Cayley Transformierte und sei E das nach Korollar A.3 dem unitären Operator $-U_T$ zugeordnete Spektralmaß, so dass

$$-U_T = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda}\, dE = \int_{[-\pi,\pi]} \cos\lambda\, dE + \int_{[-\pi,\pi]} i \sin\lambda\, dE.$$

Dann gilt für jedes $v \in D_T$, dass

$$\langle T(v), v\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} \tan\frac{\lambda}{2}\, dE_v = \int_{(-\pi,\pi)} \tan\frac{\lambda}{2}\, dE_v. \tag{A.10}$$

Wir kürzen dies wie üblich ab durch die Schreibweise

$$T = \int_{(-\pi,\pi)} \tan\frac{\lambda}{2}\, dE, \tag{A.11}$$

wobei zu verstehen ist, dass der so im Sinne von Lemma und Definition 10.18 definierte Operator hier nicht global definiert sein muss.

Beweis. Sei S der nach Satz A.2 existente global definierte und stetige hermitesche Operator auf H, so dass

$$-U_T = \exp(iS) = \cos S + i \sin S.$$

E ist das Spektralmaß von S und hat Träger auf $[-\pi, \pi]$, weil $\sigma(S) \subseteq [-\pi, \pi]$.

Weder π noch $-\pi$ ist ein Eigenwert von S, weil sonst nach Lemma 9.34 $e^{\pm\pi i} = -1$ ein Eigenwert von $e^{iS} = -U_T$ wäre, und das kann nicht sein, weil $+1$ nach Lemma A.19 a) kein Eigenwert von U_T ist.

Also können wir aus Satz 10.34 b) schließen, dass $E\big(\{\pm\pi\}\big) = \mathbf{0}$ und somit

$$E\big((-\pi, \pi)\big) = E\big([-\pi, \pi]\big) = \mathrm{id}_H .$$

Sei $v \in D_T = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_H - U_T)$ und sei $w \in H$ mit $v = (\mathrm{id}_H - U_T)(w)$. Nach Gleichung (A.8) ist

$$T(v) = i(\mathrm{id}_H + U_T)(w).$$

Nun sei $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine monoton fallende Folge und sei $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine monoton steigende Folge von Zahlen aus dem offenen Intervall $(-\pi, \pi)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\pi \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \pi,$$

und für jedes n sei

$$P_n := E\big([a_n, b_n]\big).$$

Die Vereinigung der Intervalle $[a_n, b_n]$ ist $(-\pi, \pi)$ und deshalb folgt aus Lemma 10.15 a), dass die Folge von Projektoren $\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ punktweise gegen $E\big((-\pi, \pi)\big) = \mathrm{id}_H$ konvergiert.

Die Funktionen f, g und h gegeben durch

$$f(\lambda) := i\frac{1-e^{i\lambda}}{1+e^{i\lambda}}, \qquad g(\lambda) = 1 + e^{i\lambda}, \qquad \text{und} \qquad h(\lambda) := i(1-e^{i\lambda})$$

sind überall definiert und stetig auf $(-\pi, \pi)$, aber f wird leider unbeschränkt für $\lambda \to \pm\pi$.

Trotzdem, auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a_n, b_n]$ ist f beschränkt, und deshalb sind die Funktionen

$$f_n := \chi_{[a_n, b_n]} f$$

messbar und beschränkt für jedes n.

Sei

$$A_n := \int_{(-\pi,\pi)} f_n \, dE.$$

Wir haben außerdem

$$\mathrm{id}_H - U_T = \int_{(-\pi,\pi)} g\,dE \qquad \text{und} \qquad i(\mathrm{id}_H + U_T) = \int_{(-\pi,\pi)} h\,dE.$$

Nun gilt $f \cdot g = h$ und deshalb

$$f_n \cdot g = \chi_{[a_n,b_n]} \cdot h$$

Nach Anwendung des messbaren Funktionalkalküls erhalten wir daraus

$$A_n \circ (\mathrm{id}_H - U_T) = P_n \circ i(\mathrm{id}_H + U_T).$$

Weil die Operatoren P_n punktweise gegen id_H konvergieren haben wir

$$\begin{aligned} T(v) &= i(\mathrm{id}_H + U_T)(w) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n\big(i(\mathrm{id}_H + U_T)(w)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} A_n\big((\mathrm{id}_H - U_T)(w)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} A_n(v). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\langle T(v), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A_n(v), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{(-\pi,\pi)} f_n\,dE_v = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} i\frac{1-e^{i\lambda}}{1+e^{i\lambda}}\,dE_v.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$i\frac{1-e^{i\lambda}}{1+e^{i\lambda}} = i\left(\frac{e^{-i\lambda/2}}{e^{-i\lambda/2}}\right)\left(\frac{1-e^{i\lambda}}{1+e^{i\lambda}}\right) = \frac{i(e^{-i\lambda/2}-e^{i\lambda/2})}{e^{-i\lambda/2}+e^{i\lambda/2}} = \frac{2\sin(\lambda/2)}{2\cos(\lambda/2)} = \tan\frac{\lambda}{2}.$$

Also haben wir

$$\langle T(v), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} \tan\frac{\lambda}{2}\,dE_v$$

Der Integrand ist links von 0 negativ und rechts von 0 positiv. Weil die linke Seite der Gleichung definiert und endlich ist, und weil die Gleichung für jede Wahl der Folgen $\{\, a_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ und $\{\, b_n \,\}_{n\in\mathbf{N}}$ zu den angegebenen Bedingungen richtig ist, bleiben sogar die Integrale über $[a_n, 0]$ und über $[0, b_n]$ beschränkt und $\tan(\lambda/2)$ ist bezüglich des Maßes E_v auf ganz $(-\pi, \pi)$ integrierbar.

Aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt, wie behauptet, dass

$$\langle T(v), v\rangle = \int_{(-\pi,\pi)} \tan\frac{\lambda}{2}\,dE_v.$$

■

Bemerkung A.21 Falls es Sie stört, das in der Integralformel (A.11) der Integrand nicht wie üblich id_R ist, so lässt sich das einrichten, in dem man die Spektralschar $\{ E_\lambda \}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ des Spektralmaßes E bildet und daraus eine neue Spektralschar $\{ F_\lambda \}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ definiert, durch die Vorschrift

$$F_\lambda := E_{2 \arctan \lambda}.$$

Man kann leicht nachprüfen, dass $\{ F_\lambda \}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ tatsächlich eine Spektralschar ist und dass für das zugehörige Spektralmaß F gilt

$$\langle T(v), v \rangle = \int_{(-\pi,\pi)} \lambda \, dF_v.$$

Zum Schluß wollen wir noch etwas zur Beziehung zwischen den Spektren eines dicht definierten unbeschränkten hermiteschen Operators und seiner Cayley Transformierten sagen.

Die Formel (A.8) könnte man *fast* interpretieren als die Aussage, dass

$$T = f(U_T) \qquad \text{wo} \qquad f(z) = i \frac{1+z}{1-z},$$

wäre es nicht leider der Fall, dass diese Funktion f bei 1 eine Polstelle hat und deshalb nicht auf dem ganzen Spektrum von U_T definiert sein muss.

(Wenn 1 nicht zum Spektrum von U_T gehört, verschwindet dieses Problem und die angegebene Formel ist richtig, wie wir gleich sehen werden, und definiert einen stetigen global definierten hermiteschen Operator.)

Trotzdem gilt für die „Anwendung" von f folgender Spektraler Abbildungssatz.

Satz A.22 *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei T ein hermitescher Operator in H. Sei U_T seine Cayley Transformierte.*

Sei

$$\Sigma(T) := \left\{ i \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \;\middle|\; \lambda \in \sigma(U_T), \lambda \neq 1 \right\}.$$

Dann gilt:

a) $\sigma(T) = \Sigma(T)$.

b) Folgende Bedingungen sind äquivalent:

i) T *ist auf ganz* H *definiert und stetig.*

ii) $\sigma(T)$ *ist kompakt.*

iii) $1 \notin \sigma(U_T)$.

Beweis. a): Aus der Konstruktion von U_T in Lemma und Definition A.18 sehen wir, dass es für jeden Vektor $w \in H$ einen eindeutigen Vektor $v \in D_T$ gibt mit $w = T(v) + iv$, und dass

$$U_T(w) = (T - i\,\mathrm{id}_H)(v).$$

Sei nun $\lambda \neq 1 \in \mathbf{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\big((U_T - \lambda\,\mathrm{id}_H) \circ (T + i\,\mathrm{id}_H)\big)(v) &= (U_T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(w) \\ &= (T - i\,\mathrm{id}_H)(v) - \lambda(T(v) + iv) \\ &= (1-\lambda)T(v) - (i + \lambda i)v \\ &= (1-\lambda)\Big(T(v) - i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\,v\Big).\end{aligned}$$

Weil $T + i\,\mathrm{id}_H$ eine Bijektion zwischen D_T und H ist, ist $U_T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ genau dann eine Bijektion $H \longrightarrow H$, wenn die obigen Ausdrücke in v eine Bijektion $D_T \longrightarrow H$ definieren.

In diesem Fall hat der global definierte stetige Operator $U_T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ nach dem Banachschen Isomorphiesatz eine stetige Umkehrabbildung, $T + i\,\mathrm{id}_H$ auch, weil $-i \in \rho(T)$, und somit hat die Bijektion $(U_T - \lambda\,\mathrm{id}_H) \circ (T + i\,\mathrm{id}_H)$ von D_T nach H eine stetige Umkehrabbildung, und die Division durch $1 - \lambda \neq 0$ ändert daran nichts.

So sehen wir, dass $\lambda \in \rho(U_T)$ genau dann, wenn $i(1+\lambda)/(1-\lambda) \in \rho(T)$.

Natürlich bleibt diese Aussage wahr, wenn wir die Resolventenmenge durch ihr Komplement, dem Spektrum, ersetzen, und das ist die Aussage, die wir beweisen wollten, bis auf die Frage, welche möglichen Spektralwerte $\mu \in \sigma(T)$ sich *nicht* in der Form $\mu = i(1+\lambda)/(1-\lambda)$ für ein komplexes $\lambda \neq 1$ schreiben lassen.

Dieser Ausdruck lässt sich nach λ auflösen mit dem Ergebnis

$$\lambda = \frac{\mu - i}{\mu + i}, \tag{A.12}$$

und dies ist nie 1 und liefert immer einen komplexen Wert λ, außer für $\mu = -i$.

Aber $-i$ kann nicht zum Spektrum eines hermiteschen Operators gehören, und deshalb haben wir tatsächlich keine Spektralwerte von T übersehen.

b), i) $\Rightarrow$ ii): Das Spektrum für womöglich unbeschränkte hermitesche Operatoren, die auf einer dichten Teilmenge D_T von H definiert sind, wird durch die gleichen Kriterien definiert, wie für stetige global definierte Operatoren, und wir wissen aus Satz 8.22 a), dass das Spektrum eines global definierten stetigen Operators immer kompakt ist.

ii) $\Rightarrow$ iii): Durch Auflösung der Formel in der Definition von $\Sigma(T)$ erhalten wir aus Teil a) und Gleichung (A.12), dass bis auf den möglichen Wert 1 das Spektrum von U_T aus den Zahlen $(\mu - i)/(\mu + i)$ besteht für $\mu \in \sigma(T)$.

Dieser Ausdruck ist eine stetige Funktion von μ auf $\sigma(T) \subseteq \mathbf{R}$, und wenn $\sigma(T)$ kompakt ist, so ist auch die Bildmenge $\sigma(U_T) \setminus \{ 1 \}$ kompakt und somit abgeschlossen in $\mathbf{C}$.

Wenn also $1 \in \sigma(U_T)$, dann ist 1 ein isolierter Punkt von U_T und deshalb ein Eigenwert.[3]

Aber Lemma A.19 a) besagt, dass 1 kein Eigenwert von U_T sein kann. Also ist $1 \notin \sigma(U_T)$.

iii) $\Rightarrow$ i): Wenn $1 \notin \sigma(U_T)$, dann ist $U_T - \mathrm{id}_H$ und somit auch $\mathrm{id}_H - U_T$ in $\operatorname{End} H$ invertierbar, mit einer stetigen und global definierten Umkehrabbildung $(\mathrm{id}_H - U_T)^{-1}$.

Formel (A.8) liefert T auf seinem vollen Definitionsbereich als eine Verknüpfung von Operatoren, die im jetzigen Fall alle global definiert und stetig sind. Somit ist T global definiert und stetig. ■

[3]Die Funktion $\chi_{\{1\}}$ ist dann stetig auf $\sigma(U_T)$, und ihr Produkt mit $\mathrm{id}_{\mathbf{C}} - 1$ ist überall 0. Anwendung des ***stetigen*** Funktionalkalküls liefert einen Projektor $P \neq \mathbf{0}$ so dass gilt $(U_T - \mathrm{id}_H) \circ P = \mathbf{0}$, und das zeigt, dass 1 ein Eigenwert ist.