Skriptum zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Bauingenieure und Maschinenbauer im Ergänzungsstudiengang

Prof. Dr. Gordon Wassermann

Sommersemester 2006[1]

[1] aus TEX neu übersetzt im September 2007, jetzt mit Titelblatt, Inhaltsverzeichnis und Abbildungsverzeichnis.

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis im $\mathbf{R}^n$ **1**

1.1 Objekte im $\mathbf{R}^n$ . . . 1

1.1.1 Dreidimensionale Körper . . . 1

1.1.2 Flächen . . . 3

1.1.3 Kurven . . . 6

1.1.4 Funktionen . . . 8

1.2 Wichtige Grundbegriffe . . . 9

1.2.1 Skalarprodukt, euklidische Norm und euklidischer Abstand . . . 10

1.2.2 Konvergenz und Stetigkeit . . . 13

2 Differenzierbare Funktionen **17**

2.1 Erinnerung an Grundkonstruktionen . . . 17

2.1.1 Differentialrechnung in $\mathbf{R}$ . . . 17

2.1.2 Linearformen in $\mathbf{R}^n$ . . . 19

2.2 Differenzierbarkeit im $\mathbf{R}^n$ . . . 20

2.2.1 Definition der Ableitung . . . 20

2.2.2 Der Gradient . . . 26

2.3 Beispiele und Anwendungen . . . 28

2.3.1 Einfache Beispiele . . . 28

2.3.2 Das Lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . 32

2.3.3 Gleichungsdarstellung von Tangentialebenen . . . 34

2.4 Vektorwertige Funktionen . . . 37

2.4.1 Beispiele . . . 37

2.4.2 Differenzierbarkeit für vektorwertige Funktionen . . . 38

2.4.3 Vektorfelder, Divergenz und Rotation . . . 40

3 Kurven **47**

3.1 Kurven und ihre Parametrisierungen . . . 47

3.2 Bogenlänge . . . 52

3.3 Die Krümmung einer Kurve . . . 59

4 Kurvenintegrale **65**
4.1 Kurvenintegrale von skalaren Feldern 65
4.2 Kurvenintegrale von Vektorfeldern 69
4.3 Wegunabhängigkeit 72

5 Mehrfachintegrale **79**
5.1 Doppelintegrale 80
5.1.1 Das Doppelintegral über das Rechteck 81
5.1.2 Normbereiche 82
5.2 Andere Koordinatensysteme 85
5.2.1 Polarkoordinaten 88
5.2.2 Zylinderkoordinaten 90
5.2.3 Kugelkoordinaten 93

6 Flächenintegrale **97**
6.1 Parametrisierte Flächen 97
6.1.1 Parametrisierungen 97
6.1.2 Tangentialebenen und Normalvektoren 101
6.2 Skalare Integrale über Flächen 102
6.2.1 Rotationsflächen und Rotationsvolumina 105
6.3 Der Fluss eines Vektorfeldes 107

7 Integralsätze **117**
7.1 Der Satz von Green und der Satz von Stokes 119
7.2 Die Gauß'schen Integralsätze 123

8 Differentialgleichungen 1. Ordnung **129**
8.1 Was ist eine Differentialgleichung? 130
8.2 Trennung der Variablen 135
8.3 Die Methode der Variation der Konstanten 141
8.4 Spezielle Differentialgleichungen 146
8.4.1 Die Bernoullische Differentialgleichung 146
8.4.2 Homogene (nichtlineare) Differentialgleichungen 147
8.4.3 Bewegung in einem Kraftfeld 148
8.4.4 Die Clairault'sche Differentialgleichung 150

9 Die lineare DGL 2. Ordnung **155**
9.1 Das Superpositionsprinzip 155
9.2 Lösung der homogenen Gleichung 159
9.3 Lösung der inhomogenen Gleichung 169
9.4 Die Eulersche Differentialgleichung 177

10 Lineare DGL Systeme **181**
10.1 Grundeigenschaften 182
10.2 Erinnerungen aus der Eigenwerttheorie 184
10.3 Die Spektralmethode 189

11 Fourierreihen **201**
11.1 Trigonometrische Reihen 202
11.2 Fourierreihen 207
11.3 Das Symmetrieverhalten von Fourierreihen 212
11.4 Das Konvergenzverhalten der Fourierreihe 218

12 Die Wärmeleitungsgleichung **223**
12.1 Lineare partielle Differentialgleichungen 223
12.2 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung 226
12.3 Der Separationsansatz 229
12.4 Lösung der Wärmeleitungsgleichung 233
12.4.1 Schritt I: Erfüllung der Randbedingungen 234
12.4.2 Schritt II: Erfüllung der Anfangsbedingung 236
12.4.3 Schritt III: Erfüllung der inhomogenen Differentialgleichung 238
12.4.4 Zusammensetzen der Teillösungen zu einer Gesamtlösung der Wärmeleitungsgleichung 241
12.5 Anders geartete Randbedingungen 248
12.5.1 Fortsetzung der Randbedingungen 248
12.5.2 Anpassung der weiteren Lösung an homogene Randbedingungen 249

13 Die Wellengleichung **257**
13.1 Anfangs- und Randwertprobleme 257
13.2 Anpassung von Anfangswerten 259
13.3 Lösung der inhomogenen Wellengleichung 260

Abbildungsverzeichnis

1.1 Körper im $\mathbf{R}^3$ 2
1.2 Flächen im $\mathbf{R}^3$ 3
1.3 Die Höhenlinien des Paraboloids aus Abbildung 1.2(c) 4
1.4 Das Hyperboloid aus Abbildung 1.2(d) als Rotationsfläche . . 5
1.5 Eine Parametrisierung des Torus 6
1.6 Die Schraubenlinie 7
1.7 Skalarprodukt und Vektorprodukt 12
1.8 Der Graph einer bei $\mathbf{0}$ unstetigen Funktion auf $\mathbf{R}^2$ 16

2.1 Der Graph der Funktion $f(x) = 2x - x^2$ und ihrer linearen Approximation nahe $x = 0{,}5$ 19
2.2 Die Richtungsableitung 22
2.3 Der Gradient einer Funktion zeigt in die Richtung des schnellsten Anstiegs und ist normal zur Niveaufläche 28
2.4 Tangentialebenen 36
2.5 Besondere Punkte einer Strömung 38
2.6 Die Vektorfelder aus Abbildung 2.5, überlagert mit einem starken nach rechts zeigenden konstanten Vektorfeld. 41
2.7 Ein Sattel 45

3.1 Kurven 49
3.2 Eine stückweise glatte Kurve 51
3.3 Ein Bogenlängenelement 53
3.4 Die Rollkurve 57
3.5 Das Vorzeichen der Krümmung 61

4.1 Die Integration eines Vektorfeldes entlang einer Kurve 69
4.2 Das Vektorfeld $(x^2 - y^2, 2xy)^T$ und der Halbkreis H. 71
4.3 Ein geschlossener Weg in einem konstanten Vektorfeld 73

5.1 Die Konstruktion des Integrals über ein Gebiet in der Ebene . 80
5.2 Normbereiche 83

5.3 krummlinige Koordinaten 86
5.4 Polarkoordinaten 88
5.5 Koordinatensysteme im Raum 93
5.6 Die einzelnen Kugelkoordinaten 94

6.1 Eine parametrisierte Fläche 99
6.2 Der Viertelzylinder 101
6.3 Der Fluss eines Vektorfeldes durch eine Barriere 108
6.4 Das Möbiusband 109
6.5 Der Kegel, die Tangentialvektoren und der Normalenvektor aus Beispiel 6.15 b) 114

7.1 Die Integralsätze in der Ebene 118
7.2 Die Randkurve des Rechtecks 121

8.1 Die Lösungen der Clairault'schen Gleichung $y = xy' + y'^2$. . . 151

11.1 Jean Baptiste Joseph Fourier 202
11.2 Die gleichgerichtete Sinuskurve und ihre ersten vier Fourierpolynome 209
11.3 Eine Sägezahnschwingung und ihre ersten Fourierpolynome . . 212

12.1 Verschiedene Zeitpunkte der Wärmeleitung im ungekühlten Kupferdraht 245
12.2 Verschiedene Zeitpunkte der Wärmeleitung im gekühlten Kupferdraht 247

Kapitel 1

Grundbegriffe der Analysis in mehreren Dimensionen

Weil die wirkliche Welt und die darin vorkommenden von Ingenieuren entworfenen und berechneten Gegenstände nun einmal dreidimensional sind, ist es für Ingenieure unerlässlich, die wesentliche Begriffe und Methoden der mehrdimensionalen Mathematik zu kennen und zu beherrschen. Die Differential- und Integralrechnung im $\mathbf{R}^n$, speziell aber nicht ausschließlich für $n = 2$ oder 3, werden uns in den ersten Kapiteln des Ergänzungskurses beschäftigen.

Unser Ziel ist es, mit Objekten im $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$ mathematisch umgehen zu können, zu lernen, wie man sie mathematisch beschreiben und erfassbar machen kann und wie man ihre für Ingenieuranwendungen wichtigsten Eigenschaften ausrechnen kann.

1.1 Objekte im $\mathbf{R}^n$

Eingebettet im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$ (oder manchmal auch im $\mathbf{R}^2$, gelegentlich auch in höheren Dimensionen, die dann nicht physikalisch zu verstehen sind!) betrachten wir Gegenstände verschiedener Dimensionen (natürlich höchstens von der Dimension des umgebenden Raumes). Die wichtigsten Fälle sind:

1.1.1 Dreidimensionale Körper

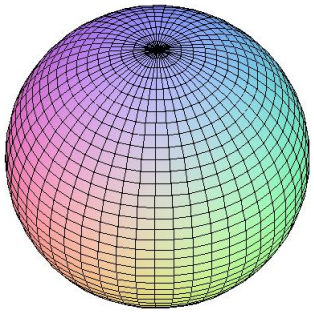
Sie bestehen in der Regel aus Teilgebieten des ganzen dreidimensionalen Raumes. Die bequemste Art, sie mathematisch zu beschreiben, ist mit Hilfe eines Koordinatensystems auf $\mathbf{R}^3$, wozu sich als Erstes die üblichen kartesischen Koordinaten (x, y, z) oder (x_1, x_2, x_3) anbieten. Wie wir später se-

hen werden, kann man aber auch andere Koordinatensysteme einführen, die manchmal (und in passenden, geeigneten Fällen) die Berechnungen erheblich vereinfachen können.

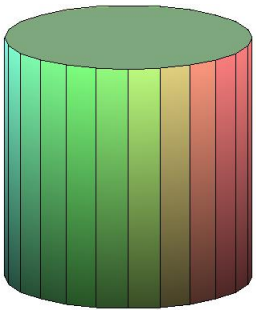
Dreidimensionale Körper beschreibt man durch ein System von ***Ungleichungen*** in den Koordinaten. Zum Beispiel kann man die ***Kugel*** (oder den ***Ball***) von Radius r mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung mathematisch erfassen als die Menge

$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \right\}$$

(warum das klappt wird klar, wenn wir gleich über Entfernungen im $\mathbf{R}^n$ sprechen).



(a) Kugel



(b) Zylinder

Abbildung 1.1: Körper im $\mathbf{R}^3$

Ein ***Zylinder*** von Radius r und Höhe h mit Basis auf der x-y-Ebene wird beschrieben als

$$Z := \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h \right\}.$$

Manche Körper (unter anderem die soeben genannten) kann man auch als ***Rotationskörper*** erzeugen, die entstehen, wenn man ein Gebiet in einer der Koordinatenebenen (z.B., in der x-z-Ebene) im dreidimensionalen Raum um eine der Koordinatenachsen in dieser Ebene dreht oder „rotiert“ (zum Beispiel, um die z-Achse oder um die x-Achse), wodurch der gewünschte Rotationskörper durch die Spur oder die Bahn des sich bewegenden Gebiets gebildet wird.[1]

Wichtige Kenngrößen, die wir für Körper berechnen wollen, sind (unter anderem) ihr Volumen, ihre Masse (auch bei ***inhomogener***, d.h., ungleichmäßiger Massenverteilung), die Lage ihres Schwerpunktes, die vom Körper

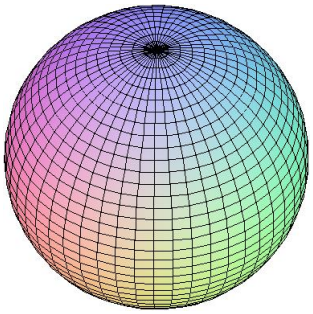
[1] Abbildung 1.4 auf Seite 5, obwohl es darin um eine *Rotationsfläche* und nicht um einen Körper geht, veranschaulicht die Idee dieser Konstruktion.

durch die Gravitation oder durch eine elektrische Ladung ausgehende Gesamtkraft, und viele andere mehr. Manche dieser Berechnungen können für Rotationskörper unter Ausnutzung der Symmetrie vereinfacht durchgeführt werden.

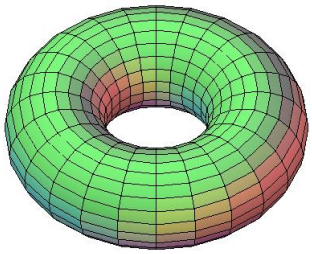
1.1.2 Flächen

Wir interessieren uns auch für ***Flächen*** (zweidimensionale Objekte) eingebettet im $\mathbf{R}^3$. Zum einen bilden sie den ***Rand*** oder die Begrenzung von dreidimensionalen Körpern, aber sie haben auch für sich viele Anwendungen im Ingenieurwesen (man denke zum Beispiel an Parabolspiegel oder an die Hyperboloidform von Kühltürmen).

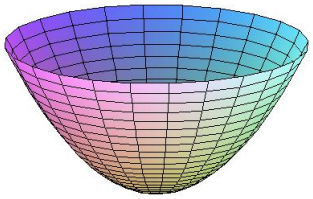
Beispiele wichtiger Flächen sind



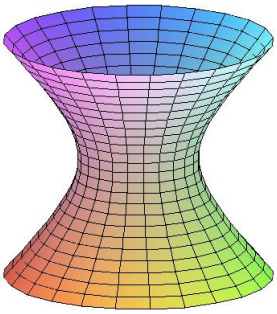
(a) Sphäre



(b) Torus



(c) Paraboloid



(d) einschaliges Hyperboloid

Abbildung 1.2: Flächen im $\mathbf{R}^3$

- Die ***Sphäre*** von Radius r (die Oberfläche der Kugel von Radius r)

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\}$$

- Der ***Torus*** (Doughnut oder Reifenschlauch), ein in Kreisform gebogenes Rohr, dessen Querschnitt auch ein Kreis ist (mit kleinerem Radius als der Radius des gesamten Rohrbogens). Man erhält ihn am bequemsten als Rotationsfläche, wenn man einen Kreis um eine Achse dreht, die außerhalb des Kreises liegt und den Kreis nicht schneidet.

- Das ***Paraboloid***

  $$P := \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 = z \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2-z = 0 \right\}$$

- Das ***einschalige Hyperboloid***

  $$\begin{aligned} H :&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 = z^2+r^2 \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2-z^2 = r^2 \right\} \end{aligned}$$

  (mit $r > 0$).

- und viele andere mehr.

Manche Flächen kann man als Graph einer Funktion von zwei Variablen auf einem Gebiet in der x-y-Ebene erhalten und manche kann man gut begreifen durch Betrachtung Ihrer Höhenlinien (wie in einer topographischen Karte) oder der ***Niveaulinien*** einer geeigneter Funktion auf der Fläche.

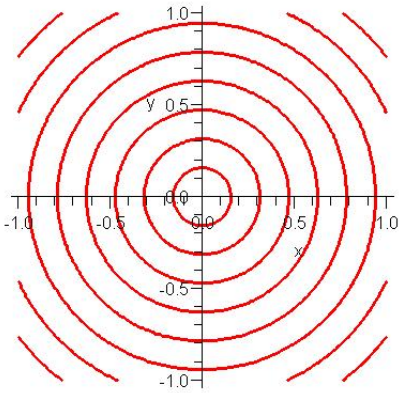


Abbildung 1.3: Die Höhenlinien des Paraboloids aus Abbildung 1.2(c)

Viele Flächen (insbesondere auch alle der oben genannten) kann man (ähnlich wie die Rotationskörper) als ***Rotationsflächen*** erhalten, die entstehen, wenn man ein *Kurvenstück* in einer der Koordinatenebenen (z.B., in der x-z-Ebene) im dreidimensionalen Raum um eine der Koordinatenachsen in dieser Ebene dreht oder „rotiert“, wodurch die gewünschte Rotationsfläche

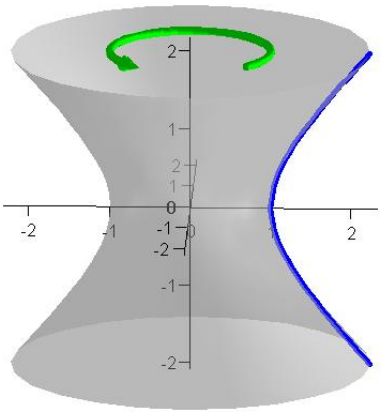


Abbildung 1.4: Das Hyperboloid aus Abbildung 1.2(d) als Rotationsfläche

von dem sich bewegenden Kurvenstück aufgespannt wird (s. Abbildung 1.4). Diese Darstellung vereinfacht, wie schon oben erwähnt, die Berechnung des von der Rotationsfläche umschlossenen Volumens, aber auch die Berechnung der Größe der Oberfläche der Rotationsfläche.

Aber die effektivsten und am weitesten anwendbaren Methoden, um Flächen mathematisch zu erfassen, sind die Angabe einer *Gleichung*, deren Lösungsmenge sie sind (wie in allen Beispielen oben bis auf den Torus), oder die Angabe einer ***Parametrisierung***, d.h., einer Funktion $\mathbf{x}(u, v)$ von zwei Variablen u und v (genannt die ***Parameter***), mit Werten in $\mathbf{R}^3$, so dass die Gesamtheit der Werte die Fläche ausfüllt.

Zum Beispiel, den Torus mit großem Radius R und mit kleinem Radius r kann man durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big), \qquad 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

aufspannen; hier hat u die geometrische Bedeutung eines Drehwinkels um die z-Achse (also des Winkels gemessen entlang dem großen Kreis des Gesamtbogens) und v ist der Drehwinkel um die ***Seele***, die Kreiskurve in der Mitte des Rohrs, gemessen in einem radialen Querschnitt durch das Rohr (in anderen Worten, v ist der Winkel entlang des kleinen Kreises des Querschnitts). Man siehe dazu Abbildung 1.5 auf der nächsten Seite.

Wenn u von 0 bis 2π läuft, bewegt man sich einmal um die Mittelachse, um die sich der gesamte Torus windet. Wenn v von 0 bis 2π läuft, bewegt man sich, in der Ebene aufgespannt von der Mittelachse und dem Radius des großen Kreises, senkrecht zur ersten Drehrichtung einmal um den Torusschlauch. Um den Unterschied noch deutlicher zu machen betrachte man den

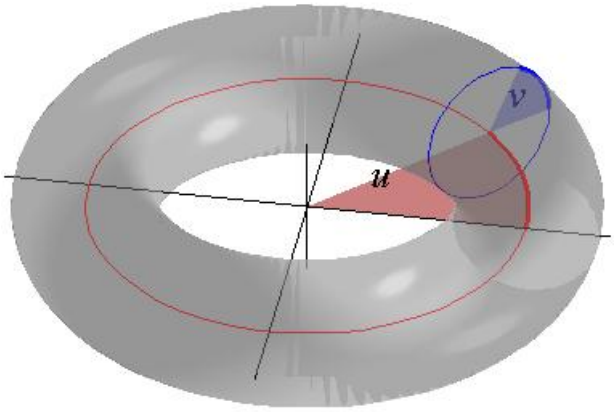


Abbildung 1.5: Eine Parametrisierung des Torus

Torus gebildet durch die Spur der Erde in ihrer Bahn um die Sonne: die u-Richtung in der Torusparametrisierung entspricht der Drehung der Erde um die Sonne, während die v-Richtung der Umrundung der Erde auf einem der Sonne zugewandten Meridian (und seinem Gegenstück auf der anderen Seite) entspricht—damit dieses Gleichnis genau gilt, muss man allerdings die Drehung der Erde um die eigene Achse und die Neigung der Erdachse ignorieren und sich das Meridian als unbewegt vorstellen.

Für Flächen wollen wir unter anderem berechnen können: die Oberfläche (also den Flächeninhalt) der Fläche, den Schwerpunkt einer Fläche, die Tangentialebene und die Normalenvektoren zu der Fläche an einem beliebigen Punkt, den lokalen Krümmungstyp einer Fläche („wie herum“ ist sie gebogen, hat sie Sattelpunkte und wo?), den Fluss eines ***Vektorfeldes*** (eines Kraftfeldes oder einer Strömung) durch die Fläche, und derlei mehr.

1.1.3 Kurven

Auch ***Kurven*** (eindimensionale Objekte) im Raum oder noch einfacher, in der Ebene, sind wichtig in der Ingenieurmathematik. Sie kann man als Idealisierungen von dünnen physikalischen Gegenständen wie Stangen, Drähte oder Seile verwenden, sie begrenzen Flächenstücke, und sie beschreiben die Bahnen oder Pfade bewegter Teilchen und spielen deshalb eine wesentliche Rolle in der Untersuchung von Bewegungsabläufen und ihrer mathematischer

und physikalischer Eigenschaften.

Illustrative Beispiele von Kurven sind etwa Kreise, Kreisbögen und Geraden in der Ebene (und darüber hinaus eine Vielzahl exotischerer Kurven, die wir später kennen lernen werden), oder als Beispiel einer Raumkurve die ***Schraubenlinie*** im $\mathbf{R}^3$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gleichzeitig um eine Achse windet und sich in Richtung der Achse fortbewegt. Diese Kurve erhält ihren Namen deshalb, weil das Gewinde einer Schraube eine ähnliche Form hat.

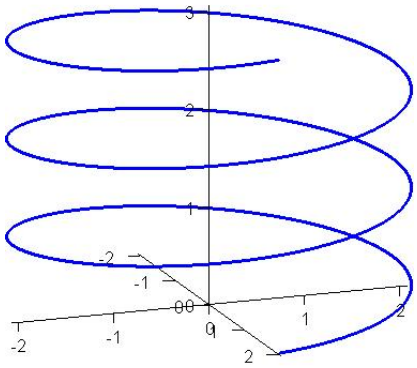


Abbildung 1.6: Die Schraubenlinie

Genau so wie man Flächen im Raum durch eine Gleichung beschreiben kann, kann man Kurven in der Ebene oft auf bequeme Weise durch eine Gleichung beschreiben. Zum Beispiel ist der Kreis von Radius 3 um den Koordinatenursprung im $\mathbf{R}^2$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Raumkurven kann man oft durch ein System von *zwei* Gleichungen beschreiben, aber eine einzelne Gleichung reicht nicht. Die Schraubenlinie in Abbildung 1.6 ist gegeben durch das System von Gleichungen

$$x = 2\cos(2\pi z), \qquad y = 2\sin(2\pi z),$$

aber dies ist nicht unbedingt eine offensichtliche oder besonders nützliche Beschreibung der Kurve.

Für Raumkurven, und für viele Zwecke auch für ebene Kurven, ist eine ***Parametrisierung*** eine geeignetere und bei manchen Berechnungen eine *unerlässliche* Darstellung. Sie ist ähnlich zur auf Seite 5 beschriebenen Parameterdarstellung für Flächen, aber einfacher, da ein einzelner Parameter reicht, um eine Kurve auszufüllen.

Die Parameterdarstellung beschreibt die Kurve als das Bild einer auf einem Intervall oder auf ganz $\mathbf{R}$ definierten Funktion von *einer Variablen*

$$\mathbf{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

mit Werten in $\mathbf{R}^3$ (oder bei ebenen Kurven in $\mathbf{R}^2$).

Für die Schraubenlinie aus Abbildung 1.6 kann man zum Beispiel die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \big(2\cos(2\pi t), 2\sin(2\pi t), t\big)$$

verwenden.

Zu den Berechnungen, die man mit und auf Kurven durchführt, gehören: die Bestimmung der Länge einer Kurve, die Bestimmung ihrer ***Krümmung*** (wie stark sie an verschiedenen Stellen „gebogen“ ist), die Berechnung der Masse, der Gesamtladung oder des Schwerpunktes eines Drahts oder einer Stange, die Berechnung der Arbeit für die Bewegung eines Punktes entlang einer Kurve in einem Kräftefeld.

Zu diesem Themenkreis gehört die Berechnung von ***Wegintegralen*** von skalaren Feldern oder von Vektorfeldern.

1.1.4 Funktionen

Die soeben erwähnten „Felder“ sind nichts anderes als ***Funktionen*** definiert auf einem Gebiet in $\mathbf{R}^2$ oder $\mathbf{R}^3$.

Wir unterscheiden zwischen *reellwertigen Funktionen*, die man auch ***skalare Felder*** nennt, und *vektorwertigen Funktionen*, die man auch ***Vektorfelder*** nennt.

Skalare Felder kommen zum Beispiel vor als Massendichten oder Ladungsdichten, oder als die Höhe eines Punktes über einer Grundebene im Raum oder über einer Basislinie in der Ebene, in Abhängigkeit von der Lage des „Schattens“ dieses Punktes in der Grundebene oder auf der Basislinie. Oft kann man Flächen oder Kurven gut und besonders einfach beschreiben als den Graphen einer solchen „Höhenfunktion“.

Vektorfelder im Raum sind Funktionen von $\mathbf{R}^3$ nach $\mathbf{R}^3$ (oder in der Ebene von $\mathbf{R}^2$ nach $\mathbf{R}^2$), da sie an jeder Stelle in ihrem Definitionsbereich Werte annehmen, die Vektoren sind im gleichen Raum, also mit der gleichen Dimension. Im Raum haben sie also die Gestalt

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Sie kommen in technischen Anwendungen vor in der Gestalt von Kraftfeldern (z.B., das Gravitationsfeld oder ein Magnetfeld) oder von Geschwindigkeitsfeldern von Strömungen.

Ganz allgemein können wir noch Funktionen zwischen verschiedendimensionalen Räumen $\mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ betrachten:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \ldots, x_m) \\ v_2(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}.$$

1.2 Wichtige Grundbegriffe für Punkte, Vektoren und Funktionen

Um zwischen Punkten und Vektoren im Raum unterscheiden zu können, wo es darauf ankommt, werden wir normalerweise die Konvention benutzen, die Koordinaten eines Punktes als ein „Zeilenvektor“ zu schreiben:

$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

und die Koordinaten eines Vektors als ein Spaltenvektor zu schreiben:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

aber da Punkte und Vektoren im gleichen Raum ja Objekte der gleichen Dimensionalität sind, ist es manchmal bequem, nicht so streng zwischen diesen beiden Aspekten zu unterscheiden und Punkte mit ihren Ortsvektoren zu identifizieren, Vektoren mit dem Punkt, auf den sie vom Koordinatenursprung aus hinweisen.

Das erlaubt uns, wenn es hilfreich ist, Begriffe die für Punkte oder für Vektoren definiert sind auch auf die andere Interpretation des gleichen Koordinatentupels anzuwenden.

Auch wenn wir speziell Vektoren meinen ist es manchmal bequemer, die Koordinaten waagerecht als Zeilenvektor hinzuschreiben und den Ausdruck mit einem Exponenten ^{T} (für *transponiert*) zu versehen um kundzutun, dass man eigentlich einen Spaltenvektor meint aber ihn Platz sparend hinschreiben

will. So sind

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

einfach als zwei Schreibweisen für den gleichen *Vektor* zu verstehen.

1.2.1 Skalarprodukt, euklidische Norm und euklidischer Abstand

Wir erinnern hier an ein paar Grundbegriffe aus der analytischen Geometrie.

Definition 1.1 Seien $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ zwei Vektoren im $\mathbf{R}^n$.

a) Wir definieren das ***Skalarprodukt*** von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{1.1}$$

Das Skalarprodukt im $\mathbf{R}^n$ wird auch ***inneres Produkt*** genannt.

b) Wir definieren die ***Norm*** oder die ***Länge*** des Vektors $\mathbf{x}$ als

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Manche Autoren benutzen anstelle der Doppelstriche $\| \ \|$ auch die einfach gestrichte Variante $| \ |$, also die gleiche Notation, wie für den Absolutbetrag.

c) Die ***Entfernung*** von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{y}$ (wenn wir jetzt $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als Punkte auffassen) ist definiert als

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| .$$

Bei Überlegungen, bei denen es nur um einen Größenvergleich zwischen Vektorenlängen oder zwischen Entfernungen geht ist es oft viel bequemer, die Quadratwurzelziehung nicht auszuführen und stattdessen die *Quadrate* der Normen oder der Entfernungen zu vergleichen, die ja in der gleichen Größer- oder Kleinerbeziehung zu einander stehen. Diese Ausdrücke sind einfacher und es läßt sich dementsprechend viel angenehmer mit ihnen rechnen.

Rechenregeln 1.2 (Rechenregeln und geometrische Bedeutung des Skalarprodukts)

Im folgenden seien $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ Vektoren im $\mathbf{R}^n$, und sei a ein Skalar (d.h., eine reelle Zahl). Es gilt:

a) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ (Distributivgesetz)

b) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ (Distributivgesetz)

c) $(a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (a\mathbf{y})$ (Assoziativgesetz)

d) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ (Kommutativgesetz)

e) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0$ (Definition der Norm)

f) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos(\alpha)$, wo α der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist.

g) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, d.h. in Worten, wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ***orthogonal*** sind, das bedeutet, senkrecht auf einander stehen.

h) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Rechenregeln 1.3 (für die Norm)

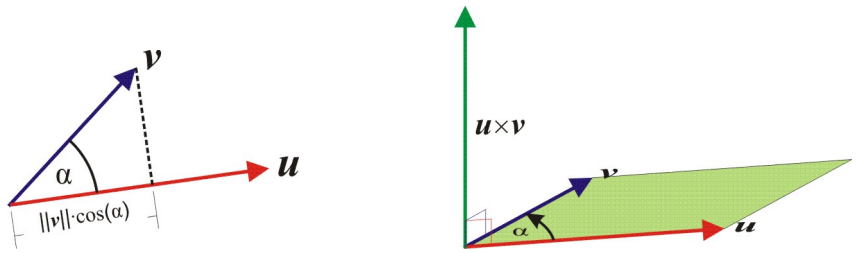
a) Für jeden Vektor $\mathbf{x}$ ist
$$\|\mathbf{x}\| \geq 0$$
und $\|\mathbf{x}\| = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) Für jeden Skalar $a \in \mathbf{R}$ und für jeden Vektor $\mathbf{x}$ ist
$$\|a\mathbf{x}\| = |a| \, \|\mathbf{x}\| \, .$$

c) (Die ***Dreiecksungleichung***)

Für je zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$
und die Gleichheit gilt nur, wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ parallel sind.

Die ersten beiden Eigenschaften folgen sofort aus der Definition der Norm. Die Dreiecksungleichung kann man mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung beweisen (aber wir führen das hier nicht aus).



(a) Das Skalarprodukt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$

(b) Das Vektorprodukt: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \alpha$

Abbildung 1.7: Skalarprodukt und Vektorprodukt

Neben dem ***Skalarprodukt***, das wie der Name sagt, als Produkt von zwei *Vektoren* einen *Skalar* liefert, gibt es in drei Dimensionen auch ein ***Vektorprodukt*** (auch ***Kreuzprodukt*** genannt), das als Produkt von zwei Vektoren wieder einen *Vektor* liefert, der auf die beiden gegebenen Vektoren senkrecht steht:

Definition 1.4 Seien $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ zwei Vektoren im $\mathbf{R}^3$. Wir definieren das ***Vektorprodukt*** von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Bemerkung 1.5 Die Formel für das Vektorprodukt zweier Vektoren ist ein bisschen kompliziert, aber man muss sie zum Glück nicht auswendig lernen.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ die Einheitsvektoren in den drei Koordinatenrichtungen. Dann kann man das Vektorprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ausdrücken als folgende vektorwertige Determinante:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & x_1 & y_1 \\ \mathbf{e}_2 & x_2 & y_2 \\ \mathbf{e}_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

(wie man leicht nachrechnet).

Rechenregeln 1.6 (Rechenregeln und geometrische Bedeutung des Vektorprodukts)

Im folgenden seien $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ Vektoren im $\mathbf{R}^n$, und sei a ein Skalar (d.h., eine reelle Zahl). Es gilt:

a) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}$ (Distributivgesetz)

b) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z} = \mathbf{x}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}$ (Distributivgesetz)

c) $(a\mathbf{x})\times\mathbf{y} = a(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = \mathbf{x}\times(a\mathbf{y})$ (Assoziativgesetz)

d) $\mathbf{y}\cdot\mathbf{x} = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ (Antikommutativgesetz)

e) Der Vektor $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ steht senkrecht auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ und zeigt in die Richtung, in die eine rechtshändige Schraube sich eindreht (oder ausdreht), wenn man sich $\mathbf{x}$ an den Schraubenkopf befestigt denkt und die Schraube so dreht, das $\mathbf{x}$ durch den kleineren der beiden möglichen Winkel in die Lage von $\mathbf{y}$ gedreht wird.

   Die Richtung kann man auch leicht mit der rechten Hand bestimmen: wenn man den Mittelfinger in Richtung von $\mathbf{x}$ zeigen lässt und den Daumen in Richtung von $\mathbf{y}$, dann weist der Zeigefinger in die Richtung von $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$.

   Die Länge von $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ hängt vom Winkel zwischen den Vektoren ab:

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\sin(\alpha), \tag{1.4}$$

   wo α der (kleinere) Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist.

   Wie man leicht aus der Ebenen Geometrie sieht, ist $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$ die Fläche des von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

   Für diese Begebenheiten siehe Abbildung 1.7(b) auf Seite 12.

f) $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ parallel sind.

g) $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$.

1.2.2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.7 Eine Folge von Punkten

$$\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}) \text{ im } \mathbf{R}^n \qquad (\text{für } k\in\mathbf{N})$$

konvergiert gegen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, wenn für jedes i mit $1\le i\le n$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i,$$

d.h., wenn die Folge *koordinatenweise* gegen $\mathbf{a}$ konvergiert.

Das ist gleichbedeutend damit, dass

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = 0.$$

Wir schreiben dann auch

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$$

oder manchmal als Kürzel hierfür einfach $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$.

Definition 1.8 Sei $\mathbf{f}\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ eine (eventuell nur auf einem Teilgebiet $U \subset \mathbf{R}^n$ definierte) Abbildung, und sei $\mathbf{a}$ ein Punkt im Definitionsbereich von $\mathbf{f}$.

a) Sei $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^m$. Wir sagen

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c},$$

wenn für jede Folge $\mathbf{x}_k$ aus dem Definitionsbereich von $\mathbf{f}$

$$\text{mit} \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a} \qquad \text{gilt} \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{c}.$$

b) $\mathbf{f}$ heißt ***stetig*** im Punkt $\mathbf{a}$, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{a}),$$

d.h., wenn für jede Folge mit $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ gilt $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Die Fälle von stetigen Abbildungen, die uns am meisten interessieren werden, sind die Fälle wo der Quellraum oder der Zielraum die reellen Zahlen sind, d.h., die Fälle wo $m = 1$ (dann haben wir reellwertige Funktionen auf $\mathbf{R}^n$) oder wo $n = 1$ (dann haben wir Raumkurven in $\mathbf{R}^m$).

Bemerkung 1.9 Man kann zeigen, dass jede Verknüpfung (Hintereinanderausführung) von stetigen Abbildungen wieder stetig ist, und dass die binären arithmetischen Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division stetige Funktionen auf $\mathbf{R}^2$ sind (die Division nur an den Stellen, an denen der Quotient definiert ist, d.h., wo der Divisor, also der Nenner, nicht 0 ist).

Daraus und aus der Definition von Stetigkeit folgt, dass die Koordinatenfunktionen auf $\mathbf{R}^n$ stetig sind, dass Polynome in den Koordinaten stetig sind, und dass jede auf $\mathbf{R}$ definierte stetige Funktion, angewendet auf ein Polynom in den Koordinaten, eine stetige Funktion auf $\mathbf{R}^n$ ergibt.

So ist zum Beispiel auch die Norm

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

eine stetige Funktion auf $\mathbf{R}^n$, und Ausdrücke wie $xy \sin x$ oder e^{x+y} definieren stetige Funktionen auf $\mathbf{R}^2$.

Wir werden diese Tatsache immer wieder stillschweigend benutzen, ohne speziell darauf hinzuweisen.

Beispiel 1.10 Beim Rechnen in mehrdimensionalen Räumen ist man oft ein bisschen fixiert auf die einzelnen Koordinaten und wiegt sich dabei in Sicherheit, weil man sich daran erinnert, dass die Konvergenz von Folgen im $\mathbf{R}^n$ ja koordinatenweise definiert ist (vgl. Definition 1.7).

Hier ist Vorsicht geboten, denn das gerade genannte Merkmal bezieht sich nur auf die Koordinaten im *Bildraum*.

Die Konvergenz ist nicht koordinatenweise bestimmt bezüglich der Koordinaten des Quellraums (d.h., des Definitionsbereichs)!

Hier ist ein illustratives Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Diese Funktion ist ein Quotient von Polynomen in den Koordinaten und deshalb überall stetig, außer vielleicht an der einen Stelle $(0,0)$, wo der Nenner verschwindet und wir den Wert von f nicht durch den Bruch darstellen können.

Betrachten wir Folgen $(s_k, 0)$ oder $(0, s_k)$ mit $s_k \neq 0$, die entlang einer der Koordinatenachsen im $\mathbf{R}^2$ gegen $(0,0)$ konvergieren (also mit $s_k \to 0$), so ist für alle diese Punkte eine der beiden Koordinaten 0, deshalb der Zähler im Ausdruck für f gleich 0, und deshalb der Wert von f an jedem Punkt der Folge 0. Diese Werte konvergieren natürlich gegen $0 = f(0,0)$.

Trotzdem ist f nicht stetig, denn für jede reelle gegen 0 konvergente Folge s_k wie oben konvergiert auch die Folge (s_k, s_k) in $\mathbf{R}^2$ gegen $\mathbf{0}$, aber überall auf *dieser* Folge hat f den Wert $s_k^2/(2s_k^2) = 1/2$, und diese Werte konvergieren *nicht* gegen $f(\mathbf{0}) = 0$, sondern gegen $1/2$.

Weil es also eine Folge $\mathbf{x}_k \to \mathbf{0}$ gibt, für die $f(\mathbf{x}_k) \not\to f(\mathbf{0})$, ist f bei $\mathbf{0}$ *nicht* stetig.

Das Verhalten von f erkennt man ganz gut in der Farbabbildung 1.8, die den Graphen von f versehen mit Höhenlinien zeigt. Der Graph ist eine durchgehende Fläche, die aber an der Stelle $\mathbf{0}$ eine Diskontinuität hat. Die x- und y-Koordinatenachsen liegen ganz in der Fläche (die durchgehenden grünen Linien), und wenn man nur entlang der Koordinatenachsen schaut, sieht man kein unstetiges Verhalten.

Aber entlang der Geraden mit Steigung 1 durch den Ursprung in $\mathbf{R}^2$ hat der Graph fast überall die Höhe $\frac{1}{2}$, wie man an der im Graphen liegenden

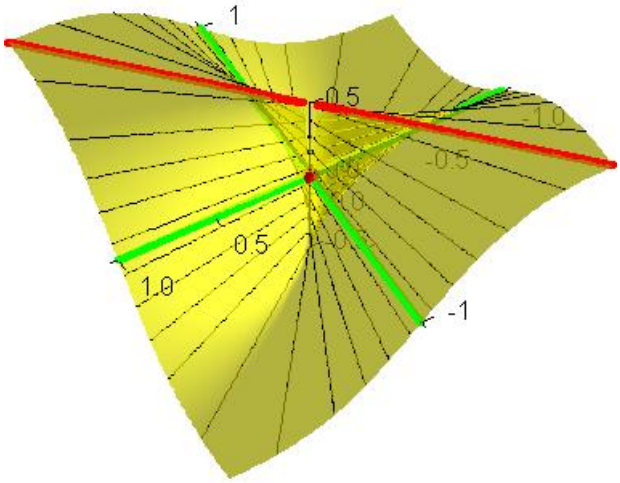


Abbildung 1.8: Der Graph einer bei $\mathbf{0}$ unstetigen Funktion auf $\mathbf{R}^2$

roten Geraden sieht; nur am Ursprung entlang dieser Geraden ist die Höhe 0, und dort macht der Schnitt durch den Graphen einen Sprung, der im Bild zu erkennen ist.

Auch in einem Schwarzweissausdruck kann man die genannten Merkmale gut erkennen — die grünen Linien erscheinen dort hellgrau und die rote ist deutlich als dunkelgraue „Bergkuppe“ zu sehen.

Kapitel 2

Differenzierbare Funktionen im $\mathbf{R}^n$

Unsere nähere Untersuchung der mehrdimensionalen Analysis beginnt mit dem wichtigsten Werkzeug, das uns zur Verfügung steht: die Differentiation.

Im letzten Kapitel hatten wir kurz über den *Stetigkeitsbegriff* für Funktionen mehrerer Veränderlicher gesprochen, aber diese Eigenschaft stellt nur sicher, dass die Funktionen, die wir betrachten, nicht zu wild sind; um die wichtigen Fragen, die im letzten Kapitel angerissen wurden, beantworten zu können, müssen wir mit den Ableitungen der Funktionen umgehen. Wir fragen uns zunächst, wie man die bekannte Differentialrechnung für Funktionen auf der reellen Geraden in höhere Dimensionen übertragen können.

2.1 Erinnerung an Konstruktionen aus der elementaren Ingenieurmathematik

Wir rufen kurz einige Begriffe und Definitionen aus den Grundlagen der Ingenieurmathematik in Erinnerung, weil wir sie bei der Erweiterung der Differentialrechnung zu mehrdimensionalen Räumen benötigen.

2.1.1 Differentialrechnung in R

Definition 2.1 Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine reellwertige Funktion, definiert auf einem offenen Intervall in $\mathbf{R}$, und sei a ein Punkt in diesem Intervall.

Wir definieren die ***Ableitung*** $f'(a)$ von f bei a als den Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{2.1}$$

falls dieser Grenzwert existiert (was nicht immer der Fall sein muss).

Wenn $f'(a)$ definiert ist, d.h., wenn der obige Grenzwert existiert, nennen wir f ***differenzierbar*** bei a.

Wir nennen f schlicht ***differenzierbar***, wenn f an jeder Stelle seines Definitionsbereichs differenzierbar ist, und ***stetig differenzierbar***, wenn f differenzierbar ist und wenn die auf dem Definitionsbereich von f erklärte Funktion $x \mapsto f'(x)$ stetig ist.

Wir betrachten eine einfache Konsequenz dieser Definition, die uns den Weg zeigt, wie wir sie am besten in höhere Dimensionen übertragen können.

Wir konstruieren mit Hilfe der Ableitung von f eine neue Funktion φ durch die Definition

$$\varphi(x) = f(a) + (x-a)f'(a).$$

Dies ist eine so genannte ***Linearform*** in x, da x in diesen Ausdruck nur zur ersten Ordnung, d.h., multipliziert mit einem Skalar, aber nicht potenziert oder als Argument einer anderen Funktion eingeht.

Offensichtlich gilt $\varphi(a) = f(a)$, d.h., φ und die ursprüngliche Funktion f haben den gleichen Wert bei a. Wenn wir in der Nähe von a die Werte von φ und f vergleichen, so finden wir, dass

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-\varphi(x)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{(x-a)f'(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a),\end{aligned}$$

und nach (2.1) konvergiert dies für $x \to a$ gegen $f'(a) - f'(a) = 0$.

Das bedeutet, dass φ eine sehr gute Approximation zu f selber ist in der Nähe der Stelle a, da sogar die *relative Abweichung* zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$, verglichen mit der Abweichung zwichen x und a, in der Nähe von a verschwindend klein wird.

Man kann sogar zeigen, dass *keine andere Linearform als φ diese Eigenschaft hat.* In diesem Sinne ist φ die *bestmögliche* lineare Annäherung zu f nahe a.

Wir halten diese Tatsache fest:

Bemerkung 2.2 Sei $a \in \mathbf{R}$ und sei f eine bei a differenzierbare Funktion, definiert auf einem offenen Intervall um a.

Die Linearform $\varphi(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ ist die beste lineare Approximation zu f nahe a, und es gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-\varphi(x)}{|x-a|} = 0.$$

Das kann man auch geometrisch sehen: der Graph von φ ist die Gerade durch $\big(a, f(a)\big)$, die den Graphen von f an dieser Stelle am besten annähert, nämlich die ***Tangentengerade*** zum Graphen von f an dieser Stelle.

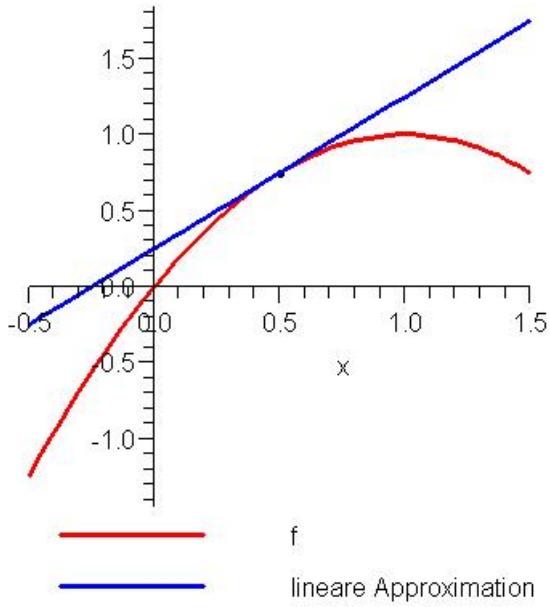


Abbildung 2.1: Der Graph der Funktion $f(x) = 2x - x^2$ und ihrer linearen Approximation nahe $x = 0{,}5$

2.1.2 Linearformen in $\mathbf{R}^n$

Die mehrdimensionale Variante der Ableitung kann man leider nicht als eine Zahl definieren—in $\mathbf{R}$ misst die Ableitung das Wachstum einer Funktion $f(t)$ in der ausgezeichneten, also besonderen, eindeutig bestimmten Richtung, in der t größer wird, aber im mehrdimensionalen Raum gibt es unendlich viele verschiedene Richtungen und keinen natürlichen Grund, eine spezielle Richtung über die anderen zu bevorzugen.

Dieses Problem kann man aus dem Weg räumen, indem man jeder Richtung eine „Richtungsableitung“ zuordnet, und diesen Begriff werden wir in Kürze einführen und besprechen.

Aber es ist auch gut, wenn man als Erweiterung der eindimensionalen Ableitung einen *einzelnen* Gegenstand einsetzen kann, statt eine ganze verwirrende Auswahl von Instanzen, wie es bei der Richtungsableitung der Fall ist. Einen geeigneten einzelnen Gegenstand finden wir mit Hilfe der linearen Annäherung.

Die eindimensionale lineare Annäherung ist die Linearform $x \mapsto a + f'(a)(x-a)$, und man nennt dies eine *Linearform* in x, weil die Variable x nur linear darin erscheint. Die Formel für die Werte einer eindimensionalen Linearform hat die allgemeine Gestalt $b + cx$, d.h., eine Konstante plus das Produkt einer Konstanten mit x.

Eine n-dimensionale Linearform hat entsprechend die Gestalt einer Konstante plus einer *Linearkombination* der n Koordinaten x_1, x_2, ..., x_n, in einer Formel ausgedrückt also die Gestalt

$$\mathbf{x} \mapsto b + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i. \tag{2.2}$$

Die Summation in diesem Ausdruck, also die Linearkombination, kann man am kürzesten und am bequemsten schreiben mit Hilfe des ***Skalarprodukts***, an das wir in Definition 1.1 erinnert haben: Gleichung (1.1) sagt uns, dass wir die Linearform aus (2.2) schreiben können in der Gestalt

$$\mathbf{x} \mapsto b + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}, \tag{2.3}$$

wo $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ der Vektor der Koeffizienten der Linearkombination ist.

Die soeben beschriebene Linearform nimmt bei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ den Wert b an.

Nun sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion von n Variablen, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und sei $\mathbf{a}$ ein Punkt im Definitionsbereich von f. Wir wollen für diese Art von Funktion den Begriff der besten linearen Annäherung nahe $\mathbf{a}$ definieren.

Das soll eine Linearform φ sein, also die Gestalt (2.3) haben, und abgesehen von allen weiteren Eigenschaften (die wir auf der Aussage von Bemerkung 2.2 modellieren werden), soll sie zumindest an der Stelle $\mathbf{a}$ den gleichen Wert annehmen wie f, d.h., es soll gelten $\varphi(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) = 0$.

Auf Grund der Eigenschaften der allgemeinen Linearform können wir das für φ leicht einrichten, wenn wir $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ in der Rolle von $\mathbf{x}$ in (2.3) einsetzen (denn $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ genau dann, wenn $\mathbf{x} - \mathbf{a} = 0$) und $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ wählen.

Wir erhalten trotzdem immer noch eine Linearform und sie hat die Gestalt

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Man sieht leicht, dass $\varphi(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$.

2.2 Differenzierbarkeit im $\mathbf{R}^n$

2.2.1 Definition der Ableitung

Um die Ableitung einer Funktion f von n Variablen an einer Stelle $\mathbf{a}$ zu definieren, wollen wir nun eine Linearform der obigen Gestalt suchen, die

nicht nur an der *Stelle* $\mathbf{a}$ den gleichen Wert annimmt, wie f, sondern analog zu Bemerkung 2.2 eine „beste lineare Approximation“ zu f *nahe* $\mathbf{a}$ darstellt. Der *Vektor* $\mathbf{c}$ in dieser Linearform übernimmt die Rolle der *Zahl*, die man im eindimensionalen Fall als die Ableitung versteht.

Definition 2.3 Sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und sei $\mathbf{a}$ im Definitionsbereich von f.

Wir sagen, f ist ***differenzierbar*** bei $\mathbf{a}$, wenn es einen Vektor $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ gibt, so dass die Linearform

$$\varphi(\mathbf{x}) := f(\mathbf{a}) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \tag{2.4}$$

die Eigenschaft hat, dass

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0 \tag{2.5}$$

Wenn es einen solchen Vektor $\mathbf{c}$ gibt, dann ist er eindeutig bestimmt (wie wir gleich sehen werden), und wir nennen *diesen Vektor* $\mathbf{c}$ die ***totale Ableitung*** von f bei $\mathbf{a}$ und schreiben dafür $Df(\mathbf{a})$.

Wir wollen gleich erklären, wie man die totale Ableitung $Df(\mathbf{a})$ ausrechnet, wenn sie existiert, denn darüber sagt die Definition bisher nichts. Zum Glück wird die Berechnung ganz einfach sein, sobald wir eine sehr naheliegende Konstruktion eingeführt haben, die der ***partiellen Ableitung***.

Diese Konstruktion (oder ihre Verallgemeinerung, die ***Richtungsableitung***), hätten wir benutzen können, um auf andere Weise den eindimensionalen Ableitungsbegriff nach $\mathbf{R}^n$ zu übertragen.

Die Idee der Richtungsableitung ist ganz einfach. Die eindimensionale Ableitungsdefinition ist nicht wörtlich nach $\mathbf{R}^n$ übertragbar, weil, wie wir schon bemerkt haben, es anders als auf $\mathbf{R}$ keine ausgezeichnete Richtung gibt, in der wir die Wachstumsrate von f durch Differenzenquotienten messen können. Vielmehr können wir uns in ganz vielen Richtungen von einem Bezugspunkt im Definitionsbereich wegbewegen, und in jeder Richtung kann die Veränderung in den Werten von f sich anders verhalten und eine andere Wachstumsrate aufzeigen.

Wenn wir aber eine Richtung *vorgeben*, dann sieht alles wieder so aus, wie im eindimensionalen Fall. Am bequemsten lässt sich diese Idee formalisieren, wenn wir nicht auf die Richtung alleine beharren, sondern sie durch einen Vektor (der auch eine Länge hat) darstellen, und diese Länge, wie immer sie wirklich ist, als die „Längeneinheit“ für den Abstand im Definitionsbereich verstehen. Mit dem vorgegebenen Vektor als Einheitsmaß können wir die Ableitung dann wörtlich wieder durch Differenzenquotienten von Zahlen wie

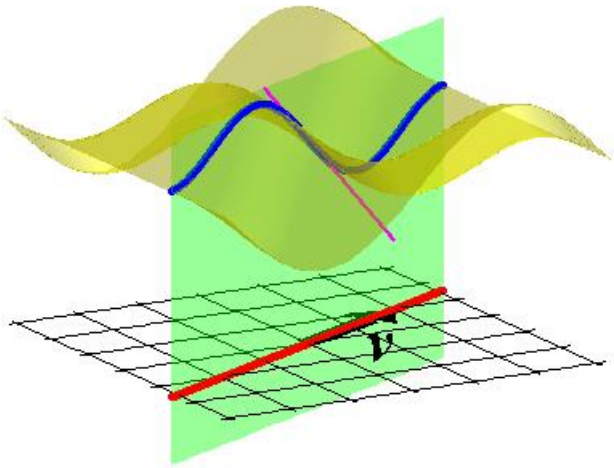


Abbildung 2.2: Die Richtungsableitung

im eindimensionalen Fall bestimmen, und wir erhalten wie gewohnt eine *Zahl* als ihren Wert.

Wenn wir die Idee ausführen, sieht das so aus:

Definition 2.4 Sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und sei $\mathbf{a}$ im Definitionsbereich von f. Sei $\mathbf{v}$ ein Vektor in $\mathbf{R}^n$.

Wenn er existiert, nennen wir den Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \tag{2.6}$$

die ***Richtungsableitung von*** f ***in Richtung des Vektors*** $\mathbf{v}$ ***an der Stelle*** $\mathbf{a}$, und wir schreiben dafür $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ und manchmal einfach $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$.

Die Richtungsableitung muss nicht existieren, und sie kann in manchen Richtungen existieren und in anderen nicht.

Wenn Sie existiert, kann man sie auf andere Weise darstellen, die für Berechnungen bequemer ist:

Wir definieren dazu eine Hilfsfunktion $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch

$$g(t) := f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}), \tag{2.7}$$

und dann ist

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = g'(0). \tag{2.8}$$

Die Idee hinter der Richtungsableitung ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Die gelbe Fläche ist der Graph einer Funktion f (hier von zwei Variablen), deren Definitionsbereich die darunter liegende Ebene mit dem Koordinatengitter ist. Der Vektor $\mathbf{v}$ liegt in dieser Ebene und spannt eine Gerade auf (die rote Linie), und zur Bestimmung der Richtungsableitung betrachten wir fortan nur die Werte von f entlang dieser Geraden. Damit spielt sich alles nur noch in der senkrechten grünen Ebene ab, die gebildet wird von den Raumpunkten, die direkt über der roten Geraden liegen.

Der Graph von der eingeschränkten Funktion f ist die blaue Kurve, die die Schnittkurve der grünen Ebene mit dem gesamten Graphen von f ist, und die Richtungsableitung von f ist nichts anderes als die Steigung dieser Kurve (im Bild dargestellt durch die eingezeichnete Tangentengerade), gemessen allerdings bezüglich der Länge des Vektors $\mathbf{v}$ als horizontale Längeneinheit.

Wenn man nur die grüne Ebene betrachtet (und das tun wir hier), sieht alles genau so aus, wie im eindimensionalen Fall. Somit ist die Richtungsableitung nichts geheimnisvolles.

Die ***partielle Ableitung***, von der oben die Rede war, ist nichts anderes als ein Spezialfall der Richtungsableitung, wo der Vektor, der die Richtung bestimmt, einer der ***Standardbasisvektoren*** von $\mathbf{R}^n$ ist, d.h., ein Einheitsvektor in der positiven Richtung einer der Koordinatenachsen. Es gibt also für jede der n Koordinaten x_i eine entsprechende partielle Ableitung.

Was die partiellen Ableitungen so angenehm macht ist ihre einfache Berechnung, und aus diesem Grund benutzt man sie viel mehr als andere Richtungsableitungen. Der i-te Standardbasisvektor ist der Vektor

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wo die 1 in der i-ten Zeile steht, und wenn wir diesen Vektor für $\mathbf{v}$ in (2.7) und (2.8) einsetzen, so ist $g(t)$ der Wert von f an einer Stelle, die aus $\mathbf{a}$ entsteht, wenn wir zur i-ten Koordinate t addieren und alle anderen Koordinaten unverändert lassen.

Die Ableitung nach t in (2.8) ist dann das Gleiche, als wenn wir in dem Ausdruck $f(x_1, \ldots, x_n)$ alle Koordinaten bis auf die i-te als Konstanten behandeln und wie ganz gewöhnlich den Ausdruck nach der Koordinate x_i als *einzige Variable* ableiten.

Wir halten dies in einer Definition fest:

Definition 2.5 Sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und sei $\mathbf{a}$ im Definitionsbereich von f. Sei $1 \le i \le n$.

Wir definieren die ***i*-te partielle Ableitung von *f* an der Stelle** $\mathbf{a}$ als

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) := D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}) = \left.\frac{d}{dx}\right|_{x=a_i} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n). \tag{2.9}$$

Natürlich muss die partielle Ableitung (oder manche der n möglichen partiellen Ableitungen von f) nicht existieren, wenn f in der entsprechenden Koordinatenrichtung nicht differenzierbar ist.

Zwischen diesen verschiedenen Ableitungsbegriffen gibt es einfache und nützliche Beziehungen.

Sei f eine bei $\mathbf{a}$ differenzierbare Funktion auf $\mathbf{R}^n$ (d.h., die *totale* Ableitung von f existiere an dieser Stelle), und sei $\mathbf{v}$ ein Vektor in $\mathbf{R}^n$.

Wenn wir die Richtungsableitung von f nach der Differenzenquotientenformel (2.6) berechnen, dann besagt die „beste Annäherung“ Bedingung (2.5) in Definition 2.3, dass der Grenzwert in (2.6) sich nicht ändert, wenn wir f durch seine lineare Annäherung φ aus (2.4) ersetzen.

Aber mit dieser Ersetzung wird die Richtungsableitung ganz einfach zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\big(f(\mathbf{a}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+t\mathbf{v}-\mathbf{a})\big) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}}{t} = \lim_{t\to 0} \mathbf{c}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{v}, \end{aligned}$$

wo $\mathbf{c}$ die totale Ableitung von f bei $\mathbf{a}$ ist.

Damit können wir nun die totale Ableitung leicht ausrechnen, denn diese Formel für die Richtungsableitung gilt insbesondere, wenn $\mathbf{v}$ einer der Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_i$ ist. In diesem Fall wird das Skalarprodukt einfach zur i-ten Koordinate von $\mathbf{c}$, und die Richtungsableitung einfach zur i-ten partiellen Ableitung. D.h., wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_i = c_i.$$

Fassen wir alles zusammen, so haben wir gezeigt:

Satz 2.6 *Sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, sei $\mathbf{a}$ im Definitionsbereich von f, und f sei differenzierbar bei $\mathbf{a}$.*

Dann existieren auch alle Richtungsableitungen von f bei $\mathbf{a}$ und es gilt:

a)

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

b) Für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ *ist*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} \tag{2.11}$$

c) Für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ *ist*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}). \tag{2.12}$$

Teil c) ist einfach Teil b) „ausmultipliziert“.

Bemerkung 2.7 Wenn die *totale* Ableitung einer Funktion existiert, dann existieren an der gleichen Stelle alle partiellen Ableitungen und alle Richtungsableitungen, aber die Umkehrung dieser Implikation gilt nicht!

Die Funktion aus Beispiel 1.10 liefert gleich ein entsprechendes Beispiel, denn entlang der Koordinatenachsen in $\mathbf{R}^2$ nimmt sie einen *konstanten* Wert 0 an, und deshalb existieren die Richtungsableitungen *entlang der Achsen*, in anderen Worten beide partielle Ableitungen bei $\mathbf{0}$. Aus der Formel für die Funktion ist auch klar, dass an jeder Stelle außer $\mathbf{0}$ alle Richtungsableitungen existieren.

Aber bei $\mathbf{0}$ existieren bis auf die beiden partiellen Ableitungen, die schon genannt wurden, *keine anderen* Richtungsableitungen. Denn in allen Richtungen bis auf die Achsenrichtungen ist die Funktion bei $\mathbf{0}$ noch nicht einmal stetig (sie macht einen Sprung), und sie kann deshalb nicht ableitbar sein.

Weil die Richtungsableitungen nicht existieren, kann die totale Ableitung bei $\mathbf{0}$ auch nicht existieren.

Mit einer kleinen Zusatzbedingung gilt aber dann doch die Implikation in die andere Richtung:

Satz 2.8 *Sei* $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ *eine Funktion definiert auf einem offenen Gebiet* $D \subset \mathbf{R}^n$ *und sei* $\mathbf{a} \in D$.

Wenn nahe $\mathbf{a}$ *in* D *alle partiellen Ableitungen von* f *existieren, und wenn sie bei* $\mathbf{a}$ *stetig sind, dann ist* f *differenzierbar bei* $\mathbf{a}$*, d.h., die totale Ableitung existiert.*

2.2.2 Der Gradient

In der Definition 2.3 der Differenzierbarkeit in $\mathbf{R}^n$ hatten wir einen interessanten Vektor kennengelernt: die ***totale Ableitung*** $Df(\mathbf{a})$. In Satz 2.6 a) hatten wir gelernt, dass man diesen Vektor durch die partiellen Ableitungen ausdrücken kann, und dadurch stellt sich merkwürdigerweise heraus, dass man den Vektor, von dem wir sprechen, manchmal angeben kann, auch wenn f nicht differenzierbar ist und keine totale Ableitung hat!

Denn für die Angabe des Vektors reicht die Existenz der partiellen Ableitungen, und das ist eine echt schwächere Voraussetzung als die Differenzierbarkeit. Das Einzige, das man im Falle der Nichtdifferenzierbarkeit verliert, ist die aus diesem Vektor konstruierte beste lineare Approximation zu f— man kann die Linearform zwar noch konstruieren, aber sie hat nicht mehr die Eigenschaft (2.5).

Nichtsdestotrotz hat der Vektor sehr viele andere Anwendungen und spielt eine außerordentlich wichtige Rolle bei vielen Aufgaben der Ingenieurmathematik. Aus diesem Grund lohnt es sich, ihn auch dann zu benutzen, wenn die zugehörige Funktion nicht differenzierbar ist. Der Vektor heißt dann allerdings nicht mehr die „totale Ableitung“, sondern hat einen anderen Namen:

Definition 2.9 Sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und sei $\mathbf{a}$ eine Stelle im Definitionsbereich von f, wo alle partiellen Ableitungen von f existieren.

Den Vektor

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

dessen Koordinaten die partiellen Ableitungen von f bei $\mathbf{a}$ sind, nennen wir den ***Gradienten*** von f bei $\mathbf{a}$, und wir bezeichnen ihn mit $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ oder mit $\nabla f(\mathbf{a})$.[1] Zwecks einer einheitlichen Notation bevorzugen wir diese neuen Namen gegenüber der Notation $Df(\mathbf{a})$, auch wenn f eine totale Ableitung besitzt.

Hier als erste Geschmacksprobe ein paar nützliche Anwendungen des Gradienten:

[1] Das Symbol ∇, ein auf dem Kopf stehendes Delta, wird „Nabla“ ausgesprochen, nach dem Namen einer griechischen Harfe von ähnlicher Gestalt.

Satz 2.10 *Sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und sei $\mathbf{a}$ eine Stelle im Definitionsbereich von f.*

a) *Der Gradient von f bei $\mathbf{a}$ zeigt in die Richtung des* schnellsten Anstiegs *von f.*

   Das bedeutet: unter allen Vektoren $\mathbf{v}$ mit der gleichen Länge wie $\nabla f(\mathbf{a})$ ist $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ für $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{a})$ am größten (es geht hier um einen Vergleich zwischen signierten Zahlen, nicht um die betragsmäßige Größe).

   Das können Sie sich so vorstellen: wenn die Werte von f die Höhe eines Geländes angeben und Sie an der Stelle $\big(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big)$ in diesem Gelände stehen und möglichst schnell und möglichst steil den Berg hoch klettern wollen, dann müssen Sie die Richtung einschlagen, in die ∇f zeigt.

   Diese Behauptung folgt sofort aus der Formel (2.11) für die Richtungsableitung und der Rechenregel 1.2 f) für das Skalarprodukt: der Faktor $\cos\alpha$ in dieser Rechenregel nimmt seinen größten Wert 1 bei $\alpha = 0$ an.

b) *Im Gegenzug zeigt $-\nabla f$ in die Richtung des schnellsten oder steilsten* Abstiegs *von f.*

   Das bedeutet, dass eine ruhende Kugel, die an der Stelle $\big(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big)$ losgelassen wird, in die Richtung $-\nabla f(\mathbf{a})$ rollen würde.

c) *Sei $c = f(\mathbf{a})$. Die Gleichung*

$$f(\mathbf{x}) = c$$

   *definiert eine $n-1$-dimensionale Fläche oder Kurve im $\mathbf{R}^n$, die so genannte **Niveaufläche** (oder **Niveaukurve**) **von** f **zum Niveau** c.*

   *Der Vektor $\nabla f(\mathbf{a})$ steht senkrecht auf diese Niveaufläche (oder Kurve) und ist deshalb ein **Normalenvektor** zur Niveaufläche (-kurve).*

   Diese Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Richtungsableitung von f in jeder Richtung *tangential* zur Niveaufläche null sein muss, weil f nach Definition der Niveaufläche auf ihr einen konstanten Wert annimmt. Das bedeutet aber nach Satz 2.6 b), dass das Skalarprodukt von ∇f mit allen Tangentenvektoren zur Niveaufläche 0 ist, d.h., ∇f steht senkrecht auf jeden Tangentenvektor.

Diese Begebenheiten werden illustriert in Abbildung 2.3 auf der nächsten Seite. Die abgebildete Fläche ist ein Ausschnitt aus dem Graphen in Abbildung 2.2.

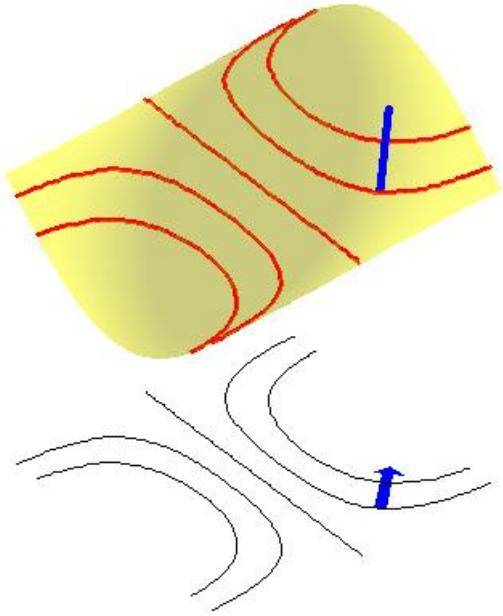


Abbildung 2.3: Der Gradient einer Funktion zeigt in die Richtung des schnellsten Anstiegs und ist normal zur Niveaufläche

Die neue Abbildung zeigt in der xy-Ebene einige Niveaukurven der Funktion f, und auf der Fläche die entsprechenden Höhenlagen in rot. An einer Stelle in der xy-Ebene sieht man den Gradienten von f, dargestellt als blauer Pfeil, und man erkennt, dass er senkrecht steht auf die Niveaukurve durch diesen Punkt.

Die blaue Linie auf der Fläche über diesem Punkt kennzeichnet die Werte, die f annimmt, wenn man den Grundpunkt unten auf einer Geraden in Richtung des Gradientenvektors verlässt, und man sieht auf der Fläche, dass die Werte von f in dieser Richtung am steilsten ansteigen.

2.3 Beispiele und Anwendungen

2.3.1 Einfache Beispiele

Beispiel 2.11 a) Wir betrachten als sehr einfaches Beispiel die Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

(das Quadrat der euklidischen Norm auf $\mathbf{R}^2$). Die Niveaulinien dieser Funktion (für positive Werte der Funktion) sind konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung.

Der Gradient von f an der Stelle (x, y) ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen von f (die Koordinaten des Gradienten) existieren überall und sind offensichtlich stetig. Deshalb ist f differenzierbar überall.

Der Gradient von f ist das Doppelte des Ortsvektors und zeigt an jeder Stelle auf den Kreisen um $\mathbf{0}$, die die Niveaukurven sind, in radialer Richtung. Das beweist mit einer einfachen Berechnung die bekannte Tatsache, dass die Normalen zu einem Kreis die radialen Vektoren sind.

Die radiale Richtung weg vom Ursprung ist auch die Richtung, in der die Norm und somit auch die Entfernung zu $\mathbf{0}$ am schnellsten steigen, aber das ist schon aus geometrischen Gründen klar und wird von der Gradientenberechnung nur bestätigt.

Für diese einfache Funktion lohnt sich der Aufwand nicht, die lineare Annäherung zu betrachten, aber wenn wir die tatsächliche Entfernung betrachten (und nicht ihr Quadrat), sieht das schon anders aus.

b) Sei

$$g(x,y) := \left\|(x,y)^T\right\| = \sqrt{x^2+y^2},$$

die Entfernung zu $\mathbf{0}$.

Zur Berechnung der partiellen Ableitungen müssen wir jetzt die Kettenregel bemühen: Wir haben $g = \sqrt{f}$ und deshalb

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Daraus folgt, dass

$$\nabla g = \frac{1}{g}\nabla f$$

ein Vielfaches des Gradienten von f ist und deshalb die gleichen geometrischen Eigenschaften hat: es ist normal zu den Niveaulinien von g (die auch die konzentrischen Kreise um $\mathbf{0}$, sind, allerdings zu anderen

Niveaus als bei f) und es zeigt in die Richtung des schnellsten Anstiegs der Entfernung zu $\mathbf{0}$.

Die partiellen Ableitungen von g sind definiert und stetig überall, außer bei $\mathbf{0}$, und deshalb ist g differenzierbar außer bei $\mathbf{0}$ und besitzt eine totale Ableitung und eine lineare Annäherung. Diese kann man benutzen, um für einen gegebenen Punkt schnell die Entfernungen von $\mathbf{0}$ zu diesem und den benachbarten Punkten zu schätzen, ohne immer wieder Quadratwurzeln ziehen zu müssen.

Zum Beispiel für den Punkt $\mathbf{a} = (3, -4)$ ist

$$g(\mathbf{a}) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,$$

und die lineare Annäherung zu g nahe $(3, -4)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= g(3, -4) + \nabla g(3, -4) \cdot \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 4 \end{pmatrix} \\
&= 5 + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(3, -4) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(3, -4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 4 \end{pmatrix} \\
&= 5 + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 4 \end{pmatrix} \\
&= 5 + \frac{3}{5}(x - 3) - \frac{4}{5}(y + 4) \\
&= 5 + \frac{3}{5}x - \frac{9}{5} - \frac{4}{5}y - \frac{16}{5} \\
&= \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y
\end{aligned}$$

Die Entfernung von $\mathbf{0}$ zum Punkt $(3.1, -4.2)$ ist also etwa

$$\varphi(3.1, -4.2) = \frac{3}{5} \cdot 3.1 + \frac{4}{5} \cdot 4.2 = 1.86 + 3.36 = 5.22.$$

Der tatsächliche Wert ist 5.2201532544 (in der Dezimalnotation haben wir hier Punkt statt Komma geschrieben, weil das Koordinatenpaar sonst schwer zu entziffern gewesen wäre. Das werden wir bei ähnlichen Gelegenheiten in Zukunft öfters tun).

Beispiel 2.12 Der Druck P in einer Kammer in einem Industriebetrieb hängt von der Stellung zweier Regler ab, mit denen Winkelwerte x und y eingestellt werden, und zwar nach dem Gesetz

$$P(x, y) = 3 + \sin x \cos y$$

(in geeigneten Einheiten).

Die gegenwärtig eingestellten Werte sind $x = 30°$ und $y = 60°$ (in der Formel für P sind x und y aber in Radiant zu verstehen).[2]

Plötzlich leuchtet eine Alarmlampe auf, weil ein Sicherheitsventil für die Kammer verstopft ist. Der Druck in der Kammer muss möglichst schnell reduziert werden, aber die Regler können konstruktionsbedingt nur langsam verstellt werden; für die *Norm* des Vektors gebildet aus der x- und der y-Veränderungsgeschwindigkeit gibt es einen maximalen Betrag.

Wie muss man die Regler am besten umstellen. Soll man nur einen verändern, oder beide zugleich, oder was?

Lösung: Der Gradient von P lautet

$$\nabla P = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

und hat bei $x = 30° = \frac{\pi}{6}$ und $y = 60° = \frac{\pi}{3}$ den Wert

$$\nabla P\left(\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Verändert man x und y mit Geschwindigkeiten, die *positiv* proportional zu den Koordinaten dieses Vektors sind, so würde der Druck möglichst schnell *ansteigen.* Um ihn zu senken, muss man die Regler in die andere Richtung verstellen, d.h., den ersten Regler zurückdrehen (um x zu verringern) und *gleich schnell* den zweiten Regler aufdrehen (um y zu vergrößern).

Beachten Sie, dass diese Verhaltensregel von den Ausgangswerten von x und y abhängt und bei einer anderen Ausgangsstellung anders lauten würde. Wenn zum Beispiel $x = y = 60°$, dann hat der Gradient von P den Wert

$$\nabla P\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \cos^2(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin^2(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall müsste man den y-Regler *dreimal so schnell aufdrehen,* wie man den x-Regler zurückdreht.

[2] Für die Bestimmung der *Werte* von P spielt die Winkelmaßeinheit keine Rolle, sondern nur, wie die Winkel sind, aber wenn wir den *Gradienten* von P berechnen, wollen wir die Berechnung auf Radiant als Maßeinheit beziehen—so sehen die Ableitungen ein bisschen einfacher aus!

2.3.2 Das Lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz

Angenommen, es ist der Wert einer für eine bestimmte Anwendung wichtigen physikalischen Größe y zu bestimmen, aber y ist nicht direkt messbar, sondern kann nur über eine bekannte Funktionalbeziehung

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ermittelt werden, die die Abhängigkeit von y von anderen, direkt messbaren Größen $x_1, \ldots, x_n$ beschreibt.

Die Funktion f wird in der Regel aus dem Aufbau des physikalischen Systems bekannt sein oder sie wird uns vielleicht durch ein bekanntes Naturgesetz geliefert. Auf jeden Fall gehen wir davon aus, dass wir diese Funktion genau kennen. Aber die Werte von $x_1, \ldots, x_n$ sind in der Regel nur näherungsweise bekannt, weil ihre Messung, wie jede Messung, mit einem Messfehler behaftet ist.

Wir fragen, wie die Messfehler in den Basisgrößen $x_1, \ldots, x_n$ sich auf den daraus errechneten Wert von y auswirken. Es kann schwierig sein, aus der Funktion f die maximale Größe des Fehlers in der Bestimmung von y genau zu bestimmen, aber mit Hilfe der linearen Annäherung zu f kann man den Fehler in y wenigstens schätzen.

Zur näherungsweisen Schätzung des „indirekten Messfehlers“ in y kann man das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz verwenden:

Satz 2.13 (Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz) *Die Größe y hänge durch die Beziehung $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Größen $x_1, \ldots, x_n$ ab, die man messen kann, und die hier auftretende Funktion f sei differenzierbar.*

Der für die i-te Basisgröße x_i gemessene Wert $\overline{x}_i$ sei behaftet mit einem (positiven oder negativen) Messfehler von Absolutbetrag höchstens $\varepsilon_i > 0$. Dann ist ein guter Richtwert für den maximalen Fehler F im errechneten Wert $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ für y gegeben durch die Abschätzung:

$$F \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \right| \cdot \varepsilon_i \tag{2.13}$$

Begründung: Wenn man mit Hilfe der linearen Annäherung zu f in der Nähe von der gemessenen Stelle $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ die Abweichung $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ zwischen dem echten und dem aus der Messung bestimmten Wert von y berechnet, erhält man den Ausdruck in (2.13) *ohne* Betragszeichen und mit den tatsächlichen Messfehlern anstelle der oberen Abschätzungen ε_i. Will man aber den schlechtest möglichen

Fall abschätzen, muss man die (unbekannten) echten Messfehler durch die Höchstwerte ε_i ersetzen *und* die Betragszeichen setzen, um die ungünstigste Situation abzudecken, in der die Vorzeichen aller Beiträge so sind, dass die Fehler in den einzelnen Messungen sich aufsummieren und nicht wegen verschiedener Vorzeichen sich teilweise wegheben.

Bei der Fehlerabschätzung wird man in der Praxis die Messwerte $\overline{x}_i$ für die Grundgrößen nicht durch eine *einzelne* Messung bestimmen, sondern als Mittelwert einer Reihe von mehreren Messungen. Aus den statistischen Kenngrößen dieser Messreihen erhält man zusätzlich eine Schätzung für die maximalen Fehler ε_i der so erhaltenen Messergebnisse. Eventuell werden wir am Ende des Semesters Zeit haben, auf solche Schätzungen aus der Statistik näher einzugehen.

Beispiel 2.14 Ein Ingenieur hat ein Behälter gefüllt mit Argon und will die ***Dichte*** des Gases bestimmen.

Die Dichte kann er nicht direkt messen, aber er kann den ***Gasdruck*** P und die ***Temperatur*** T messen und daraus die Dichte nach dem idealen Gasgesetz

$$D = \frac{P}{RT} \tag{2.14}$$

errechnen; hier ist $R = 208{,}13\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$ die ***Gaskonstante*** für Argon, und wenn P in Pascal (Pa) und T in Grad Kelvin (K) gemessen und eingesetzt werden, erscheint die Dichte in $\mathrm{kg/m^3}$.

Angenommen, der Ingenieur misst einen Gasdruck von $101 \pm 1\,\mathrm{kPa}$ und eine Temperatur von $293 \pm 0{,}1\,\mathrm{K}$ (die Beträge vor dem $\pm$-Zeichen sind die gemessenen Werte und die Beträge nach dem $\pm$-Zeichen sind der maximale Messfehler jeweils—diese Schreibweise werden wir auch in Zukunft zur Bequemlichkeit nutzen).

Aus diesen Messdaten wird eine Gasdichte von $1{,}656223983\,\mathrm{kg/m^3}$ errechnet. Was ist der maximale „indirekte Messfehler“ in diesem Wert?

Die partiellen Ableitungen von D nach P und T, ausgewertet für die ermittelten Messwerte, sind

$$\frac{\partial D}{\partial P} = \frac{1}{RT} = \frac{1}{208{,}13 \cdot 293} = 1{,}639825726 \times 10^{-5}\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial T} = -\frac{P}{RT^2} = -\frac{101000}{208{,}13 \cdot 293^2} = -5{,}652641581 \times 10^{-3}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3K}}$$

und das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz liefert für den maximalen Fehler

F in der berechneten Dichte die Schätzung

$$\begin{aligned} F &\leq \left|1{,}639825726 \times 10^{-5}\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right| \cdot 1\,\mathrm{kPa} + \left|-5{,}652641581 \times 10^{-3}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3\mathrm{K}}\right| \cdot 0{,}1\,\mathrm{K} \\ &= (1{,}639825726 \times 10^{-2} + 5{,}652641581 \times 10^{-4})\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \\ &= 0{,}01696352142\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned}$$

Übrigens, weil D monoton steigend von P abhängt und monoton fallend von T abhängt, kann man den größtmöglichen mit der Messung konsistenten Wert von D berechnen durch Einsetzen von $101 + 1$ kPa für P und von $293 - 0{,}1$ K für T in (2.14). Der Wert, den man dann für D erhält, beträgt $1{,}673193296\,\mathrm{kg/m^3}$, und die Abweichung dieses maximalen Werts von der aus den Messwerten errechneten Dichte beträgt $0{,}016969313\,\mathrm{kg/m^3}$.

Setzt man $101 - 1$ kPa für P und von $293 + 0{,}1$ K für T ein, so erhält man den kleinsten mit der Messung konsistenten Wert $1{,}639266249\,\mathrm{kg/m^3}$ für D, und er weicht betragsmäßig um $0{,}016957734\,\mathrm{kg/m^3}$ vom direkt aus den Messdaten ermittelten Wert ab.

Der tatsächliche maximale Fehler ist die größere dieser beiden Abweichungen, also $0{,}016969313\,\mathrm{kg/m^3}$, etwas mehr als der geschätzte indirekte Messfehler, aber nur um 0,034 %.

2.3.3 Gleichungsdarstellung von Tangentialebenen

Wir haben gesehen, dass der Gradient einer differenzierbaren Funktion f an einer Stelle $\mathbf{a}$ ein Normalenvektor zur Niveaufläche (oder -kurve) der Funktion durch diese Stelle ist, und haben das begründet mit der Tatsache, dass der Gradient senkrecht steht auf alle Vektoren in Richtung der Niveaufläche, d.h., auf alle ***Tangentialvektoren*** zur Niveaufläche.

Wenn wir das mit einer Formel ausdrücken, so lautet sie

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2.15}$$

für alle $\mathbf{v}$ parallel zur Tangentialebene.

Ein Punkt $\mathbf{x}$ liegt in der Tangentialebene zur Niveaufläche durch $\mathbf{a}$ genau dann, wenn der Vektor $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ ein Tangentialvektor zur Niveaufläche bei $\mathbf{a}$ ist, und diese Tatsache in Kombination mit (2.15) liefert uns folgende *Gleichung* für die Tangentialebene E zur Niveaufläche von f bei $\mathbf{a}$:

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \tag{2.16}$$

oder „ausmultipliziert“

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})\, a_i \tag{2.17}$$

(die rechte Seite von (2.17) ist eine Konstante!).

Wenn wir hier von Niveau*flächen* und Tangential*ebenen* sprechen, so gehen wir vom Regelfall einer Funktion f von drei Variablen aus, wo die Niveaumenge eine Fläche in $\mathbf{R}^3$ ist, aber die Methode ist natürlich ganz allgemein und funktioniert genau so gut für die Niveaukurven einer Funktion auf $\mathbf{R}^2$ und ihren Tangential*geraden*, sowie für die Niveaumengen von Funktionen von mehr als drei Variablen und ihren Tangentialräumen.

Die Gleichungsform (2.17) ist passend für die Tangentialebene an der Stelle $\mathbf{a}$ zu einer Fläche, die selber durch eine Gleichung der Gestalt

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c \qquad \big(= f(\mathbf{a})\big)$$

gegeben ist.

Oft hat man es aber mit Flächen (oder Kurven) zu tun, die gegeben sind als Graph einer Funktion g von der entsprechenden Anzahl von Variablen (zwei für eine Fläche, eine für eine Kurve), und nicht (oder scheinbar nicht) durch eine Gleichung.

In Wirklichkeit ist dies aber doch nur ein Spezialfall der obigen Situation, denn wenn die Fläche N der Graph einer Funktion $g(x, y)$ ist, so ist N die Lösungsmenge der Gleichung

$$z = g(x, y) \qquad \text{oder} \qquad z - g(x, y) = 0,$$

und somit doch eine Niveaufläche, nämlich von der Funktion $z - g(x, y)$.

Der Gradient von dieser Funktion hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Gleichung (2.16) für die Tangentialebene zum Graphen von g an der Stelle $\mathbf{a} = (a, b)$ bekommt jetzt die Gestalt

$$-x\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) - y\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) + z = -a\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) - b\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) + g(a, b),$$

was sich umsortieren lässt zu

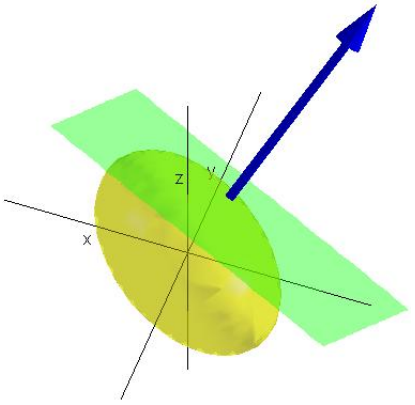
$$z = g(a, b) + (x - a)\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \tag{2.18}$$

oder in Vektorschreibweise:

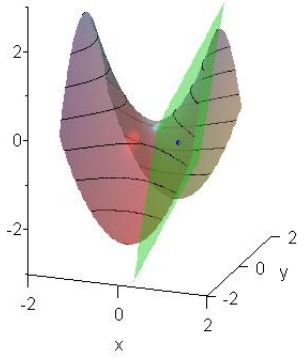
$$z = g(\mathbf{a}) + \nabla g(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad \text{wo } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

(woran man sieht, dass in diesem Fall die Tangentialebene nichts anderes ist, als der Graph der *besten linearen Annäherung zu* g nahe $\mathbf{a}$).

Um die Herleitung verständlicher zu machen, sind wir hier von einer Funktion von *zwei* Variablen ausgegangen, aber die gleiche Idee ist natürlich auch gültig für Graphen von Funktionen von nur einer oder von mehr als zwei Variablen. Die Darstellung (2.19) kann für den allgemeinen Fall direkt übernommen werden; die Formel (2.18) kann leicht angepasst werden.



(a) Das Ellipsoid aus Beispiel 2.15 a).



(b) Das hyperbolische Paraboloid aus Beispiel 2.15 b).

Abbildung 2.4: Tangentialebenen

Beispiele 2.15 a) Die Gleichung

$$f(x, y, z) := x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 1$$

bestimmt ein Ellipsoid E, in dem der Punkt $\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ liegt. Wir haben

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y + z \\ y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ bei } \mathbf{a}.$$

Also lautet die Gleichung der Tangentialebene zu E am Punkte $\mathbf{a}$:

$$(1, \tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

oder

$$x + \frac{5}{3}y + \frac{5}{3}z = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Das Ellipsoid mit der Tangentialebene und dem Gradienten von f an der Stelle $\mathbf{a}$ sehen Sie in Abbildung 2.4(a) auf der vorherigen Seite.

b) Der Graph der Funktion $g(x, y) = x^2 - y^2$ ist ein hyperbolisches Paraboloid H, das den Punkt $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$ enthält.

Wir haben $\nabla g = (2x, -2y)^T$, und bei $(1, -1)$ ist das der Vektor $(2, 2)^T$.

Nach (2.18) hat die Tangentialebene zu H bei $\mathbf{b}$ die Gleichung

$$z = 0 + (x - 1) \cdot 2 + (y + 1) \cdot 2 = 2x + 2y.$$

Das hyperbolische Paraboloid mit der Tangentialebene an der Stelle $\mathbf{b}$ sehen Sie in Abbildung 2.4(b) auf der vorherigen Seite.

2.4 Vektorwertige Funktionen

Bisher haben wir die Differenzierbarkeit nur für ***Skalarfelder*** besprochen, also für *reelwertige* Funktionen auf $\mathbf{R}^n$. Das ist auch richtig so, denn die Differenzierbarkeitsbegriffe für Skalarfelder bilden auch die unerlässliche Basis für das Verständnis der Differenzierbarkeit von vektorwertigen Funktionen und lassen sich auf sehr einfache Weise auf den allgemeinen Fall übertragen.

2.4.1 Beispiele

Vektorwertige Funktionen spielen eine sehr wichtige Rolle in der Ingenieurmathematik, und wir wollen kurz ein paar Situationen besprechen, in denen sie vorkommen, um ihre Bedeutung ganz klar zu machen.

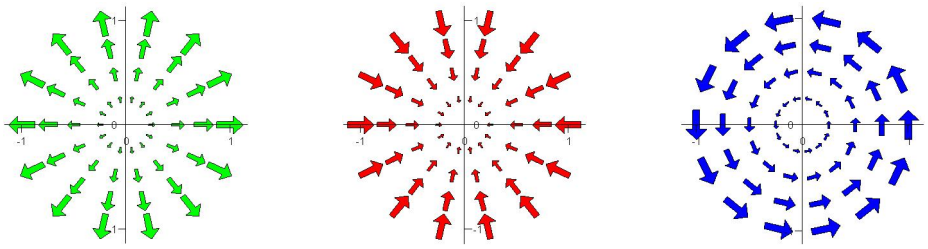
- ***Vektorfelder*** auf $\mathbf{R}^3$ sind nichts anderes als Funktionen $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ und sie stellen das mathematische Modell dar für ***Kraftfelder*** aller Art (zum Beispiel, das Gravitationsfeld oder Magnetfelder).

  Manchmal in vereinfachten Situationen betrachtet man auch Vektorfelder auf $\mathbf{R}^2$, und mathematisch kann man auf die gleiche Weise n-dimensionale Vektorfelder für jedes beliebige n betrachten.

- Vektorfelder auf $\mathbf{R}^3$ oder auf $\mathbf{R}^2$ kann man auch benutzen, um ***Strömungen*** zu beschreiben, entweder in einer dreidimensionalen Flüssigkeit, oder vereinfacht in zwei Dimensionen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit in einem annähernd ebenen Gebiet.

  Relativ unproblematisch sind Stellen, wo eine Strömung gleichmäßig fließt und wo benachbarte Strömungslinien etwa die gleiche Geschwindigkeit und Richtung haben. Ein besonderes Interesse gilt deshalb Stellen, wo diese Gleichmäßigkeit nicht gegeben ist, insbesondere ***Quellen*** und ***Senken*** (wo Strömungslinien aus einem Punkt herausquellen oder

in einem Punkt enden und dort versinken), wie auch ***Wirbelpunkte***, die selber stationär sind, aber um die sich die Strömung dreht.



(a) Quelle (b) Senke (c) Wirbel

Abbildung 2.5: Besondere Punkte einer Strömung

- Abbildungen $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ beschreiben ***Kurven*** in der Ebene oder im Raum, die insbesondere die *Pfade bewegter Körper* modellieren. Anhand der Funktion f können wir die ***Geschwindigkeit*** der Bewegung berechnen, die zurückgelegte Entfernung als ***Länge der Kurve***, und andere für die Bewegung wichtige Merkmale (all das werden wir in Detail im nächsten Kapitel besprechen).

  Kurven im $\mathbf{R}^n$ können auch dünne Gegenstände wie Seile oder Stäbe modellieren, so dass viele Berechnungen, die für Körper sinnvoll sind, auch für Kurven ausgeführt werden können.

- Abbildungen $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^n$ beschreiben ***Flächenstücke*** im Raum, und man kann zum Beispiel den Fluss einer Strömung durch ein solches Flächenstück berechnen oder Flächenstücke als Idealisierungen von flachen Körpern behandeln.

2.4.2 Differenzierbarkeit für vektorwertige Funktionen

An den in Abschnitt 2.4.1 genannten Beispielen sieht man, dass vektorwertige Funktionen

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

für beliebige Kombinationen der Quelldimension n und der Bilddimension m interessant sein können.

Die Differenzierbarkeit solcher Abbildungen ist leicht zu handhaben.

Definition 2.16 Sei $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ eine vektorwertige Funktion, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und sei $\mathbf{a}$ im Definitionsbereich von $\mathbf{f}$.

Wir sagen, $\mathbf{f}$ ist ***differenzierbar*** bei $\mathbf{a}$, wenn jede Koordinate f_i von $\mathbf{f}$ differenzierbar ist bei $\mathbf{a}$ im Sinne von Definition 2.3, d.h., als reellwertige Funktion auf $\mathbf{R}^n$.

Für vektorwertige Funktionen macht es zunächst keinen Sinn, von einem Gradienten oder von Richtungsableitungen oder partiellen Ableitungen zu sprechen, aber es gibt trotzdem ein wichtiges *Analogon* dazu:

Definition 2.17 Sei $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ eine vektorwertige Funktion, definiert auf einem offenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und $\mathbf{f}$ sei differenzierbar am Punkte $\mathbf{a}$ im Definitionsbereich von $\mathbf{f}$.

Die $m \times n$-Matrix

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

nennt sich die ***Jacobimatrix*** von $\mathbf{f}$ bei $\mathbf{a}$. Sie spielt für vektorwertige Funktionen eine ähnliche Rolle, wie der Gradient für skalarwertige Funktionen.

Merkregel: die Eintragungen der Jacobimatrix sind die partiellen Ableitungen der Koordinaten von $\mathbf{f}$, wobei die *i-te Zeile transponiert* der Gradient von f_i ist. Die j-te Spalte der Jacobimatrix ist so etwas wie die j-te partielle Ableitung von $\mathbf{f}$, nämlich der ***Geschwindigkeitsvektor***[3] von $\mathbf{f}$ in der Koordinatenrichtung x_j.

Die Eintragungen der Jacobimatrix kann man sich leicht einprägen, aber vielleicht nicht, welcher Index i oder j sich entlang der Zeilen verändert und welcher entlang der Spalten.

Aber auch das ist nicht schwer, sich zu merken: bei den „Brüchen“ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ liest man den oberen Index i zuerst, und er kennzeichnet deshalb, wie bei der allgemeinen Konvention für die Eintragungen a_{ij} einer Matrix, die *Zeile* des Eintrags, während der zweite oder untere Index j die Spalte zählt.

Mit Hilfe der Jacobimatrix kann man die ***Kettenregel für vektorwertige Funktionen*** auf sehr einfache Art ausdrücken.

[3] siehe Kapitel 3.

Satz 2.18 (Kettenregel) *Seien*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m \quad \textit{und} \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_p)\colon \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^p$$

vektorwertige Funktionen, definiert auf offenen Teilgebieten von $\mathbf{R}^n$ *bzw. von* $\mathbf{R}^m$*. Sei* $\mathbf{a}$ *im Definitionsbereich von* $\mathbf{f}$ *und so, dass* $f(\mathbf{a})$ *im Definitionsbereich von* $\mathbf{g}$ *liegt. Dann ist die* ***Verknüpfung*** $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$*, mit der Funktionsregel*

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big),$$

definiert auf einer offenen Menge um $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$*, und es gilt:*

a) Wenn $\mathbf{f}$ *differenzierbar ist bei* $\mathbf{a}$ *und wenn* $\mathbf{g}$ *differenzierbar ist bei* $f(\mathbf{a})$*, dann ist* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *differenzierbar bei* $\mathbf{a}$*, und für die Jacobimatrix gilt*

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = D\mathbf{g}\big(f(\mathbf{a})\big) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{a}), \tag{2.21}$$

wo $\cdot$ *hier die* ***Matrixmultiplikation*** *bezeichnet.*

b) Wir können die Kettenregel auch in einer „ausmultiplizierten“ expliziten Form hinschreiben.

Wir bezeichnen die Koordinaten von $\mathbf{R}^n$ *mit* $x_1, \ldots, x_n$ *und die Koordinaten von* $\mathbf{R}^m$ *mit* $y_1, \ldots, y_m$*. Der Einfachheit halber nehmen wir ferner an, dass* $p = 1$ *und dass* g *reellwertig ist (es reicht, diesen Fall zu betrachten; im allgemeinen Fall muss man die Formel einfach auf die einzelnen Koordinaten von* $\mathbf{g}$ *anwenden).*

Sei $\mathbf{f}$ *differenzierbar bei* $\mathbf{a}$*, und sei* g *eine reellwertige Funktion definiert nahe* $f(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^m$ *und differenzierbar bei* $f(\mathbf{a})$*. Dann ist* $g \circ \mathbf{f}$ *differenzierbar bei* $\mathbf{a}$ *und für die partiellen Ableitungen gilt:*

$$\frac{\partial(g \circ \mathbf{f})}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(\mathbf{a})\big) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}). \tag{2.22}$$

2.4.3 Vektorfelder, Divergenz und Rotation

Ein wichtiger Spezialfall der vektorwertigen Funktionen ist der Fall, wo eine Funktion auf $\mathbf{R}^n$ Werte annimmt, die Vektoren der gleichen Dimension n sind (insbesondere, für $n = 3$).

Definition 2.19 Sei $n \geq 1$. Ein ***Vektorfeld*** auf $\mathbf{R}^n$ ist eine Funktion

$$\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n.$$

Hier haben Quell- und Zielraum die gleiche Dimension!

Am wichtigsten für uns ist dieser Begriff im Fall $n = 3$.

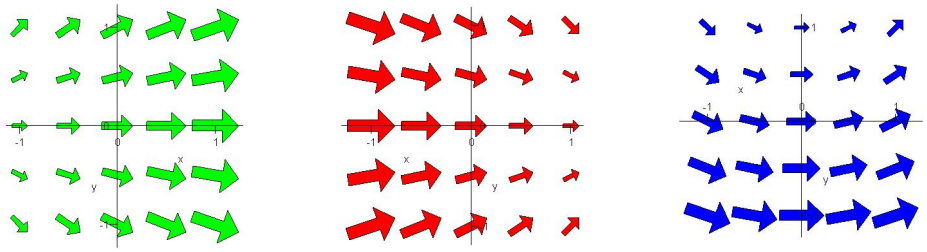
Wie der Name sagt, kann man sich Vektorfelder am besten als ein *Feld* von Vektoren vorstellen, die jedem Punkt im Raum einen Vektor beginnend an diesem Punkt zuordnet.

Da Vektoren aber nur aus ihrer Länge und ihrer Richtung bestehen, und nicht an einem speziellen Anfangspunkt gebunden sind (auch wenn wir uns einen denken), sondern überall hin parallel transportiert werden können, müssen wir vor der eigentlichen Verwendung des Vektors nicht genau sagen, an welchem Punkt er ansetzen soll. D.h., unsere Vorstellung, dass der Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ein am Punkt $\mathbf{x}$ angehefteter Pfeil sein soll, müssen wir nicht in das mathematische Modell für das Vektorfeld einbauen.

Aus diesem Grund müssen wir diese Information auch nicht in der Definition eines Vektorfeldes berücksichtigen, und als mathematischer Gegenstand ist ein Vektorfeld wirklich nur eine Funktion, die Vektoren der zum Quellraum passenden Dimension als Werte annimmt.

Wie wir in den Beispielen in Abschnitt 2.4.1 gesehen haben, können Vektorfelder Quellen, Senken und Wirbelpunkte aufweisen. Diese sind nicht nur lokale Phänomene, sondern haben auch Auswirkungen auf die globale Struktur des Vektorfeldes, und auf seinem Verhalten auf einer Fläche, die Quellen, Senken und Wirbel umschließt.

Allerdings treten Quellen, Senken und Wirbel fast nie in so reiner Form auf wie in den Abbildungen 2.5, sondern meistens überlagert von einer stetigen Strömung, die sie verwischt und ihr punktuelles Erscheinen unsichtbar macht, so dass nur ihre globale Wirkung bestehen bleibt.



(a) Quelle (b) Senke (c) Wirbel

Abbildung 2.6: Die Vektorfelder aus Abbildung 2.5, überlagert mit einem starken nach rechts zeigenden konstanten Vektorfeld.

Es gibt zwei wichtige Operatoren auf differenzierbare Vektorfelder, die in einem Fall die ***Quelldichte***, und im anderen Fall in einem gewissen Sinn die ***Wirbeldichte*** (in verschiedenen Ebenenrichtungen im Raum) angeben und

somit die „versteckten“ Quell-, Senk- und Wirbelbestandteile eines allgemeinen Vektorfeldes wieder sichtbar machen.

Definition 2.20 Wir bezeichnen die Koordinaten von $\mathbf{R}^n$ mit x_1, x_2, ..., x_n.

a) Sei $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ein n-dimensionales Vektorfeld (hier ist n eine beliebige natürliche Zahl).

   Die ***Divergenz*** von $\mathbf{v}$ ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div}\mathbf{v} := \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial x_n}. \tag{2.23}$$

   Sein Wert an jeder Stelle beschreibt in etwa wie stark an der Stelle die Feldlinien auseinander streben. Etwas genauer: er misst die Stärke der radialen Komponente des Vektorfeldes in der Nähe jedes Punktes, und ein positiver Wert deutet auf eine Quelle hin, ein negativer Wert auf eine Senke.

   Dieser Operator misst also die Quelldichte eines Vektorfeldes.

b) Sei $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ ein räumliches Vektorfeld (hier ist die Raumdimension auf 3 festgelegt).

   Die ***Rotation*** (englisch ***curl***) von $\mathbf{v}$ ist das *Vektorfeld*

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

   Die Rotation misst tatsächlich die „Wirbeldichte“, aber weil $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ ein Vektorfeld und kein Skalarfeld ist, ist die Situation, passend zum Gegenstand, um den es geht, ein wenig komplizierter als bei der Divergenz.

   Wir befinden uns nämlich im $\mathbf{R}^3$, aber die bisherigen Beispiele und Bilder von Wirbeln sind etwas wesentlich zweidimensionales. Das heißt, ein Wirbel im dreidimensionalen Raum hat trotzdem eine „Drehebene“, in der wir Bilder wie Abbildung 2.5(c) zeichnen können, d.h., eine ebene Drehrichtung, und er hat eine im Raum liegende ***Drehachse***, um die sich alles dreht. Die Drehachse liegt senkrecht zur Drehebene.

Es geht hier also nicht nur um die Stärke der Drehung oder ihre Geschwindigkeit, sondern auch um die Ausrichtung der Drehachse, und deshalb brauchen wir tatsächlich einen *Vektor* im Raum, um ein Wirbel zu charakterisieren. Seine Richtung beschreibt die Drehachse und die Richtung der Drehung (nach rechts oder nach links), und seine Norm beschreibt die Stärke der Drehung. Die Drehrichtung (rechts oder links) ist so bestimmt, dass eine rechtshändige Schraube, die sich mit dem Wirbel dreht, sich in die Richtung unseres Vektors eindreht.

Die Wirbeldichte eines Vektorfeldes wird tatsächlich von der vektorwertigen Rotation erfasst (was man leicht nachprüfen kann, wenn man rot auf das Geschwindigkeitsfeld einer Drehung anwendet)—der Vektor $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ zeigt überall in die Richtung der Drehachse des lokalen Wirbelanteils von $\mathbf{v}$ und zwar zu der Seite hin, die zur Zirkulationsrichtung des Wirbels nach der obigen Schraubenregel passt, und die Norm $\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|$ gibt die Stärke des lokalen Wirbelanteils an.

Die Formel (2.24) sieht ein wenig kompliziert aus, aber es gibt ein paar leichte Merkregeln, mit denen man sie im Kopf behalten kann.

Wichtig zu merken sind die Indizes 32 — der obere und untere Index der ersten partiellen Ableitung in der ersten Koordinate des Vektors. Wenn man zur nächsten Zeile übergeht, werden die Indizes *zyklisch* in der Reihenfolge 123123123... um eins erhöht; d.h., die erste partielle Ableitung in der zweiten Koordinate hat Indizes 13 und in der dritten Koordinate 21. Zum Schluss muss man sich nur noch merken, dass jede Koordinate von $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ eine Differenz von *zwei* partiellen Ableitungen ist, wobei der positive Term die oben genannten Indizes hat und der negative Term die dazu vertauschten Indizes hat.

Eine weitere Merkregel folgt in Bemerkung 2.21 unten.

Die Rotation kann man auch für ebene Vektoren definieren, indem man die dritte Dimension hinzufügt und dann obige Definition anwendet. Man erhält dann einen Vektor, der nur *eine* nichtverschwindende Koordinate hat, und diese Koordinate ist dann eine *skalare* Rotation für zweidimensionale Vektoren (hier brauchen wir keine vektorielle Rotation mehr, weil die Drehachse von vornherein festgelegt ist).

Auch in höheren Dimensionen gibt es Analoga der Rotation, die aber viel komplizierter aussehen, als die Version, die wir definiert haben.

Die Divergenz und die Rotation spielen eine wesentliche Rolle in den wichtigen Integralsätzen der mehrdimensionalen Integration (wo man Integrale über Körper oder Flächen in Integrale über die Randfläche oder Randkurve dieser Objekte umwandeln kann, und umgekehrt).

Bemerkung 2.21 Für die in Definition 2.20 definierten Operatoren gibt es eine elegante alternative Beschreibung. Wir definieren einen ***vektoriellen Differentialoperator***

$$\nabla := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

der, angewendet auf ein Skalarfeld f, einfach dessen Gradient liefert.

Sei $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld. Dann gilt

a)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \tag{2.26}$$

b)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \tag{2.27}$$

wie man in beiden Fällen leicht nachrechnet.

Besonders (2.27) kann man benutzen, um die Definition der Rotation wieder hervorzuholen, wenn man Formel (2.24) einmal vergessen hat.

Bemerkung und Definition 2.22 Wenn man ein Vektorfeld als ein Modell für eine Strömung auffasst, dann kann es in dieser Strömung stille und unbewegte Stellen geben, wo die Strömung eben nicht fließt. In der Sprache der Vektorfelder sind das Stellen, wo das Vektorfeld den Wert $\mathbf{0}$ annimmt.

Sei $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld auf $\mathbf{R}^n$. Eine Stelle $\mathbf{x}$ im Definitionsbereich von $\mathbf{v}$, wo $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, nennt man einen ***stationären*** oder einen ***singulären Punkt*** von $\mathbf{v}$.

Diese Stellen sind interessant, weil sie dem Vektorfeld die Möglichkeit geben, seine lokale Struktur zu ändern oder lokal sich auf eine Weise zu verhalten, die auf den ganzen Raum nicht fortsetzbar sein könnte (wenn es keine singulären Punkte gäbe).

In anderen Worten, auch wenn ein singulärer Punkt selber „langweilig“ aussieht, weil dort das Vektorfeld verschwindet, können in seiner *Nähe* interessante Dinge passieren, die manchmal *nur* in der Nähe eines singulären Punktes vorkommen können. Es ist deshalb nützlich zu verstehen, welche Art von singulären Punkten es gibt.

Quellen, Senken und Wirbel sind einprägsame Beispiele von singulären Punkten, aber unsere Besprechung von diesen Beispielen soll nicht den Eindruck erwecken, dass sie die einzigen Möglichkeiten darstellen.

Wir wollen darauf nicht näher eingehen, sondern zur Illustration nur ein Beispiel nennen. Abbildung 2.7 unten zeigt einen ***Sattelpunkt*** eines Vektorfeldes in der Ebene—in einer Achsenrichtung verhält sich das Vektorfeld wie eine Quelle und in der anderen wie eine Senke (in höheren Dimensionen sind natürlich noch andere Kombinationen möglich, und auch in der Ebene haben wir noch nicht alle Fälle besprochen).

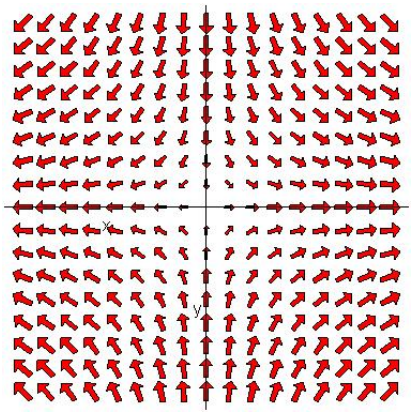


Abbildung 2.7: Ein Sattel

Kapitel 3

Kurven

Im letzten Kapitel haben wir ganz allgemein über differenzierbare Abbildungen zwischen mehrdimensionalen Räumen beliebiger Dimensionen gesprochen. Aber natürlich hat jeder Spezialfall der Dimensionen seine eigene besondere Struktur und besondere Merkmale, die oft eine wichtige eigene Rolle in der Ingenieurmathematik einnehmen und die es deshalb lohnt, näher zu betrachten.

3.1 Kurven und ihre Parametrisierungen

Die ***Kurven*** bilden einen dieser wichtigen Spezialfälle. Für sie treten auch zum ersten Mal und in der einfachsten Form einige Größen auf, mit dem man sich wegen der Einfachheit hier am besten bekannt machen kann.

Dazu gehören der ***Inhalt*** (für eindimensionale Objekte wie Kurven ist das die ***Länge***) und die ***Krümmung***.

Definition 3.1 Sei $n \in \mathbf{N}$, sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbf{R}$ und sei

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\longmapsto \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare vektorwertige Funktion.

Das Bild

$$\gamma := \big\{\, \mathbf{x}(t) \;\big|\; a \le t \le b \,\big\}$$

einer solchen Funktion nennen wir eine (stetig differenzierbare) ***Kurve*** im $\mathbf{R}^n$, die am Punkt $\alpha := \mathbf{x}(a)$ beginnt und am Punkt $\beta := \mathbf{x}(b)$ endet (oder kurz: eine ***Kurve von*** α ***nach*** β).

Die Funktion $\mathbf{x}$ selber, deren Bild die Kurve ist, nennt man eine ***Parametrisierung*** der Kurve γ. Man beachte, dass eine gegebene Kurve mehrere verschiedene Parametrisierungen haben kann (siehe die Beispiele unten).

Wir verlangen, dass eine Parametrisierung stetig differenzierbar sein soll. Das heißt, dass jede Koordinate x_i der Parametrisierung eine differenzierbare Funktion von t ist, und dass die Ableitung stetig ist. Weil der Quellraum einer Kurvenparametrisierung eindimensional ist, hat die Jacobimatrix

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

nur eine Spalte, und ist deshalb ein Vektor.

Diesen Vektor nennen wir den ***Geschwindigkeitsvektor*** der Parametrisierung $\mathbf{x}$ bei t. Nach Voraussetzung hängt er stetig von t ab und bildet deshalb ein ***stetiges Vektorfeld entlang der Kurve***.

Eine Parametrisierung $\mathbf{x}$ einer Kurve γ heißt ***regulär***, wenn sein Geschwindigkeitsvektorfeld nirgends verschwindet, das heißt, wenn $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ für jedes t.

Eine Kurve heißt ***regulär*** oder ***glatt***, wenn sie eine reguläre Parametrisierung besitzt.

Die eigentlichen Gegenstände, die wir hier betrachten wollen, sind die Kurven, und obwohl man eine Vorstellung davon hat, was das sein soll, ist es nicht unbedingt leicht, diese intuitive Idee klar und unmissverständlich zu formulieren. Kurven sind gewisse Punktmengen im Raum, aber nicht beliebige, sondern „eindimensionale“, sozusagen. Die *Parametrisierungen* helfen uns, diese Idee zu formalisieren.

Man kann sich vorstellen, die Parametrisierung beschreibt die Lage eines bewegten Teilchens zu jeder Zeit t, und die von ihr parametrisierte Kurve ist die Bahn oder die Straße, über die dieses bewegte Teilchen gefahren ist. Es ist auch klar, dass die gleiche Straße von vielen verschiedenen Teilchen befahren werden kann, die alle unterschiedlich schnell fahren oder zu verschiedenen Zeiten fahren, aber trotzdem den gleichen Weg nehmen.

Oder man kann die Parametrisierung auffassen als die Bewegungsvorschrift für eine Bleistiftspitze, die die Kurve zeichnet.

Mathematisch spielen die Parametrisierungen eine sehr wichtige Rolle, denn sie liefern uns (mit t) eine Art *Koordinate* auf der Kurve, die es uns ermöglicht, Berechnungen auf und mit der Kurve durchzuführen. *Trotzdem*

sind Parametrisierungen nicht das Gleiche, wie Kurven. Sie liefern nur eine nützliche, aber nicht eindeutige, mathematische Beschreibung von einer Kurve. *Wichtige Eigenschaften und Merkmale von Kurven, wie ihre Länge oder ihre Krümmung, werden wir stets so definieren, dass sie nicht von der gewählten Parametrisierung abhängen (auch wenn eine Parametrisierung in die Definition eingeht).*

Beispiele 3.2 a) Die ***gerade Strecke*** von (0,0) nach (1,1) in $\mathbf{R}^2$. Hier sind einige mögliche Parametrisierungen:

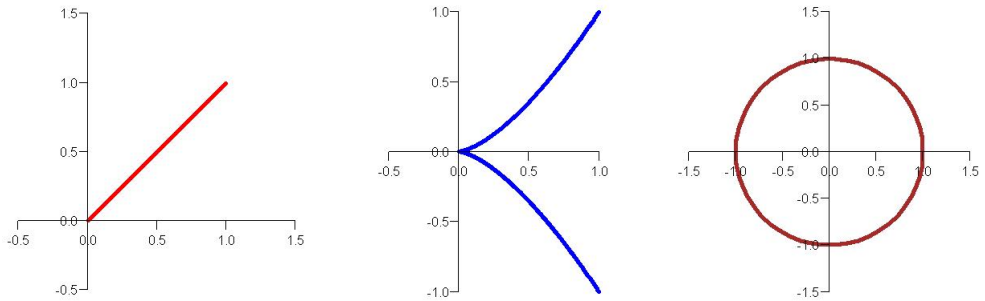
$$\mathbf{x}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}(t) := (t,t)^T \tag{3.2}$$

$$\mathbf{y}\colon [0,\tfrac{1}{2}] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{y}(s) := (2s,2s)^T \tag{3.3}$$

$$\mathbf{z}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{z}(u) := (\tfrac{2u}{1+u},\tfrac{2u}{1+u})^T \tag{3.4}$$

$$\mathbf{p}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{p}(v) := (v^2,v^2)^T \tag{3.5}$$

Alle beschreiben die gleiche Kurve. Die letzte, Formel (3.5), ist nicht regulär, weil $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$ (aber die Strecke ist trotzdem eine reguläre Kurve, weil sie reguläre Parametrisierungen besitzt).



(a) gerade Strecke (b) Neilsche Parabel (c) Kreis

Abbildung 3.1: Kurven

b) Die ***Neilsche Parabel*** mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}(t) := (t^2,t^3)^T \tag{3.6}$$

ist *keine* glatte Kurve, denn nicht nur die angegebene Parametrisierung ist nicht regulär, sondern es kann keine reguläre Parametrisierung für diese Kurve geben. Wegen der Spitze am Punkt $(0,0)$ kann eine stetig differenzierbare Parametrisierung diesen Punkt nur mit Geschwindigkeit $\mathbf{0}$ passieren.

Die Richtung der Kurve kehrt sich an dieser Stelle nämlich um. Eine Parametrisierung, die an dieser Stelle mit nichtverschwindender Geschwindigkeit vorbei kommt, müsste ihre Geschwindigkeit momentan umkehren und könnte deshalb nicht stetig differenzierbar sein.

Die Situation hier ist anders als in Beispiel a), wo wir eine nichtreguläre Parametrisierung hatten, aber es auch reguläre gab.

c) Der Kreis von Radius 1 um $\mathbf{0}$. Die einfachste Parametrisierung ist

$$\mathbf{x}\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t)^T, \tag{3.7}$$

aber manchmal nimmt man lieber eine Parametrisierung, die in Zeit 1 eine Umrundung des Kreises macht:

$$\mathbf{y}\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{y}(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)^T. \tag{3.8}$$

Natürlich sind beide Parametrisierungen regulär.

d) Als Beispiel einer Raumkurve haben wir die ***Schraubenlinie***, die schon in Kapitel 1 auf Seite 7 besprochen und in Abbildung 1.6 abgebildet wurde.

Eine Schraubenline von Radius r (das ist genauer gesagt der Radius des Zylinders, auf dem die Kurve verläuft) und von Ganghöhe h (Höhengewinn pro Umdrehung) kann parametrisiert werden durch

$$\mathbf{x}\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t, ht)^T. \tag{3.9}$$

Um die ganze (unbeschränkte) Schraubenlinie zu erhalten, haben wir als Definitionsbereich der Parametrisierung ganz $\mathbf{R}$ gewählt; will man nur einen endlichen Abschnitt haben, muss man dies durch ein endliches Intervall ersetzen.

Auch Kurven mit Knicken oder Spitzen wie die Neilsche Parabel kann man wie glatte Kurven behandeln, wenn man bereit ist, sie nicht in einem Stück zu zeichnen.

Definition 3.3 Sei n eine natürliche Zahl und seien α und $\beta \in \mathbf{R}^n$. Eine ***stückweise glatte Kurve*** von α nach β ist ein Gebilde $K \subset \mathbf{R}^n$, das auf folgende Weise aus endlich vielen glatten Kurven zusammengesetzt ist:

Es gibt endlich viele Punkte $\mathbf{a}_0 = \alpha$, $\mathbf{a}_1$, $\ldots$, $\mathbf{a}_r = \beta \in \mathbf{R}^n$ und für jedes i mit $1 \leq i \leq r$ eine *glatte* Kurve K_i von $\mathbf{a}_{i-1}$ nach $\mathbf{a}_i$, so dass

$$K = K_1 \cup \cdots \cup K_r.$$

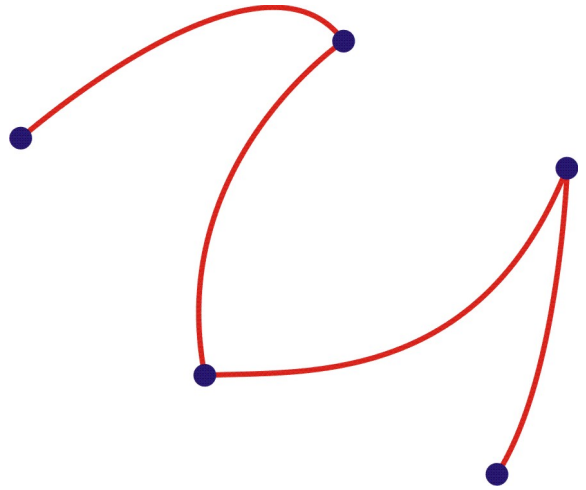


Abbildung 3.2: Eine stückweise glatte Kurve

Die Zwischenpunkte $\mathbf{a}_i$ für $1 \leq i < r$ heißen ***Knickpunkte*** der stückweise glatten Kurve K. An diesen Stellen muss die Parametrisierung der Kurve zwar stetig, aber nicht differenzierbar sein; genauer gesagt hat jede Teilkurve K_i eine *eigene* Parametrisierung, die unabhängig von denen der anderen Teilkurven ist.

Eine stückweise glatte Kurve fährt hintereinander die glatten Teilstücke ab und jedes schließt direkt an seinen Vorgänger an—wo eine Teilkurve endet beginnt gleich die nächste.

Ein typisches Beispiel einer stückweise glatten Kurve, die häufig in Anwendungen vorkommt, ist der ***Rand eines Quadrats***.

Wir haben jetzt vor, zwei wichtige charakteristische Größen von glatten Kurven zu definieren, aber wie schon angedeutet, sollen diese Größen nicht davon abhängen, wie wir die Kurven parametrisieren, obwohl wir eine Parametrisierung wählen müssen, um sie zu definieren. Deshalb wollen wir uns zunächst klar werden, wann zwei Parametrisierungen die *gleiche Kurve* bestimmen.

Definition 3.4 Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ zwei abgeschlossene Intervalle in $\mathbf{R}$ und seien

$$\mathbf{x}\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n \qquad \text{und} \qquad \mathbf{y}\colon [c, d] \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

zwei Parametrisierungen von Kurven im gleichen euklidischen Raum $\mathbf{R}^n$.

Wir nennen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ***äquivalent***, wenn es eine differenzierbare Funktion

$$\varphi\colon [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

gibt mit $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ und $\varphi'(t) > 0$ für jedes t, so dass

$$\mathbf{y}\big(\varphi(t)\big) = \mathbf{x}(t) \qquad \text{für jedes } t \in [a, b].$$

Aus dieser Bedingung folgt, dass $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ die gleiche Bildkurve parametrisieren, d.h., dass

$$\big\{\, \mathbf{x}(t) \;\big|\; a \le t \le b \,\big\} = \big\{\, \mathbf{y}(t) \;\big|\; c \le t \le d \,\big\}.$$

Die Funktion φ nennt sich eine ***Umparametrisierung von* $\mathbf{y}$ *nach* $\mathbf{x}$**.

Man kann leicht zeigen, dass Äquivalenz von Parametrisierungen eine so genannte ***Äquivalenzrelation*** ist, d.h., sie verhält sich wie die Gleichheitsrelation in dem Sinne, dass jede Parametrisierung zu sich selber äquivalent ist, dass wenn $\mathbf{x}$ zu $\mathbf{y}$ äquivalent ist, dann ist auch $\mathbf{y}$ äquivalent zu $\mathbf{x}$, und schließlich, dass zwei Parametrisierungen, die zu einer dritten äquivalent sind, auch zueinander äquivalent sind.

Beispiel 3.5 Die Funktion $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ mit

$$\varphi(t) := \frac{2t}{1+t}$$

ist eine Umparametrisierung von der Parametrisierung $\mathbf{x}$ der geraden Strecke in Beispiel 3.2 a), Formel (3.2), in die Parametrisierung $\mathbf{z}$, Formel (3.4).

Somit sind diese Parametrisierungen äquivalent.

Hingegen währe $t \mapsto t^2$ *keine* Umparametrisierung, obwohl sie das Intervall $[0,1]$ eineindeutig auf sich abbildet, weil die Ableitung nicht überall > 0 ist (bei 0 ist sie es nicht!).

3.2 Bogenlänge

Ein wichtiges Merkmal einer glatten Kurve ist ihre ***Länge***.

Definition 3.6 Sei K eine glatte Kurve im $\mathbf{R}^n$ und sei $\mathbf{x}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung von K. Wir definieren die ***Bogenlänge*** L von K als

$$L := \int_a^b \big\|\mathbf{x}'(t)\big\|\, dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t)}\, dt \tag{3.10}$$

Wenn φ eine Umparametrisierung von $\mathbf{x}$ ist, dann folgt aus der Kettenregel für die Ableitungen in (3.10) und aus der Substitutionsregel für die Integrale

in (3.10), dass eine andere aber äquivalente Parametrisierung den gleichen Wert für L liefert.

In anderen Worten, L hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab und ist eine invariante Eigenschaft der *Kurve* K.

Wir wollen kurz motivieren, warum die Formel (3.10) die Länge einer differenzierbaren Kurve richtig erfasst. Wir zerlegen die Kurve in kleine Abschnitte, wobei jeder dieser Abschnitte aus dem Teil der Kurve besteht, der von der Parametrisierung zwischen einer Zeit t und einer kurz darauf folgenden Zeit $t + \Delta t$ durchlaufen wird (die Dauer $\Delta t > 0$ dieses Zeitabschnitts soll sehr kurz sein).

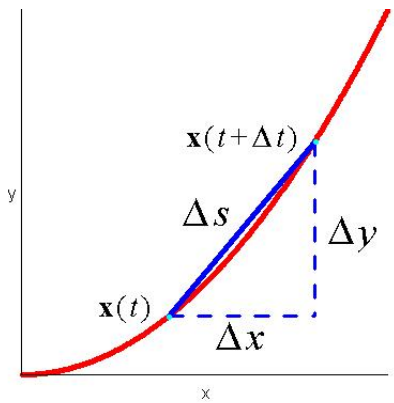


Abbildung 3.3: Ein Bogenlängenelement

Betrachten wir einen solchen Abschnitt. Er liegt auf der Kurve zwischen den Punkten $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}(t+\Delta t)$. Die i-ten Koordinaten dieser Punkte unterscheiden sich um den Betrag

$$\Delta x_i := x_i(t + \Delta t) - x_i(t);$$

die Situation für eine Kurve in $\mathbf{R}^2$ haben wir in Abbildung 3.3 festgehalten, wo die beiden Koordinaten x und y heißen und Strecken mit den Längen Δx und Δy als gestrichelte blaue Linien eingezeichnet sind.

Diese Strecken bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, deren Hypothenuse die Sekante zur Kurve zwischen den beiden Abschnittsenden bildet. Wenn der Abschnitt klein genug ist, ist die Länge Δs dieser Sekante eine gute Annäherung zur Länge des Kurvenabschnitts, und sie berechnet sich nach dem Satz von Pythagoras als

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Der Satz von Pythagoras verallgemeinert sich leicht in höhere Dimensionen, so dass für die Länge der Sekante unserer Kurve im $\mathbf{R}^n$ sich die Formel

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2} \tag{3.11}$$

ergibt.

Wieder weil das Zeitintervall sehr kurz sein soll, lassen sich die tatsächlichen Werte der Δx_i sehr gut mit den linearen Annäherungen $\tilde{x}_i$ zu den Koordinaten x_i der Parametrisierung nahe t abschätzen:

$$\Delta x_i = x_i(t + \Delta t) - x_i(t) \approx \tilde{x}_i(t + \Delta t) - \tilde{x}_i(t) = x_i'(t)\Delta t$$

(für die Form der linearen Annäherung im eindimensionalen Fall sehen Sie Bemerkung 2.2 auf Seite 18).

Wenn man diese Abschätzung in (3.11) einsetzt, dann kann man den gemeinsamen Faktor $(\Delta t)^2$ aus der Summation unter dem Wurzelzeichen und schließlich als Quadratwurzel aus dem Wurzelzeichen selber herausziehen und man erhält

$$\Delta s \approx \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2}\ \Delta t \tag{3.12}$$

als näherungsweise Formel für die Länge eines einzelnen Bogenelementes der Kurve.

Wenn man dies über alle Kurvenabschnitte summiert, erhält man eine gute Approximation zur Gesamtlänge der Kurve—der Übergang zum Grenzwert wenn man die Zerlegung in Kurvenabschnitte immer feiner macht, mit mehr, aber kürzeren Zeitintervallen und Kurvenstücken, liefert schließlich die *genaue* (und nicht mehr näherungsweise) Integralformel (3.10).

Bemerkung und Definition 3.7 Sei K eine glatte Kurve im $\mathbf{R}^n$ mit Länge L und sei $\mathbf{x}\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung von K. Wir können mit Hilfe der Bogenlänge eine sehr nützliche Umparametrisierung von $\mathbf{x}$ definieren: wir setzen

$$s(t) := \int_a^t \sqrt{x_1'^2(\tau) + x_2'^2(\tau) + \cdots + x_n'^2(\tau)}\, d\tau. \tag{3.13}$$

Dies ist die Bogenlänge des Kurvenabschnitts vom Anfangspunkt bis zum Punkt $\mathbf{x}(t)$. Die Funktion s nimmt Werte zwischen 0 und L an.

Weil $\mathbf{x}$ eine *reguläre* Parametrisierung ist, ist der Integrand in der Definition von s immer positiv, und weil dieser Integrand nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung die Ableitung von s ist, ist s eine differenzierbare monoton steigende Funktion mit nirgends verschwindender Ableitung.

Diese Funktion hat auch eine Umkehrfunktion, mit deren Hilfe man aus x eine neue Parametrisierung $\mathbf{y}\colon [0,L] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ von K gewinnen kann, so dass s eine Umparametrisierung von $\mathbf{y}$ nach $\mathbf{x}$ ist:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ s^{-1} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{y} \circ s.$$

Diese Parametrisierung $\mathbf{y}$ heißt die ***Bogenlängenparametrisierung*** von K. Sie hat einige schöne Eigenschaften, auf die wir kurz hinweisen wollen.

Wie wir schon angemerkt haben, ist

$$s' := \frac{ds}{dt} = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2} = \|\mathbf{x}'\| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|. \tag{3.14}$$

Aus der Kettenregel schließen wir, dass

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{y}}{ds}\big(s(t)\big)\frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\mathbf{y}}{ds}\big(s(t)\big)\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|.$$

Wenn wir die Übereinkunft treffen, dass der Operator $'$ für jede Parametrisierung die Ableitung bezüglich *ihres eigenen Parameters* bedeuten soll, so liefert uns obige Gleichung die einfache Beziehung

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y}'\,\|\mathbf{x}'\| \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{y}' = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} \tag{3.15}$$

zwischen den Geschwindigkeitsvektoren der beiden Parametrisierungen an jeder Stelle der Kurve.

Insbesondere sind alle Geschwindigkeitsvektoren der Bogenlängenparametrisierung Einheitsvektoren.

Die Bogenlängenparametrisierung ist sogar durch diese Eigenschaft und der Durchlaufrichtung durch K bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Denn wenn die Geschwindigkeitsvektoren einer Parametrisierung (mit Parameternamen t) alle Länge 1 haben, dann gilt für den zugehörigen Bogenlängenparameter nach (3.14), dass $s' = 1 = t'$, und somit ist $s - t$ konstant.

Wie man aus den obigen Integralformeln sofort sieht, ist bei der Bogenlängenparametrisierung die Länge eines Kurvenabschnitts immer gleich der Differenz der Parameterwerte an den Endpunkten des Abschnitts—ein weiteres Merkmal, das die Bogenlängenparametrisierung sehr angenehm macht.

Beispiele 3.8 a) Sei K der Kreis von Radius r um $\mathbf{0}$. Wir verwenden die Parametrisierung

$$\mathbf{x}\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}(t) = (r\cos t, r\sin t)^T.$$

Die Geschwindigkeit dieser Parametrisierung ist

$$\mathbf{x}'(t) = (-r\sin t, r\cos t)^T$$

mit der Länge

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = \sqrt{r^2} = r.$$

Also erhalten wir für die Bogenlänge des Kreises die bekannte Formel

$$L = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

b) Sei K die Schraubenlinie von Radius r und Ganghöhe a aus Beispiel 3.2 d). Wir verwenden die Parametrisierung (3.9)

$$\mathbf{x}\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t, ht)^T.$$

Die Geschwindigkeit dieser Parametrisierung ist

$$\mathbf{x}'(t) = (-2\pi r\sin 2\pi t, 2\pi r\cos 2\pi t, h)^T$$

mit der Länge

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(2\pi r)^2\sin^2 2\pi t + (2\pi r)^2\cos^2 2\pi t + h^2} = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}.$$

Die Bogenlänge des Abschnitts der Schraubenlinie zwischen zwei Parameterwerten t_1 und t_2 ist

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}\, dt = (t_2 - t_1)\sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}.$$

c) Das ***Zykloid*** (auch ***Rollkurve*** genannt) ist die Bahn in der Ebene $\mathbf{R}^2$, die ein Punkt auf dem Rand eines auf der x-Achse rollenden Rades zwischen zwei seiner Berührungen der x-Achse durchläuft; dieser Punkt ist mit dem Rad fest verbunden und folgt der rollenden Bewegung (Abbildung 3.4 auf der nächsten Seite, wo in der Momentaufnahme des Rades der bisher abgerollte Drehwinkel schattiert dargestellt wird).

Wenn das Rad den Radius r hat und oberhalb der x-Achse nach rechts rollt, und wenn der das Zykloid zeichnende Punkt die x-Achse zur Zeit $t = 0$ am Koordinatenursprung berührt, so kann man die Rollkurve parametrisieren durch die Funktion

$$\mathbf{x}\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t) := (rt - r\sin t, r - r\cos t)^T. \tag{3.16}$$

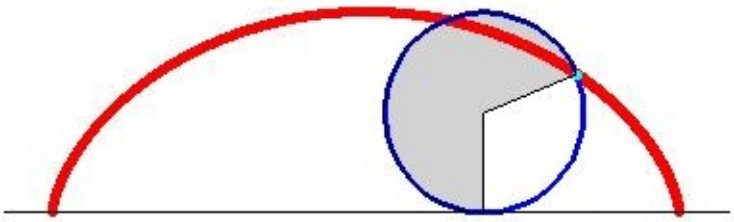


Abbildung 3.4: Die Rollkurve

Bei dieser Parametrisierung dient der in Radiant gemessene abgerollte Drehwinkel als Parameter. Der in Zeit t abgerollte Randbogen hat dann die Länge rt (was man aus der Schulgeometrie weiss aber mit Beispiel 3.8 a) auch leicht nachrechnen kann).

Die Formel (3.16) kann man leicht verstehen, wenn man die Fortbewegung des Rades als Ganzes, in *Folge* des Rollens, und die Drehung des Rades um seinen eigenen Mittelpunkt *beim* Rollen getrennt betrachtet.

Damit das Rad auf der x-Achse rollen kann, muss die x-Achse eine Tangente zum Rad sein, und deshalb befindet sich der Mittelpunkt des rollenden Rades immer Radius r Längeneinheiten *oberhalb* der x-Achse. Die waagerechte Entfernung der Radmitte von der Ausgangslage ist gleich der bisher abgerollten Entfernung, die gleich der Länge des bisher abgerollten Radrandbogens ist. Nach obiger Beschreibung ist diese Länge gleich rt.

Das bedeutet, dass der Radmittelpunkt zur Zeit t die Koordinaten (rt, r) hat.

Um die Raddrehung zu erfassen führen wir ein neues, sich mit dem Rad bewegendes aber sich nicht mitdrehendes Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ein, dessen Ursprung sich immer an der Lage des Radmittelpunktes befindet.

Die positive $\tilde{x}$-Achse soll immer nach *unten* zeigen, also in Richtung der negativen y-Achse im umliegenden unbewegten Koordinatensystem, und die positive $\tilde{y}$-Achse soll sich wie üblich 90° gedreht davon in Gegenuhrzeigersinn befinden, d.h., parallel zur positiven x-Achse im unbewegten System. Die Längeneinheit in beiden Richtungen ist in

beiden Koordinatensystemen gleich. Die Übersetzung von Koordinaten zwischen den beiden Koordinatensystemen ist deshalb sehr einfach.

In dem *bewegten* Koordinatensystem hat der die Kurve zeichnende Randpunkt des Rades zu Beginn der Bewegung die Koordinaten $(r, 0)$, denn er liegt direkt unter der Radmitte und berührt die normale x-Achse, d.h., er befindet sich r Längeneinheiten vom $(\tilde{x}, \tilde{y})$-Ursprung entfernt auf der positiven $\tilde{x}$-Achse.

Weil der Ursprung des $(\tilde{x}, \tilde{y})$-Systems sich mit dem Radmittelpunkt bewegt, sieht das Rollen im $(\tilde{x}, \tilde{y})$-System einfach aus wie eine *Drehung des Rades um seinen eigenen Mittelpunkt*, d.h., um den $(\tilde{x}, \tilde{y})$-Koordinatenursprung.

Damit das Rad nach rechts rollen kann, muss die Drehung aber im *Uhrzeigersinn* verlaufen, was die mathematisch *negative* Drehrichtung ist. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist als 1 gewählt.

Deshalb hat der Randpunkt im bewegten Koordinatensystem nach Zeit t die Koordinaten

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \big(r\cos(-t), r\sin(-t)\big) = (r\cos t, -r\sin t).$$

Berücksichtigt man die Bewegung des $(\tilde{x}, \tilde{y})$-Ursprungs im normalen System und die andere Ausrichtung der Achsen, so übersetzt sich das in normale Koordinaten als

$$(x, y)^T = (rt, r)^T + (-r\sin t, -r\cos t)^T = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$$

wie in (3.16) behauptet.

Nun zur Berechnung der Kurvenlänge. Für unsere Parametrisierung gilt

$$\mathbf{x}'(t) = (r - r\cos t, r\sin t)^T$$

und

$$\begin{aligned}
\big\|\mathbf{x}'(t)\big\| &= \sqrt{(r - r\cos t)^2 + (r\sin t)^2)} \\
&= r\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} && \text{(ausmultipliziert)} \\
&= r\sqrt{2 - 2\cos t} && (\cos^2 t + \sin^2 t = 1) \\
&= r\sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos\big(\tfrac{2t}{2}\big)} \\
&= r\sqrt{2}\,\sqrt{\cos^2\big(\tfrac{t}{2}\big) + \sin^2\big(\tfrac{t}{2}\big) - \Big(\cos^2\big(\tfrac{t}{2}\big) - \sin^2\big(\tfrac{t}{2}\big)\Big)} \\
& && \text{(Additionstheorem)}
\end{aligned}$$

$$= r\sqrt{2}\,\sqrt{2\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)}$$
$$= 2r\sin\tfrac{t}{2}. \qquad \left(\tfrac{t}{2} \in [0,\pi] \text{ und } \sin u > 0 \text{ dort}\right)$$

Also ist die Länge der Rollkurve

$$L = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{x}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2r\sin\tfrac{t}{2}\,dt$$
$$= \int_0^{\pi} 4r\sin u\,du = -4r\cos u\Big|_0^{\pi} = 4r - (-4r) = 8r.$$

Das Integral haben wir ausgerechnet mit der Substitution $u = \frac{t}{2}$, also $t = 2u$ und $dt = 2du$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem Hinweis auf einen häufigen Spezialfall:

Bemerkung 3.9 Wenn eine Kurve $K \subset \mathbf{R}^2$ der ***Graph*** einer auf einem Intervall $[a,b]$ definierten differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ ist, so kann man die x-Koordinate als den Kurvenparameter wählen. Die Kurve hat dann die Parametrisierung

$$\mathbf{z}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}(t) = \big(t, f(t)\big) \tag{3.17}$$

und wegen dieser speziellen Form ist die Länge der Kurve gegeben durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\,dt. \tag{3.18}$$

3.3 Die Krümmung einer Kurve

Ein weiteres charakteristisches Merkmal von Kurven, dass auch in Anwendungen eine wichtige Rolle spielen kann, ist ihre ***Krümmung***. Diese an jedem Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve definierte Größe gibt an, wie stark die Kurve an der jeweiligen Stelle gebogen ist.

Wie jeder Autofahrer weiss, ist die Krümmung von Bedeutung für die Durchführbarkeit von Bewegungen, die dem Kurvenverlauf folgen sollen, aber sie hat auch wichtige Auswirkungen auf andere Fragen der Technik.

Eine Art, die Krümmung einer zweimal differenzierbaren Kurve zu beschreiben, ist mit Hilfe eines ***Schmiegkreises***, der sich nicht nur linear wie die Tangentengerade, sondern zu Ordnung 2 möglichst gut an die Kurve angleicht. Die Kurve und ihr Schmiegkreis an jeder Stelle haben an dieser Stelle die gleiche Krümmung.

Für einen Kreis lässt sich die Krümmung sehr einfach messen—desto größer der Radius, desto „flacher“ und desto weniger gekrümmt ist die Kreisbahn, während Kreise von kleinem Radius sehr stark gekrümmt sind.

Die Krümmung eines Kreises ist, wie wir unten in Beispiel 3.13 a) sehen werden, der Kehrwert $1/R$ seines Radius, und somit kann man die Krümmung „sehen“, wenn man sich den Schmiegkreis graphisch vorstellt.

Natürlich ist das noch kein Verfahren, um die Krümmung aus einer Parametrisierung zu berechnen oder um ihren genauen Wert zu bestimmen, wenn man den Schmiegkreis nicht genau kennt. Deshalb wollen wir jetzt die eigentliche Definition entwickeln (die den Schmiegkreis nicht verwendet). Wir beschränken uns in diesem Abschnitt der Einfachheit halber auf Kurven in der Ebene.

Ein einfaches Maß für die Krümmung an jeder Stelle ist die *Veränderungsrate der Kurvenrichtung* wenn man, der Kurve folgend, diese Stelle passiert. Wenn wir diese Veränderungsrate durch eine Zahl ausdrücken wollen, müssen wir uns über die zu verwendenden Maßeinheiten einig werden.

Die Kurvenrichtung ω, die wir bestimmen können als die Richtung des Geschwindigkeitsvektors einer Parametrisierung, messen wir mit dem Winkelmaß Radiant, bezogen auf eine vorher festgelegte Grundrichtung als Referenz. Da nur die Veränderungsrate und nicht der Zahlenwert der Richtung uns interessiert, spielt die Wahl der Referenzrichtung keine Rolle, und wir haben es am bequemsten, wenn wir dafür die Richtung der positiven x-Achse wählen.

Damit die Krümmung eindeutig definiert ist, darf das „Zeitmaß“ für die Veränderungsrate nicht von der Parametrisierung abhängen (und insbesondere darf es in der Regel nicht der Parameter selber sein). Als *parameterunabhängiges* Maß für die Bewegung entlang der Kurve bietet sich die zurückgelegte *Bogenlänge* s an, oder, was das Gleiche ist, der Parameter der eindeutigen *Bogenlängeparametrisierung.*

Definition 3.10 Sei γ eine glatte Kurve in der Ebene und sei

$$\begin{aligned} \mathbf{y}\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ s &\longmapsto \big(y_1(s), y_2(s)\big)^T \end{aligned}$$

die ***Bogenlängenparametrisierung*** von γ.

Dann ist für jedes s der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{y}'(s)$ immer ein Einheitsvektor; sei $\omega(s)$ der Winkel, den dieser Vektor mit der positiven y_1-Achse macht (der Winkel ist von der positiven y_1-Achse zum Geschwindigkeitsvektor in Gegenuhrzeigersinn zu messen).

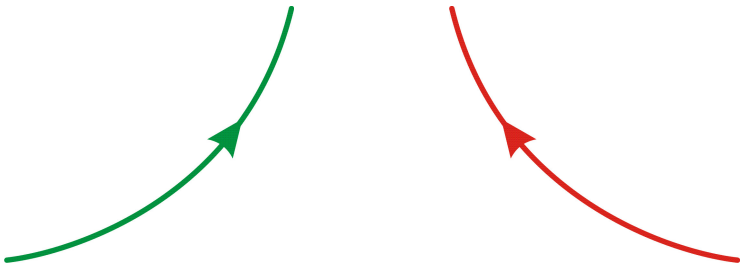
Wir definieren die ***Krümmung*** von γ an der Stelle $\mathbf{y}(s)$ als

$$\kappa(s) := \frac{d\omega(s)}{ds} = \omega'(s). \tag{3.19}$$

Beachten Sie, dass dies eine *signierte* Größe ist (d.h., die Krümmung kann auch negative Werte annehmen).

Sie ist positiv, wenn im Verlauf der Kurve der Winkel von der positiven x-Achse zur momentanen Richtung der Kurve immer größer wird, d.h., wenn die Kurve nach *links* gebogen ist, wie in Abbildung 3.5(a).

Die Krümmung ist negativ, wenn im Verlauf der Kurve der Winkel von der positiven x-Achse zur Kurvenrichtung abnimmt, d.h., wenn die Kurve, in Laufrichtung betrachtet, nach *rechts* gebogen ist, wie in Abbildung 3.5(b).



(a) positive Krümmung (b) negative Krümmung

Abbildung 3.5: Das Vorzeichen der Krümmung

Die Krümmung wechselt ihr Vorzeichen (aber nicht ihren Betrag), wenn man die Laufrichtung durch die Kurve umkehrt. Ansonsten ist sie invariant und hängt nicht von der Wahl einer Parametrisierung ab—das ist klar, da die Definition sich nur auf die Bogenlängenparametrisierung bezieht, die für jede Laufrichtung eindeutig ist.

Bemerkung 3.11 Nur bei ebenen Kurven ist die Krümmung so definiert, dass sie negative Werte annehmen kann, denn nur in $\mathbf{R}^2$ gibt es eine Standarddrehrichtung (der Gegenuhrzeigersinn) und eine Unterscheidung zwischen rechts und links—im Raum machen diese Begriffe nur Sinn, wenn man „mit beiden Füßen auf der Erde steht“, d.h., wenn man die Richtung nach *oben* festgelegt hat.

Das heißt nicht, dass man für Raumkurven keine Krümmung definieren kann, aber sie ist immer positiv, und die Rolle, die in der Ebene von der Krümmung alleine gespielt wird, wird im Raum durch die Veränderungsraten der Richtungen von einem der Kurve zugeordneten System von *drei*

aufeinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren (das so genannte ***begleitende Dreibein***) eingenommen.

Das begleitende Dreibein besteht aus dem Tangentenvektor (in Richtung der Kurve), dem Hauptnormalenvektor, und dem Binormalenvektor. Der Hauptnormalenvektor steht senkrecht auf die Kurve, aber liegt in der Ebene, in der sie sich momentan bewegt; der Binormalenvektor ist senkrecht zu dieser gesamten Ebene.

Aus Zeitgründen müssen wir leider auf eine detailliertere Darstellung der Krümmung im Raum verzichten.

Leider muss man feststellen, dass Definition 3.10 keine große Hilfe bei der *Berechnung* der Krümmung einer ebenen Kurve ist. Aber wir kommen leicht zu einer Berechnungsformel, wenn wir die in der Definition vorkommenden Größen näher untersuchen.

Die leicht zugänglichen Daten, die wir haben, sind die Koordinaten der Parametrisierung und ihre Ableitung. Daraus können wir zwar nicht unmittelbar den Winkel ω errechnen, aber wenn $y_1' \neq 0$ erhalten wir die ***Steigung*** der Kurve als das Verhältnis y_2'/y_1', und diese ist der *Tangens* von ω.

Also haben wir

$$\omega(s) = \arctan\Big(\frac{y_2'(s)}{y_1'(s)}\Big)$$

und wenn wir uns daran erinnern, dass $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, erhalten wir mit der Kettenregel

$$\kappa(s) = \omega'(s) = \frac{\dfrac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{(y_1')^2}}{1 + \dfrac{(y_2')^2}{(y_1')^2}} = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{(y_1')^2 + (y_2')^2} = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{\|\mathbf{y}'\|^2} = y_1'y_2'' - y_2'y_1'';$$

die letzte Vereinfachung resultiert von der Tatsache, dass $\mathbf{y}'$ ein Einheitsvektor ist.

Diese Herleitung gilt natürlich nicht, wenn $y_1' = 0$, aber in jenem Fall ist $y_2' \neq 0$ (weil die Parametrisierung regulär ist), und wenn wir ω als den Arkuskotangens von y_1'/y_2' darstellen und damit weiterrechnen, erhalten wir wieder die gleiche Formel.

Der einzige Nachteil an dieser Formel ist, dass sie von der ***Bogenlängenparametrisierung*** ausgeht, und diese ist nicht immer einfach zu bestimmen. Zum Glück ist es sehr leicht, die Formel so anzupassen, dass man sie für *jede* reguläre Parametrisierung verwenden kann.

Sei $\mathbf{x}$ eine beliebige reguläre Parametrisierung der Kurve γ, und sei t der Name des Parameters, von dem $\mathbf{x}$ abhängt. Mit $\mathbf{x}'$, bzw. mit x_i' bezeichnen wir die Ableitungen des Vektors $\mathbf{x}$ oder der Koordinaten von $\mathbf{x}$ nach t.

Für jede differenzierbare Funktion f von s, die wir dann auch als eine Funktion $g(t) := f\big(s(t)\big)$ von t auffassen können, gilt unter Verwendung der Kettenregel und Formel (3.14), dass

$$\frac{dg}{dt} = \frac{df}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{df}{ds}\,\|\mathbf{x}'\| \quad \text{oder} \quad \frac{df}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|}\frac{dg}{dt},$$

und wenn wir die rechte Formel auf die Ableitungen (nach s!) der y_i in unserer bisherigen Krümmungsformel anwenden, so können wir die y_i durch die entsprechenden x_i ersetzen, und die Ableitungen nach s durch Ableitungen nach t, wenn wir für jedes Mal, das abgeleitet wird, den jeweiligen Term durch einen Faktor $\|\mathbf{x}'\|$ dividieren.

Da in jedem Summanden in der Krümmungsformel insgesamt *dreimal* abgeleitet wird, verwandelt sich die bisherige Formel, die nur für die Bogenlängenparametrisierung galt, in folgende äquivalente aber allgemeiner anwendbare Form:

Satz 3.12 *a) Sei γ eine glatte Kurve in der Ebene und sei*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(x_1(t), x_2(t)\big)^T \end{aligned}$$

eine reguläre Parametrisierung von γ. Dann gilt für die Krümmung an jeder Stelle $\mathbf{x}(t)$ auf der Kurve die Formel

$$\kappa(t) = \frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}. \tag{3.20}$$

b) Wenn die Kurve γ der ***Graph***

$$\gamma = \big\{\, (x,y) \;\big|\; y = f(x) \,\big\}$$

einer zweimal differenzierbaren Funktion f auf einem Intervall $[a,b]$ ist, und wenn man diesen Graphen durch die x-Koordinate parametrisiert, dann ist die Krümmung gegeben durch

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\big(1 + f'(x)^2\big)^{3/2}}. \tag{3.21}$$

Die Formel (3.21) vereinfacht sich erheblich gegenüber (3.20), weil $x' = 1$ und $x'' = 0$.

Wir rechnen zwei einfache Beispiele:

Beispiele 3.13 a) Wir betrachten den Kreis von Radius R um $\mathbf{0}$ mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = (R\cos t, R\sin t)^T \qquad \text{für} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

wie in Beispiel 3.8 a).

Wir haben

$$\mathbf{x}'(t) = (-R\sin t, R\cos t)^T \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}''(t) = (-R\cos t, -R\sin t)^T.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t) &= (-R\sin t)(-R\sin t) - (R\cos t)(-R\cos t) \\ &= R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= R^2 \end{aligned}$$

und

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = \sqrt{R^2} = R.$$

Einsetzen in (3.20) liefert

$$\kappa = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Das ist genau die Formel für die Krümmung eines Kreises, die wir auf Seite 60 in der Einleitung zu diesem Abschnitt behauptet haben.

b) Die Krümmung der ***Sinuskurve***, des Graphen der Funktion $x \mapsto \sin x$, ist nach Formel (3.21) gegeben durch

$$\kappa(x) = \frac{\sin''(x)}{\left(1 + \sin'(x)^2\right)^{3/2}} = \frac{-\sin x}{\left(1 + \cos^2 x\right)^{3/2}}$$

Kapitel 4

Kurvenintegrale

Das Integral der elementaren Differentialrechnung (wie es schon in der Schule eingeführt wird) summiert oder mittelt die Werte einer Funktion auf einem Intervall in $\mathbf{R}$.

Diese Operation des Aufaddierens oder Mitteln von Werten kann aber auf wesentlich komplizierteren Gebilden als Intervalle durchgeführt werden, und bietet ein wichtiges Werkzeug der Ingenieurmathematik, um Längen, Flächen, Volumina, Massen, die Lage von Schwerpunkten, die Arbeit einer Kraft, der Fluß einer Strömung und andere wichtige Größen zu berechnen. Dieses Werkzeug ist unverzichtbar, wenn diese Größen für „krumme“ Gegenstände zu bestimmen sind, wo eine einfache Formel nicht existiert oder nicht funktionieren würde.

Diese Erweiterungen des Integrals sind auf Objekte beliebiger Dimension anwendbar, aber natürlich werden sie komplizierter, wenn die Dimension steigt.

In diesem Kapitel beginnen wir mit dem einfachsten, dem eindimensionalen Fall, aber wir integrieren nicht über Intervalle in $\mathbf{R}$, sondern über ***Kurven*** in der Ebene und im Raum, also schon über krumme Gebilde.

Wir müssen unterscheiden, sowohl in der Definition wie auch in den Anwendungen, zwischen Kurvenintegralen von ***skalaren Funktionen*** und von ***Vektorfeldern***.

4.1 Kurvenintegrale von skalaren Feldern

Das Integral eines skalaren Feldes (also einer reellwertigen Funktion) über eine Kurve im Raum entspricht dem Integral einer Funktion über ein Intervall in $\mathbf{R}$.

Die Idee hier wie dort ist, dass man die Kurve in kleine Teilstücke zer-

legt, auf jedem Teilstück einen typischen Funktionswert wählt und diesen mit dem Maß seines Geltungsbereichs, d.h., mit der *Länge* des Teilstücks gewichtet (durch Bildung des Produkts), und die Beiträge Funktionswert mal Teilstücklänge alle aufaddiert.

Wenn man die Teilstücke immer kleinen werden lässt, so nähern sich die nach der obigen Idee gebildeten ***Riemann Summen***, wie sie heißen, einem Grenzwert, der den genauen Wert des Integrals der Funktion darstellt.

Genau nach diesem Verfahren funktioniert die Definition des üblichen Integrals über ein Intervall. Die Teilstücke sind dann Teilintervalle und das „Gewicht“ für jedes Teilintervall ist seine Länge.

Die einzige Änderung, die man vornehmen muss, um das Integral über eine Kurve zu definieren, besteht darin, die Teilintervalle durch kleine Abschnitte der Kurve zu ersetzen und die Länge der Teilintervalle durch die Länge der *Kurvenabschnitte* zu ersetzen.

Für eine durch eine Funktion $\mathbf{x}(t)$ parametrisierte Kurve entspricht ein Kurvenabschnitt dem Bild unter $\mathbf{x}$ eines kleinen Parameterintervalls von Länge Δt. Und wie wir in Gleichung (3.12) auf Seite 54 bei der Herleitung der Bogenlängenformel gesehen haben, ist die Länge des entsprechenden Kurvenabschnitts in etwa

$$\|\mathbf{x}'(t)\|\,\Delta t.$$

Dieser Ausdruck also übernimmt die Rolle der Teilintervalllänge Δt beim klassischen Integral auf der reellen Geraden.

Dieser Gedanke führt zu der folgenden sinnvollen Definition.

Definition 4.1 Sei K eine differenzierbare Kurve im $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{x}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ eine Parametrisierung von K.

Sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine skalare Funktion, die nicht unbedingt überall, aber mindestens auf der Kurve definiert sein soll.

Wir definieren das ***Integral von*** f ***über*** K als

$$\int_K f\,ds := \int_a^b f\big(\mathbf{x}(t)\big)\ \|\mathbf{x}'(t)\|\ dt \tag{4.1}$$

Dieses Integral nennt man auch das ***Kurvenintegral*** oder das ***Wegintegral*** von f entlang K.

Wenn wir die Parametrisierung $\mathbf{x}$ durch eine andere, äquivalente Parametrisierung ersetzen würden, dann folgt aus der Kettenregel für die Umparametrisierung und aus der Substitutionsregel für das rechte Integral in (4.1), dass der Wert des rechten Integrals sich nicht ändern würde. In anderen Worten, der Wert des Kurvenintegrals ist *unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.*

Das ***Bogenelement*** ds in der Notation für das Kurvenintegral ist zwar nur eine konventionelle Schreibweise und hat keine „mathematische“ Bedeutung, aber diese Notation deutet darauf hin, dass das Kurvenintegral im Wesentlichen ein Integral bezüglich der Bogenlänge entlang der Kurve ist.

Bemerkung 4.2 Die Formel (3.10) für die *Länge* einer Kurve ist ein uns schon bekannter Spezialfall des Kurvenintegrals, wo der Integrand die konstante Funktion 1 ist. In anderen Worten, für die Länge L einer Kurve K gilt

$$L = \int_K 1\, ds.$$

Diese Tatsache ist eine Instanz eines allgemeinen Prinzips, wonach man den Inhalt eines Gebildes berechnen kann, indem man 1 über das Gebilde integriert.

Wenn man die Kurve als einen dünnen physikalischen Gegenstand auffasst, dessen Massendichte pro Längeneinheit 1 beträgt, dann ist in diesen Einheiten die Masse gleich der Länge.

Die Massendichte eines Gegenstands muss aber nicht homogen (also überall gleich) sein, und die allgemeine Form des in (4.1) definierten Kurvenintegrals kann man physikalisch interpretieren als die ***Gesamtmasse*** eines drahtartigen Körpers, gegeben durch die Kurve K, dessen Massendichte (pro Längeneinheit) durch die Funktion f gegeben ist.

Beispiele 4.3 Wir präsentieren zwei einfache Beispiele, bei denen es um einen ***Halbkreis*** H ***von Radius*** R geht. Wir wählen dafür die Parametrisierung

$$\mathbf{x}\colon [0,\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}(t) = (R\cos t, R\sin t)^T.$$

Für diese Parametrisierung gilt

$$\mathbf{x}'(t) = (-R\sin t, R\cos t)^T \qquad \text{und} \qquad \|\mathbf{x}'(t)\| = R.$$

a) Die Massendichte pro Längeneinheit des Halbkreises betrage $2R - y$ an einer Stelle auf dem Halbkreis mit Koordinaten (x, y). Was ist die Gesamtmasse des Halbkreises?

   Die Masse berechnen wir als

$$\begin{aligned} M &= \int_H (2R - y)\, ds \\ &= \int_0^\pi (2R - R\sin t)\, \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi (2R - R\sin t)R\,dt \\
&= (2R^2 t + R^2\cos t)\Big|_0^\pi \\
&= 2R^2\pi + R^2\cos\pi - 2R^2\cdot 0 - R^2\cos 0 \\
&= 2R^2\pi - R^2 - R^2 \\
&= 2R^2(\pi - 1)
\end{aligned}
$$

b) Jetzt betrachten wir einen anderen Halbkreis der gleichen Gestalt aber mit homogener (also konstanter) Massendichte. Wir suchen die y-Koordinate des ***Schwerpunkts*** des Halbkreises.

Die y-Koordinate des Schwerpunkts ist der Quotient aus dem ***ersten Moment*** der Masse in y-Richtung, geteilt durch die Gesamtmasse des Halbkreises. Beide Größen, deren Quotient gebildet wird, sind direkt proportional zum konstanten Wert der Massendichte, so dass dieser Wert sich aus dem Quotienten dann weghebt.

Deshalb brauchen wir den genauen Wert der Massendichte in unserer Berechnung nicht zu berücksichtigen und können so rechnen, als wäre die Dichte 1.

Die Masse M des Halbkreises ist dann gleich seiner Länge, also πR.

Das erste Moment μ_y in y-Richtung ist

$$
\begin{aligned}
\int_H y\,ds &= \int_0^\pi (R\sin t)\,\|\mathbf{x}'(t)\|\;dt \\
&= \int_0^\pi R^2\sin t\,dt \\
&= -R^2\cos t\Big|_0^\pi \\
&= -R^2\cos\pi + R^2\cos 0 \\
&= -R^2\cdot(-1) + R^2\cdot 1 \\
&= 2R^2
\end{aligned}
$$

Die y-Koordinate des Schwerpunkts ist also

$$
\overline{y} = \frac{\mu_y}{M} = \frac{\int_H y\,ds}{\int_H 1\,ds} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2}{\pi}R.
$$

4.2 Kurvenintegrale von Vektorfeldern

Auch ***Vektorfelder*** kann man entlang Kurven integrieren. Eine typische Anwendung dafür ist die Berechnung der Arbeit, wenn ein Körper sich entlang eines gegebenen Pfades in einem Kraftfeld bewegt.

Auch wenn der Integrand bei dieser neuen Art von Kurvenintegral jetzt vektorwertig ist, ist der Wert des Integrals nicht ein Vektor, sondern ein Skalar, also eine Zahl.

Was bei dem Integral eines Vektorfeldes entlang einer Kurve „aufaddiert“ wird sind die *Komponenten des Vektorfeldes in Richtung der Kurve*, oder genauer gesagt, ihre *signierte* Größe in Vergleich zum Einheitstangentenvektor zur Kurve.

Das bedeutet: an Stellen wo das Vektorfeld senkrecht zur Kurve steht ist der lokale Beitrag zum Wegintegral 0; an Stellen wo das Vektorfeld genau in die Laufrichtung der Kurve zeigt ist der Beitrag zum Integral gleich der Stärke (also der Länge) des Vektorfeldes; und dort, wo das Vektorfeld genau entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung der Kurve zeigt ist der Beitrag *minus* die Länge des Feldvektors.

An einer allgemeinen Stelle projiziert man das Vektorfeld auf die jeweilige Tangentialrichtung zur Kurve und nimmt als lokalen Beitrag die Länge der Projektion, versehen mit einem Minuszeichen wenn der projizierte Vektor entgegengesetzt zur Kurvenlaufrichtung zeigt.

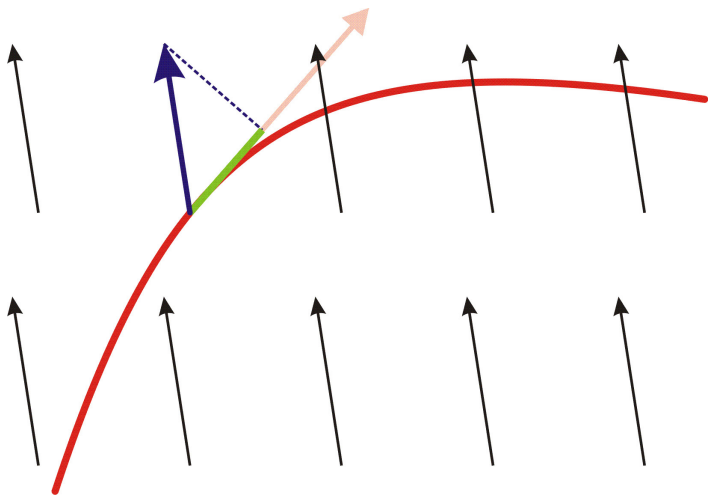


Abbildung 4.1: Die Integration eines Vektorfeldes entlang einer Kurve

Diese Beschreibung der Konstruktion läuft darauf hinaus, dass wir das Vektorfeld zunächst durch *Projektion auf die Kurvenrichtung* in ein *Skalarfeld* entlang der Kurve verwandeln, das die *Komponente des Vektorfeldes in*

Kurvenrichtung misst. Anschließend bildet man das Integral dieses Skalarfelds im Sinne von Definition 4.1.

Bevor wir nun die Definition genau aufschreiben, wollen wir uns diese Projektion kurz ansehen. Sei $\mathbf{v}$ das zu integrierende Vektorfeld und sei $\mathbf{x}$ eine reguläre Parametrisierung der Kurve.

Die Projektion von $\mathbf{v}$ auf die Richtung der Kurve an der Stelle $\mathbf{x}(t)$ ist das Gleiche, wie die Projektion von $\mathbf{v}$ auf die Richtung des Tangentialvektors $\mathbf{x}'(t)$. Die signierte Länge $p(t)$ dieser Projektion ist einfach das Skalarprodukt von $\mathbf{v}$ mit dem *auf Länge 1 normierten* Tangentialvektor, also

$$p(t) = \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

Das Integral dieses Skalarfeldes entlang der Kurve hat nach Definition 4.1 den Wert

$$\int_K p\,ds = \int_a^b p(t)\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt = \int_a^b \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt = \int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'(t)\,dt.$$

Obwohl wir bei der Definition des Skalarfeldes, auf das wir die Integration zurückführen wollen, die Geschwindigkeitsvektoren durch Division durch $\|\mathbf{x}'(t)\|$ auf Länge 1 normieren müssen, wird bei der Ausführung des Skalarfeldintegrals dieser Betrag als Skalierung für die Bogenlänge wieder einmultipliziert und beide Beiträge heben sich gegenseitig weg.

Trotzdem ist das aufgestellte Integral unabhängig von der Wahl der Parametrisierung, denn wir wissen ja schon, dass das skalare Integral nach Definition 4.1 nicht von der Parametrisierung abhängt, und das zu integrierende Skalarfeld p haben wir ja mit *normierten* Geschwindigkeitsvektoren konstruiert—sie sind eindeutig bestimmt und hängen nur von der Kurvenlaufrichtung ab.

Wenn wir alles zusammenfassen erhalten wir

Definition 4.4 Sei K eine differenzierbare Kurve im $\mathbf{R}^n$ und sei

$$\mathbf{x}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

eine Parametrisierung von K.

Sei $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ ein Vektorfeld, das nicht unbedingt überall, aber mindestens auf der Kurve definiert sein soll.

Wir definieren das ***Integral von*** $\mathbf{v}$ ***über*** K als

$$\int_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(t)\big) \cdot \mathbf{x}'(t)\,dt \tag{4.2}$$

Dieses Integral nennt man auch das ***Kurvenintegral*** oder das ***Wegintegral*** von $\mathbf{v}$ entlang K.

Der Wert dieses Kurvenintegrals ist *unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.*

Wieder deutet die Notation auf die Konstruktion des Vektorfeldintegrals hin—es ist im Wesentlich eine Summe der Werte des Skalarprodukts des Vektorfeldes mit den vektoriellen Inkrementen der Lage (und diesmal nicht der Länge) entlang der Kurve.

Beispiel 4.5 Wir berechnen das Integral des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

über den Halbkreis H von Radius 1 aus Beispiel 4.3.

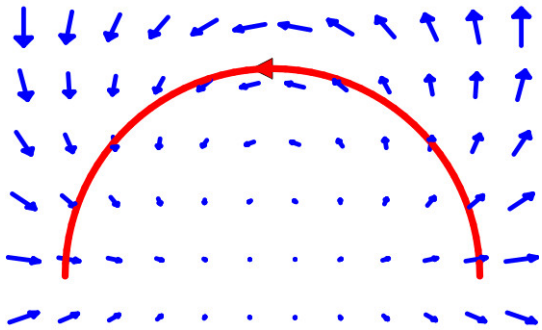


Abbildung 4.2: Das Vektorfeld $(x^2 - y^2, 2xy)^T$ und der Halbkreis H.

Für den Halbkreis wählen wir, wie im anderen Beispiel, die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le \pi)$$

mit

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \int_H \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^\pi \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(t)\big) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt \\ &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ 2\cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi (-\cos^2 t \sin t + \sin^3 t + 2\cos^2 t \sin t)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \big((\cos^2 t + \sin^2 t) \sin t\big)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \sin t\, dt = -\cos t \Big|_0^\pi = 2.$$

4.3 Gradientenvektorfelder und Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Das Kurvenintegral eines skalaren Feldes ist im Wesentlichen das Aufsummieren der Werte einer „Belegung“ der Kurve, die zum Beispiel die Bedeutung einer Massendichte haben kann, und der Wert des Integrals hängt natürlich von dem genauen Verlauf der Kurve ab, weil die skalare Belegung ortsabhängig sein kann. Auch wenn sie es nicht ist, wird das Integral proportional sein zu der Länge der Kurve, und diese hängt von dem genauen Pfad ab.

Anders sieht es aus, wenn man ein *Vektorfeld* über eine Kurve integriert, denn dann summiert man über die Kurve die signierte Länge der Projektion des Vektorfeldes auf die Tangenten zur Kurve.

Wenn die Kurve geschlossen ist, d.h., wenn sie zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt und sozusagen eine „Rundreise“ macht, dann wird in vielen Fällen beim hin- und herwenden die Kurve genau so oft in Richtung des Vektorfeldes verlaufen, wie entgegengesetzt, so dass die aufaddierten Beiträge sich wegheben können und das Integral 0 werden kann.

Denken Sie an einen Radfahrer, der bei starkem Wind von zu Hause aus einen Rundweg fährt und wieder zu Hause ankommt. Wenn er losfährt, hat er vielleicht Rückenwind und freut sich, aber dafür bläst ihm auf dem Rückweg der Wind entgegen und er flucht. Die Arbeit, die er leistet, ist praktisch gleich 0, weil er teilweise stark trampeln muss aber teilweise vom Wind geschoben wird. Die gleiche Sache passiert wenn der Radfahrer ohne Wind eine Rundfahrt durch ein Gebirge macht. Mal muss er bergaufwärts keuchen, mal kann er sich mühelos den Berg wieder herunter rollen lassen, aber seine Gesamtarbeit, wenn man Reibung und Luftwiderstand ignoriert, ist 0.

Diese Begebenheit kann man sich gut bildlich vorstellen in Abbildung 4.3 auf der nächsten Seite, wo die „Wirkung“ eines konstanten Vektorfeldes auf eine geschlossene Kurve dargestellt wird, und man am Gesamtbild erkennen kann, dass die Feldlinien im Mittel genau so viel *gegen* den Kurvenlauf gehen, wie mit ihm.

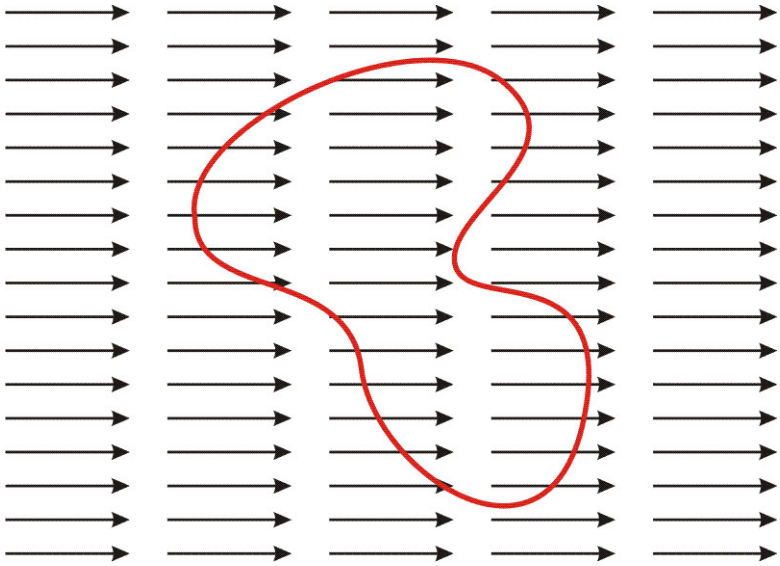


Abbildung 4.3: Ein geschlossener Weg in einem konstanten Vektorfeld

Es ist auf jeden Fall plausibel, dass für manche, genügend schöne Vektorfelder das Kurvenintegral um eine geschlossene Kurve null wird.

Vielleicht denken Sie, dass geschlossene Kurven in Anwendungen nicht so eine große Rolle spielen werden, und dass dieses Verhalten ein bisschen exotisch und deshalb nicht ganz wesentlich ist. Die genannte Tatsache hat aber eine sehr interessante Konsequenz.

Wenn Sie nämlich keine Rundwege mehr betrachten, sondern stattdessen zwei verschiedene Kurven, die von einem Punkt **a** zu einem *anderen* Punkt **b** verlaufen, so können Sie entlang einem der Wege von **a** nach **b** gelangen und dann entlang des *anderen* Weges zurückkehren, und haben dann doch eine Rundreise gemacht.

Wenn das Integral eines Vektorfeldes entlang des Gesamtweges null wird (weil der Gesamtweg eine geschlossene Kurve ist), dann bedeutet das, dass das Integral entlang des ersten Pfades *gleich* dem Integral entlang des zweiten Pfades wäre, wenn man den zweiten Pfad nicht rückwärts, sondern vorwärts durchfahren hätte.

Fazit: *Wenn das Integral eines Vektorfeldes* **v** *über jeden geschlossenen Weg null ist,* dann haben die Integrale dieses Vektorfeldes über je zwei (nicht unbedingt geschlossene) Wege, die an der gleichen Stelle starten und die zum gleichen Endpunkt führen auch den gleichen Wert. Anders gesagt: *das Kurvenintegral eines solchen Vektorfeldes hängt nur von den Endpunkten der Kurve ab,* nicht *vom genauen Verlauf der Kurve dazwischen.*

Wichtig! Diese Diskussion soll nicht den Eindruck erwecken, dass die

genannte Wegunabhängigkeitseigenschaft für alle Vektorfelder gilt oder gelten kann—das ist mit Sicherheit nicht der Fall, denn ein Vektorfeld, das auf einer geschlossenen glatten Kurve mit den Geschwindigkeitsvektoren einer Parametrisierung übereinstimmt, hat sicher ein *positives* Integral über diese Kurve. Solche Vektorfelde sind auch leicht zu konstruieren, das heißt, es gibt sie immer.

Dennoch haben in der Regel viele Vektorfelder die Wegunabhängigkeitseigenschaft, und so stellen sich die Fragen: wie viele? welche? und wie erkennt man sie?

Hier die Antwort:

Definition 4.6 Sei $\mathbf{v}\colon U \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ein Vektorfeld, definiert auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbf{R}^n$.

Wir nennen $\mathbf{v}$ ein ***Gradientenvektorfeld***, wenn es eine differenzierbare Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ gibt mit

$$\nabla f = \mathbf{v}.$$

Jede solche Funktion f nennt man eine ***Stammfunktion*** von $\mathbf{v}$.

Die Funktion $-f$ nennt man ein ***Potential*** für $\mathbf{v}$; das Minuszeichen entspricht der physikalischen Konvention, dass Zustandsveränderungen in einem Kraftfeld $\mathbf{v}$ immer so geschehen, dass die potentielle Energie möglichst schnell abnimmt.

Satz 4.7 *Sei K eine differenzierbare Kurve vom Punkt $\mathbf{a}$ zum Punkt $\mathbf{b}$ in $\mathbf{R}^n$.*

Sei $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ ein Gradientenvektorfeld, dass auf einer offenen Menge $U \supset K$ definiert ist, und sei f eine Stammfunktion von $\mathbf{v}$.

Dann ist

$$\int_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}), \tag{4.3}$$

und das Integral hängt insbesondere nicht vom Verlauf des Weges K ab, sondern nur von den Endpunkten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

Beweis. Sei $\mathbf{x}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ eine Parametrisierung von K. Das Integral in (4.3) berechnet sich als

$$\int_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(t)\big) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt = \int_a^b \nabla f\big(\mathbf{x}(t)\big) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt,$$

und nach der Kettenregel (2.22) kann man den Integranden schreiben als

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\mathbf{x}(t)\big) x_i'(t) = \frac{d}{dt} f\big(\mathbf{x}(t).$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f\big(\mathbf{x}(t)\big)\, dt = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}).$$

■

Bemerkung 4.8 Man kann sogar zeigen, dass in jedem offenen Gebiet in $\mathbf{R}^n$ die Gradientenvektorfelder die *einzigen* stetigen Vektorfelder sind, für die das Kurvenintegral wegunabhängig ist und nur von den Endpunkten der Kurve abhängt.

Wenn ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{v}$ diese Eigenschaft hat, dann kann man nämlich direkt über das Integral eine wohldefinierte Funktion f konstruieren, von der man leicht zeigen kann, dass sie eine Stammfunktion von $\mathbf{v}$ ist.

Auf die Details gehen wir aber nicht ein.

Jede differenzierbare skalare Funktion liefert durch ihren Gradienten ein Gradientenvektorfeld, aber wenn nur das Vektorfeld gegeben ist, sieht man ihm die Gestalt einer möglichen Stammfunktion nicht unmittelbar an.

Trotzdem gibt es ein einfaches Kriterium, um Gradientenvektorfelder ohne Kenntnis einer Stammfunktion direkt zu erkennen.

Satz 4.9 *Sei* $\mathbf{v}$ *ein Vektorfeld definiert auf einem* n*-dimensionalen Würfel in* $\mathbf{R}^n$.

Genau dann ist $\mathbf{v}$ *ein Gradientenvektorfeld, wenn an jeder Stelle im Definitionsbereich und für je zwei Indizes* i *und* j *mit* $1 \leq i, j \leq n$ *gilt*

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \tag{4.4}$$

Auf den Beweis gehen wir nicht ein.

Außerdem können wir aus Zeitgründen nicht auf das verbleibende Problem eingehen, wenn man mit Satz 4.9 ein Gradientenvektorfeld erkannt hat, wie man die explizite Gestalt einer Stammfunktion berechnen kann.

Trotzdem ist dieser Satz nützlich, denn er erlaubt uns zur Bestimmung von Kurvenintegralen für ein als ***Gradientenfeld*** erkanntes Vektorfeld, dass wir, entsprechend der Gestalt des Vektorfeldes, über den jeweils *angenehmsten* Weg zwischen gegebenen Endpunkten integrieren können, da es auf den genauen Weg nicht ankommt.

Beispiele 4.10 a) Die ***Gravitationskraft*** nahe der Erdoberfläche, die auf ein Körper von Masse m wirkt, ist beschrieben durch das Gradientenvektorfeld

$$\mathbf{K} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \operatorname{grad}(-mgz).$$

b) Das anziehende ***Zentralfeld*** mit Stärke invers proportional zum Quadrat der Entfernung zum Zentrum

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = \operatorname{grad}\Big(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\Big)$$

ist auch ein Gradientenvektorfeld.

c)

$$\mathbf{v}_-(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\Big(\frac{1}{3}x^3 - xy^2\Big).$$

d)

$$\mathbf{v}_+(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

ist *kein* Gradientenfeld, denn das Kriterium aus Satz 4.9 ist verletzt:

$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y \neq +2y = \frac{\partial(2xy)}{\partial x}.$$

Beispiele 4.11 Zur Illustration der Wegunabhängigkeit für Gradientenfelder wollen wir die letzten beiden Beispiele

$$\mathbf{v}_\pm(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ \pm 2xy \end{pmatrix}$$

aus 4.10 über zwei verschiedene Wege zwischen $(1,0)$ und $(-1,0)$ integrieren: über den *Halbkreis* H aus Beispiel 4.5 und über die *gerade Strecke* G mit der Parametrisierung

$$\mathbf{y}(t) = (-t, 0) \quad \text{für } t \in [-1,1], \qquad \text{wobei } \mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben schon in Beispiel 4.5 berechnet, dass

$$\int_H (\mathbf{v}_+) \cdot d\mathbf{x} = 2, \tag{4.5}$$

und für das andere Vektorfeld v_- finden wir mit der gleichen Parametrisierung des Halbkreises

$$\begin{aligned}
\int_H (\mathbf{v}_-) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^\pi \mathbf{v}_-\big(\mathbf{x}(t)\big) \cdot \mathbf{x}'(t)\, dt \\
&= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ -2\cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^\pi (-\cos^2 t \sin t + \sin^3 t - 2\cos^2 t \sin t)\, dt \\
&= \int_0^\pi \big((-3\cos^2 t + \sin^2 t)\sin t\big)\, dt \\
&= \int_0^\pi \big((-4\cos^2 t + 1)\sin t\big)\, dt \\
&= \int_0^\pi -4\cos^2 t \sin t\, dt + \int_0^\pi \sin t\, dt
\end{aligned}$$

Hier evaluiert sich das zweite Integral zu 2, wie wir in Beispiel 4.5 gesehen haben, und das erste Integral können wir mit der Substitution $u = -\cos t$, $du = \sin t dt$ umwandeln in

$$\int_{-1}^1 -4u^2\, du = -\frac{4}{3}u^3\Big|_{-1}^1 = -\frac{8}{3}$$

Wenn wir beides zusammenfügen, erhalten wir

$$\int_H (\mathbf{v}_-) \cdot d\mathbf{x} = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3}. \tag{4.6}$$

Zum Vergleich berechnen wir jetzt die Integrale beider Vektorfelder über die gerade Strecke, und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_G (\mathbf{v}_\pm) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{-1}^1 \mathbf{v}_\pm\big(\mathbf{y}(t)\big) \cdot \mathbf{y}'(t)\, dt \\
&= \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^1 -t^2\, dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Diesen Wert erhalten wir für *beide* Vektorfelder, und er stimmt mit (4.6) überein (was wir für das Gradientenfeld v_- ja erwarten), aber nicht mit (4.5).

Für das Nichtgradientenfeld v_+ hängen Wegintegrale also doch vom durchlaufenen Weg ab.

Kapitel 5

Mehrfachintegrale

Wir wollen fortfahren mit der Integration über „kompliziertere Gebilde“ als Intervalle, wobei die Integration über Kurven, die wir in Kapitel 4 behandelt haben, uns den Weg vorgibt.

Dieser Weg besteht darin, den Integrationsbereich, wie immer er aussieht, in kleine Stücke zu unterteilen, in jedem solchen Stück einen typischen Wert des Integranden zu wählen, diesen Wert mit der Größe oder den Inhalt des zugehörigen Bereichsstücks zu gewichten, und die Summe der gewichteten Werte zu bilden.

Wenn wir immer feinere Zerlegungen betrachten, so dass die maximale Größe der Bereichsstücke gegen 0 geht, dann konvergieren in der Regel diese Summenausdrücke gegen einen festen Wert, den wir als den Wert des Integrals erklären.

Die *praktische Berechenbarkeit* wird dadurch erreicht, dass wir die kleinen Stücke unseres Gebietes durch etwas annähern, dessen Inhalt wir kennen, nämlich durch kleine Rechtecke oder Quader, oder etwas allgemeiner aber noch gut handhabbar, durch kleine Parallelogramme oder Parallelepipede (letztere sind geeignet für die Integration über krumme Flächen oder in „krummen“ Koordinatensystemen).

Abbildung 5.1 auf der nächsten Seite illustriert die beschriebene Konstruktion. Wir wollen die Funktion, deren Graphen in Gelb gezeigt wird, über ihren Definitionsbereich in der Ebene integrieren, und zerlegen dieses Gebiet (die Bodenfläche der blauen Figur) in kleine Rechtecke mit Seitenmaßen $\Delta x \times \Delta y$. In jedem Rechteck wählen wir einen typischen Wert der Funktion—in der Abbildung ist es der Wert am Mittelpunkt. Diesen multiplizieren wir mit der Fläche $\Delta x \Delta y$ des Rechtecks; das Ergebnis ist das Volumen des über das Rechteck sich erhebenden blauen Quaders im Bild. Die Summen der Volumina dieser Quader, also das Volumen des gesamten blauen Gebildes, ist eine Ännäherung zum Integral, dessen genauen Wert

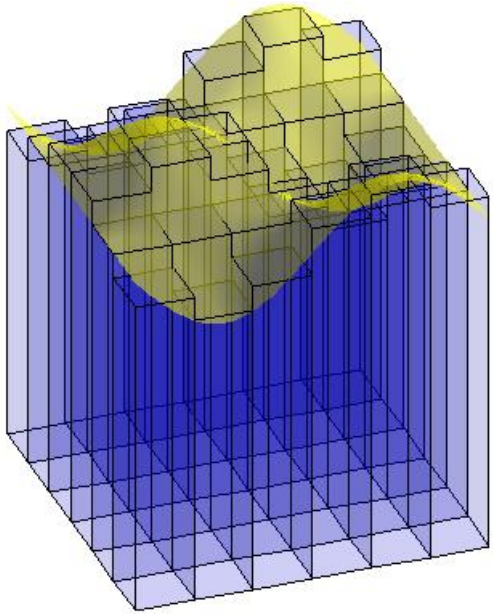


Abbildung 5.1: Die Konstruktion des Integrals über ein Gebiet in der Ebene

man erhält, wenn man die Konstruktion mit einem immer feineren Netz von Rechtecken in der Ebene wiederholt und zum Grenzwert übergeht.

Weil die Fläche eines Rechtecks oder das Volumen eines Quaders das Produkt $\Delta x \Delta y$ oder $\Delta x \Delta y \Delta z$ der Seitenlängen ist, führt der beschriebene Ansatz für die Definition des Integrals über mehrdimensionale Gebiete zu einer sehr praktikablen und bequemen Berechnungsmethode. Diese Integrale können wir als ***Mehrfachintegrale*** darstellen, d.h., als eine Verschachtelung von mehreren eindimensionalen Integrationen über Intervalle, die wir auf klassische Weise ausrechnen können.

Jedes der inneren Integrale in dieser Verschachtelung liefert den Integranden für die nächst äußere Integration, und das Integral ganz außen liefert das Gesamtergebnis.

5.1 Doppelintegrale

Wir beginnen mit einer Beschreibung von Zweifach- oder ***Doppelintegralen***.

Wir wollen das Integral einer stetigen Funktion f von zwei Variablen über ein Gebiet S in der Ebene konstruieren.

5.1.1 Das Doppelintegral über das Rechteck

Die einfachste Situation liegt vor, wenn das Gebiet S ein Rechteck ist, also wenn

$$S = [a,b] \times [c,d] = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b, c \le y \le d \right\}$$

für geeignete Intervalle $[a,b]$ und $[c,d]$, die die Seiten des Rechtecks bilden.

Lemma 5.1 *Wenn S ein Rechteck wie soeben beschrieben ist, und wenn $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige reellwertige Funktion auf S ist, dann ist das Integral von f über S gegeben durch.*

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\substack{\text{bei dieser Integration}\\ \text{wird } x \text{ wie eine}\\ \text{Konstante behandelt!}}} \;dx = \int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\substack{\text{bei dieser Integration}\\ \text{wird } y \text{ wie eine}\\ \text{Konstante behandelt!}}} \;dy \qquad (5.1)$$

Der ganz linke Ausdruck ist unsere Notation für das Integral über ein zweidimensionales Gebiet, aber die genannten Variablen haben darin nur eine konventionelle Platzhalterbedeutung und erzwingen nicht die Berechnung in der angegebenen „Abarbeitungsreihenfolge“ der Koordinatenrichtungen.

Die beiden Doppelintegrale rechts haben den gleichen Wert, d.h., es spielt tatsächlich keine Rolle, in welcher Reihenfolge wir das zweidimensionale Integral in verschachtelte eindimensionale Integrale auflösen.

Bei den inneren Integralen der Doppelintegrale wird die „unbeteiligte“ Variable, nach der gerade nicht integriert wird, wie eine Konstante aufgefasst. Das Ergebnis der inneren Integration hängt natürlich von dem Wert dieser „Konstanten“ ab, d.h., das innere Integral bestimmt eine *Funktion* der „unbeteiligten“ Variablen, und diese Funktion wird dann im *äußeren* Integral bezüglich dieser Variablen integriert.

Beispiel 5.2

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dx \right) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos(\tfrac{\pi}{2}+y) + \cos y \right) dy \\
&= \left(-\sin(\tfrac{\pi}{2}+y) + \sin y \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\sin\pi + \sin\tfrac{\pi}{2} + \sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.3 Den ***Inhalt***, d.h., die ***Fläche*** $F(S)$ eines ebenen Bereichs S erhalten wir, wie üblich, als das Integral von 1 über den Bereich.

$$F(S) = \iint\limits_S 1\,dx\,dy.$$

5.1.2 Normbereiche

Über einen Rechteck zu integrieren ist besonders angenehm, weil die Seiten parallel zu Koordinatenachsen sind und sich deshalb feste Werte für die Integrationsgrenzen in jeder Richtung ergeben.

Viel allgemeiner anwendbar, aber nicht wesentlich schwieriger ist die Situation, in der nur die äußersten Integrationsgrenzen fest sind, aber die inneren von den äußeren Variablen noch abhängen dürfen. Diese Situation ist geometrisch gegeben, wenn der Integrationsbereich an zwei Seiten durch Geraden (oder in höheren Dimensionen durch Ebenen usw.) begrenzt ist, aber an den anderen Seiten begrenzt ist durch möglicherweise krumme Graphen von Funktionen.

Integrationsbereiche, die so aussehen, nennen wir ***Normbereiche***.

Lemma und Definition 5.4 *Sei S ein Teilgebiet von der Ebene $\mathbf{R}^2$ und sei $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion.*

a) *Wir nennen S einen **Normbereich bezüglich der y-Achse**, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a,b] \subset \mathbf{R}$ und zwei reelle stetige Funktionen g und $h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ gibt, so dass*

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b,\;\; g(x) \le y \le h(x) \right\}. \tag{5.2}$$

In diesem Fall erhalten wir das Integral von f über S als

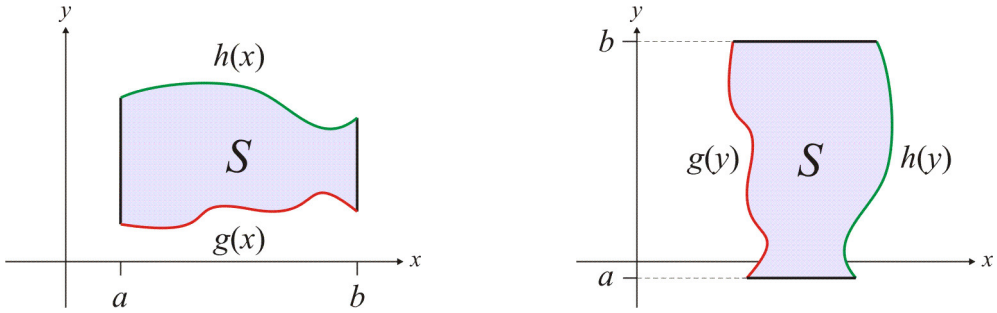
$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \tag{5.3}$$

b) *Wir nennen S einen **Normbereich bezüglich der x-Achse**, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a,b] \subset \mathbf{R}$ und zwei reelle stetige Funktionen g und $h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ gibt, so dass*

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; a \le y \le b,\;\; g(y) \le x \le h(y) \right\}. \tag{5.4}$$

In diesem Fall erhalten wir das Integral von f über S als

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{5.5}$$



(a) bezüglich der y-Achse (b) bezüglich der x-Achse

Abbildung 5.2: Normbereiche

c) *Wir nennen S einfach einen **Normbereich**, wenn S sich zerlegt als eine Vereinigung*

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$$

von Normbereichen S_i bezüglich der x-Achse oder der y-Achse, die sich höchstens entlang ihrer Randkurven gegenseitig schneiden.

Das Integral von f über einen Normbereich kann man immer durch geeignete Doppelintegrale berechnen (wobei man eventuell nicht mit einem einzigen Doppelintegral auskommt, sondern das Gesamtintegral als eine Summe aus mehreren Doppelintegralen bilden muss).

Beispiel 5.5 Wir berechnen die Lage des Schwerpunkts des Dreiecks

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\;\; 0 \le y \le 1 - x \right\}.$$

Dieser Bereich ist sowohl ein Normbereich bezüglich der y-Achse (mit $a = 0$, $b = 1$, $g(x) = 0$ und $h(x) = 1 - x$) wie auch bezüglich der x-Achse (mit $a = 0$, $b = 1$, $g(y) = 0$ und $h(y) = 1 - y$).

Dass man in beiden Fällen die gleichen Daten verwenden kann liegt daran, dass S symmetrisch liegt zur Geraden $x = y$ und deshalb in sich selber übergeht, wenn man die x- und y-Koordinaten vertauscht. Aus diesem Grund sehen aber auch alle Berechnungen mit S als Normbereich bezüglich der x-Achse genau so aus, wie die Berechnungen, wenn man S als Normbereich bezüglich der y-Achse auffasst, und wir führen sie deshalb nur für eine Variante aus.

Die Fläche von S ist

$$\begin{aligned}
F(S) &= \iint\limits_S 1\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left(y\Big|_0^{1-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 (1-x)\,dx \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Das Moment μ_y in y-Richtung beträgt

$$\begin{aligned}
\mu_y &= \iint\limits_S y\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx \\
&= -\frac{(1-x)^3}{6}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{(1-1)^3}{6} - \left(-\frac{(1-0)^3}{6} \right) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Aus den oben genannten Symmetriegründen hat das Moment in x-Richtung den gleichen Wert. Man kann S als Normbereich bezüglich der x-Achse auffassen und das gleiche Integral wieder hinschreiben, nur mit x und y vertauscht. Es kommt natürlich der gleiche Wert heraus.

Also sind beide Koordinaten des Schwerpunkts gegeben durch

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{\mu_y}{F(S)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Der Schwerpunkt von S liegt bei $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Normbereiche kann man auch in höheren Dimensionen anwenden, zum Beispiel in $\mathbf{R}^3$. Es wird dem Leser als Übung überlassen, wie die genaue Formulierung dann lautet, aber die Grundidee ist klar.

5.2 Andere Koordinatensysteme

Oft kommen in technischen Anwendung Integrationsbereiche wie Kreissegmente oder Teile eines Zylinders oder einer Kugel vor, die sich nur umständlich oder mit unangenehmen Integrationsgrenzen in Normbereiche zerlegen lassen.

Viele dieser Fälle lassen sich aber stark vereinfachen durch die Verwendung passender ***krummliniger Koordinaten***, in denen der Integrationsbereich sogar wie ein einfaches Rechteck oder ein Quader aussehen kann.

Man muss nur ein wenig aufpassen—man darf sich durch diese einfache Gestalt des Integrationsbereichs nicht dazu verleiten lassen, das Integral einer Funktion in den neuen Koordinaten schlicht als Doppel- oder Dreifachintegral zwischen den nun sehr angenehm gewordenen Integrationsgrenzen hinzuschreiben. Das ist aus folgendem Grund nicht zulässig.

Bei der Definition des Integrals über ein Gebiet in der Ebene oder im Raum haben wir den Integrationsbereich in kleine „Blöcke“ (Rechtecke oder Quader) von Seitenlängen $\Delta x \times \Delta y$ oder $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ zerlegt. Bei der Bildung von Riemann Summen (und dem Integral als deren Grenzwert) gingen die Fläche $\Delta x \Delta y$ oder das Volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ der Blöcke in den Ausdruck ein, und diese besondere Form der Fläche oder des Volumens führte schließlich dazu, dass man das Gesamtintegral als ein Mehrfachintegral auflösen konnte.

Aber was hier beschrieben wurde ist für krummlinige Koordinaten nicht mehr gültig, da die kleinen „Rechtecke“ oder „Quader“ in den neuen Koordinaten in Wirklichkeit, also wenn man sie in kartesischen Koordinaten betrachtet, verzerrt und verbogen sind und ihr Inhalt deshalb nicht mehr das Produkt der Seitenlängen ist.

Die wahre Gestalt der Blöcke ist nämlich nur das *Bild* eines Rechtecks

oder Quaders unter der ***Koordinatentransformation***

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\colon \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (u, v, \dots) &\longmapsto (x, y, \dots), \end{aligned}$$

die die neuen Koordinaten $(u, v, \dots)$ in kartesische Koordinaten übersetzt, und diese Bilder sind im allgemeinen keine Rechtecke oder Quader mehr. Abbildung 5.3 zeigt das Netz dieser Pseudorechtecke in einem typischen krummlinigen Koordinatensystem.

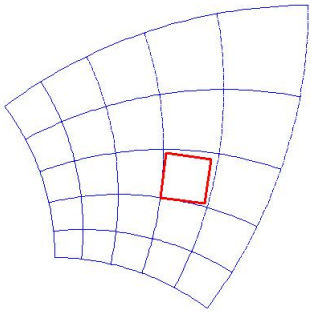


Abbildung 5.3: krummlinige Koordinaten

Das heißt, dass wir bei der Herleitung des Integrals die Terme $\Delta x \Delta y$ oder $\Delta x \Delta y \Delta z$ durch die wirkliche Fläche oder das wirkliche Volumen der krummen Blöcke ersetzen müssen.

Dieser wirkliche Inhalt wird im allgemeinen schwer zu berechnen sein, und vor allem für jede Stelle und jedes Koordinatensystem eine besondere Überlegung verlangen. Deshalb ***schätzen*** wir den Inhalt nur, in dem wir für jeden Block die Koordinatentransformation $\mathbf{x}$ durch ihre lineare Annäherung $\mathbf{y}$ bezüglich einer Ecke des Blocks ersetzen. Wir verlieren keine wirkliche Information dadurch, denn nach dem Grenzübergang zum Integral wird die Schätzung exakt.

Weil die lineare Annäherung eben linear ist, bildet sie Rechtecke auf Parallelogramme oder Quader auf Parallelepipede ab, die aufgespannt werden von den Vektoren Δx_j mal die j-te Spalte der Jacobimatrix von $\mathbf{x}$ (für $j = 1 \dots n$). In Abbildung 5.3 wird eines dieser Parallelogramme, die die krummen Blöcke annähern, in rot gezeigt.

Die Fläche eines solchen Parallelogramms oder das Volumen eines solchen Parallelepipeds ist aber nicht einfach das Produkt der Seitenlängen, weil die Seiten nicht senkrecht aufeinander stehen, sondern schräg zueinander stehen können.

Das Volumen kann man trotzdem ausrechnen, wenn man die aufspannenden Vektoren, also die Spaltenvektoren der Jacobimatrix $D\mathbf{x}$, orthogonali-

siert, und mit ein wenig Überlegung (die wir hier nicht nachvollziehen) sieht man, dass das Volumen natürlich proportional zu dem Produkt der Seitenlängen ist, wobei der *positive* Proportionalitätsfaktor *der Betrag der Determinante* $\big|\det(D\mathbf{x})\big|$ der Jacobimatrix ist. Der Proportionalitätsfaktor muss positiv gemacht werden (durch Nehmen des Betrages), weil er den Inhalt der kleinen Blöcke ausrechnet und Inhalte immer positiv sind.

Wenn wir damit weiterrechnen, kommen wir auf die gleiche Weise wie bei der Integration in kartesischen Koordinaten zu einem Mehrfachintegral, in dem der eigentliche Integrand aber noch mit dem Proportionalitätsfaktor oder „Korrekturfaktor" $\big|\det(D\mathbf{x})\big|$ zu multiplizieren ist. Wir formulieren diese Vorschrift als Satz, wobei wir die „krummen" Koordinaten mit $u_1, \ldots, u_n$ bezeichnen.

Satz 5.6 (n-dimensionale Substitutionsregel) *Sei*

$$U := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ein Quader in $\mathbf{R}^n$*, und sei*

$$\mathbf{x}\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung.

Sei $S := \mathbf{x}(U)$ *und sei* $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ *eine stetige Funktion auf* S*.*

Dann ist

$$\begin{aligned}\iint\cdots\int_S f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n \\ &= \iint\cdots\int_U \Big((f\circ\mathbf{x})\cdot\big|\det(D\mathbf{x})\big|\Big)(u_1,\ldots,u_n)\,du_1\,\ldots\,du_n \\ &= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f\big(\mathbf{x}(u_1,\ldots,u_n)\big)\big|\det\big(D\mathbf{x}(u_1,\ldots,u_n)\big)\big|\,du_n\,\ldots\,du_1.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dieser Satz funktioniert genau so und ist genau so anzuwenden, wie die Substitutionsregel für eindimensionale Integrale.

Gleichzeitig liefert er aber eine Berechnungsformel für Integrale bezüglich krummliniger Koordinatensysteme. Dabei soll man U als ein Quader in einem *nichtkartesischen* Koordinatenraum auffassen, und die Abbildung $\mathbf{x}$ verstehe man als die ***Koordinatentransformation***, die die U-Koordinaten in kartesische Koordinaten übersetzt.

Integrale über „krumme Gebiete" im kartesischen $\mathbf{R}^n$, die aber in einem anderen geeigneten Koordinatensystem $u_1, \ldots, u_n$ wie Quader aussehen, lassen sich mit dieser Formel aus dem kartesischen Koordinatensystem in den neuen Koordinatenraum „zurückholen" und dort leichter ausrechnen.

Obwohl in Satz 5.6 die Rede von einem ***Quader*** ist, lässt sich der Satz auf offensichtliche Weise verallgemeinern zu Integrationsgebieten, die in dem neuen Koordinatenraum wie Normbereiche aussehen. Die Integrationsgrenzen in dem Mehrfachintegral in (5.6) werden dann variabel, aber sonst ändert sich nichts.

5.2.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten (r, φ) sind ein Koordinatensystem in der Ebene, das sehr geeignet ist für die Behandlung von Kreisen, Kreisscheiben, Kreissektoren und anderen Gebilden, die eine Art Drehsymmetrie aufweisen.

Für einen Punkt P mit Polarkoordinaten (r, φ) ist r die ***Entfernung*** von P zum Koordinatenursprung, während φ, auch das ***Argument*** von P genannt, der ***Winkel*** ist, durch den man die positive x-Achse in Gegenuhrzeigersinn drehen müsste, bis sie durch P verläuft. Die Koordinate φ ist also der Winkel, in diesem Sinne gemessen, zwischen der positiven x-Achse und dem Ortsvektor von P. Diese Merkmale sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

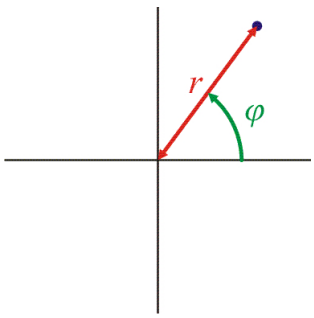


Abbildung 5.4: Polarkoordinaten

Wie man mit elementaren Kenntnissen aus der Geometrie und der Trigonometrie leicht nachvollziehen kann, ist die Umwandlungsformel von Polar- zu kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Diese zwei Gleichungen kann man auflösen und erhält für die Umwand-

lung von kartesischen in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{wenn } x > 0; \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{wenn } x < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x = 0 \text{ und } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x = 0 \text{ und } y < 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Hier bedeutet arctan den Zweig des Arkustangens, der Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Und natürlich darf man beliebige Vielfache von 2π zu den Werten von φ addieren und erhält weitere Koordinaten, die den gleichen Punkt bezeichnen.

Durch direktes Einsetzen aus (5.7) und eine einfache Zusatzüberlegung darüber, ob das Argument zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegt, kann man die Richtigkeit von (5.8) leicht nachprüfen.

Es gibt nur einen Punkt, an dem die Formeln (5.8) keinen Sinn ergeben und an denen die Polarkoordinaten auch lokal nicht eindeutig bestimmt sind, und das ist der Koordinatenursprung, wo $x = y = 0$, und wo $r = 0$ aber φ alle Werte annimmt.

Die Jacobimatrix der Koordinatentransformation (5.7) ist

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist $r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$. Deshalb haben wir folgende Regel für die Integration in Polarkoordinaten.

Satz 5.7 (Substitutionsregel für Polarkoordinaten) *Sei S ein Gebiet in der Ebene, das in **Polarkoordinaten** (r, φ) die Gestalt eines Rechtecks oder allgemeiner eines Normbereichs hat, und sei $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion auf S.*

Dann ist

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_S r f(r,\varphi)\,dr\,d\varphi$$
$$= \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r f(r,\varphi)\,d\varphi\,dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r f(r,\varphi)\,dr\,d\varphi, \tag{5.9}$$

wo natürlich die Integrationsgrenzen in den Doppelintegralen passend zu S gewählt werden müssen.

Beispiel 5.8 Als Beispiel berechnen wir die Fläche einer Kreisscheibe S von Radius R.

In Polarkoordinaten hat S die Gestalt

$$S = \left\{ (r, \varphi) \;\middle|\; 0 \le r \le R,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\},$$

und das ist in diesen Koordinaten ein „Rechteck“. Die Fläche ist

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S 1\, dx\, dy &= \iint\limits_S r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^R d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\, d\varphi \\
&= \frac{R^2}{2}\, \varphi\bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \\
&= \pi R^2,
\end{aligned}$$

wie zu erwarten war.

5.2.2 Zylinderkoordinaten

Es gibt zwei „natürliche“ Möglichkeiten, die Polarkoordinaten zum dreidimensionalen Raum zu verallgemeinern. Welche dieser Möglichkeiten man verwendet, hängt davon ab, ob der untersuchte Gegenstand eine Kreissymmetrie oder Drehsymmetrie bezüglich einer Achse im Raum hat, oder ob das Gebiet eine Symmetrie bezüglich eines Punktes aufweist.

Im erstgenannten Fall wählt man zunächst die kartesischen Koordinaten (x, y, z) so, dass die Symmetrieachse der z-Achse entspricht, und um für das Rechnen mit dieser Symmetrie bequeme krummlinige Koordinaten im Raum zu erhalten, führt man in der (x, y)-Ebene Polarkoordinaten (r, φ) ein, aber behält die dritte kartesische Koordinate z unverändert bei.

Die so gestalteten Koordinaten (r, φ, z) im Raum heißen ***Zylinderkoordinaten***, weil die Niveauflächen der Koordinate r *Zylinder* mit Radius r um die z-Achse sind. (Die Niveauflächen der anderen Koordinaten φ und z sind

Ebenen, die die z-Achse enthalten, bzw. die parallel zur üblichen (x, y)-Ebene sind.)

Für einen Punkt P mit Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ist r die Entfernung von P zur z-Achse (*nicht* zum Koordinatenursprung!), und φ ist der Winkel zwischen der senkrechten Ebene durch P und dem Koordinatenursprung, und der Hälfte der (x, z)-Ebene, in der x positiv ist. Die Koordinate z ist wie im kartesischen System die Höhe über der waagerechten Ebene durch den Ursprung.

Abbildung 5.5(a) auf Seite 93 zeigt die geometrische Bedeutung der drei Zylinderkoordinaten eines Punktes.

Die Umwandlungsformel von Zylinder- zu kartesischen Koordinaten erhält man sofort aus Formel (5.7) für Polarkoordinaten, und sie lautet

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Für die Umwandlung von kartesischen in Zylinderkoordinaten hat man wieder $z = z$ und für die anderen beiden Koordinaten kann man Formel (5.8) (die wir hier nicht noch einmal angeben) unverändert übernehmen.

Wie es schon bei den Polarkoordinaten der Fall war, ist die Umwandlung zwischen den Koordinatensystemen lokal eindeutig, außer an Stellen auf der z-Achse, wo $x = y = r = 0$.

Die Jacobimatrix der Koordinatentransformation (5.10) ist

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist wieder r, wie bei den Polarkoordinaten. Deshalb haben wir folgende Regel für die Integration in Zylinderkoordinaten.

Satz 5.9 (Substitutionsregel für Zylinderkoordinaten) *Sei S ein Gebiet im Raum, das in **Zylinderkoordinaten** (r, φ, z) die Gestalt eines Quaders oder allgemeiner eines Normbereichs hat, und sei $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion auf S.*

Dann ist

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_S r f(r,\varphi,z)\,dr\,d\varphi\,dz$$
$$= \int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{z_1}^{z_2} r f(r,\varphi,z)\,dz\,d\varphi\,dr \quad (5.11)$$

wo natürlich die Integrationsgrenzen im Dreifachintegral passend zu S gewählt werden müssen, und wo man in diesem Integral auch die Integrationsreihenfolge beliebig umtauschen darf.

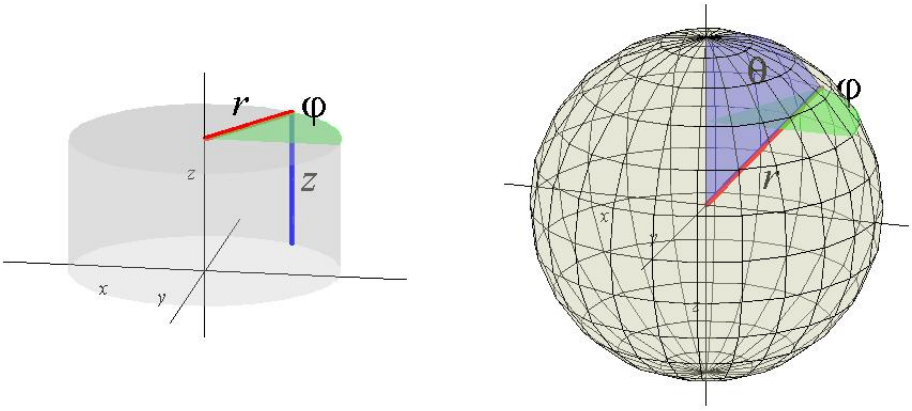
Beispiel 5.10 Als Beispiel berechnen wir die Masse eines Zylinders von Radius 1 und von Höhe 1, der auf der (x,y)-Ebene steht mit dem Mittelpunkt der Grundfläche am Koordinatenursprung, und so dass die Dichte an jeder Stelle gleich der quadrierten Entfernung dieser Stelle zum Koordinatenursprung ist, also gleich $x^2+y^2+z^2$ an der Stelle mit kartesischen Koordinaten (x,y,z).

In Zylinderkoordinaten hat S die Gestalt

$$S = \big\{\,(r,\varphi,z)\;\big|\;0\le r\le R,\;\;0\le\varphi\le 2\pi,\;\;0\le z\le 1\,\big\},$$

und das ist in diesen Koordinaten ein „Quader“. Die Masse ist

$$\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz\\
&= \iiint\limits_S r(r^2+z^2)\,dr\,d\varphi\,dz\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 (r^3+rz^2)\,dz\,dr\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r^3z+r\frac{z^3}{3}\Big)\Big|_0^1\,dr\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r^3+\frac{r}{3}\Big)\,dr\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{6}\Big)\Big|_0^1\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{5}{12}\,d\varphi\\
&= \frac{5}{6}\pi.
\end{aligned}$$



(a) Zylinderkoordinaten (b) Kugelkoordinaten

Abbildung 5.5: Koordinatensysteme im Raum

5.2.3 Kugelkoordinaten

Die zweite Verallgemeinerung der Polarkoordinaten zum dreidimensionalen Raum erweitert sie nicht auf so einfache Weise wie bei den Zylinderkoordinaten, wo die dritte kartesische Koordinate einfach beibehalten wurde.

Stattdessen wird die Idee hinter den Polarkoordinaten tatsächlich ins Dreidimensionale übertragen, indem wieder die Entfernung zum Ursprung (und nicht zur z-Achse) eine der Koordinaten ist, und die Navigation auf den jetzt zweidimensionalen Niveau*sphären* dieser Entfernung von *zwei* Winkelkoordinaten geregelt wird, die so ähnlich (aber leider nicht genau so) funktionieren, wie Längen- und Breitengrad auf der Erdoberfläche.

Die erste Winkelkoordinate φ entspricht tatsächlich dem Längengrad und misst wie die gleichnamige Zylinderkoordinate den Drehwinkel um die z-Achse oder gleichbedeutend, den Winkel nach „Osten“ entlang des Äquators der Niveausphäre. Sie nimmt Werte zwischen 0 und 2π an.

Aber die zweite Winkelkoordinate θ, obwohl sie tatsächlich entlang der Längenkreise oder Meridiane der Sphäre gemessen wird, entspricht nicht genau dem geographischen Breitengrad, weil sie nicht wie dieser vom Äquator weg, sondern vom Nordpol weg gemessen wird. Das heißt, der geographische Breitengrad ist gleich $90° - \theta$.

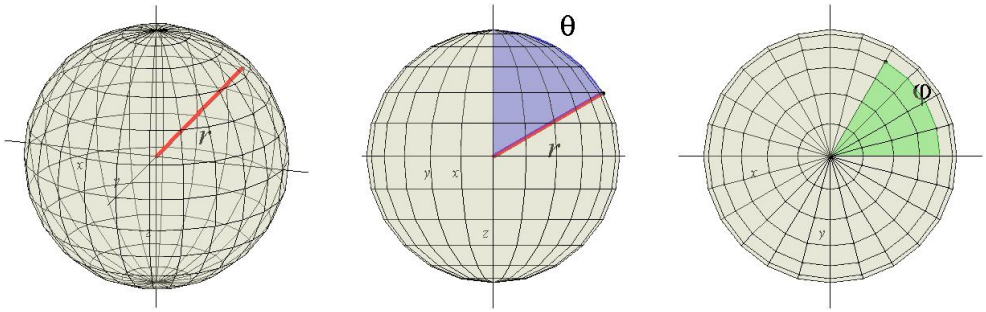
Aus diesem Grund nimmt θ Werte zwischen 0 (am Nordpol) und π (am Südpol) an, und Punkte auf dem Äquator haben $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Diese ungewöhnliche Konvention hat Vorteile an späteren Stellen der technischen Mathematik (die wir in dieser Vorlesung nicht berühren werden), und sie ist deshalb *üblich* unter Ingenieuren. Aber Vorsicht! Das hat sich nicht bei

allen Autoren herumgesprochen, und deshalb gibt es auch Bücher, in denen die vom Alltagsleben gewohntere Konvention des Messens weg vom Äquator verwendet wird. Alle derivaten Formeln in diesen Büchern müssen *übersetzt werden*, damit sie zu unserer Konvention passen. Die Übersetzung ist nicht schwer (und besteht im wesentlichen darin, $\cos\theta$ und $\sin\theta$ in allen Formeln zu vertauschen), aber sie ist verwirrend und führt natürlich zu Fehlern, wenn man nicht darauf achtet.

Die so gestalteten Koordinaten (r, θ, φ) im Raum heißen ***Kugelkoordinaten***, weil die Niveauflächen der Koordinate r diesmal *Sphären* mit Radius r um $\mathbf{0}$ sind, also Oberflächen von *Kugeln* (auf englisch heißen diese Koordinaten ***spherical coordinates***).

Abbildung 5.5(b) auf der vorherigen Seite zeigt die geometrische Bedeutung der drei Kugelkoordinaten eines Punktes. Falls Sie Schwierigkeiten haben, die räumliche Situation in dieser kombinierten Zeichnung wahrzunehmen, haben wir in den drei Bildern von Abbildung 5.6 eine separate Darstellung der einzelnen Koordinaten beigefügt.



(a) r (b) θ und r (c) φ

Abbildung 5.6: Die einzelnen Kugelkoordinaten

Das Bild für θ und r ist ein Blick aus der Ebene des Äquators, und das Bild für φ ist ein Blick direkt von oben (entlang der z-Achse).

Aus diesen Bildern kann man auch leicht die Umwandlungsformel von Kugel- in kartesische Koordinaten herleiten. Aus Abbildung 5.6(b) ist klar, dass der Punkt mit Kugelkoordinaten (r, θ, φ) die Höhe $z = r\cos\theta$ über der (x, y)-Ebene hat und in Entfernung $r\sin\theta$ zur z-Achse liegt.

Letzteres heißt, dass der Breitenkreis dieses Punktes auf der Sphäre den Radius $\tilde{r} = r\sin\theta$ hat, d.h., auf seiner Höhe über der (x, y)-Ebene liegt dieser Punkt am Rande einer Kreisscheibe vom genannten Radius.

Der relevante Sektor dieser Kreisscheibe sehen wir in Grün in Abbildung 5.6(c), in der die waagerechte Achse die x-Achse und die senkrecht erscheinende Achse die y-Achse ist. Aus diesem Bild und unter Beachtung

des Radius des grünen Sektors ist es nun klar, dass $x = \tilde{r}\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$ und das $y = \tilde{r}\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi$.

Also lautet die Umwandlung von Kugel- in kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Die Formel für die Umwandlung in die andere Richtung werden wir hier nicht angeben, aber sie lässt sich bei Bedarf leicht herleiten.

Die Umwandlung zwischen diesen Koordinatensystemen ist lokal eindeutig, außer an Stellen auf der z-Achse, also wo $r = 0$ oder wo $\theta = 0$ oder π. Wo $r = 0$ fallen alle Werte der anderen Koordinaten zusammen; wo $\theta = 0$ oder π fallen alle Werte von φ zusammen.

Die Jacobimatrix der Koordinatentransformation (5.12) ist

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist $r^2\sin\theta$.

Man beachte, dass dies automatisch ≥ 0 ist, weil im Bereich $[0, \pi]$ für θ der Sinus nicht negativ wird. Deshalb müssen wir keinen Betrag um die Determinante setzen, und wir erhalten folgende Regel für die Integration in Kugelkoordinaten.

Satz 5.11 (Substitutionsregel für Kugelkoordinaten) *Sei S ein Gebiet im Raum, das in **Kugelkoordinaten** (r, θ, φ) die Gestalt eines Quaders oder allgemeiner eines Normbereichs hat, und sei $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion auf S.*

Dann ist

$$\begin{aligned} \iiint\limits_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \iiint\limits_S r^2\sin\theta\, f(r,\theta,\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\sin\theta\, f(r,\theta,\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,dr, \end{aligned} \tag{5.13}$$

wo natürlich die Integrationsgrenzen im Dreifachintegral passend zu S gewählt werden müssen, und wo man in diesem Integral auch die Integrationsreihenfolge beliebig umtauschen darf.

Beispiel 5.12 Als Beispiel berechnen wir das Volumen einer Vollkugel von Radius R, Wir wählen Koordinaten mit Ursprung am Mittelpunkt der Kugel.

In Kugelkoordinaten hat S die Gestalt

$$S = \left\{ (r, \theta, \varphi) \;\middle|\; 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\},$$

und das ist in diesen Koordinaten ein „Quader“. Das Volumen ist

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_S 1\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint\limits_S r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3} \sin\theta \Big|_0^R\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\
&= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi}\, d\varphi \\
&= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \big(-\cos\pi - (-\cos 0)\big)\, d\varphi \\
&= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

Kapitel 6

Flächenintegrale

Wir setzen unsere Erweiterungen der Integration fort mit der Untersuchung von ***Flächenintegralen***, also mit der Integration über zweidimensionale Bereiche, die aber jetzt nicht wie in Kapitel 5 Teile der euklidischen Ebene $\mathbf{R}^2$ sind, sondern „krumme Flächen“ im dreidimensionalen Raum.

Typische Beispiele solcher Flächen, die in der Technik vorkommen, sind die ***Oberfläche einer Kugel***, die ***Oberfläche eines Zylinders*** oder die ***Oberfläche eines Ellipsoids*** (oder Teile von solchen Flächen), und natürlich viele andere mehr.

Die Integration von Skalarfeldern über Flächen im Raum bildet eine natürliche Erweiterung zur Integration von Skalarfeldern über Kurven, und auch die Vorgehensweise ist sehr ähnlich. Die *Definition* dieser Integrale basiert auf unserer Standardidee der Unterteilung des Integrationsbereichs in kleine Gebiete und der Bildung von Riemannsummen (aus Funktionswerten gewichtet mit den Flächen der kleinen Teilgebiete), die im Grenzwert zum Integral konvergieren.

6.1 Parametrisierte Flächen

6.1.1 Parametrisierungen

Zur *Berechnung* der Integrale brauchen wir wie bei Kurvenintegralen eine ***Parametrisierung*** der Fläche, aber anders als bei den Kurven hängt die Parametrisierung $\mathbf{x}(u, v)$ jetzt von *zwei* Parametern u und v ab, da wir es mit Flächen zu tun haben und Flächen *zweidimensional* sind.

Definition 6.1 Eine (regulär parametrisierte) ***Fläche*** im Raum $\mathbf{R}^3$ ist eine Teilmenge $S \subset \mathbf{R}^3$, so dass es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^2$ und eine stetig

differenzierbare Abbildung

$$\mathbf{x}\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

gibt mit den Eigenschaften:

a) $\mathrm{Bild}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(U) = S$ (also $\mathbf{x}$ füllt S aus).

b) $\mathbf{x}$ bildet verschiedene Parameterwertpaare (u, v) auf verschiedene Punkte von S ab (Mathematiker sagen dazu: $\mathbf{x}$ ist ***injektiv***).

c) An jeder Stelle $(u, v) \in U$ sind die Geschwindigkeitsvektoren $\partial\mathbf{x}/\partial u$ und $\partial\mathbf{x}/\partial v$ in den zwei Parameterrichtungen linear unabhängig in $\mathbf{R}^3$ (wir sagen dazu: $\mathbf{x}$ ist ***nichtausgeartet*** oder ***regulär***).

Jede solche Abbildung $\mathbf{x}$ nennt sich eine ***reguläre Parametrisierung von*** S.

Die Kurven in S, die wir erhalten, wenn wir einen der beiden Parameter festhalten und nur den anderen variieren, also die Kurven

$$u \mapsto \mathbf{x}(u, v_0) \qquad \text{(für festes } v_0\text{)}$$

und

$$v \mapsto \mathbf{x}(u_0, v) \qquad \text{(für festes } u_0\text{)},$$

nennen wir ***Parameterlinien von*** $\mathbf{x}$, und die Geschwindigkeitsvektoren der Parameterlinien, d.h., die Vektoren $\partial\mathbf{x}/\partial u$ und $\partial\mathbf{x}/\partial v$, nennen wir die ***Tangentialvektoren zu den Parameterlinien*** oder die ***Tangentialvektoren zur Parametrisierung*** an jeder Stelle.

In Anwendungen kann man manchmal für einzelne Werte eines der Parameter die Bedingungen b) oder c) lockern. Das ermöglicht die Betrachtung von Flächen mit Selbstdurchdringungen oder mit Knicken, Falzen oder Spitzen (zum Beispiel der Kegel).

Außerdem insistieren wir nicht darauf, dass die Parametrisierung nur auf einem *offenen* Bereich U von Parameterwerten definiert sein darf, sondern lassen in der Praxis auch zu, dass U Randkomponenten hat. Wichtig ist nur die stetige Differenzierbarkeit der Parametrisierung auch an solchen Randstellen.

In Abbildung 6.1 auf der nächsten Seite sieht man eine typische parametrisierte Fläche mit ihren Parameterlinien in den beiden Parameterrichtungen. An einer Stelle werden die Tangentialvektoren gezeigt.

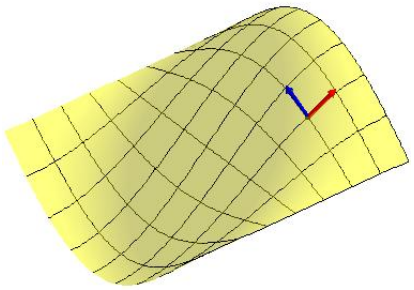


Abbildung 6.1: Eine parametrisierte Fläche

Beispiele 6.2 a) Sei $R > 0 \in \mathbf{R}$. Die ***Kugeloberfläche von Radius*** R hat die auf $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ definierte Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix},$$

die offensichtlich aus den Kugelkoordinaten für den festen Radius $r = R$ entstanden ist.

b) Sei $R > 0 \in \mathbf{R}$. Die ***Kugeloberfläche von Radius*** R hat *auch* die auf $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definierte Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix},$$

die auf den geographischen Koordinaten Längengrad (φ) und Breitengrad (θ) basiert.

Hier *gibt es keinen Standard* und natürlich darf man jede Parametrisierung verwenden, die den Bedingungen in Definition 6.1 genügt.

In diesem und in dem vorhergehenden Teil a) sind allerdings Bedingungen 6.1 b) und c) an den Polen verletzt, aber das nehmen wir noch hin.

c) Sei $R > 0 \in \mathbf{R}$. Die ***Oberfläche eines Zylinders von Radius*** R hat

die auf $[0, 2\pi] \times \mathbf{R}$ definierte Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix},$$

die die Zylinderkoordinaten darstellt mit dem festen Wert $r = R$ für die Radiuskoordinate.

d) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\colon [0, 2\pi] \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\varphi, z) &\longmapsto \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

parametrisiert den ***Kegel*** mit der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ im Bereich $z \geq 0$.

Notation 6.3 Da wir sehr viel mit den Tangentialvektoren von Parametrisierungen rechnen werden, lohnt es sich, eine bequemere Notation für sie einzuführen als die voll ausgeschriebenen partiellen Ableitungen $\partial\mathbf{x}/\partial u$ und $\partial\mathbf{x}/\partial v$.

Sei generell $\mathbf{v}\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ eine vektorwertige Funktion auf einem Teilgebiet von $\mathbf{R}^n$, und seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Namen der Koordinaten von $\mathbf{R}^n$. Wir schreiben

$$\mathbf{v}_{x_i} = \begin{pmatrix} (v_1)_{x_i} \\ (v_2)_{x_i} \\ \vdots \\ (v_m)_{x_i} \end{pmatrix}$$

als Abkürzung für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Hier sind $v_1, v_2, \ldots, v_m$ die Koordinaten von $\mathbf{v}$.

6.1.2 Tangentialebenen und Normalvektoren

Bemerkung 6.4 Sei S eine Fläche im Raum mit der Parametrisierung $\mathbf{x}\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^3$.

Die Parametrisierung ist genau dann ***regulär*** an der Stelle $(u, v) \in U$ nach Definition, wenn die Tangentialvektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ an dieser Stelle linear unabhängig sind. Diese Bedingung, also Bedingung 6.1 c), ist äquivalent dazu, dass $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$.

An einer regulären Stelle von S spannen die Vektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ der Parametrisierung die ***Tangentialebene zu*** S auf, und weil $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ auf $\mathbf{x}_u$ und auf $\mathbf{x}_v$ senkrecht steht, ist $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ ein ***Normalenvektor*** zu S an dieser Stelle.

Wenn man ihn durch seine Länge dividiert (die nicht 0 ist), erhält man einen ***Einheitsnormalenvektor*** zur Fläche.

Also hilft eine Parametrisierung, Tangentialebenen und Normalenvektoren zu Flächen zu bestimmen.

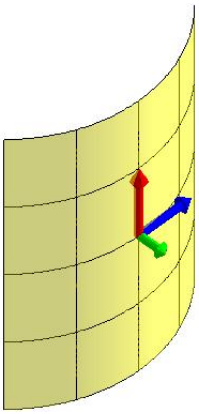


Abbildung 6.2: Der Viertelzylinder

Beispiel 6.5 Wir betrachten einen Viertelzylinder von Radius R und Höhe H mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{für } 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad 0 \leq v \leq H.$$

Abbildung 6.2 zeigt diesen Zylinder mit einigen Parameterlinien.

Die Tangentialvektoren der Parametrisierung sind

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das sind der blaue und der rote Vektor in Abbildung 6.2. Man kann sich die von diesen Vektoren aufgespannte Ebene in der Abbildung gut vorstellen—sie ist die Tangentialebene zur Fläche an dieser Stelle.

Ein Normalenvektor ist gegeben durch

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das ist der grüne Vektor in Abbildung 6.2.

6.2 Die Integration eines Skalarfeldes über eine Fläche.

Sei S eine parametrisierte Fläche im $\mathbf{R}^3$ und sei

$$\mathbf{x}\colon U \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

eine Parametrisierung von S.

Wir wollen auf sinnvolle Art das ***Integral***

$$\int_S f\,dF$$

von f über die krumme Fläche S definieren (das „dF“ in der Notation steht für Flächenelement), und wir gehen dabei nach der schon mehrmals angewandten Strategie vor:

- Wir unterteilen die Fläche S in kleine Abschnitte (dazu bietet sich an, für diese Abschnitte kleine krumme Rechtecke zu wählen, die durch Parameterlinien der Parametrisierung begrenzt werden—in anderen Worten, wir zerschneiden die Fläche entlang der Parameterlinien in kleine „Schnipsel“).
- In jedem dieser Abschnitte wählen wir einen typischen Wert von f.
- Wir gewichten die Werte von f mit der Größe des Abschnitts, aus dem sie stammen, und addieren diese gewichteten Werte zusammen.

- Wir wiederholen diese Summenbildung für immer feinere Zerlegungen der Fläche, und erhalten im Grenzwertübergang das Integral. Weil wir die Fläche in Parameterlinienrechtecke zerlegt haben, können wir das Integral berechnen als ein Doppelintegral bezüglich der Parameter (also als ein Integral $du\,dv$).

Inzwischen ist uns dieses Verfahren sehr vertraut, und es gibt nur eine ungeklärte Frage: wie bestimmen wir die „Größe“ der kleinen Flächenabschnitte, also der krummen „rechteckigen“ Schnipsel?

Vor dem gleichen Problem standen wir bei der Integration in krummlinigen Koordinaten, und die gleiche Idee hilft uns auch hier weiter: wir ersetzen die eigentliche Parametrisierung auf jedem krummen Rechteck durch ihre lineare Approximation, und diese bildet ein Parameterrechteck auf ein *Parallelogramm* ab.

Abbildung 6.1 auf Seite 99 zeigt eine wie hier beschriebene Unterteilung einer Fläche in Parameterlinien-„Rechtecke“, und man sieht ganz deutlich dieses von den skalierten Tangentialvektoren aufgespannte Parallelogramm.

Dieses Parallelogramm liegt nicht mehr in der euklidischen Ebene, sondern schräg im Raum, aber es ist trotzdem nicht schwer, dessen Fläche zu berechnen, auch wenn wir das jetzt nicht wie in Kapitel 5 mit einer Determinante tun können.

Wir erinnern uns stattdessen an Rechenregel 1.6 e) für das Vektorprodukt: wenn wir ein Parameterrechteck mit Seitenlängen Δu und Δv betrachten, dann wird es von der linear gemachten Parametrisierung auf das von $(\Delta u)\mathbf{x}_u$ und $(\Delta v)\mathbf{x}_v$ aufgespannte Parallelogramm abgebildet, und dessen Fläche ist

$$\big\|(\Delta u)\mathbf{x}_u \times (\Delta v)\mathbf{x}_v\big\| = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\,\Delta u \Delta v.$$

Daraus ist ersichtlich, dass wir in das Parameterdoppelintegral, das uns das Integral von f über die Fläche berechnet, ein „Korrekturfaktor“ der Größe $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$ einbauen müssen.

Definition 6.6 Sei S eine parametrisierte Fläche in $\mathbf{R}^3$ und sei $\mathbf{x}\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ eine Parametrisierung von S.

Sei $f\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige skalare Funktion.

Wir definieren das ***Integral von f über*** S als

$$\int_S f\,dF := \iint_U f\big(\mathbf{x}(u,v)\big)\ \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\ du\,dv. \tag{6.1}$$

Dieses Integral nennt man auch das ***Flächenintegral*** von f über S. Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung von S.

Das ist im Prinzip klar aus der Tatsache, dass das Doppelintegral in (6.1) nach der Diskussion am Anfang dieses Abschnitts den Grenzwert der dort beschriebenen Riemannsummen berechnet, und in diese Riemannsummen gehen nicht wirklich die Details der Parametrisierung, sondern nur die lokale Struktur von S ein.

Beispiel 6.7 Der Flächeninhalt des Viertelzylinders aus Beispiel 6.5 beträgt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S 1\,dF &= \iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,H]} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\,du\,dv \\
&= \iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,H]} \left\| \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \right\| du\,dv \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^H R\,dv\,du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} RH\,du \\
&= \frac{\pi RH}{2}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.8 Sei S eine parametrisierte Fläche in $\mathbf{R}^3$ und sei $\mathbf{x}\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ eine Parametrisierung von S.

Sei $\rho\colon S \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige skalare Funktion.

Wenn wir ρ als eine ***Massendichte*** auf S auffassen, so kann man mit dem Flächenintegral folgende wichtige physikalische Größen der Fläche S berechnen:

Masse Die Masse von S ist

$$M = \int\limits_S \rho(\mathbf{x})\,dF.$$

Schwerpunkt Die i-te Koordinate des Schwerpunkts von S ist

$$\overline{x}_i = \frac{1}{M} \int\limits_S x_i \rho(\mathbf{x})\,dF.$$

Trägheitsmoment Das Trägheitsmoment von S bezüglich einer Drehachse ist

$$\int_S r^2(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\,dF,$$

wo $r(\mathbf{x})$ den Abstand von $\mathbf{x}$ zur Drehachse bezeichnet.

6.2.1 Rotationsflächen und Rotationsvolumina

Sei K eine ***Kurve*** in der Ebene und sei $\mathbf{x}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ eine Parametrisierung von K.

Sei S die ***Rotationsfläche***, die entsteht, wenn K einmal um die x-Achse gedreht wird. Wir wollen eine Formel für die Oberfläche von S herleiten.

Aus der Parametrisierung $\mathbf{x}$ für die *Kurve* K können wir leicht eine Parametrisierung $\mathbf{y}$ für die *Fläche* S gewinnen, indem wir den Drehwinkel φ beim Rotieren als zweiten Parameter wählen und die dreidimensionale Lage der gedrehten Kurvenpunkte in Abhängigkeit vom Kurvenparameter t und dem Drehwinkel φ wie folgt berechnen:

$$\mathbf{y}(t,\varphi) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\cos\varphi \\ y(t)\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Für diese Parametrisierung gilt

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} x' \\ y'\cos\varphi \\ y'\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -y\sin\varphi \\ y\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_t \times \mathbf{y}_\varphi = \begin{pmatrix} yy' \\ -x'y\cos\varphi \\ -x'y\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\|\mathbf{y}_t \times \mathbf{y}_\varphi\| = \sqrt{y^2(y'^2 + x'^2\cos^2\varphi + x'^2\sin^2\varphi)} = |y|\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Mit dieser Vorbereitung erhalten wir sofort

Satz 6.9 *Sei K eine Kurve in der Ebene und sei $\mathbf{x}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ eine Parametrisierung von K.*

Sei S die Rotationsfläche, die entsteht, wenn K einmal um die x-Achse gedreht wird. Dann ist der Flächeninhalt von S

$$F(S) = \int_S 1\,dF = \int_a^b \int_0^{2\pi} |y|\sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\varphi\,dt = \int_a^b 2\pi\,|y|\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt \tag{6.2}$$

Beachten Sie, dass der rechte Ausdruck das Gleiche ist, wie

$$2\pi \int_K |y| \, ds.$$

In der Regel wird die Kurve K die x-Achse nicht überqueren, und dann kann man sie oberhalb *der x-Achse legen (da sie ohnehin rotiert wird) und deshalb das Betragszeichen um y entfernen.*

Wenn K der Graph einer nichtnegativen Funktion f ist, kann man als $\mathbf{x}$ *die spezielle Parametrisierung $t \mapsto \big(t, f(t)\big)$ wählen. Formel* (6.2) *vereinfacht sich dann zu*

$$F(S) = \int_S 1 \, dF = \int_a^b 2\pi f(t) \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2} \, dt \tag{6.3}$$

Eine ähnliche Aufgabe zu der Berechnung von Rotations*flächen* besteht in der Berechnung der Volumina von ***Rotationskörpern***. Das heißt, wir haben ein Gebiet S in der Ebene $\mathbf{R}^2$, rotieren das ganze Gebiet um eine Achse und fragen nach dem Volumen des so entstehenden Körpers E.

Um eine Festlegung zu treffen, gehen wir davon aus, dass S um die x-Achse gedreht wird.

Das Volumen von E können wir am besten in *abgewandelten zylindrischen Koordinaten* berechnen, in denen x die Rolle von z übernimmt (weil um diese Achse rotiert wird) und $|y|$ die Rolle von r übernimmt, weil es die Entfernung zur x-Achse, also zur Drehachse misst. Die Winkelkoordinate φ ist natürlich der Drehwinkel der Rotation.

Für die Berechnung nennen wir die Koordinaten zwischenzeitlich wie gerade beschrieben „zylindrisch“ um (es handelt sich wirklich nur um eine Namensänderung und nicht um eine Koordinatenänderung in der Ebene), führen die zusätzliche Winkelkoordinate φ ein, und finden

$$\begin{aligned}
V(E) = \iiint\limits_E 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint\limits_E r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr \, dz \\
&= \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \, dr \, dz \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} 2\pi \, |y| \, dy \, dx \\
&= \iint\limits_S 2\pi \, |y| \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Hier sind die Integrationsgrenzen z_i und r_i in den mittleren Formeln nicht ganz wörtlich zu nehmen—man muss sich passende Werte für S als Normbereich denken.

Das Ergebnis halten wir fest:

Satz 6.10 *Sei S ein Gebiet in der Ebene; für die Berechnung ist es am günstigsten, wenn S ein Normbereich ist.*

Sei E der Rotationskörper, der entsteht, wenn S um die x-Achse gedreht wird. Dann ist das Volumen von E gegeben durch

$$V(E) = \iint\limits_E 1\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S 2\pi\,|y|\;dx\,dy. \tag{6.4}$$

Häufig kommt der Spezialfall vor, dass S die Fläche ist, die unter dem Graphen einer nichtnegativen stetigen Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ liegt („unter“ heißt: zwischen dem Graphen und der x-Achse). In diesem Fall ist

$$V(E) = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx. \tag{6.5}$$

Die letzte Formel erhält man sofort, wenn man in der vorletzten Zeile der Herleitung $x_1 = a$ und $x_2 = b$ setzt, die Grenzen für y passend zu S als Normbereich als $y_1 = 0$ und $y_2 = f(x)$ setzt, und das innere Integral bezüglich y noch ausrechnet; die Betragszeichen um y können dabei entfallen, weil f nie negative Werte annimmt.

6.3 Der Fluss eines Vektorfeldes

Vektorfelder kann man *entlang* Kurven integrieren, indem man sie auf die Tangentialrichtung der Kurve projiziert und dann die signierte Länge dieser Projektion als skalare Belegung über die Kurve integriert. Eine ähnliche Konstruktion für Flächen statt Kurven macht wenig Sinn, weil eine Fläche zwar an jedem Punkt eine Tangentialebene hat, in die wir das Vektorfeld projizieren könnten, aber keine eindeutig festgelegte „Referenzrichtung“ in der Tangentialebene, mit der wir den Beitrag des Vektorfelds in Tangentialrichtung vergleichen können.

Trotzdem gibt es eine Möglichkeit, Vektorfelder auf eine *andere* Weise über Flächen (oder über Kurven in der Ebene!) zu integrieren, eine Möglichkeit, die das Vektorfeld wie beim Kurvenintegral mit einer durch die jeweilige Problemstellung eindeutig bestimmten Richtung an jedem Punkt „misst“, und die außerdem eine sehr nützliche physikalische Bedeutung hat.

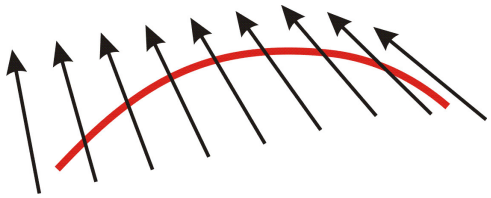


Abbildung 6.3: Der Fluss eines Vektorfeldes durch eine Barriere

Diese Möglichkeit ist die Berechnung des ***Flusses*** des Vektorfeldes durch eine Kurve in der Ebene oder durch eine Fläche im Raum. Physikalisch kann man sich darunter die Flüssigkeitsmenge vorstellen, die bei einer durch das Vektorfeld dargestellten Strömung in Einheitszeit durch die Kurve oder Fläche fließt, d.h., von einer Seite zur anderen gelangt. Das Vektorfeld zeigt an jeder Stelle die Richtung und Geschwindigkeit der Strömung an.

Zunächst wollen wir überlegen, wie man an einer Stelle auf der Kurve oder Fläche die lokale Strömung an dieser Stelle zu messen hat. Wenn die Strömung tangential zur Kurve oder Fläche fließt, fließt die Flüssigkeit einfach daran entlang und es fließt nichts hindurch. Wenn die Strömung schräg durch die Barriere fließt, so kommt weniger Flüssigkeit in Einheitszeit hindurch, als wenn sie gerade, also senkrecht hindurchfließt, denn bei schräg fließender Strömung dient zumindest ein Teil der Geschwindigkeit dazu, die Flüssigkeit entlang der Barriere zu bewegen, und nur ein Anteil dazu, sie „hindurchzupressen“.

Genauer gesagt, wenn wir das Vektorfeld in eine tangentiale Komponente und eine normale Komponente zerlegen, dient nur die zur Kurve oder Fläche *normale* Komponente dazu, Flüssigkeit durch die Barriere zu bringen.

Die Größe der normalen Komponente kann man einfach bestimmen als das Skalarprodukt des Vektorfelds $\mathbf{v}$ mit einem ***Einheitsnormalenvektor*** in der gewünschten Flussrichtung. In anderen Worten, wir wählen ein Einheitsnormalenvektorfeld $\mathbf{n}$ auf der Kurve oder Fläche, bilden an jeder Stelle die skalare Belegung $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, und integrieren diese über die Fläche oder Kurve.

Dabei gibt es ein oder zwei Probleme. An jeder Stelle der Fläche oder Kurve gibt es nämlich *zwei* Normalenrichtungen, die einander genau entgegengesetzt sind, und man kann den Fluss in beiden Richtungen bestimmen (die Werte haben den gleichen Betrag aber entgegengesetztes Vorzeichen).

Meistens hat man physikalische Gründe dafür, eine dieser Richtungen zu bevorzugen, und man hat eine geometrische Beschreibung für die bevorzugte Richtung—man will etwa den Fluss „nach außen“ (durch die Randkurve oder Randfläche eines Gebiets) oder den Fluss „nach oben“ oder „nach unten“ durch eine mehr oder weniger waagerecht verlaufende Barriere wissen.

Dann besteht zunächst schon das Problem, zu entscheiden, welche der beiden Normalenrichtungen, die man durch einen spezifischen Einheitsvektor angeben kann, zu dieser geometrischen Beschreibung passt. Das werden wir anhand von Beispielen üben.

Aber es gibt ein weiteres Problem: die bevorzugte Flussrichtungen an benachbarten Punkten müssen in einem gewissen Sinne übereinstimmend gewählt werden, damit wir nicht an einem Punkt den Fluss nach aussen und an beliebig nahen Punkten etwa den Fluss nach innen berücksichtigen. „Übereinstimmend“ kann nicht „gleich“ bedeuten, weil die Normalengerade von Punkt zu Punkt ihre Ausrichtung verändert. Also meinen wir damit nicht „genau gleich“, sondern so etwas wie „langsam und gleichmäßig“ sich verändernd.

Mathematisch ausgedruckt verlangen wir, dass das Normalenvektorfeld sich *stetig* verändert.

Leider gibt es aber Flächen, bei denen es nicht möglich ist, die ganze Fläche mit einem stetigen nirgends verschwindenden Normalenvektorfeld zu bedecken. Solche Flächen heißen ***nichtorientierbar***, weil man ihnen nicht auf konsistente Weise überall eine Vorder- und eine Rückseite zuordnen kann. Diese Flächen sind ***einseitig*** (und nicht zweiseitig).

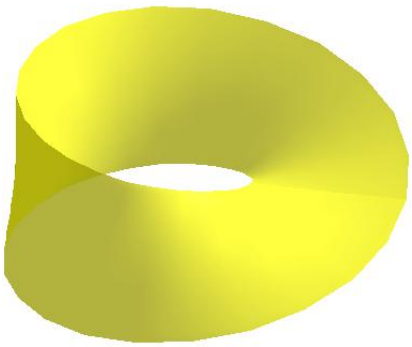


Abbildung 6.4: Das Möbiusband

Ein typisches Beispiel ist das bekannte ***Möbiusband***, das man erhält, wenn man ein Papierstreifen in Kreisform legt und die freien Enden zusammenklebt, aber vor dem Kleben eines der Enden um 180° dreht.

Wenn man versucht, das Möbiusband einzufärben, indem man an einer Stelle die Vorderseite blau und die Rückseite rot anmalt (was die zwei Normalenrichtungen auch kennzeichnen würde), und wenn man diese Farbgebung entlang des Streifens fortsetzt, so stößt an der Klebenaht wegen der Verdrillung die rote Färbung direkt an die blaue Färbung. Aus dem gleichen Grund

müsste ein Normalenvektorfeld, dass überall sonst auf dem Möbiusband stetig ist, an der Nahtstelle plötzlich die Richtung umkehren und unstetig werden.

Es gibt also keine Möglichkeit, ein stetiges Normalenvektorfeld auf dem ganzen Möbiusband zu definieren. Zur Konsequenz hat das, dass es auch nicht möglich ist, den Fluss einer Strömung *durch* das Möbiusband zu definieren.

Dieses Beispiel zeigt, dass wir nicht für jede Fläche den Fluss eines Vektorfeldes durch die Fläche definieren können. Damit das möglich ist, brauchen wir eine technische Voraussetzung, die in der Praxis aber fast immer erfüllt ist (Möbiusbänder kommen in der Technik nur selten oder fast nie vor).

Definition 6.11 Sei S eine regulär parametrisierte Fläche im Raum (oder eine Fläche, die eine Vereinigung von regulär parametrisierten Teilen ist).

Ein stetiges ***Normalenvektorfeld*** auf S ist eine stetige Abbildung

$$\mathbf{n}\colon S \longrightarrow \mathbf{R}^3,$$

so dass an jeder Stelle $\mathbf{x} \in S$ der Vektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ein nichtverschwindender Normalenvektor zu S bei $\mathbf{x}$ ist.

Ein stetiges ***Einheitsnormalenvektorfeld*** auf S ist ein stetiges Normalenvektorfeld $\mathbf{n}$, so dass jeder Wert $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ von $\mathbf{n}$ die Länge 1 hat.

Die Fläche S heißt ***orientierbar***, wenn S ein stetiges Normalenvektorfeld besitzt.

Wenn S orientierbar ist, dann gibt es sogar ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld auf S (man erhält eins, wenn man ein beliebiges stetiges nirgends verschwindendes Normalenvektorfeld an jeder Stelle durch seine nichtverschwindende Länge dividiert).

Bemerkung 6.12 Wir bemerken, dass regulär parametrisierte Kurven in der Ebene automatisch orientierbar sind, denn wenn wir die Kurve in Richtung der Parametrisierung durchfahren, so gibt es eine eindeutige Richtung *nach links* von der Kurvenrichtung, und an jeder Stelle eine eindeutige Normalenrichtung „nach links“.

Einen Vektor in dieser Richtung erhalten wir durch Drehung des Geschwindigkeitsvektors der Kurve um 90° im mathematisch positiven Sinn. Wenn wir diese Normalenvektoren durch ihre Länge dividieren (die nie 0 ist, weil die Parametrisierung als regulär vorausgesetzt wurde), erhalten wir sogar ein Einheitsnormalenvektorfeld.

Definition 6.13 Sei $\mathbf{v}$ ein stetiges Vektorfeld in $\mathbf{R}^2$ oder $\mathbf{R}^3$ und sei S eine Kurve in $\mathbf{R}^2$ oder eine orientierbare Fläche im Raum.

Sei $\mathbf{n}$ ein Einheitsnormalenvektorfeld auf S (nach den Voraussetzungen existiert ein solches Einheitsnormalenvektorfeld auf S).

Wir definieren ***den Fluss von* $\mathbf{v}$ *durch* S *in Richtung von* $\mathbf{n}$** als das Integral

$$\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds \qquad \text{bzw.} \qquad \iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dF \tag{6.6}$$

(je nachdem, was die Dimension von S ist).

Diese Definition ist noch keine große Hilfe beim Ausrechnen von (6.6), da wir dazu das Normalenvektorfeld $\mathbf{n}$ kennen müssen. Aber wie teilweise schon angedeutet ist es nicht schwer, für ein parametrisiertes Flächen- oder Kurvenstück ein geeignetes Einheitsnormalenfeld zu finden.

Hier ein paar Ansätze dazu:

Bemerkung 6.14 a) Sei S eine ***geschlossene Kurve*** in der Ebene mit einer regulären Parametrisierung

$$\mathbf{x} = (x, y)\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^2,$$

und S sei durch die Parametrisierung in ***mathematisch positivem Sinn*** durchlaufen, d.h. so, dass das von S umschlossene Gebiet *links* von der Laufrichtung liegt.

Der Einheitsnormalenvektor nach *außen* zeigt dann nach rechts und ist gegeben durch

$$\mathbf{n}\big(\mathbf{x}(t)\big) = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)^T}{\big\|\mathbf{x}'(t)\big\|}. \tag{6.7}$$

Folglich ist der Fluss eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch S nach außen gegeben durch

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{v}\cdot\frac{(y', -x')^T}{\|\mathbf{x}'\|}\,ds &= \int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(t)\big)\cdot\frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\big\|\mathbf{x}'(t)\big\|}\,\big\|\mathbf{x}'(t)\big\|\,dt \\ &= \int_a^b \Big(v_1\big(\mathbf{x}(t)\big)y'(t) - v_2\big(\mathbf{x}(t)\big)x'(t)\Big)\,dt \end{aligned} \tag{6.8}$$

b) Sei S eine ***regulär parametrisierte Fläche*** im Raum mit einer regulären Parametrisierung

$$\mathbf{x}\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^2.$$

Die Parametrisierung bestimmt an jeder Stelle einen Normalenvektor $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ und einen Einheitsnormalenvektor

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\big\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\big\|}. \tag{6.9}$$

Der Fluss eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch S in Richtung von $\mathbf{n}$ ist gegeben durch

$$\iint\limits_S \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}\, dF = \iint\limits_U \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(u,v)\big) \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}\, \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\, du\, dv$$

$$= \iint\limits_U \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(u,v)\big) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u,v)\, du\, dv \quad (6.10)$$

c) Sei S eine ***Niveaukurve*** oder eine ***Niveaufläche*** einer reellwertigen differenzierbaren Funktion auf $\mathbf{R}^2$ bzw. auf $\mathbf{R}^3$.

Wir haben in Satz 2.10 c) gesehen, dass ∇f an jeder Stelle von S ein Normalenvektor zu S ist, und zwar in Richtung von ansteigenden Werten von f. Wenn f keine kritischen Punkte auf S besitzt (wo alle partiellen Ableitungen verschwinden), ist

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

ein Einheitsnormalenvektorfeld auf S.

Der Fluss eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch S in Richtung von $\mathbf{n}$ ist gegeben durch

$$\iint\limits_S \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\, dF = \iint\limits_S \frac{D_{\mathbf{v}} f}{\|\nabla f\|}\, dF \quad (6.11)$$

wenn S eine Fläche ist; wenn S eine Kurve in $\mathbf{R}^2$ ist, muss man das Flächenintegral durch ein Kurvenintegral ersetzen, aber sonst gilt die Formel unverändert.

Man beachte, dass obwohl man hier sehr leicht ein Normalenvektorfeld findet, man trotzdem eine Parametrisierung wählen muss um das Integral (6.11) auszurechnen.

Beispiele 6.15 a) Sei S der Kreis von Radius 2 um den Punkt $(5,5) \in \mathbf{R}^2$ und sei $\mathbf{v}$ das radiale Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Wir parametrisieren S mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = (5 + 2\cos t, 5 + 2\sin t)^T$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$. Diese durchlauft den Kreis so, dass das Innere auf der linken Seite liegt.

Der Fluss von $\mathbf{v}$ durch S nach außen ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\, dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \big((5+2\cos t)(2\cos t) - (5+2\sin t)(-2\sin t)\big)\, dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} (10\cos t + 4\cos^2 t + 10\sin t + 4\sin^2 t)\, dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} (10\cos t + 4 + 10\sin t)\, dt \\
&\qquad = (10\sin t + 4t - 10\cos t)\Big|_0^{2\pi} \\
&\qquad = 0 - 0 + 8\pi - 0 - 10 + 10 \\
&\qquad = 8\pi.
\end{aligned}$$

b) Sei S der ***Kreiskegel*** aus Beispiel 6.2 d) mit der Gleichung $x^2+y^2 = z^2$ im Bereich $0 \leq z \leq H$. Sei $\mathbf{v}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren S mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 6.2 d) für $0 \leq t \leq 2\pi$ und $0 \leq z \leq H$.

Für diese Parametrisierung haben wir

$$\mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -z\sin\varphi \\ z\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der von der Parametrisierung gelieferte Normalenvektor

$$\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_z = \begin{pmatrix} -z\sin\varphi \\ z\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix}$$

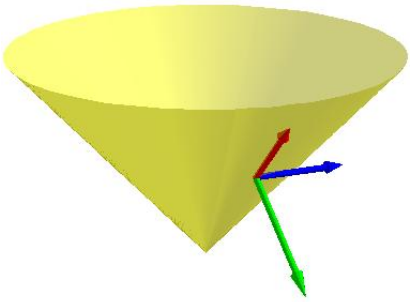


Abbildung 6.5: Der Kegel, die Tangentialvektoren und der Normalenvektor aus Beispiel 6.15 b)

zeigt *nach außen*, was daran ersichtlich ist, dass die Projektion dieses Vektors in die (x, y)-Ebene radial nach außen zeigt (weg von der z-Achse) und daran, dass die vertikale Komponente (dritte Koordinate) des Vektors negativ ist, also nach unten zeigt (Abbildung 6.5 zeigt den Normalenvektor als grünen Pfeil).

Der Fluss von $\mathbf{v}$ durch S nach außen ist nach Gleichung (6.10)

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,H]} \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(\varphi, z)\big) \cdot (\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_z)(\varphi, z)\, d\varphi\, dz \\
&\qquad = \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,H]} \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ 2z\sin\varphi \\ 3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix} d\varphi\, dz \\
&\qquad = \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,H]} z^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi - 3)\, d\varphi\, dz
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \qquad \text{und} \qquad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$

können wir den Ausdruck in Klammern umschreiben als

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi - 3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

und das letzte Integral jetzt auswerten als

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,H]} -z^2\Big(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big)\,d\varphi\,dz &= -\int_0^{2\pi}\int_0^H z^2\Big(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big)\,dz\,d\varphi \\
&= -\int_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big)\frac{z^3}{3}\bigg|_0^H\,d\varphi \\
&= -\int_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big)\frac{H^3}{3}\,d\varphi \\
&= -\frac{H^3}{3}\Big[3\pi+\int_0^{4\pi}\frac{1}{4}\cos u\,du\Big] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Substitution } u=2\varphi) \\
&= -\frac{H^3}{3}\Big[3\pi+\frac{1}{4}\sin u\Big|_0^{4\pi}\Big] \\
&= -\frac{H^3}{3}(3\pi+0\Big) \\
&= -\pi H^3.
\end{aligned}$$

Kapitel 7

Integralsätze

Einer der wichtigsten Sätze der Differential- und Integralrechnung ist der ***"Hauptsatz"***, der besagt, dass wenn $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall ist, dann ist

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Dieser Satz bedeutet, dass Integration und Differentiation Umkehroperationen zueinander sind, und besonders nützlich, dass man Integrale aus der Kenntnis von Stammfunktionen berechnen kann und nicht darauf angewiesen ist, die sehr unhandliche Riemannsummenkonstruktion, mit der das Integral definiert wird, zu seiner Berechnung anzuwenden.

Dieser Hauptsatz hat mehrdimensionale Erweiterungen, die ähnliche Vorteile haben für die Berechnung von Integralen über Kurven und Flächen und von Mehrfachintegralen. Eine Instanz davon haben wir in Satz 4.7 kennengelernt: wie im Hauptsatz selber ist das Integral eines Gradientenvektorfeldes über eine Kurve die Differenz der Werte einer Stammfunktion an den Endpunkten der Kurve.

Beachten Sie, dass in beiden Sätzen die Summe der Werte einer Funktion auf einem 0-dimensionalen Objekt (die „Differenz“ der beiden Endpunkte) sich als gleich erweist mit dem Integral über ein 1-dimensionales Objekt (das Intervall oder die Kurve) von einem Integranden, der aus der Ableitung oder den partiellen Ableitungen der Funktion gewonnen wird.

Die Erweiterungen, die wir in diesem Kapitel besprechen werden, gehören zu einer Familie von wichtigen Sätzen der Ingenieurmathematik, die sich alle als Spezialfälle eines einzelnen aber abstrakteren Satzes darstellen, den Mathematiker den „Satz von Stokes“ nennen. Sie zeigen eine ähnliche Beziehung auf wie oben, aber die Dimensionen sind höher—es geht nicht um die

Endpunkte von Kurven, sondern um Randkurven eines ebenen Gebiets oder einer Fläche, oder um Rand*flächen* eines dreidimensionalen Körpers.

Auch die Integranden, die man in verschiedenen Varianten betrachtet, sind komplizierter als oben, aber es gilt immer noch die Regel, dass der Integrand des höherdimensionalen Integrals aus den Ableitung des Integranden des niedrigerdimensionalen Integrals gewonnen wird.

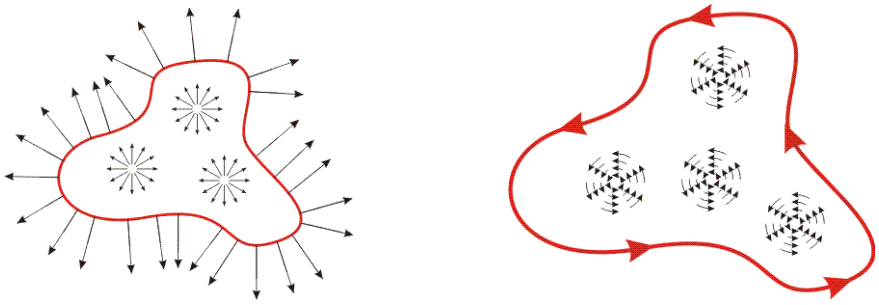
In dem *mathematischen* Satz von Stokes sind diese Integranden so genannte *Differentialformen* α von einer Ordnung gleich der Dimension des Integrationsbereichs, und für Differentialformen ist eine so genannte ***äußere Ableitung*** d erklärt, die die Ordnung um 1 *erhöht*. Die Aussage des mathematischen Satzes von Stokes ist, dass für eine Differentialform α und für ein berandetes Gebiet Ω von Dimension 1 höher als die Ordnung von α gilt

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_{\Omega} d\alpha.$$

(Hier bezeichnet $\partial\Omega$ den Rand von Ω).

Wenn die Gebiete ein-, zwei- oder dreidimensional sind und wenn man die richtigen Beispiele für α wählt, erhalten die Differentialformen im Satz von Stokes eine bekannte physikalische Bedeutung und der abstrakte Satz verwandelt sich in verschiedene bedeutungsvolle Sätze der Ingenieurmathematik, die zuerst von den Mathematikern Gauss, Stokes und Green am Anfang des 19. Jahrhunderts gefunden wurden.

Die physikalische Bedeutung dieser Sätze besteht im Wesentlichen in zwei Aussagen, die in Abbildung 7.1 illustriert werden:



(a) Integration der Quellstärke (b) Integration der Wirbelstärke

Abbildung 7.1: Die Integralsätze in der Ebene

- Der Gesamtfluß eines Vektorfeldes nach außen über den Rand eines Gebietes (in der Ebene oder im Raum) ist gleich dem Integral der Quellstärke des Vektorfeldes über das Innere des Gebiets (Abbildung 7.1(a)).

- Die tangentielle Randströmung eines Vektorfeldes über den gesamten Rand eines ebenen Gebiets oder eines Flächenstücks (also: das Kurvenintegral des Vektorfeldes über die Randkurve) ist gleich der gesamten Wirbelstärke des Vektorfeldes im Inneren des Gebiets oder der Fläche (Abbildung 7.1(a)).

7.1 Der Satz von Green und der Satz von Stokes

Wir werden zunächst die *zweite* dieser Möglichkeiten betrachten. Wir erinnern uns aus der Diskussion in Definition 2.20 b), dass die Wirbeldichte durch die ***Rotation*** eines Vektorfeldes gemessen wird, aber dass die Rotation ein Vektorfeld ist, dessen Richtung die Drehachse der lokalen Wirbeldichte ist.

Wenn wir uns für die Stärke der Wirbeldichte in einer bestimmten Ebene interessieren, müssen wir das Skalarprodukt der Rotation mit einem Einheitsnormalenvektor zu der Ebene bilden. Für diesen Einheitsnormalenvektor gibt es immer zwei zueinander entgegengesetzte Möglichkeiten, und welche wir wählen entscheidet darüber, ob der Wirbel sich nach rechts oder nach links dreht (denn die Wahl entscheidet darüber, ob wir die Drehung „von oben“ oder „von unten“ betrachten).

Die Integralsätze über die Wirbeldichte gelten nur, wenn wir dafür sorgen, dass die Wirbelrichtung beschrieben durch die Wahl des Normalenvektors zur Durchlaufrichtung der Randkurve passt. Die Bedingung, die erfüllt werden muss, ist dass die Drehrichtung einer positiven Wirbeldichte mit der Durchlaufrichtung der Randkurve übereinstimmt, oder was das Gleiche bedeutet, dass der Normalenvektor, mit dem wir die Rotation des Vektorfeldes durch Bildung des Skalarproduktes „ausmessen“, in die Richtung zeigt, in die eine rechtsdrehende Schraube sich eindreht, wenn man sie in der Durchlaufrichtung der Randkurve dreht.

Wenn wir den Integralsatz für ein Gebiet in $\mathbf{R}^2$ formulieren wollen, haben wir eine kanonische Normalenrichtung, nämlich die Richtung nach oben (in Richtung der positiven z-Achse) in dem umgebenden $\mathbf{R}^3$ (der $\mathbf{R}^2$ als seine (x, y)-Ebene enthält). Die dazu passende positive Drehrichtung in der Ebene ist die „mathematisch positive“ Richtung, für die das Innere des Gebiets *links* von dem Kurvenverlauf liegt.

Für eine Fläche im Raum muss der Rand so durchlaufen werden, dass das Innere der Fläche links liegt, wenn man so auf der Fläche steht, dass das gewählte Normalenvektorfeld nach „oben“, also zum Kopf hin zeigt.

Unter Beachtung dieser Vorbemerkungen gelten nun folgende Sätze:

Satz 7.1 (Green'sche Formel) *Sei S ein Normbereich in $\mathbf{R}^2$, dessen Randkurve ∂S aus einem Stück besteht und stückweise glatt ist, und die Randkurve sei so parametrisiert, dass S links von der Laufrichtung liegt.*

Sei

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

ein differenzierbares Vektorfeld auf S. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dx \, dy. \tag{7.1}$$

Hierbei ist $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ *die Rotation von* $\mathbf{v}$ *betrachtet als ein* dreidimensionales *Vektorfeld mit dritter Koordinate 0, d.h., wir fassen* $\mathbf{v}$ *auf als das Vektorfeld*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und $\mathbf{n}$ *ist das nach oben zeigende Einheitsnormalenfeld*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Festlegungen rechnet man sofort nach, dass

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

(und diese skalare *Größe wird oft als die Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes erklärt).*

Wenn wir dies auf der rechten Seite von (7.1) einsetzen, dann erhalten wir die spezifischere Formulierung

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_S \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big) \, dx \, dy. \tag{7.2}$$

Die linke Seite dieser Gleichung berechnet man mit Hilfe der Parametrisierung $\mathbf{x}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ *(definiert auf einem Intervall* $[a, b]$*) als*

$$\int_a^b \Big(v_1\big(\mathbf{x}(t)\big) x'(t) + v_2\big(\mathbf{x}(t)\big) y'(t) \Big) \, dt,$$

und weil dieser Ausdruck sich so berechnet, kürzt man (7.2) gerne ab als

$$\oint_{\partial S} (v_1 \, dx + v_2 \, dy) = \iint_S \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big) \, dx \, dy. \tag{7.3}$$

Beweis. Wir wollen zwar keinen vollständigen Beweis des Satzes bringen, aber zumindest kurz skizzieren, warum die Aussage stimmt.

Wir betrachten den Spezialfall, wo S ein Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ ist. Wir wählen für jede Seite von S eine Parametrisierung mit Geschwindigkeit 1, zunächst von $[a,c]$ zu $[b,c]$, von dort nach $[b,d]$, dann weiter nach $[a,d]$, von dort zurück nach $[a,b]$, wie in Abbildung 7.2.

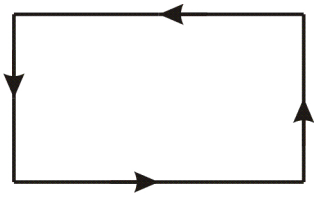


Abbildung 7.2: Die Randkurve des Rechtecks

Der Geschwindigkeitsvektor der Parametrisierung ist $(1,0)^T$ auf der ersten Seite, $(0,1)^T$ auf der zweiten, $(-1,0)^T$ auf der dritten und $(0,-1)$ auf der vierten.

Wir können das Vektorfeld $\mathbf{v}$ schreiben als

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

und den Satz für beide Summanden getrennt beweisen. Wir können deshalb annehmen, dass eine Koordinate von $\mathbf{v}$ null ist.

Wir nehmen zunächst an, dass $v_1 = 0$. In diesem Fall ist $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}' = 0$ auf den waagerechten Seiten, und natürlich verschwindet auch der Beitrag $\frac{\partial v_1}{\partial y}$ auf der rechten Seite von (7.2). Die rechte Seite können wir jetzt wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\iint_S \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)\, dx\, dy &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial v_2}{\partial x}\, dx\, dy \\
&= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial v_2}{\partial x}\, dx\, dy \\
&= \int_c^d \big(v_2(b,y) - v_2(a,y)\big)\, dy \\
&= \oint_{\partial S} (v_1\, dx + v_2\, dy) \\
&= \oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Dass tatsächlich das genannte Kurvenintegral über den Rand von S herauskommt, ist leicht nachzuvollziehen, wenn man die obigen Angaben über die

Geschwindigkeit der Parametrisierung und ihr Vorzeichen auf den senkrechten Seiten des Rechtecks berücksichtigt.

Dass der Satz auch gilt, wenn $v_2 = 0$ aber $v_1 \neq 0$, lässt sich auf ähnliche Weise nachprüfen.

Wenn S kein Rechteck ist, so kann man es in kleine Rechtecke zerlegen, auf denen der Satz gilt.

Summiert man die Gleichung (7.2) oder (7.1) über alle Rechtecke, so heben sich die Randkurvenbeiträge, die im Inneren von S liegen, in dieser Summe weg, weil jede Strecke zu zwei benachbarten Rechtecken gehört, aber beim Integral über den Rand dieser Rechtecke die Strecke einmal in einer Richtung und einmal in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen wird—diese Beitrage erhalten also umgekehrte Vorzeichen und heben sich gegenseitig auf.

Es überleben im Endergebnis also nur die Seiten der Rechtecke, die nur zu einem einzigen Rechteck gehören, weil sie nahe am Rand von S liegen, und diese Beiträge approximieren das Integral über die Randkurve beliebig gut, wenn man die Rechtecke klein genug wählt. ■

Beispiel 7.2 Wir illustrieren die Anwendung der Formel von Green anhand der bekannten Tatsache, dass für eine Kreisscheibe mit Radius R zwischen der Fläche F der Scheibe und ihrem Umfang U die Beziehung gilt:

$$2F = RU. \tag{7.4}$$

Sei also S eine Kreisscheibe von Radius R um $\mathbf{0}$, und sei $\mathbf{v}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

Also ist

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dx\, dy = \iint_S 2\, dx\, dy = 2F.$$

Für den Randkreis von S wählen wir die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \text{ auf } [0, 2\pi].$$

Wir haben

$$\mathbf{x}'(t) := \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \mathbf{v}\big(\mathbf{x}(t)\big).$$

Aus diesem Grund ist $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}' = \|\mathbf{x}'\|^2 = R^2$ und $\|\mathbf{x}'\| = R$.

Somit ist

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}\, ds = \int_{\partial S} \frac{R^2}{R}\, ds = \int_{\partial S} R\, ds = RU$$

(die erste Gleichheit in dieser Folge wurde in Kapitel 4 auf Seite 70 erklärt).

Aus der Green'schen Formel erhalten wir also die Behauptung (7.4).

Der Satz von Green gilt nicht nur in der „flachen Ebene", sondern auch für „gebogene" Abbilder davon, also für (orientierbare) Flächen im Raum.

Satz 7.3 (Satz von Stokes) *Sei S eine **orientierbare berandete** Fläche im Raum mit Randkurve ∂S, und sei $\mathbf{n}$ ein Einheitsnormalenvektorfeld auf S.*

*Eine Parametrisierung der Randkurve nennen wir **orientierungskonsistent** zu $\mathbf{n}$, wenn die Parameterrichtung, die Richtung ins Innere der Fläche, und die Richtung von n, in dieser Reihenfolge genommen, ein rechtsdrehendes System bilden.*

Diese Bedingung kann man auch anders beschreiben: wenn ein Mensch so auf der Randkurve steht, dass für ihn $\mathbf{n}$ nach oben zeigt und die Parameterrichtung der Randkurve nach vorne zeigt, dann sieht er das Innere von S zu seiner Linken. Oder noch anders gesagt: die Parameterrichtung der Randkurve gibt eine Drehrichtung vor, und eine rechtshändige Schraube, in diese Richtung gedreht, dreht sich in der Richtung von $\mathbf{n}$ in die Fläche ein oder aus.

Sei $\mathbf{x}$ eine zu $\mathbf{n}$ orientierungskonsistente Parametrisierung von ∂S. Sei $\mathbf{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbf{R}^3$ (definiert zumindest in der Nähe von S).

Dann gilt

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dF \tag{7.5}$$

7.2 Die Gauß'schen Integralsätze

Die andere Sorte von Integralsätzen behauptet, dass der Fluss eines Vektorfeldes nach außen über den Rand eines Gebietes gleich der integrierten Quelldichte über das gesamte Gebiet ist. Physikalisch kann man das als ein Massenerhaltungsgesetz verstehen, aber es handelt sich dennoch um Sätze der theoretischen Mathematik, die ***Gauß'schen Integralsätze***.

Wie in Definition 2.20 a) bemerkt, wird die Quelldichte durch die ***Divergenz*** des Vektorfeldes gemessen, so dass die oben genannte Tatsache folgende Formulierung erhält.

Satz 7.4 (Integralsätze von Gauß) *Sei S ein Normgebiet im $\mathbf{R}^2$ oder $\mathbf{R}^3$ mit einem glatten Rand ∂S aus einem Stück. Wenn S zweidimensional ist, ist ∂S eine Kurve, und wenn S dreidimensional ist, ist ∂S eine Fläche.*

Sei $\mathbf{n}$ das nach außen zeigende Einheitsnormalenvektorfeld auf ∂S; unter den genannten Voraussetzungen für S existiert $\mathbf{n}$ immer und ist eindeutig bestimmt (insbesondere ist ∂S immer orientierbar).

Sei $\mathbf{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von S. Dann ist

$$\int\limits_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint\limits_{S} \operatorname{div} \mathbf{v}(x,y)\, dx\, dy \tag{7.6a}$$

wenn S zweidimensional ist, und

$$\int\limits_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dF = \iiint\limits_{S} \operatorname{div} \mathbf{v}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{7.6b}$$

wenn S dreidimensional ist.

Bemerkung 7.5 Um die Verwandtschaft der Integralsätze hervorzuheben wollen wir kurz skizzieren, wie man die zweidimensionale Version des Satzes von Gauß aus dem Satz von Green erhalten kann.

Seien S, ∂S, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ wie in Satz 7.4. Seien

$$\mathbf{m} := \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

die obigen Vektorfelder um 90° nach links gedreht. Aus $\mathbf{n}$ wird dadurch ein Einheits*tangenten*vektor $\mathbf{m}$ zu der Kurve ∂S, der in Parameterrichtung zeigt, wenn die Kurve im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

Aus der Herleitung des Kurvenintegrals eines Vektorfeldes auf der Mitte von Seite 70 ist klar, dass

$$\int\limits_{S} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x} = \int\limits_{S} \mathbf{w} \cdot \mathbf{m}\, ds. \tag{7.7}$$

Man prüft aber leicht nach, dass $\mathbf{w} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, und mit (7.7) erhalten wir

$$\int\limits_{S} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x} = \int\limits_{S} \mathbf{w} \cdot \mathbf{m}\, ds = \int\limits_{S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds. \tag{7.8}$$

Das besagt, dass die linke Seite von Gleichung (7.6a) im Gauß'schen Integralsatz mit der linken Seite der Green'schen Formel (7.1) für das Vektorfeld $\mathbf{w}$ übereinstimmt.

Außerdem ist

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \operatorname{rot}(\mathbf{w}),$$

wenn man die Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes als ein Skalarfeld auffasst. Deshalb stimmt auch die rechte Seite von (7.6a) mit der rechten Seite der Green'schen Formel für $\mathbf{w}$ überein.

Auf diese Weise können wir den zweidimensionalen Gauß'sche Integralsatz aus der Green'schen Formel schließen.

Wir illustrieren die Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes an drei Beispielen.

Beispiele 7.6 a) Sei S der Kreis von Radius 2 um den Punkt $(5,5) \in \mathbf{R}^2$ und sei $\mathbf{v}$ das radiale Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

In Beispiel 6.15 a) hatten wir den Fluss von $\mathbf{v}$ durch S nach außen direkt berechnet, mit dem Ergebnis 8π.

Die Divergenz des zweidimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{v}$, wie man sofort nachrechnet, ist überall 2, und somit ist das Integral von $\operatorname{div} \mathbf{v}$ über das Innere von S gleich 2 mal die Fläche der von S berandeten Kreisscheibe E von Radius 2. Diese Fläche ist $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$. Also haben wir

$$\iint\limits_E \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx\, dy = 2 \cdot 4\pi = 8\pi,$$

wie man nach dem Satz von Gauß zu erwarten hat.

b) In Beispiel 5.12 hatten wir das Volumen einer Kugel ausgerechnet und festgestellt, dass die Kugel von Radius R ein Volumen von $\frac{4}{3}\pi R^3$ hat.

Mit dem Satz von Gauß können wir hieraus die *Oberfläche* $F(\partial S)$ der Sphäre ∂S von Radius R berechnen.

Wir betrachten auf der Kugel S von Radius R mit Mittelpunkt am Koordinatenursprung das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$.

Die Randsphäre von S ist die Niveaufläche zum Wert R^2 von der quadrierten Entfernung zum Koordinatenursprung

$$q(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + z^2,$$

und

$$\nabla q(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} = 2\mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

so dass $\mathbf{v}$, wie ∇q, ein Normalenvektorfeld zu ∂S ist in Richtung von steigender Entfernung von $\mathbf{0}$, d.h., nach außen.

Offensichtlich ist $\|\mathbf{v}\| = R$ auf ∂S. Deshalb ist $\mathbf{v}/R$ ein Einheitsnormalenfeld nach außen, und

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \frac{1}{R}\mathbf{v} = \frac{R^2}{R} = R.$$

Der Fluss von $\mathbf{v}$ nach außen ist also

$$\int\limits_{\partial S} R\, dF = RF(\partial S).$$

Offensichtlich ist $\operatorname{div} \mathbf{v} = 3$ (jetzt ist $\mathbf{v}$ ein dreidimensionales Vektorfeld), und die andere Seite der Gauß'schen Integralformel ist

$$\iiint\limits_S \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_S 3\, dx\, dy\, dz = 3V(S),$$

wo $V(S) = \frac{4}{3}\pi R^3$ das Volumen von S ist.

Nach dem Gauß'schen Integralsatz ist

$$RF(\partial S) = 3V(S) = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3,$$

woraus wir errechnen

$$F(\partial S) = 4\pi R^2.$$

c) Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes prüfen wir noch einmal die Berechnung des Flusses durch einen Kegel aus Beispiel 6.15 b) nach.

Sei S der Kreiskegel mit der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ im Bereich wo $0 \le z \le H$. Sei $\mathbf{v}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial (2y)}{\partial y} + \frac{\partial (3z)}{\partial z} = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Nach dem Satz von Gauß ist das Integral von $\operatorname{div}\mathbf{v}$ über den Vollkegel gleich dem Fluß von $\mathbf{v}$ durch den Rand des Vollkegels, also gleich dem Gesamtfluß durch die Kegelfläche *und durch den Deckel D des abgeschnittenen Vollkegels,* der eine Kreisscheibe von Radius H in Höhe H über der (x, y)-Ebene ist.

Wir integrieren $\operatorname{div}\mathbf{v} = 6$ über den Vollkegel E unter Verwendung von Zylinderkoordinaten, in denen der Vollkegel gegeben ist als

$$E = \left\{ (r, \varphi, z) \;\middle|\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le H,\ 0 \le r \le z \right\},$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_E \operatorname{div}\mathbf{v}\, dx\, dy\, dz &= \int_0^H \int_0^z \int_0^{2\pi} 6r\, d\varphi\, dr\, dz \\
&= \int_0^H \int_0^z 12\pi r\, dr\, dz \\
&= \int_0^H 6\pi r^2 \Big|_0^z\, dz \\
&= \int_0^H 6\pi z^2\, dz \\
&= 2\pi z^3 \Big|_0^H \\
&= 2\pi H^3.
\end{aligned}$$

Auf dem Deckel D ist $(0, 0, 1)^T$ ein Einheitsnormalenvektor nach außen, und sein Skalarprodukt mit $\mathbf{v}$ beträgt $3z = 3H$. Der Fluss von $\mathbf{v}$ durch den Deckel beträgt also

$$\int\limits_D 3H\, dF = 3H \cdot \text{Fläche}(D) = 3H \cdot \pi H^2 = 3\pi H^3.$$

Also ist der Fluss von $\mathbf{v}$ durch S die Differenz

$$\iiint\limits_E \operatorname{div}\mathbf{v}\, dx\, dy\, dz - \text{Fluss durch } D = 2\pi H^3 - 3\pi H^3 = -\pi H^3,$$

wie in Beispiel 6.15 b).

Kapitel 8

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Gesetze der Physik, insbesondere der Mechanik, beschreiben die Entwicklung gewisser Größen (zum Beispiel die sich verändernde Lage eines bewegten Objekts oder Teilchens), und diese Beschreibung nimmt bekanntlich ihre einfachste von vielen möglichen Formen an, wenn man die Gesetze nicht als Aussagen über den momentanen *Zustand* formuliert, sondern wenn man sie als Aussagen über die ***Kräfte*** und andere Einflüsse formuliert, die eine Veränderung des Zustands bewirken.

So lautet Newtons zweites Gesetz der Bewegung zum Beispiel

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung},$$

und die Beschleunigung ist nicht das, was eigentlich interessiert (denn was man kennen will ist die zeitliche Entwicklung der Lage des bewegten Objekts), sondern die zweite Ableitung der Lage als Funktion der Zeit.

Für viele andere Naturgesetze gilt das Gleiche: sie nehmen ihre bekannteste und einfachste Form an, wenn sie das Verhalten der Veränderungen oder *Ableitungen* von Grundgrößen beschreiben, und nicht, wenn man sie so formulieren würde, dass sie die Grundgrößen und ihr Verhalten direkt beschrieben.

Aus diesem Grund besteht einer der wichtigsten mathematischen Fähigkeiten, die Ingenieure als Anwender von Naturgesetzen benötigen, darin, aus Kenntnissen über die Ableitungen von Größen diese Größen selber zu bestimmen. Dazu reicht nicht die Integration alleine, weil die Kenntnisse über die Ableitungen ihre Werte nicht direkt angeben müssen, sondern in der Re-

gel nur gewisse mehr oder weniger komplizierte Beziehungen zwischen den Ableitungen und anderen Größen wiedergeben.

Diese komplizierten Beziehungen, aus denen es gilt, die Grundgrößen „herauszulösen“, heißen ***Differentialgleichungen***, weil in ihnen die Ableitungen von Funktionen vorkommen.

Es gibt zwei wesentliche Merkmale, die Differentialgleichungen von den üblicheren ***algebraischen Gleichungen*** unterscheiden:

- Wie algebraische Gleichungen haben Differentialgleichungen Lösungen, aber die Lösungen einer Differentialgleichungen sind *Funktionen* von einer oder mehrerer Variablen, und nicht einfach Zahlen oder Zahlentupel.

- Während algebraische Gleichungen unter vielen und häufig vorkommenden Umständen *eindeutige* Lösungen haben, muss man in der Regel, um die Lösungen von Differentialgleichungen eindeutig festzulegen, *zusätzliche Bedingungen* angeben und voraussetzen, die die Werte der Lösungsfunktionen zu einzelnen Zeiten oder an bestimmten Orten angeben oder Beziehungen zwischen ihnen vorschreiben.

  Diese Bedingungen heißen ***Anfangswertbedingungen***, wenn sie die Werte der Lösungsfunktion zu einer bestimmten Zeit vorschreiben, oder ***Randwertbedingungen***, wenn es in ihnen um die Werte der Lösungsfunktion an gewissen Orten geht (zum Beispiel an den Rändern des räumlichen Definitionsbereichs).

  Deshalb, obwohl man von *Lösungen* von Differentialgleichungen spricht, meint man in vielen Fällen die Lösungen einer Kombination einer Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen und/oder Randbedingungen, die man ein ***Anfangswertproblem*** oder ein ***Randwertproblem*** nennt.

Wir wollen jetzt ins Detail gehen.

8.1 Was ist eine Differentialgleichung?

Definition 8.1 Eine ***Differentialgleichung*** ist eine Beziehung der Gestalt

$$F\big(x_1, \ldots, x_m, t, y_{1(x_1,\ldots,t)}, \ldots, y_{k(x_1,\ldots,t)}, D_{\alpha_1}(y_{i_1})_{(x_1,\ldots,t)}, \ldots, D_{\alpha_r}(y_{i_r})_{(x_1,\ldots,t)}\big) = 0, \quad (8.1)$$

wo $x_1, \ldots, x_m$ räumliche Variablen sind und t eine zeitliche Variable ist, wo $y_1, \ldots, y_k$ genügend oft differenzierbare aber *unbekannte* Funktionen dieser

Variablen sind, wo die D_{α_j} gewisse ***Differentialoperatoren*** sind (d.h., partielle Ableitungen, auch höherer Ordnung), und wo F eine stetige Funktion ist, die, gleich 0 gesetzt, die in der Differentialgleichung ausgedrückte Beziehung zwischen den Variablen, den Funktionen von diesen Variablen, und einigen Ableitungen dieser Funktionen ausdrückt.

Die ***Ordnung*** dieser Differentialgleichung ist definiert als die höchste Ordnung einer in ihr erscheinenden partiellen Ableitung.

Die y_i heißen die ***unbekannten Funktionen*** der Differentialgleichung (8.1) (für die die Differentialgleichung zu lösen ist).

Manchmal nennt man t und die x_j die ***unabhängigen Variablen*** der Differentialgleichung, und die y_i, weil sie Funktionen von diesen sind, die ***abhängigen Variablen***.

Eine ***Lösung*** der Differentialgleichung (8.1) besteht in der Angabe von genügend oft differenzierbaren Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ von $m+1$ Variablen, so dass wenn man für Werte von $(x_1, \ldots, x_m, t)$ im Definitionsbereich dieser Funktionen die Werte der tatsächlichen Funktionen g_i und ihrer Ableitungen für die entsprechenden Ausdrücke in den y_i in die Funktion F einsetzt, F immer den Wert 0 annimmt.

In anderen Worten, Funktionen g_i bilden eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie anstelle der *unbekannten* y_i die Differentialgleichung erfüllen (warum müssen Mathematiker immer so formal sein?).

Die Differentialgleichung (8.1) heißt eine ***gewöhnliche Differentialgleichung***, wenn in ihr *nur eine Variable* x oder t vorkommt (oder wenn zwar mehrere Variablen vorkommen, aber Ableitungen, auch höherer Ordnung, bezüglich nur *einer* der Variablen. Die anderen Variablen, wenn vorhanden, fungieren dann lediglich als Parameter für eine parametrisierte Familie von Gleichungen).

Eine Differentialgleichung, in der Ableitungen nach *mehreren* Variablen vorkommen, nennt man eine ***partielle Differentialgleichung***.

Wir lassen auch zu, dass F nicht eine skalare, sondern eine vektorwertige Funktion ist. In diesem Fall nennen wir (8.1) ein ***Differentialgleichungssystem***. Wenn F eine p-dimensionale vektorwertige Funktion ist, dann ist F genau dann gleich 0, wenn alle p Koordinaten von F gleich 0 sind, und das Differentialgleichungs*system* $F = 0$ besteht deshalb aus den p Differentialgleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_p = 0$.

Differentialgleichungen oder Systeme der Gestalt (8.1) heißen ***implizite*** Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssysteme, weil die Funktion F eine *Gesamtbeziehung*, auch komplizierterer Art, zwischen den Variablen, den unbekannten Funktionen und ihren Ableitungen ausdrückt.

Wenn aber das System (8.1) von Gleichungen sich umschreiben lässt zu einem System von Gleichungen, die die Ableitungen *höchster* Ordnung der

unbekannten Funktionen jeweils *explizit angibt* als eine Funktion der Variablen und der unbekannten Funktionen, inklusive aller ihrer Ableitungen *niedrigerer* Ordnungen als der höchsten, so nennt man das System (8.1) ein ***explizites*** Differentialgleichungssystem für $y_1, \ldots, y_k$.

Insbesondere hat ein ***explizites System gewöhnlicher Differentialgleichungen*** n***. Ordnung*** für $y_1, \ldots, y_k$ die Gestalt

$$\begin{aligned}
y_1^{(n)}(x) &= F_1\big(x, y_1^{(n-1)}(x), \ldots, y_1(x), y_2^{(n-1)}, \ldots, y_2, \ldots, y_k^{(n-1)}, \ldots, y_k\big) \\
y_2^{(n)}(x) &= F_2\big(x, y_1^{(n-1)}(x), \ldots, y_1(x), y_2^{(n-1)}, \ldots, y_2, \ldots, y_k^{(n-1)}, \ldots, y_k\big) \\
&\vdots \\
y_k^{(n)}(x) &= F_k\big(x, y_1^{(n-1)}(x), \ldots, y_1(x), y_2^{(n-1)}, \ldots, y_2, \ldots, y_k^{(n-1)}, \ldots, y_k\big)
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Soweit der allgemeine Begriff einer Differentialgleichung und was man alles darunter zu verstehen hat. In dieser Allgemeinheit werden wir natürlich nicht arbeiten.

Nicht nur würde das den Rahmen dieser Vorlesung weit sprengen, es ist auch so, dass Differentialgleichungen in der Regel viel schwieriger zu lösen sind als algebraische Gleichungen (was kaum überraschen wird), und die Lösungsmethoden in der Regel aus besonderen Tricks bestehen, die nur in ganz bestimmten Situationen funktionieren.

Wir werden ein paar der wichtigsten dieser Situationen kennen lernen und die dort anzuwendenden speziellen Lösungsmethoden erörtern, aber dazu müssen wir unser Blickfeld stark einschränken.

In Ingenieuranwendungen kommen sowohl gewöhnliche wie auch partielle Diffentialgleichungen vor, aber die partiellen Differentialgleichungen werden wir erst später behandeln. In diesem und den folgenden Kapiteln besprechen wir nur gewöhnliche Differentialgleichungen und Systeme.

Wir beginnen an dieser Stelle mit den allereinfachsten Fällen. Nämlich, in diesem Kapitel behandeln wir nur:

- einzelne
- explizite
- gewöhnliche Differentialgleichungen (mit einer Variablen)
- *erster* Ordnung,
- in denen dann natürlich nur *eine* unbekannte Funktion vorkommt.

Wir behandeln also zunächst *keine* Systeme, und weil die Differentialgleichungen explizit sein sollen und wir jeweils nur eine Gleichung haben, können wir auch nur eine einzelne Lösungsfunktion unterbringen.

Es gibt zwei Notationskonventionen, die wir beide je nach Geschmackslage benutzen werden.

Oft heißt die unabhängige Variable x, die unbekannte Funktion heißt $y(x)$, die erste Ableitung notiert man mit y', und die Differentialgleichung hat die Form

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \qquad \text{oder kürzer} \qquad y' = f(x, y) \tag{8.3}$$

für eine geeignete stetige Funktion f von zwei Variablen.

Manchmal heißt die unabhängige Variable t für die *Zeit*, die unbekannte Funktion heißt $x(t)$, die erste Ableitung notiert man mit $\dot{x}(t)$, und die Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) \qquad \text{oder kürzer} \qquad \dot{x} = f(t, x) \tag{8.4}$$

für eine geeignete stetige Funktion f von zwei Variablen.

In den allgemeinen Definitionen in diesem Abschnitt gehen wir, um eine Wahl zu treffen, von der Notation (8.3) aus, aber die Definitionen lassen sich auf die andere Notation anpassen.

Definition 8.2 Eine ***Anfangsbedingung*** für die Differentialgleichung (8.3) besteht aus der Wahl eines Wertes x_0 für x und eines an dieser Stelle anzunehmenden Wertes

$$y_0 = y(x_0) \tag{8.5}$$

für y. Wir fassen x_0 als einen „Anfangswert“ für x auf und y_0 als den entsprechenden Anfangswert der Lösung an dieser Stelle.

Ein ***Anfangswertproblem*** (für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung) besteht in der Angabe einer Differentialgleichung der Gestalt (8.3) zusammen mit einer Anfangsbedingung (8.5) für diese Differentialgleichung.

Definition 8.3 a) Sei $y' = f(x, y)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Eine ***Lösung*** dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion

$$g\colon I \longrightarrow \mathbf{R},$$

definiert auf einem *offenen Intervall* $I = (a, b) \subset \mathbf{R}$, so dass für jedes $x \in I$ gilt: Das Paar $\big(x, g(x)\big)$ liegt im Definitionsbereich von f und

$$g'(x) = f\big(x, g(x)\big).$$

Die Lösung g heißt ***maximal***, wenn sie sich nicht erweitern lässt zu einer Lösung h, definiert auf einem echt größeren Intervall $J \supsetneqq I$, die auf I mit g übereinstimmt.

b) Sei $y' = f(x, y)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, und seien x_0 und y_0 reelle Zahlen, so dass (x_0, y_0) im Definitionsbereich von f liegt.

Eine ***Lösung des Anfangswertproblems***

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

ist eine Lösung g der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, definiert auf einem offenen Intervall I um x_0, für die gilt $g(x_0) = y_0$.

Die Lösung heißt ***maximale Lösung des Anfangswertproblems***, wenn sie maximal ist als Lösung der Differentialgleichung.

Satz 8.4 (Picard-Lindelöf) *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}^2$ und sei $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung.*

Dann gilt:

a) *Für jedes $(x_0, y_0) \in U$ hat das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte *maximale Lösung g.*

b) *Die in a) garantierte eindeutige Lösung hängt stetig von den Anfangsbedingungen ab. Das beinhaltet folgendes:*

Sei $(x_0, y_0) \in U$, und für jedes y mit $(x_0, y) \in U$, sei g_y die maximale Lösung mit Anfangswert $g_y(x_0) = y$ und sei I_y ihr Definitionsbereich.

Sei nun

$$A := \left\{ (y, x) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; (x_0, y) \in U \text{ und } x \in I_y \right\}$$

die Menge aller Paare von sinnvollen Anfangswerten y und „Zeiten“ x, zu denen die Lösung mit Anfangswert y noch definiert ist.

Dann gilt: A ist eine offene Menge (in anderen Worten, wenn die Lösung mit Anfangswert y zu Zeit x definiert ist, dann sind die Lösungen mit zu y benachbarten *Anfangswerten zu allen zu x* benachbarten *Zeiten definiert), und die Abbildung*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (y, x) &\longmapsto g_y(x) \end{aligned}$$

ist stetig (in anderen Worten, die Lösungen hängen stetig von x und von ihrem Anfangswert *ab).*

Das bedeutet: eine kleine Änderung in dem Anfangswert ändert die Lösung in jedem endlichen *Abschnitt ihres Verlaufs nur wenig!*

Der Satz von Picard-Lindelöf gilt noch unter erheblich schwächeren Voraussetzungen (lokale „Lipschitzstetigkeit“, eine Bedingung die wir hier nicht näher erläutern wollen), und die Stetigkeitsaussage kann noch verstärkt werden, denn die Lösungen hängen stetig nicht nur von den Anfangswerten, sondern auch von der Gestalt der rechten Seite der Gleichung ab. Das heißt, wenn wir die Funktion f auf der rechten Seite nur leicht stören, ändern sich die Lösungen nur wenig (sofern f eine im obigen Sinne sich wohl verhaltende Funktion ist).

Unsere Formulierung des Satzes ist ein Kompromiss zwischen Allgemeinheit und Verständlichkeit, die für technische Anwender und Anwendungen aus der realen Welt völlig ausreichend ist.

Leider reicht das Wissen um die Existenz von Lösungen einer Differentialgleichung bei weitem nicht dazu aus, die Lösungen tatsächlich zu berechnen, und wie es schon bei der einfachen Integration der Fall ist, lassen sich die Lösungen der meisten Differentialgleichungen nicht mit bekannten elementaren Funktionen explizit ausdrücken.

Aber es gibt einige Spezialfälle, in denen explizite Lösungen mit geeigneten „Kniffen“ gefunden werden können, und zum Glück gehören viele Differentialgleichungen der Technik zu diesen glücklichen Spezialfällen. Wir wollen deshalb in den nächsten Abschnitten einige der wichtigsten Lösungsmethoden kennen lernen.

8.2 Trennung der Variablen

Bemerkung 8.5 Die allereinfachste Sorte von Differentialgleichungen, bei denen keine neuen Methoden zur Lösung erforderlich sind, sind die Gleichungen

$$y' = f(x) \tag{8.6}$$

vom Typ (8.3), wo die rechte Seite $f(x, y)$ *nur von der unabhängigen Variablen* x, aber nicht von der abhängigen Variablen y abhängt.

In diesem Fall kann man die Differentialgleichung einfach durch Integration der rechten Seite lösen, d.h., *jede Stammfunktion, also jedes unbestimmte Integral von f ist eine Lösung der Differentialgleichung* (8.6).

Ist zusätzlich eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ zu erfüllen, so kann man dies immer erreichen durch eine geeignete Wahl des Integrationskonstanten.

Genauer, sei g ein beliebiges unbestimmtes Integral von f. Sei

$$C := y_0 - g(x_0).$$

Dann löst $h := g + C$ das Anfangswertproblem

$$y' = f, \qquad y(x_0) = y_0.$$

Der obige Fall ist natürlich nichts Neues und ist nicht sonderlich interessant. Aber der erste wirklich neue, und für viele Differentialgleichungen der Technik anwendbare Fall lehnt sich stark an diesen ganz einfachen Fall an.

Bemerkung 8.6 (Trennung der Variablen) Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = p(x)g(y), \tag{8.7}$$

wo die rechte Seite $f(x, y) = p(x)g(y)$ sich zerlegen lässt als ein Produkt einer Funktion p, die *nur von der abhängigen Variablen x abhängt*, mit einer Funktion g, die *nur von der abhängigen Variablen y abhängt,* nennt man ***separabel***. (Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass die Funktionen p und g stetig differenzierbar sind.)

Auf separable Differentialgleichungen lässt sich die im Folgenden beschriebene Lösungsmethode der ***Trennung der Variablen*** anwenden.

Um die Methode korrekt zu beschrieben, müssen wir auf die Anfangswerte achten, d.h., wir suchen nicht mit einem einzigen Ansatz die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, sondern zunächst nur die Lösung eines bestimmten Anfangswertproblems mit der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0.$$

Fall 1: die stationäre Lösung. Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist die konstante Funktion

$$y(x) = y_0 \quad \text{für alle } x$$

offenbar eine Lösung. Die linke Seite der Differentialgleichung wird 0, weil y konstant ist, und die rechte Seite ist immer 0, weil die Lösung sich nicht von dem Wert y_0 entfernt und der Faktor $g(y_0)$ der rechten Seite dort 0 ist.

Eine solche konstante Lösung der Differentialgleichung nennt man aus offensichtlichen Gründen eine ***stationäre Lösung***.

Wenn p und g stetig differenzierbar sind, dann ist für die genannten Anfangsbedingungen die stationäre Lösung die *einzige* Lösung, auf Grund der Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf.

Fall 2: nichtstationäre Lösungen. Wenn $g(y_0) \neq 0$, dann können wir durch Einschränkung der rechten Seite auf y-Werte nahe bei y_0 davon ausgehen, dass g auf seinem Definitionsbereich nie 0 wird (g wurde unter anderem als stetig vorausgesetzt).

Wir dürfen dann die Differentialgleichung durch g teilen und erhalten die neue Gleichung

$$\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = p(x). \tag{8.8}$$

Jetzt erscheint y nur auf der linken Seite, und bis auf die Tatsache, dass y eine Funktion von x sein soll, erscheint x nur auf der rechten Seite. Es stellt sich als hilfreich heraus, sich nur *manchmal* an die Abhängigkeit zwischen x und y zu erinnern.

Für den nächsten Schritt müssen wir das kurz tun: wir lösen die Gleichung (8.8) auf, indem wir beide Seiten bezüglich x integrieren.

Auf der rechten Seite erhalten wir dann eine Stammfunktion $P(x)$ von p.

Die linke Seite integrieren wir mit der Substitutionsregel, wobei wir y für $y(x)$ substituieren, und dann entsprechend $y'(x)\,dx$ durch dy ersetzen dürfen. Das eigentlich gemeinte Integral bezüglich x auf der linken Seite lässt sich mittels dieser Substitution umschreiben als

$$\int \frac{dy}{g(y)},$$

und wenn wir jetzt kurz vergessen, dass y von x abhängt (wir werden uns aber gleich wieder daran erinnern), so können wir die Gleichung (8.8) „integrieren“ zu der Gleichung

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx + c, \tag{8.9}$$

wo c eine Integrationskonstante ist, die wir nicht vergessen dürfen, wenn wir alle Lösungen herausbekommen wollen!

Wir müssen aber nur auf einer Seite eine Integrationskonstante berücksichtigen, denn die Integrationskonstante der anderen Seite können wir einfach durch Subtraktion über das Gleichheitszeichen herüberbringen und in die erste Integrationskonstante einbauen.

Sei P (wie schon erwähnt) eine Stammfunktion von p und sei G eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ (Vorsicht! nicht von g!).

Dann schreibt sich Gleichung (8.9) in integrierter Form als

$$G(y) = P(x) + c. \tag{8.10}$$

Das ist schon die Lösung der Differentialgleichung, allerdings noch in impliziter Form. Wir müssen sie *auflösen* für y als Funktion von x (und jetzt erinnern wir uns daran, dass y eine Funktion von x ist!).

Für y in der Nähe von y_0 gilt

$$\frac{dG}{dy} = \frac{1}{g(y)} \neq 0,$$

und aus diesem Grund besitzt G eine ***Umkehrfunktion*** H in der Nähe von

$$G(y_0) = P(x_0) + c, \tag{8.11}$$

so dass $H\big(G(y)\big) = y$.

Wegen dieser Beziehung erhalten wir die gesuchte Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung als

$$y(x) := H\big(P(x) + c\big). \tag{8.12}$$

Wenn wir c nicht festlegen, erhalten wir in dieser Form alle nichtstationären Lösungen der Differentialgleichung (8.7) (zumindest für einen Bereich von Anfangswerten passend zu den gewählten Stammfunktionen und ihrem Wertebereich).

Um ein ***Anfangswertproblem*** zu lösen, können wir aus der Gleichung (8.11) oder aus (8.12) den richtigen Wert der Integrationskonstante c bestimmen (oder wir können die unbestimmten Integrale in (8.9) durch *bestimmte* Integrale ersetzen, beginnend bei den Anfangswerten für y bzw. x, und dann ohne Integrationskonstante weiterrechnen).

Zusammenfassend sieht das Lösungsschema für separable Differentialgleichungen (8.7) so aus (jetzt ohne störende Erklärungen):

- Suche alle stationären Lösungen, d.h., suche die Stellen, wo $g(y_0) = 0$. Diese Stellen sind konstante Lösungen.

- Für nichtstationäre Anfangswerte, dividiere die Gleichung durch die Funktion von y auf der rechten Seite und integriere beide Seiten, d.h., schreibe die Gleichung um als

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx + c.$$

- Berechne die Integrale, d.h., wähle Stammfunktionen $G(y)$ von $1/g$ und $P(x)$ von p, und erhalte die Lösung implizit in der Form

$$G(y) = P(x) + c.$$

- Löse die letzte Gleichung auf, zum Beispiel, bestimme eine lokale Umkehrfunktion H zu G. Die explizite allgemeine Lösung ist

$$y(x) := H\big(P(x) + c\big).$$

Wir illustrieren diese Lösungsmethode anhand einiger typischer Beispiele:

Beispiele 8.7 a) Wir bestimmen alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ay, \tag{8.13}$$

wo a eine reelle Konstante ist.

Diese Gleichung ist separabel mit $p(x) = a$ und $g(y) = y$.

Die Funktion g hat 0 als einzige Nullstelle, und deshalb ist

$$y(x) \equiv 0$$

eine stationäre Lösung und die einzige (falls $a \neq 0$), weil bei einer stationären Lösung die rechte Seite immer 0 sein muss.

Wenn der Anfangswert für y nicht 0 ist, erhalten wir Lösungen mit der impliziten Gleichung

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \int a\,dx + C = ax + C,$$

wo C eine Integrationskonstante ist.

Diese Gleichung lösen wir auf, indem wir die Exponentialfunktion auf beide Seiten anwenden. Wir erhalten dann

$$|y| = e^{ax+C} = ce^{ax},$$

wo $c = e^C > 0$.

Dies können wir ein bisschen verschönern, wenn wir auf der linken Seite das Betragszeichen weglassen und dementsprechend auf der rechten Seiten auch das andere Vorzeichen zulassen—c muss dann nur eine Konstante $\neq 0$ sein.

Auch diese letzte Einschränkung können wir fallen lassen, denn $c = 0$ liefert die stationäre Lösung, die wir als Erstes gefunden hatten. Als allgemeine Lösung haben wir also

$$y(x) = ce^{ax}, \tag{8.14}$$

wo c eine beliebige reelle Konstante ist.

Diese Lösung ist auf ganz $\mathbf{R}$ definiert, d.h., für alle Werte von x. Durch eine geeignete Wahl von c können wir alle möglichen Anfangswerte von y bei $x = 0$ einrichten, und da es zu jedem Anfangswert eine *eindeutige* maximale Lösung gibt, sind die Lösungen (8.14) *alle* Lösungen der Differentialgleichung.

b) Die Lösungsmethode von Teil a) kann man mit den gleichen Schritten und fast den gleichen Details anwenden, wenn a nicht eine Konstante, sondern eine beliebige Funktion von x ist.

Die Differentialgleichung hat dann die Gestalt

$$y' = a(x)y, \tag{8.15}$$

und ist immer noch separabel mit $p(x) = a(x)$ und $g(y) = y$.

Wir erhalten wieder die stationäre Lösung

$$y(x) \equiv 0,$$

und sie ist die einzige stationäre Lösung, falls $a \not\equiv 0$.

Das einzige Detail, das sich bei den nichtstationären Lösungen ändert, ist der Wert des Integrals von a auf der rechten Seite; er ist nicht mehr einfach ax, wenn a nicht konstant ist.

Sonst ist alles beim Alten. Wir erhalten jetzt mit Trennung der Variablen Lösungen gegeben durch die implizite Gleichung

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \int a(x)\,dx + C.$$

Diese Gleichung lösen wir wie oben auf zur allgemeinen Lösung

$$y(x) = ce^{\int a(x)\,dx}, \tag{8.16}$$

wo wir für das Integral im Exponenten ein beliebiges unbestimmtes Integral nehmen können; eine andere Wahl des unbestimmten Integrals können wir einfach durch eine andere Wahl der Konstante c berücksichtigen.

Die allgemeine Lösung ist wieder auf ganz $\mathbf{R}$ definiert, und die Lösungen (8.16) sind wieder *alle* Lösungen der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (8.15) heißt eine ***homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.***

c) Nicht immer ist die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung auf ganz $\mathbf{R}$ definiert. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 2. \tag{8.17}$$

Die Differentialgleichung ist separabel mit $p(x) = 1$ und $g(y) = y^2$, und die Lösung des Anfangswertproblems ist nicht stationär, weil der Anfangswert der rechten Seite nicht 0 ist.

Wir erhalten die Lösung der Differentialgleichung also zunächst in der impliziten Form

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} = \int 1\,dx + C = x + C, \tag{8.18}$$

die wir sofort auflösen können zu

$$y = -\frac{1}{x+C} = \frac{1}{c-x},$$

wo $c = -C$.

Es bleibt nur, diese Lösung an die Anfangsbedingung anzupassen: es gilt

$$y(0) = \frac{1}{c}$$

und das soll 2 sein. Also ist $c = 1/2$ und die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - x} = \frac{2}{1-2x}. \tag{8.19}$$

Die Anpassung an die Anfangsbedingung hätten wir auch gleich in Gleichung (8.18) vornehmen können, indem wir anstelle von unbestimmten Integralen dort bestimmte Integrale, mit unterer Integrationsgrenze gleich dem Anfangswert, geschrieben hätten, wie folgt:

$$\int_2^y \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2} = \int_0^x 1\,du = x. \tag{8.20}$$

Daraus erhält man sofort

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - x = \frac{1-2x}{2}, \qquad \text{also} \qquad y = \frac{2}{1-2x}$$

wie in (8.19).

Man beachte, dass die Lösung wegen der Anfangsbedingung bei $x = 0$ definiert sein muss, aber bei $x = \frac{1}{2}$ unendlich wird und deshalb dort nicht mehr definiert ist. Das heißt, dass die maximale Lösung des Anfangswertproblems auf $(-\infty, 1)$ definiert ist.

8.3 Die Methode der Variation der Konstanten

In diesem Abschnitt wollen wir einen neuen „Trick“ zur Lösung von Differentialgleichungen lernen. Die Methode der ***Variation der Konstanten*** ist

geeignet für die Behandlung von leichten Abwandlungen von Differentialgleichungen, deren allgemeine Lösungen schon bekannt sind und auf irgendeine Weise von einer „Integrationskonstanten“ abhängen.

Man erhofft sich, dass die abgewandelte Gleichung eine ähnliche Lösung hat zu der Lösung der einfacheren, bekannten Gleichung, und verwendet als Ansatz für die Lösung der komplizierteren Gleichung die bekannte Lösung der einfacheren Gleichung, in der man die Integrationskonstante „variiert“, indem man sie durch eine *Funktion* der unabhängigen Variablen ersetzt. Dieser Ansatz muss nicht funktionieren, aber es gibt Situationen, in denen er tatsächlich zu Lösungen der neuen Gleichung führt.

Die Methode lässt sich gut anhand von ***linearen Differentialgleichungen*** illustrieren.

Definition 8.8 Eine ***lineare Differentialgleichung erster Ordnung*** ist eine Differentialgleichung der Gestalt

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{8.21}$$

wo a und b beliebige stetige Funktionen von x sind; sie heißen die ***Koeffizienten*** der linearen Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (8.21) nennt man ***homogen***, wenn $b(x) \equiv 0$, und ***inhomogen***, wenn $b \not\equiv 0$.

Die Lösungsräume der linearen Differentialgleichungen haben eine schöne und einfache Struktur, die sie zu idealen Kandidaten macht für die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten.

Lemma 8.9 *Seien*

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{8.22a}$$

und

$$y' = a(x)y + d(x) \tag{8.22b}$$

lineare Differentialgleichungen mit der gleichen Koeffizientenfunktion für den linearen Term auf der rechten Seite, und sei y_1 eine Lösung von (8.22a) *und y_2 eine Lösung von* (8.22b). *Sei c eine Konstante.*

Dann ist $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + \big(b(x) + d(x)\big) \tag{8.23}$$

und cy_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + cb(x). \tag{8.24}$$

Beweis. Die Behauptung kann man durch Einsetzen der vorgeschlagenen Lösungen sofort nachprüfen. ■

Korollar 8.10 *Sei*

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{8.25}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, und sei

$$y' = a(x)y \tag{8.26}$$

die homogene *lineare Differentialgleichung, die man erhält, wenn man die inhomogene Gleichung durch Weglassen der Inhomogenität b vereinfacht. Dann gilt:*

a) *Die Differenz $y_1 - y_2$ zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung* (8.25) *löst die homogene Gleichung* (8.26).

b) *Ist y_p eine Lösung der inhomogenen Gleichung und y eine Lösung der homogenen Gleichung, so löst auch $y + y_p$ die* inhomogene *Gleichung.*

c) *Ist y_p eine fest gewählte Lösung der inhomogenen Gleichung, so kann man* jede *Lösung der inhomogenen Gleichung schreiben in der Form $y + y_p$, wo y eine Lösung der homogenen Gleichung ist.*

Beweis. Die Behauptungen von a) und b) folgen sofort aus Lemma 8.9, und c) ist eine unmittelbare Konsequenz aus a). ■

Bemerkung 8.11 Die Aussage von Korollar 8.10 können wir wie folgt zusammenfassen, und sie liefert uns ein *Lösungsschema für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Um die *allgemeine Lösung* einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (8.25) zu finden, muss man *alle* Lösungen $y(x)$ der entsprechenden *homogenen* Differentialgleichung bestimmen, sowie nur *eine* Lösung y_p der inhomogenen Gleichung (weil man nur eine benötigt, nennt man diese Lösung eine ***partikuläre*** Lösung der inhomogenen Gleichung).

Man erhält dann alle Lösungen der inhomogenen Gleichung, indem man zur partikulären Lösung y_p alle Lösungen der *homogenen* Gleichung addiert.

Übrigens, es ist egal, welche Lösung der inhomogenen Gleichung man als die partikuläre Lösung wählt; man erhält auf jeden Fall auf die genannte Weise alle Lösungen der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung haben wir in Beispiel 8.7 b) schon hergeleitet. Für die homogene Gleichung (8.26) lautet sie

$$y(x) = ce^{A(x)}, \tag{8.27}$$

wo A eine beliebige Stammfunktion von a ist.

Wir haben jetzt das Problem, eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (8.25) zu bestimmen. Als Ansatz für eine Lösung nehmen wir die Lösung (8.27) der homogenen Gleichung (die natürlich unverändert nur die homogene Gleichung löst, nicht die inhomogene), wobei wir die Inhomogenität zu erfassen versuchen, indem wir die Konstante c „variieren“, d.h., sie als eine Funktion von x auffassen (und nicht als eine Konstante).

Wenn wir diesen Lösungsansatz

$$y_p = c(x)e^{A(x)} \tag{8.28}$$

in die inhomogene Gleichung (8.25) einsetzen, erhalten wir für die unbekannte Koeffizientenfunktion $c(x)$ die Bedingung

$$\begin{aligned} y_p' = c'(x)e^{A(x)} + c(x)A'(x)e^{A(x)} &= c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} \\ &= c'(x)e^{A(x)} + a(x)y_p(x) = a(x)y_p(x) + b(x) \end{aligned}$$

(hier berechnen wir zunächst nur die Ableitung des Ansatzes (8.28), aber die letzte Gleichheit in der Folge gilt, weil y_p die Differentialgleichung (8.25) erfüllt). Die Gleichheit am Schluß vereinfacht sich zu

$$c'(x)e^{A(x)} = b(x) \qquad \text{oder} \qquad c'(x) = e^{-A(x)}b(x).$$

Wir können besser verstehen, was im Folgenden passiert (und wir erhalten die Lösung in einer nützlicheren Form), wenn wir die letzte Gleichung *bestimmt* integrieren und den Integrationsbereich bei einem uns interessierenden Anfangswert x_0 für x beginnen lassen.

Eine solche Integration liefert

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\,dt$$

und für (8.25) die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\,dt. \tag{8.29}$$

Diese Lösung nimmt bei x_0 den Wert 0 an.

Addieren wir zu dieser partikulären Lösung die allgemeine Lösung (8.27) der homogenen Gleichung, so erhalten wir für die inhomogene Gleichung (8.25) die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{A(x)}\Big(c + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt\Big), \tag{8.30}$$

wo A eine Stammfunktion von a ist. Hier ist c jetzt tatsächlich eine Konstante.

Wenn A so gewählt wird, dass $A(x_0) = 0$, so kann man jede Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

erfüllen, indem man die Konstante $c = y_0$ setzt.

Beispiel 8.12 Wir lösen das Anfangswertproblem

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 0. \tag{8.31}$$

Trotz des Anfangswertes 0 hat diese Gleichung keine stationäre Lösung! Sie ist auch nicht separabel, aber es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit $a(x) = 1$ und $b(x) = x$.

Wir nehmen $A(x) := x$ als Stammfunktion für 1, mit Wert 0 bei $x_0 = 0$.

Nach Formel (8.30) lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8.31)

$$\begin{aligned} y(x) = e^x\Big(c + \int_0^x te^{-t}\, dt\Big) &= e^x\Big(c + \big(-te^{-t} - e^{-t}\big)\big|_0^x\Big) \\ &= e^x(c - xe^{-x} - e^{-x} + 1) = (c+1)e^x - x - 1 \end{aligned}$$

(das Integral haben wir auf einfache Weise mit partieller Integration berechnen können, aber die Details lassen wir hier weg).

Wir passen die Lösung an die Anfangsbedingung an, indem wir $c = 0$ setzen, und erhalten dann als Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

Man kann leicht nachprüfen, dass diese Funktion tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist und die Anfangsbedingung erfüllt.

8.4 Spezielle Differentialgleichungen

Es gibt eine Reihe von speziellen wichtigen Differentialgleichungen der Technik, die zwar nicht direkt mit Trennung der Variablen oder Variation der Konstanten lösbar sind, aber sich mit gewissen geeigneten Ansätzen oder Substitutionen in Gleichungen umwandeln lassen, die man mit diesen Methoden lösen kann. Wir geben in diesem Abschnitt einige Beispiele an.

8.4.1 Die Bernoullische Differentialgleichung

Die Bernoullische Differentialgleichung hat die Gestalt

$$y' + yg(x) + y^\alpha h(x) = 0, \tag{8.32}$$

wo g und h stetige Funktionen von x sind und α eine Konstante ungleich 0 und 1 ist.

Diese Gleichung hat offensichtlich wenn $\alpha > 0$ immer eine stationäre Lösung $y(x) \equiv 0$.

Für die nichtstationären Lösungen können wir auf jeden Fall annehmen, dass y nie 0 wird. Deshalb können wir die Differentialgleichung durch y^α dividieren und mit $1 - \alpha \neq 0$ multiplizieren und erhalten die äquivalente Gleichung

$$(1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} + (1-\alpha)y^{1-\alpha}g(x) + (1-\alpha)h(x) = 0. \tag{8.33}$$

Wir setzen jetzt $u := y^{1-\alpha}$ und können anhand von (8.33) sofort nachprüfen, dass u die Differentialgleichung

$$u' + (1-\alpha)g(x)u + (1-\alpha)h(x) = 0 \tag{8.34}$$

erfüllt.

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die man mit Variation der Konstanten und der Formel (8.30) lösen kann. Die Lösung der ursprünglichen Bernoulligleichung erhält man dann als $y = u^{1/(1-\alpha)}$.

Beispiel 8.13 Wir bestimmen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y + \frac{1}{y} = 0.$$

Dies ist eine Bernoulligleichung mit $\alpha = -1$, und sie hat keine verschwindende Lösung.

Die Funktion $u := y^{1-\alpha} = y^2$ erfüllt nach der obigen Herleitung die lineare inhomogene Ersatzgleichung

$$u' + 2u + 2 = 0,$$

die nach (8.30) die allgemeine Lösung

$$u(x) = e^{-2x}\Big(c + \int 2e^{2x}\,dx\Big) = e^{-2x}\big(c + e^{2x}\big) = ce^{-2x} + 1$$

hat.

Auflösen für x liefert

$$y(x) = \pm\sqrt{ce^{-2x} + 1},$$

wobei das Vorzeichen passend zum Anfangswert von y gewählt werden muss und die Lösung für alle x definiert ist, für die der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nicht negativ wird.

8.4.2 Homogene (nichtlineare) Differentialgleichungen

Das Wort „homogen“ hat leider zwei verschiedene Bedeutungen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Einerseits bezeichnet es *lineare* Differentialgleichungen der Gestalt $y' = a(x)y$, deren rechte Seite ein Vielfaches der abhängigen Variablen ist, ohne die Addition einer „Störfunktion“ nur von der abhängigen Variablen.

Andrerseits gibt es auch eine Klasse von *nichtlinearen* Differentialgleichungen, die man als ***homogene Differentialgleichungen*** bezeichnet, und die wir in diesem Teilabschnitt behandeln wollen. Diese Gleichungen haben die allgemeine Gestalt

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big), \tag{8.35}$$

in der die rechte Seite nur vom Quotienten y/x abhängt, aber nicht von y und x getrennt. Solche Gleichungen sind nur definiert, wo $x \neq 0$.

Diese Gleichungen lassen sich mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ in separable Gleichungen verwandeln. Mit dieser Substitution gilt $y = xu$ und somit

$$y' = u + xu' = f(u),$$

woraus man entnimmt, dass

$$u' = \frac{1}{x}\big(f(u) - u\big). \tag{8.36}$$

Dies ist eine *separable* Differentialgleichung für u, in der $p(x) = \frac{1}{x}$ und $g(u) = f(u) - u$. Man kann sie mit Trennung der Variablen lösen und y als xu aus der Lösung bestimmen.

Beispiel 8.14 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1. \tag{8.37}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann man umschreiben als

$$\frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{y/x} + \frac{y}{x}\Big)$$

Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ haben wir also

$$f(u) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{u} + u\Big).$$

Nach der obigen Herleitung erfüllt u die Differentialgleichung

$$u' = \frac{1}{x}\big(f(u) - u\big) = \frac{1}{2x}\Big(\frac{1}{u} - u\Big), \tag{8.38}$$

die separabel ist mit $p(x) = \frac{1}{2x}$ und $g(u) = \frac{1}{u} - u$.

Wir haben Anfangswerte $x_0 = 1$ für x, $y_0 = y(x_0) = 1$ für y, und für u deshalb

$$u_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Bei u_0 gilt $g(u_0) = g(1) = \frac{1}{1} - 1 = 0$, und für unser Anfangswertproblem erhalten wir deshalb die *stationäre* Lösung $u(x) = u_0 = 1$ für alle x.

Hieraus erhalten wir schließlich

$$y(x) = xu(x) = x \tag{8.39}$$

als Lösung des ursprunglichen Anfangswertproblems.

8.4.3 Bewegung in einem Kraftfeld

Manchmal kann man mit geeigneten Substitutionen oder durch Einführung von Hilfsvariablen oder Hilfsgrößen eine Differentialgleichung höherer Ordnung auf eine Gleichung erster Ordnung zurückführen und so mit den bekannten Methoden lösen.

Das gelingt zum Beispiel bei Differentialgleichungen von der Gestalt

$$y'' = f(y), \tag{8.40}$$

die die Bewegung eines Körpers in einem Kraftfeld beschreiben (ohne Dämpfung oder äußerer Anregung). Hier soll f eine stetige Funktion sein.

Zur Vereinfachung der Gleichung (8.40) benutzen wir als Hilfsfunktion eine Stammfunktion $V(y)$ von f, also eine Funktion, so dass

$$\frac{dV}{dy} = f.$$

Diese Funktion ist im Wesentlichen bis auf Vorzeichen die ***potentielle Energie*** des Kraftfeldes.

Nach der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}\,y'^2\Big) = y'y'' = f(y)\,y' = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d\,V\big(y(x)\big)}{dx},$$

woraus folgt, dass

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}\,y'^2 - V\big(y(x)\big)\Big) = 0$$

und

$$\frac{1}{2}\,y'^2 - V\big(y(x)\big) = C$$

einen konstanten Wert C hat. (Das ist nichts anderes als das Energieerhaltungsgesetz.)

Die letzte Gleichung können wir auflösen zur separablen Differentialgleichung *erster* Ordnung

$$y' = \pm\sqrt{2\big(C + V(y)\big)} \tag{8.41}$$

für y, die wir durch Trennung der Variablen lösen können.

Dabei muss man beachten, dass eine *stationäre Lösung* von (8.41) mit Anfangswert y_0 nur dann die ursprüngliche Differentialgleichung (8.40) lösen kann, wenn $f(y_0) = 0$.

Beispiel 8.15 Wir lösen mit dem eben beschriebenen Ansatz die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{8.42}$$

des harmonischen Oszillators (oder der Federschwingung).

Hier benutzen wir die alternative Schreibweise für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, in der die *abhängige* Variable x heißt und die unabhängige Variable t.

Wir haben $f(x) = -x$ und können

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} \tag{8.43}$$

wählen.

Die nach dem obigen Verfahren vereinfachte Differentialgleichung für $x(t)$ lautet jetzt

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2C - x^2}, \tag{8.44}$$

wo $2C$ positiv sein muss, damit die Differentialgleichung überhaupt Sinn macht und reelle Lösungen zulässt. Für die Fortsetzung lohnt es sich, die positive Quadratwurzel c von $2C$ zu verwenden und c^2 anstelle von $2C$ zu schreiben.

Wir haben stationäre Lösungen von (8.44) mit $x(t) \equiv \pm c$, die aber nur dann (8.42) lösen, wenn $c = 0$.

Aber für $c > 0$ erhalten wir für Anfangswerte von x mit Betrag $< c$ durch Trennung der Variablen auch nichtstationäre Lösungen, für die gilt

$$\pm \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) = \int \frac{1}{\pm\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx = \int 1\, dt + \tau = t + \tau, \tag{8.45}$$

wo wir die Integrationskonstante auf der rechten Seite τ genannt haben, da der Name c schon vergeben ist.

Die Gleichung (8.45) löst sich leicht auf für x und wir erhalten für die Differentialgleichung (8.42) die allgemeine Lösung

$$x(t) = c \sin(t + \tau), \tag{8.46}$$

wo das $\pm$ Zeichen in (8.45) so berücksichtigt werden kann, dass wir jetzt auch negative Werte von c zulassen.

Mit $c = 0$ erhalten wir auch noch die zuvor gefundene stationäre Lösung.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also durch (8.46) gegeben, wo c jetzt *jeden reellen Wert* annehmen darf.

Wir werden im nächsten Kapitel diese Differentialgleichung auf eine andere (etwas einfachere) Art lösen.

8.4.4 Die Clairault'sche Differentialgleichung

Die Clairault'sche Gleichung ist eine implizite Differentialgleichung

$$y = xy' + g(y') \tag{8.47}$$

(wo g eine zweimal differenzierbare Funktion ist), deren Lösungen eine schöne geometrische Struktur haben.

Zunächst fällt auf, dass die Differentialgleichung ein bisschen aussieht wie eine Geradengleichung, da die rechte Seite linear ist in x. Nur die Ausdrücke in y' wirken sich störend aus, aber wenn y' *konstant* wäre, was bei einer Geraden sogar der Fall ist, dann wäre (8.47) die Gleichung einer Geraden,

deren Steigung der konstante Wert von y' wäre. Und y' ist tatsächlich die Steigung des Graphen der Funktion y, egal wie sie aussieht.

Aus dieser Beobachtung erkennen wir, dass die Clairault'sche Differentialgleichung (8.47) eine Geradenschar von Lösungskurven (also Graphen von Lösungen) besitzt.

Bei dieser Familie von Lösungsgeraden können wir jede gewünschte Steigung c realisieren, denn die Gerade mit der Gleichung

$$y = cx + g(c) \tag{8.48}$$

ist tatsächlich eine Lösung, weil für sie $y' = c$ gilt.

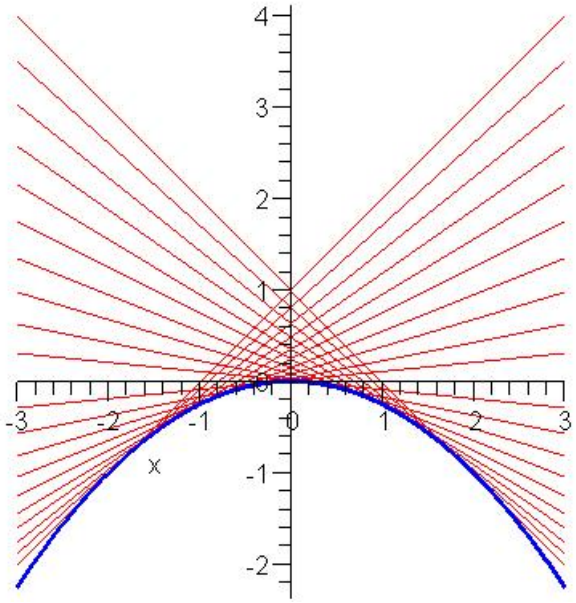


Abbildung 8.1: Die Lösungen der Clairault'schen Gleichung $y = xy' + y'^2$.

Die Konstante c indiziert die Schar von Geradenlösungen wie in anderen Fällen eine Integrationskonstante die allgemeine Lösung indiziert, und wir können deshalb versuchen, *weitere* Lösungen der gleichen Clairault'schen Differentialgleichung durch „Variation der Konstanten“ zu finden.

Wir beginnen mit dem aus (8.48) hergeleiteten Ansatz

$$y = c(x)x + g\big(c(x)\big). \tag{8.49}$$

Dieser Ansatz erfüllt die Clairault'sche Gleichung, wenn

$$c(x) = y'(x) = c'(x)x + c(x) + g'\big(c(x)\big)c'(x).$$

Daraus können wir $c(x)$ wegkürzen und erhalten die Bedingung

$$c'(x)\Big(x + g'\big(c(x)\big)\Big) = 0,$$

in der wir annehmen können, dass $c'(x) \neq 0$ (und wir deshalb diesen Faktor wegkürzen können), weil wir ja tatsächlich die Konstante *variieren* wollen und nicht konstant lassen wollen—sonst bekämen wir nur die schon bekannten Geradenlösungen.

Die dann resultierende Gleichung

$$-x = g'(c(x))$$

können wir für $c(x)$ auflösen, wenn $g'' \neq 0$, weil dann g' eine Umkehrfunktion hat, die wir auf beide Seiten der Gleichung anwenden könnten um $c(x)$ zu bestimmen.

Das führt tatsächlich zu einer neuen Lösung der Clairault'schen Gleichung, aber das Umkehren schon von einfachen Funktionen ist ziemlich umständlich, und deshalb versuchen wir jetzt, das gleiche Ergebnis etwas billiger zu bekommen, nämlich *implizit*, indem wir die Lösungskurve, den Graphen der Lösung, als eine ***regulär parametrisierte Kurve*** zu bestimmen suchen.

Wir schreiben y, x und die variierte Konstante c als Funktionen eines Parameters t. Unser Lösungsansatz lautet jetzt

$$y(t) = c(t)x(t) + g\big(c(t)\big). \tag{8.50}$$

Neben den Ableitungen von y bezüglich x und von g bezüglich seines Argumentes müssen wir gleichzeitig auch Ableitungen bezüglich t betrachten, und wir führen zur Unterscheidung die Notationskonvention ein, dass $'$ die Ableitung nach x oder nach dem Argument von g bedeutet, und dass $\dot{}$ die Ableitung nach t bezeichnet.

Aus der Kettenregel folgt dann

$$\dot{y} = y'\dot{x}. \tag{8.51}$$

Damit wir y als Funktion von x betrachten können, müssen wir voraussetzen, dass $\dot{x}$ nie 0 wird.

Damit (8.50) tatsächlich eine Lösung der Clairault'schen Gleichung ergibt, möchte man $c = y'$ haben, und wenn wir die Ableitung aus dem Ansatz

(8.50) ausrechnen, erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} c(t) &= y' \\ &= \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \\ &= \frac{\dot{c}(t)x(t) + c(t)\dot{x}(t) + g'\big(c(t)\big)\dot{c}(t)}{\dot{x}(t)} \\ &= c(t) + \Big(x(t) + g'\big(c(t)\big)\Big)\frac{\dot{c}(t)}{\dot{x}(t)}. \end{aligned}$$

Der Beitrag $c(t)$ hebt sich auf beiden Seiten weg, und wenn wir auch noch voraussetzen, dass $\dot{c} \neq 0$, was sinnvoll ist bei *Variation* der Konstanten, dann kann man $\dot{c}/\dot{x}$ wegkürzen und wir erhalten

$$x(t) = -g'\big(c(t)\big).$$

Das können wir in (8.50) einsetzen und finden

$$y(t) = -c(t)g'\big(c(t)\big) + g\big(c(t)\big).$$

Wir haben so eine Parameterdarstellung für x und y gefunden, aber noch keine Einschränkung über die Parametrisierung von c, außer dass $\dot{c} \neq 0$.

Das heißt, es ist nichts weiteres verlangt, als dass c sich tatsächlich mit t ändern soll. Sonst haben wir die freie Wahl, wie c von t abhängen soll, und es liegt nahe, die einfachste zulässige Beziehung zu wählen, nämlich

$$c(t) = t.$$

Mit dieser Parametrisierung von c vereinfacht sich alles ein wenig und wir erhalten für die neue Lösung die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= -g'(t) \\ y(t) &= -tg'(t) + g(t). \end{aligned} \tag{8.52}$$

Wir müssen verlangen, dass $g'' \neq 0$, damit dies eine reguläre Parametrisierung ist (das gilt aber auch für jede andere mögliche Parametrisierung und ist nicht eine Konsequenz unserer Wahl für die Parametrisierung von c).

Sicherheitshalber sollten wir nachprüfen, dass (8.52) tatsächlich eine Lösung von (8.47) definiert.

Wir haben

$$\dot{x}(t) = -g''(t) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \dot{y}(t) = -g'(t) - tg''(t) + g'(t) = -tg''(t),$$

so dass

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-tg''}{-g''} = t.$$

Ersetzen wir im Ausdruck für y in (8.52) den Beitrag $-g'(t)$ durch seinen Gegenwert x nach der ersten Zeile von (8.52), und ersetzen wir die anderen Vorkommnisse von t durch y', so verwandelt sich die zweite Zeile von (8.52) in

$$y = y'x + g(y'),$$

und das ist, wie gewünscht, die Behauptung der Clairault'sche Differentialgleichung (8.47).

Abbildung 8.1 auf Seite 151 zeigt die Geradenschar von Lösungen einer Clairault'schen Differentialgleichung zusammen mit der etwas dicker gezeichneten zusätlichen parametrisierten Lösung.

Man sieht eine augenscheinliche Beziehung zwischen der parametrisierten Lösung und der Geradenschar—die parametrisierte Lösung ist, was Mathematiker die ***Hülle*** der Geradenschar nennen.

Die definierende Eigenschaft einer ***Hüllenkurve*** einer Kurvenschar (in diesem Fall, der *Geradenschar*), ist dass sie jede Kurve der Schar *tangentiell* berührt.

Das heißt, die Hüllenkurve hat mit jeder Kurve der Schar einen gemeinsamen Punkt, an dem beide Kurven auch die gleiche Richtung haben.

Für unsere parametrisierte Lösung (8.52) und der Schar von Geradenlösungen ist diese Beziehung ganz einfach nachzuprüfen: die parametrisierte Lösung berührt an der Stelle mit Parameterwert t die Geradenlösung mit Steigung t, weil sie nach der Konstruktion mit Variation der Konstanten die Gerade mit Steigung $c(t)$ schneidet und wir $c(t) = t$ gewählt haben.

Sie ist auch tangential zu dieser Geraden weil, wie wir gesehen haben, $y' = t$; das heißt, dass zu jeder Zeit t die parametrisierte Lösung und die Geradenlösung, die sie momentan schneidet, die gleiche Steigung haben.

Kapitel 9

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

Natürlich kommen in der Technik nicht nur gewöhnliche Differentialgleichungen *erster* Ordnung vor, zumal es bei mechanischen Systemen und den ihr Verhalten bestimmenden Gesetzen meistens um Beschleunigungen und Kräften geht und deshalb automatisch zumindest die zweiten Ableitungen eine Rolle spielen. Bei manchen Ingenieuranwendungen kommen auch Differentialgleichungen noch höherer Ordnung vor.

Dabei haben wir an den Spezialfällen in Abschnitt 8.4 gesehen, dass schon das Lösen von Differentialgleichungen erster Ordnung, wenn es überhaupt gelingt, sehr trickreich und schwierig sein kann, und bei Gleichungen höherer Ordnung wird die Situation nicht einfacher.

Aus diesem Grund werden wir in diesem Abschnitt keine allgemeine Theorie von Differentialgleichungen höherer Ordnung ausarbeiten.

9.1 Lineare Differentialgleichungen und das Superpositionsprinzip

Es gibt allerdings einen wichtigen, einfachen *und in Anwendungsbeispielen oft vorkommenden* Spezialfall mit einer gut ausgearbeiteten Theorie und mit bekannten, leichten Lösungsmethoden, und diese Theorie wollen wir im jetzigen Kapitel erläutern. Es geht dabei um die ***linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten***.

Eine typische Anwendung solcher Differentialgleichungen ist für die Beschreibung der (eventuell gedämpften oder angeregten) Schwingung einer Feder oder einer Masse befestigt an eine Feder. Harmonische Schwingungen und Phänomene wie Resonanz werden von dieser Theorie erfasst.

Definition 9.1 Eine ***lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung*** auf $\mathbf{R}$ oder einem Intervall in $\mathbf{R}$ ist eine Differentialgleichung der Gestalt

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x), \tag{9.1}$$

wo a, b und h stetige Funktionen von x sind. Die Funktionen a und b heißen die ***Koeffizienten*** von (9.1), und wir sagen, die Gleichung (9.1) hat ***konstante Koeffizienten***, wenn a und b reelle Zahlen sind, also nicht von x abhängen.

Die Funktion h heißt die ***Inhomogenität*** der Gleichung, und bei einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten muss h nicht konstant sein.

Die Differentialgleichung (9.1) heißt ***inhomogen***, wenn $h \not\equiv 0$, und ***homogen***, wenn $h = 0$, d.h., wenn sie die einfachere Gestalt

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{9.2}$$

hat.

Zu jeder inhomogenen linearen Differentialgleichung (9.1) gibt es eine entsprechende homogene Gleichung (9.2), die man erhält, wenn man h weglässt oder durch 0 ersetzt.

Für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelten ähnliche Eigenschaften wie in Lemma 8.9 und Korollar 8.10 für die linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, und aus diesen Eigenschaften entwickelt sich die gleiche Lösungsidee, zunächst die *homogene* Gleichung zu lösen und dann aus *einer* partikulären Lösung y_p der inhomogenen Gleichung alle Lösungen zu erhalten, in dem man zu y_p sämtliche Lösungen der homogenen Gleichung addiert.

Lemma 9.2 (Superpositionsprinzip) *Sei I ein Intervall in $\mathbf{R}$ und seien a, b und h stetige Funktionen $I \longrightarrow \mathbf{R}$.*

Wir betrachten zu diesen Daten das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem (9.1) *und das homogene lineare Differentialgleichungssystem* (9.2) *mit den gleichen Koeffizientenfunktionen a und b.*

a) Die homogene Differentialgleichung (9.2) *hat immer die so genannte* ***triviale*** *Lösung $y \equiv 0$.*

b) Sind y_1 und y_2 Lösungen der homogenen Gleichung (9.2) *und sind α und β beliebige reelle Zahlen, so ist auch*

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$

eine Lösung von (9.2).

c) *Ist y_p eine Lösung der inhomogenen Gleichung* (9.1) *und ist u eine Lösung der homogenen Gleichung* (9.2)*, so ist auch*

$$y = y_p + u$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung (9.1).

d) *Sei y_p eine (fest gewählte) Lösung der inhomogenen Gleichung* (9.1). *Dann erhält man* alle *Lösungen der inhomogenen Gleichung* (9.1) *in der von c) beschriebenen Gestalt, als Summe von y_p mit einer geeigneten Lösung u der homogenen Gleichung* (9.2).

Beweis. Die Behauptungen a), b) und c) lassen sich durch Einsetzen der vorgeschlagenen Lösungen y in die Differentialgleichungen (9.2) oder (9.1) direkt nachprüfen.

Auf die gleiche Weise kann man kontrollieren, wenn y_p und y Lösungen der inhomogenen Gleichung (9.1) sind, dass dann $u := y - y_p$ die homogene Gleichung erfüllt, und daraus folgt d). ■

Bemerkung 9.3 Zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung gehört neben der Bestimmung der Menge aller Lösungen auch die Lösung spezifischer Anfangswertprobleme, und in technischen Anwendung will man meistens nicht irgendeine Lösung haben, sondern die eindeutige Lösung, die sich unter den jeweils vorgegebenen Bedingungen einstellt.

Für eine gewöhnliche Differentialgleichung n. Ordnung (mit $n > 1$) besteht eine Anfangsbedingung aber nicht nur aus der Angabe des Wertes $y(x_0) = y_0$ zu einer gegebenen Anfangszeit x_0, sondern auch der Werte aller Ableitungen $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, usw., bis einschließlich der $n-1$. Ableitung.

Für eine Gleichung zweiter Ordnung besteht die Anfangsbedingung also aus zwei Werten: der Angabe von $y(x_0)$ und von $y'(x_0)$. Es ist auch physikalisch klar, dass diese Daten zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung erforderlich sind—die Bahn eines Körpers in einem Kraftfeld hängt sowohl von der Anfangslage wie auch von der Anfangsgeschwindigkeit ab.

Auch für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen oder Systeme höherer Ordnung gilt der Satz von Picard-Lindelöf: wenn die rechte Seite der Gleichung (in der Gestalt (8.2) einer expliziten Differentialgleichung) stetig differenzierbar ist, dann hat jedes Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte maximale Lösung, die stetig von den Anfangsbedingungen abhängt.

Bemerkung 9.4 Das Superpositionsprinzip liefert nicht nur, wie in Lemma 9.2 d) beschrieben, einen nützlichen Ansatz zur Bestimmung aller Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, sondern in Kombination mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgende interessante Beobachtung über die Lösungsmenge.

Nämlich, Lemma 9.2 b) in Kombination mit Lemma 9.2 a) besagt, dass die Menge der Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung von Ordnung 2 einen ***Vektorraum*** bildet.

Man würde denken, da die Elemente dieses Vektorraums Funktionen sind, dass es sich um einen unübersichtlichen Vektorraum hoher Dimension handelt, aber das ist nicht der Fall. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (wenn die Koeffizienten und die Inhomogenität differenzierbar sind) wird jede Anfangsbedingung von genau einer maximalen Lösung erfüllt. Ferner ist die Beziehung zwischen Lösungen und ihren Anfangsbedingungen offensichtlich linear—addiert man zwei Lösungen, so addieren sich auch die Anfangswerte zur vorgegebenen Anfangszeit x_0, und wenn man eine Lösung mit einem Skalar multipliziert, um eine neue Lösung zu erhalten, so hat man auch die Anfangswerte mit diesem Skalar multipliziert.

Aus diesem Grund hat der Vektorraum der Lösungsfunktionen genau die gleiche algebraische Struktur, wie der viel einfachere Vektorraum der Anfangsbedingungen, und somit auch die gleiche Vektorraumdimension.

Da eine Anfangsbedingung für eine Gleichung 2. Ordnung aus der Angabe von zwei Zahlen besteht, ist der Raum der Anfangsbedingungen einfach $\mathbf{R}^2$ und hat Dimension 2. Der Lösungsraum einer homogenen linearen Differentialgleichung von Ordnung 2 hat also die gleiche Dimension und ist nur *zweidimensional.*

Das gibt uns Hoffnung, dass wir tatsächlich in der Lage sein werden, alle Lösungen zu finden.

Definition 9.5 Ein Paar von Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ heißt ein ***Fundamentalsystem von Lösungen*** oder ein ***Paar von Grundlösungen*** der homogenen linearen Differentialgleichung (9.2), wenn y_1 und y_2 eine reelle Basis des Lösungsraums bilden, d.h., wenn y_1 und y_2 die Differentialgleichung lösen und wenn sie über $\mathbf{R}$ linear unabhängig sind.

Wenn y_1 und y_2 ein Paar von Grundlösungen sind, dann kann man jede Lösung als eine Linearkombination von y_1 und y_2 schreiben, d.h., die allgemeine Lösung hat die Form

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

mit c_1 und $c_2 \in \mathbf{R}$.

Wenn die Koeffizientenfunktionen $a(x)$ und $b(x)$ der linearen Differentialgleichung tatsächlich von x abhängen, ist es immer noch sehr schwierig, Lösungen zu bestimmen (es reicht nicht eine einfache Integration wie bei Gleichungen erster Ordnung). Wir wollen deshalb eine weitere Einschränkung vornehmen, die es uns ermöglichen wird, mit einem einfachen Ansatz genügend viele Lösungen zu „erraten".

Ab jetzt betrachten wir nur noch lineare Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten.

9.2 Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Zur Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wollen wir die Idee von Lemma 9.2 d) aufgreifen und die allgemeine Lösung zusammensetzen aus der Summe einer allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung mit einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beide genannten Komponenten sind uns aber im Moment noch unbekannt, und in diesem Teilabschnitt beginnen wir unser Programm mit der Bestimmung der allgemeinen Lösung der *homogenen* linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten also eine solche homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Sie hat die Gestalt

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{9.3}$$

wo a und b reelle Konstanten sind.

Wir haben jetzt keine Lösungsmethode, die uns zu einer Lösung führt, aber mit einem bisschen Fantasie kommen wir auf einen Gedanken, der vielleicht zu einer Lösung führen könnte: hätten wir eine Funktion $y(x)$, deren Ableitung ein Vielfaches λy von der Funktion selber ist, so würde für diese Funktion y die linke Seite der Differentialgleichung sich verwandeln in $(\lambda^2 + a\lambda + b)y$ und wäre 0, wenn λ eine Nullstelle des Polynoms $\lambda^2 + a\lambda + b$ wäre.

Definition 9.6 Das Polynom

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$$

heißt das ***charakteristische Polynom*** der Differentialgleichung (9.3).

Dieses Polynom ist der Schlüssel zur Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Wir kennen schon Funktionen mit der gewünschten Eigenschaft $y' = \lambda y$. Die Exponentialfunktionen $y(x) = e^{\lambda x}$ haben diese Eigenschaft und bilden unseren ersten Ansatz zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von (9.3).

Leider reicht der Ansatz nicht ganz. Weil der Lösungsraum zweidimensional ist, brauchen wir zwei linear unabhängige (und insbesondere verschiedene) Lösungen, um durch Linearkombination den ganzen Lösungsraum erhalten zu können, aber nicht immer hat das charakteristische Polynom χ zwei verschiedene reelle Nullstellen. In solchen Fällen müssen wir uns etwas einfallen lassen.

Es kann vorkommen, dass χ nur *eine* Nullstelle λ besitzt, diese aber doppelt. Der Lösungsraum hat trotzdem Dimension 2 und wir erhalten (nur in dieser Situation!) eine zweite unabhängige Lösung der Differentialgleichung, in dem wir $e^{\lambda x}$ mit x multiplizieren, wie wir unten nachweisen werden.

Noch schlimmer kann es vorkommen, dass χ gar keine reellen Nullstellen besitzt (dafür aber zwei komplexe, die verschieden und zueinander konjugiert sein müssen). Der Lösungsansatz würde hier aber immer noch funktionieren, wenn wir mit *komplexen* Exponentialfunktionen und deshalb mit *komplexen* Lösungen zufrieden wären.

Das sind wir zwar nicht, aber wir erhalten trotzdem Lösungen auf diese Weise, denn wir konstruieren die allgemeine Lösung als *Linearkombination* aus den direkt gefundenen Grundlösungen, und auch wenn die Grundlösungen komplex sind haben manche Linearkombinationen von ihnen nur *reelle* Werte und sind deshalb für uns als Lösungen akzeptabel.

Diese Lösungen können wir auch beschreiben, ohne komplex rechnen zu müssen. Sie setzen sich nämlich zusammen aus dem Realteil und dem Imaginärteil der komplexen Grundlösungen

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

also aus $e^{\alpha x}$ mal eine Linearkombination von $\cos \beta x$ und $\sin \beta x$, wenn $\lambda = \alpha + \beta i$ eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Da die beiden komplexen Nullstellen zueinander konjugiert sind, haben sie den gleichen Real- und Imaginärteil, weshalb jede das *gleiche* Paar von reellen Grundlösungen liefert.

Wir fassen jetzt diese Vorgedanken zusammen zu einem Lösungsschema für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Satz 9.7 *Sei*

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

das charakteristische Polynom der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (9.3).

Nach der „p-q-Formel“ hat χ die Nullstellen

$$\lambda_1 \text{ und } \lambda_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

und wir müssen je nach dem Wert der ***Diskriminante*** $D := \frac{a^2}{4} - b$ *drei Fälle unterscheiden:*

Wenn $D > 0$**,** *dann sind λ_1 und λ_2 reell und verschieden, und die Funktionen*

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \tag{9.4a}$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen von (9.3).

Wenn $D = 0$**,** *dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ eine doppelte Nullstelle von χ und die Funktionen*

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = xe^{\lambda_1 x} \tag{9.4b}$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen von (9.3).

Wenn $D < 0$**,** *dann sind λ_1 und λ_2 komplex konjugierte komplexe Zahlen mit Realteil $\rho = -\frac{a}{2}$ und Imaginärteil $\omega := \pm\sqrt{-D}$, und die Funktionen*

$$y_1(x) = e^{\rho x} \cos \omega x \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = e^{\rho x} \sin \omega x \tag{9.4c}$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen von (9.3).

Beweis. Sei λ eine reelle Zahl und sei $y(x) := e^{\lambda x}$.

Dann ist $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ und $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, so dass also

$$y'' + ay' + by = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = \chi(\lambda)y(x).$$

Wenn λ eine Nullstelle von χ ist, dann ist der letzte Ausdruck 0 und y ist eine Lösung von (9.3).

Wenn $D > 0$ und χ zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat, dann sind $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$ Lösungen von (9.3), wie behauptet, und sie sind außerdem ***linear unabhängig*** (und bilden somit ein Fundamentalsystem von Lösungen).

Denn wenn α und β Konstanten sind, so dass

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} \equiv 0,$$

dann gilt auch

$$\alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) = \alpha \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \beta \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \equiv 0,$$

und wenn man diese Gleichungen auswertet bei $x = 0$ findet man

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 0 \\ \lambda_1\alpha & + & \lambda_2\beta & = & 0 \end{array} \tag{9.5}$$

Weil aber $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, hat das lineare Gleichungssystem (9.5) für α und β nur die triviale Lösung $\alpha = \beta = 0$, woraus folgt, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind (nur die triviale Linearkombination von ihnen kann 0 werden).

Wenn $D = 0$ ist $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ eine doppelte Nullstelle von χ und wir haben $a = -2\lambda_1$ und $b = \lambda_1^2$.

Nach den Bemerkungen am Anfang des Beweises ist $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ eine Lösung von (9.3).

Für die Funktion $y_2 := xy_1$ gilt $y_2' = y_1 + xy_1' = (1 + \lambda_1 x)e^{\lambda_1 x}$ und $y_2'' = y_1' + y_1' + xy_1'' = (2\lambda_1 + x\lambda_1^2)e^{\lambda_1 x}$.

Wenn wir dies in die Differentialgleichung einsetzen finden wir

$$y''+ay'+by = \big(2\lambda_1+x\lambda_1^2+a(1+\lambda_1 x)+bx\big)e^{\lambda_1 x} = \big(2\lambda_1+a+(\lambda_1^2+a\lambda_1+b)x\big)e^{\lambda_1 x}$$

und dies ist 0, weil $a = -2\lambda_1$ und weil $\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b = 0$.

Also ist auch $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ eine Lösung von (9.3).

Die Lösungen y_1 und y_2 sind auch in diesem Fall linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen, denn wenn α und β Konstanten sind, so dass

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta x e^{\lambda_1 x} \equiv 0,$$

dann gilt auch

$$\alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) = \alpha\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \beta(1 + \lambda_1 x)e^{\lambda_1 x} \equiv 0,$$

und wenn man diese Gleichungen auswertet bei $x = 0$ findet man

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & & & = & 0 \\ \lambda_1\alpha & + & \beta & = & 0, \end{array}$$

woraus offensichtlich folgt $\alpha = \beta = 0$.

Wenn $D < 0$ hat χ die komplex konjugierten Nullstellen $\rho \pm \omega i$ mit $\rho = -\frac{a}{2}$ und $\omega = \sqrt{-D} = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$.

Aus diesen Daten können wir die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms wiedergewinnen:

$$a = -2\rho \qquad \text{und} \qquad b = \omega^2 + \rho^2. \tag{9.6}$$

Der Satz behauptet, dass

$$y_1(x) = e^{\rho x}\cos\omega x \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = e^{\rho x}\sin\omega x$$

linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung sind, und das müssen wir nachprüfen.

Für diese beiden Funktionen gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} y_1' &= \rho y_1 - \omega y_2 & \text{und} \quad y_2' &= \rho y_2 + \omega y_1 \\ y_1'' &= \rho y_1' - \omega y_2' & \text{und} \quad y_2'' &= \rho y_2' + \omega y_1' \\ &= (\rho^2 - \omega^2)y_1 - 2\rho\omega y_2 & &= (\rho^2 - \omega^2)y_2 + 2\rho\omega y_1 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Unter Verwendung von (9.6) finden wir nun

$$\begin{aligned} y_1'' + ay_1' + by_1 &= (\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)y_1 + (-2\rho\omega - a\omega)y_2 \\ &= (\rho^2 - \omega^2 - 2\rho^2 + \omega^2 + \rho^2)y_1 + (-2\rho\omega + 2\rho\omega)y_2 \\ &= 0 \\ y_2'' + ay_2' + by_2 &= (\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)y_2 + (2\rho\omega + a\omega)y_1 \\ &= (\rho^2 - \omega^2 - 2\rho^2 + \omega^2 + \rho^2)y_2 + (2\rho\omega - 2\rho\omega)y_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also sind beide Funktionen tatsächlich Lösungen von (9.3).

Sie sind linear unabhängig, denn

$$y_1(0) = 1 \qquad \text{und} \quad y_2(0) = 0,$$

und aus (9.7) folgt, dass

$$y_1'(0) = \rho y_1(0) - \omega y_2(0) = \rho \qquad \text{und} \quad y_2'(0) = \rho y_2(0) + \omega y_1(0) = \omega \neq 0$$

(weil $D < 0$, kann auch $\omega = \sqrt{-D}$ nicht 0 sein).

Wenn $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \equiv 0$ für reelle Zahlen α und β, dann gilt auch $\alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) \equiv 0$, und wenn man diese Gleichungen auswertet bei $x = 0$ findet man

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & & & = & 0 \\ \rho\alpha & + & \omega\beta & = & 0, \end{array}$$

woraus offensichtlich folgt, weil $\omega \neq 0$, dass $\alpha = \beta = 0$. Das zeigt, dass y_1 und y_2 wie behauptet linear unabhängig sind, und dies war der letzte nachzuprüfende Fall. ■

Korollar 9.8 *Sei*

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

das charakteristische Polynom der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (9.3)*, mit den Nullstellen*

$$\lambda_1 \text{ und } \lambda_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Sei $D := \frac{a^2}{4} - b$.

Die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = 0$$

hat folgende allgemeine Lösung (in der α *und* β *beliebige reelle Konstanten sind):*

Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}$**, also wenn** $D > 0$**,** *dann lautet die allgemeine Lösung*

$$y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}. \tag{9.8a}$$

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2$**, also wenn** $D = 0$**,** *dann lautet die allgemeine Lösung*

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{\lambda_1 x}. \tag{9.8b}$$

Wenn λ_1**,** $\lambda_2 = \rho \pm \omega i$ **komplex konjugiert sind, also wenn** $D < 0$**,** *dann lautet die allgemeine Lösung*

$$y(x) = (\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x)e^{\rho x}. \tag{9.8c}$$

Beispiele 9.9 a) Wir bestimmen die allgemeine Lösung von

$$y'' = 0.$$

Natürlich kann man diese einfache Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren lösen, und weil jedes Mal eine Integrationskonstante ins Spiel kommt, haben wir

$$y' = \int y''\,dx + \beta = \int 0\,dx + \beta = \beta$$
$$y = \int y'\,dx + \alpha = \int \beta\,dx + \alpha = \beta x + \alpha.$$

Aber die allgemeine Lösung lässt sich sogar noch schneller mit Korollar 9.8 bestimmen.

Das charakteristische Polynom lautet $\chi(\lambda) = \lambda^2$, mit einer doppelten Nullstelle 0. Nach Gleichung (9.8b) lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{0x} = \alpha + \beta x.$$

b) Wir bestimmen die allgemeine Lösung von der Differentialgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega \neq 0)$$

Das charakteristische Polynom lautet $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$, mit zwei komplexen Nullstellen $\pm\omega i$. Deren Realteil ist 0 und deren Imaginärteil ist das vorgegebene ω. Nach Gleichung (9.8c) lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = (\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x)e^{0x} = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x.$$

Weil die Funktionen sin und cos periodisch ist, beschreibt diese Lösung eine Schwingung mit Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$.

Diese Differentialgleichung (mit $\omega = 1$) hatten wir in Beispiel 8.15 schon einmal gelöst und die allgemeine Lösung

$$x(t) = c \sin(t + \tau)$$

gefunden. Wenn man die *phasenverschobene* Sinusfunktion mittels des Additionstheorems als eine Linearkombination von $\sin t$ und $\cos t$ auflöst, ist dies die gleiche allgemeine Lösung, die wir jetzt „wiederentdeckt“ haben.

c) Wir bestimmen die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 13y' + 40y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 13\lambda + 40,$$

mit Nullstellen

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{13^2}{4} - 40} = -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169 - 160}{4}} \\ &= -\frac{13}{2} \pm \frac{3}{2} \\ &= -5 \text{ oder } -8.\end{aligned}$$

Das sind zwei verschiedene reelle Nullstellen. Also bestimmen wir die allgemeine Lösung nach Gleichung (9.8a), und sie lautet

$$y(x) = \alpha e^{-5x} + \beta e^{-8x}.$$

Diese Lösung müssen wir an die Anfangsbedingungen anpassen. Wir rechnen aus, dass

$$y'(x) = -5\alpha e^{-5x} - 8\beta e^{-8x}.$$

Wenn wir $x = 0$ einsetzen und die Werte von $y(0)$ und $y'(0)$ mit den gewünschten Anfangswerten vergleichen, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 0 \\ -5\alpha & - & 8\beta & = & 1, \end{array}$$

das die Koeffizienten α und β bestimmt.

Aus der ersten Gleichung haben wir $\beta = -\alpha$ und aus der zweiten dann $-5\alpha + 8\alpha = 3\alpha = 1$, also $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = -\frac{1}{3}$.

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet deshalb

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-5x} - \frac{1}{3}e^{-8x}.$$

d) Wir bestimmen die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 6y' + 34y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 34$$

und es hat zwei *komplexe* Nullstellen

$$\lambda = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - 34} = -3 \pm \sqrt{9 - 34} = -3 \pm \sqrt{-25} = -3 \pm 5i$$

mit Realteil $\rho = -3$ und Imaginärteil $\omega = \pm 5$.

Nach Gleichung (9.8c) lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = (\alpha \cos 5x + \beta \sin 5x)e^{-3x}.$$

Die Lösung müssen wir an die Anfangsbedingung anpassen. Es gilt $y(0) = \alpha$ und das soll 0 sein, also ist $\alpha = 0$ und $y(x) = \beta e^{-3x} \sin 5x$.

Dann ist

$$y'(x) = -3\beta e^{-3x} \sin 5x + 5\beta e^{-3x} \cos 5x,$$

und insbesondere bei $x = 0$ ist $y'(0) = 5\beta$ und soll 1 sein, also ist $\beta = \frac{1}{5}$.

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet deshalb

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{-3x} \sin 5x.$$

Das qualitative Verhalten der Lösungen einer Differentialgleichung ist in Anwendungen von großem Interesse, vor allem die Frage, ob die Lösungen sich „zahm“ verhalten, in dem Sinne, dass sie für alle zukünftige Zeiten beschränkt bleiben, oder ob sie sich „wild“ verhalten, in dem sie für $x \to \infty$ explodieren und gegen $\pm\infty$ gehen.

Diese Frage kann man direkt anhand der Gestalt der in Korollar 9.8 beschriebenen allgemeinen Lösungen beantworten.

Satz 9.10 *Die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (9.3) *mit konstanten Koeffizienten bleiben genau dann beschränkt für $x \to \infty$, wenn keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda)$ einen positiven Realteil hat (also $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ für jede Nullstelle) und wenn 0 keine doppelte Nullstelle ist.*

Beweis. Die Lösungen $\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$ der Gestalt (9.8a) bleiben beschränkt genau dann, wenn die Exponenten $\lambda_i x$ der beiden Exponentialfunktionen für $x \to \infty$ nicht gegen $+\infty$ gehen, also wenn die beiden verschiedenen reellen Nullstellen $\lambda_i \leq 0$ sind.

Die Lösungen $(\alpha + \beta x)e^{\lambda_1 x}$ der Gestalt (9.8b) bleiben beschränkt genau dann, wenn der Exponent $\lambda_1 x$ der Exponentialfunktion für $x \to \infty$ gegen $-\infty$ geht, denn dann geht die Lösung gegen 0. Wenn $\lambda_1 > 0$ wird schon der Exponentialterm und mit ihm die ganze Lösung unbeschränkt, und wenn $\lambda_1 = 0$, dann lautet die Lösung $\alpha + \beta x$ und wird auch unbeschränkt, wenn $\beta \neq 0$.

Bei doppelten Nullstellen muss die Nullstelle also negativ sein; sollen alle Lösungen beschränkt bleiben, ist 0 als doppelte Nullstelle ausgeschlossen.

Bei komplexen Nullstellen bleiben die Lösungen $(\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x)e^{\rho x}$ der Gestalt (9.8c) beschränkt genau dann, wenn der Exponent ρx der Exponentialfunktion für $x \to \infty$ *nicht* gegen ∞ geht, denn in jedem anderen Fall bleibt die Exponentialfunktion beschränkt (oder geht sogar gegen 0) und die trigonometrischen Funktionen bleiben ohnehin beschränkt. Das heißt, dass in diesem Fall der Realteil der Nullstellen $\rho \leq 0$ sein muss.

Zusammenfassend: für eine beschränkte Lösung muss der Realteil der Nullstellen des charakteristischen Polynoms nichtnegativ sein, und zusätzliche Kriterien müssen nur bei einer doppelten Nullstelle beachtet werden—sie darf nicht 0 sein (sondern muss *negativ* sein). ■

Bemerkung und Definition 9.11 In Satz 9.7 hatten wir für alle Fälle des charakteristischen Polynoms einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung von Ordnung 2 mit konstanten Koeffizienten ein Fundamentalsystem $\{ y_1, y_2 \}$ von Lösungen angegeben und gezeigt, dass die angegebe-

nen Grundlösungen linear unabhängig waren. Dazu hatten wir in jedem der drei Fälle wie folgt argumentiert:

Wenn $c_1y_1+c_2y_2 \equiv 0$ für Konstanten c_1 und c_2, dann gilt auch $c_1y_1'+c_2y_2' \equiv 0$. Wir hatten für einen bequemen Wert x_0 der unabhängigen Variablen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} y_1(x_0)\cdot c_1 & + & y_2(x_0)\cdot c_2 & = & 0 \\ y_1'(x_0)\cdot c_1 & + & y_2'(x_0)\cdot c_2 & = & 0 \end{array}$$

betrachtet und gezeigt, dass es nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = 0$ hat. Daraus folgt, dass die konstante Funktion 0 nur als triviale Linearkombination von y_1 und y_2 geschrieben werden kann (beide Koeffizienten 0) und dass y_1 und y_2 somit linear unabhängig sind.

Die *Koeffizientenmatrix* des obigen linearen Gleichungssystems spielt auch an anderen Stellen in der Differentialgleichungstheorie eine nützliche Rolle. Deshalb machen wir folgende Definitionen:

Seien y_1 und y_2 zwei Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{9.9}$$

Wir betrachten für jedes x die 2×2 Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}. \tag{9.10}$$

Sie heißt die ***Wronski-Matrix*** des Systems von Lösungen $\{\, y_1, y_2 \,\}$ und ihre Determinante heißt die ***Wronski-Determinante***, für die wir $\big|W(x)\big|$ schreiben.

Wenn die Funktionen y_1 und y_2 linear abhängig sind, so ist die Wronski-Determinante $\big|W(x)\big| = 0$ für jedes x, denn die Spalten der Wronski-Matrix sind für jedes x linear abhängig.

Wenn die Wronski-Determinante für irgendein x_0 null wird, dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination $y = c_1y_1 + c_2y_2$ der beiden Lösungsfunktionen, die zu Zeit x_0 die Anfangsbedingung $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ erfüllt.

Da aber auch y eine Lösung von (9.9) ist und da die konstante Funktion 0 die Differentialgleichung auch erfüllt, und mit den gleichen Anfangswerten zu Zeit x_0, ist

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \equiv 0$$

nach der Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf, und die Lösungen y_1 und y_2 sind linear abhängig. In diesem Fall ist die Wronski-Determinante für alle x null.

Insbesondere, wenn die Funktionen y_1 und y_2 linear unabhängig sind (und ein Fundamentalsystem bilden), so ist die Wronski-Determinante $\big|W(x)\big|$ für *kein* x null, und damit das so ist reicht es sogar, dass die Wronski-Determinante für *mindestens ein* x nicht verschwindet.

Man kann also anhand der Wronski-Determinante an einer Stelle x_0 entscheiden, ob zwei Lösungen linear abhängig sind oder nicht.

9.3 Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen jetzt fortschreiten in der Anwendung des Superpositionsprinzips zur Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die *homogenen* Differentialgleichungen dieser Art können wir jetzt lösen; zur allgemeinen Lösung der *inhomogenen* Gleichung fehlt uns nur noch die Bestimmung *einer* partikulären Lösung

Wir betrachten also jetzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Sie hat die Gestalt

$$y'' + ay' + by = h(x), \tag{9.11}$$

wo a und b reelle Konstanten sind und h eine stetige Funktion von x ist.

Die zusätliche Schwierigkeit, die die Inhomogenität darstellt, können wir, wie schon bei den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, mit ***Variation der Konstanten*** bewältigen.

Wir bestimmen zunächst ein Fundamentalsystem $\{\, y_1, y_2 \,\}$ von Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Jetzt machen wir den Ansatz

$$y_p(x) := c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{9.12}$$

für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (9.11) (wo die c_i unbekannte und noch zu bestimmende zweimal differenzierbare Funktionen von x sein sollen).

Wenn wir dies in die Differentialgleichung einsetzen, bekommen wir eine recht komplizierte und nicht offensichtlich auflösbare Bedingung, in die neben den c_i auch die ersten beiden Ableitungen der c_i eingehen.

Da wir aber nicht alle Lösungen brauchen, sondern nur eine, haben wir noch etwas Gestaltungsfreiheit und wir vereinfachen die aus der Differentialgleichung erhaltene Bedingung für die Koeffizienten durch die Zusatzannahme

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 \equiv 0. \tag{9.13}$$

Gilt dies, so gilt auch

$$c_1'' y_1 + c_1' y_1' + c_2'' y_2 + c_2' y_2' \equiv 0. \tag{9.14}$$

Das sieht man, indem man Bedingung (9.13) ableitet.

Wenn man jetzt y_p aus (9.12) in die Differentialgleichung (9.11) einsetzt, so muss man die Ableitungen von y_p mit der Produktregel ausrechnen. Dabei entstehen

- Terme, in denen die c_i nicht abgeleitet werden. Die Ableitungen werden dann nur auf die Funktionen y_i ausgeführt, und die Summe dieser Terme ist 0, weil die y_i Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind.

- Der restliche Beitrag in ay_p' hat die Form $c_1' y_1 + c_2' y_2$ und ist 0 wegen der Annahme (9.13).

- Übrig bleiben nur die Terme in y_p'', in denen die c_i mindestens einmal abgeleitet werden; sie lauten

  $$2c_1' y_1' + 2c_2' y_2' + c_1'' y_1 + c_2'' y_2 = c_1' y_1' + c_2' y_2'$$

  wegen (9.14). Dies können wir gleich $h(x)$ setzen, weil y_p ja die inhomogene Differentialgleichung (9.11) lösen soll (und die anderen Beiträge 0 sind).

Die letzte Bedingung, zusammen mit der Annahme (9.13) unter der sie gilt, liefert für jedes x ein algebraisches lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} y_1 c_1' & + & y_2 c_2' & = & 0 \\ y_1' c_1' & + & y_2' c_2' & = & h(x) \end{array} \tag{9.15}$$

für die $c_i'(x)$, das immer eindeutig lösbar ist, weil die Koeffizientenmatrix links die Wronski-Matrix von $\{ y_1, y_2 \}$ ist, und sie ist immer regulär (invertierbar), weil die Wronski-Determinante $\left|W(x)\right|$ nie 0 wird. Letzteres gilt nach Bemerkung und Definition 9.11, weil $\{ y_1, y_2 \}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung ist.

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lässt sich (im Wesentlichen mit Cramers Regel) direkt hinschreiben und lautet

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)h(x)}{|W(x)|}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1(x)h(x)}{|W(x)|}. \tag{9.16}$$

Die Formel muss man sich aber nicht merken, denn das Gleichungssystem (9.15) kann man auch ohne Formel mit einer naiven Elimination leicht lösen.

Egal wie man sie berechnet, wenn man einmal die Funktionen c_i' bestimmt hat, erhält man die c_i (und somit die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung) durch eine einfache Integration. Weil man nur *eine* partikuläre Lösung braucht, kann man bei dieser Integration irgendeine Stammfunktion wählen und muss nicht eine Integrationskonstante berücksichtigen—egal welche Stammfunktion man erwischt, sie ist gut genug.

Diese Lösungsmethode hat den Vorteil, dass sie *immer* funktioniert und immer zu einer partikulären Lösung führt, solange man die gefundenen Funktionen c_i' integrieren kann. Weil die Methode einfach ist, kann man sie auch gut im Kopf behalten.

Allerdings sind die Berechnungen, die sie erfordert, manchmal sehr umständlich. Es gibt allerdings eine sehr große Klasse von Inhomogenitäten, für die bekannt und leicht beschreibbar ist, was am Ende herauskommt, so dass man in diesen Fällen die oben beschriebene Berechnung übergehen kann und das Endergebnis, dessen grobe Gestalt bekannt ist, als Lösungsansatz verwenden kann.

Die Details der Lösung, d.h., die noch unbekannten Koeffizienten im Lösungsansatz, kann man sehr leicht bestimmen, indem man den Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt. Ein anschließender Koeffizientenvergleich zwischen der ausgewerteten linken Seite der Differentialgleichung und der Inhomogenität liefert ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten, aus dem man ihren Wert ermitteln kann.

Um diesen Ansatz zu beschreiben, müssen wir kurz ein paar Begriffe einführen.

Definition 9.12 Sei d eine natürliche Zahl und sei λ eine reelle oder ***komplexe*** Zahl.

Ein reelles λ-***Quasipolynom von Grad*** d ist

wenn λ reell ist, eine Funktion der Gestalt

$$p(x)e^{\lambda x},$$

wo p ein reelles Polynom in x von Grad d ist;

wenn $\lambda = \rho + \omega i$ komplex ist, eine Funktion der Gestalt

$$p_1(x)e^{\rho x}\cos\omega x + p_2(x)e^{\rho x}\sin\omega x,$$

wo p_1 und p_2 reelle Polynome in x von Grad $\leq d$ sind und mindestens eines von ihnen genau Grad d hat.

Diese Beschreibung ermöglicht bequemes Anwenden des Begriffs sowohl für komplexe wie auch für reelle λ, aber man könnte den Begriff auch einheitlicher definieren.

Nämlich, die erste Zeile der Definition (für reelle λ) kann auch für komplexe λ verwendet werden, wenn man bereit ist, mit komplexen Exponentialfunktionen zu rechnen.

Und die zweite Zeile der Definition passt auch für reelle λ, weil ein reelles λ *auch* als eine komplexe Zahl aufgefasst werden kann mit $\rho = \lambda$ und $\omega = 0$. In diesem Fall wird der Faktor $\cos\omega x$ zu 1 und der Faktor $\sin\omega x$ zu 0 und wir erhalten die Version der ersten Zeile der Definition als Spezialfall der zweiten.

Aber in der gegebenen Form ist die Definition zwar weniger elegant, aber hoffentlich etwas verständlicher als die vereinheitlichte Version, und wir behalten deshalb die ursprüngliche Version bei.

Quasipolynome sind deshalb interessant, weil ihre Ableitungen wieder Quasipolynome mit gleichem λ und in der Regel sogar vom gleichen Grad sind, und entsprechendes gilt für ihre Integrale.

Das macht sie von vornherein gute Kandidaten für Lösungen von inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, deren Inhomogenitäten Quasipolynome sind.

Anders herum betrachtet stellt sich heraus, dass im Fall, wo die Inhomogenität h ein λ-Quasipolynom ist, die auf Seite 170 beschriebene explizite Methode zur Berechnung einer partikulären Lösung den Bereich der λ-Quasipolynome nicht verlässt. Das heißt, dass **eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren rechte Seite ein λ-Quasipolynom ist, auch ein λ-Quasipolynom als partikuläre Lösung hat.**

Dieses Grundprinzip kann man noch präzisieren, denn man kann auch den Bereich von Potenzen von x, die im Polynomfaktor des Quasipolynoms vorkommen, genau eingrenzen.

Satz 9.13 *Sei $y'' + ay' + b = h(x)$ eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und h sei ein λ-Quasipolynom von Grad d.*

Sei k die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\chi(X) = X^2 + aX + b$$

der Differentialgleichung (wenn λ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, setzen wir $k = 0$).

Dann besitzt die Differentialgleichung eine partikuläre Lösung der Gestalt

$$y_p = x^k g(x), \tag{9.17}$$

wo g ein λ-Quasipolynom von Grad d ist.

Die Koeffizienten von g lassen sich nicht direkt angeben, aber sie lassen sich bestimmen, indem man eine Funktion der Gestalt (9.17) *mit* unbekannten *Koeffizienten in die linke Seite der Differentialgleichung einsetzt und die Koeffizienten der Terme im resultierenden Ausdruck mit den Koeffizienten der entsprechenden Terme auf der rechten Seite vergleicht.*

So erhält man ein lineares Gleichungssystem, das die unbekannten Koeffizienten eindeutig bestimmt.

Falls die rechte Seite $h(x)$ der Differentialgleichung kein einzelnes Quasipolynom, aber eine Summe von λ-Quasipolynomen für verschiedene λ ist, so kann man den beschriebenen Lösungsansatz auf die einzelnen Summanden anwenden und die gefundenen partikulären Lösungen aufaddieren zu einer partikulären Lösung passend zur gesamten Funktion $h(x)$.

Beispiele 9.14 a) Wir bestimmen eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 13y' + 40y = x^2.$$

Die rechte Seite ist ein $\lambda = 0$-Quasipolynom von Grad 2 und 0 ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 13\lambda + 40$.

Also finden wir eine partikuläre Lösung in der Gestalt

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c$$

eines 0-Quasipolynoms von Grad 2.

Wir haben

$$y_p' = 2ax + b \qquad \text{und} \qquad y_p'' = 2a,$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y'' + 13y' + 40y &= 2a + 26ax + 13b + 40ax^2 + 40bx + 40c \\ &= 40ax^2 + (40b + 26a)x + (2a + 13b + 40c) \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Daraus entnehmen wir

$$40a = 1, \text{ also } a = \frac{1}{40}$$

$$26a + 40b = 0, \text{ also } b = -\frac{26}{40}a = -\frac{13}{800}$$

$$2a + 13b + 40c = 0, \text{ also } c = -\frac{2}{40}a - \frac{13}{40}b = \frac{129}{32000}$$

Die partikuläre Lösung lautet also

$$y_p = \frac{1}{40}x^2 - \frac{13}{800}x + \frac{129}{32000}.$$

b) Wir bestimmen eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 13y' + 40y = e^{-5x}.$$

Die rechte Seite ist ein $\lambda = -5$-Quasipolynom von Grad $d = 0$ und -5 ist eine *einfache* Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 13\lambda + 40$, wie wir in Beispiel 9.9 c) gesehen haben. Wir haben somit $k = 1$.

Also finden wir eine partikuläre Lösung in der Gestalt

$$y_p = axe^{-5x}.$$

Wir haben

$$y_p' = (-5ax + a)e^{-5x} \qquad \text{und} \qquad y_p'' = (25ax - 10a)e^{-5x},$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$y'' + 13y' + 40y = (25ax - 10a - 65ax + 13a + 40ax)e^{-5x} = 3ae^{-5x} = e^{-5x}$$

Daraus entnehmen wir $a = 1/3$ und die partikuläre Lösung lautet also

$$y_p = \frac{1}{3}xe^{-5x}.$$

c) Wir bestimmen eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 13y' + 40y = 17 \sin 2x.$$

Die rechte Seite ist ein $\lambda = 2i$-Quasipolynom von Grad $d = 0$ und $2i$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 13\lambda + 40$ (wie

man durch Einsetzen von $2i$ für λ am schnellsten feststellen kann). Wir haben somit $k = 0$.

Also finden wir eine partikuläre Lösung in der Gestalt

$$y_p = a\cos 2x + b\sin 2x$$

(man beachte, dass man auch einen Cosinusterm berücksichtigen muss, auch wenn in der Inhomogenität nur ein Sinusterm zu sehen ist).

Wir haben

$$y_p' = 2b\cos 2x - 2a\sin 2x \qquad \text{und} \qquad y_p'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x,$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y'' + 13y' + 40y &= (-4a + 26b + 40a)\cos 2x + (-4b - 26a + 40b)\sin 2x \\ &= (36a + 26b)\cos 2x + (-26a + 36b)\sin 2x = 17\sin 2x \end{aligned}$$

Daraus entnehmen wir durch Koeffizientenvergleich in der letzten Zeile, dass

$$36a + 26b = 0, \qquad \text{also} \qquad a = -\frac{13}{18}\,b$$

und

$$-26a + 36b = \frac{169}{9}\,b + 36b = \frac{493}{9}\,b = 17.$$

Somit haben wir

$$b = \frac{9}{29} \qquad \text{und} \qquad a = -\frac{13}{58}.$$

Die partikuläre Lösung lautet also

$$y_p = -\frac{13}{58}\cos 2x - \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Bemerkung 9.15 Die Methoden, die wir zur Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten entwickelt haben, lassen sich mit sehr naheliegenden Anpassungen auch auf Gleichungen höherer Ordnung anwenden.

Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h(x) \tag{9.18}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Das Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{9.19}$$

heißt das ***charakteristische Polynom*** der Differentialgleichung (9.18).

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die *verschiedenen* Nullstellen von χ, und sei m_j die Vielfachheit von λ_j als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Manche der λ_j sind reell, aber manche können auch komplex sein.

Für eine komplexe Nullstelle $\lambda_j = \rho_j + \omega_j i$ ist auch die komplex Konjugierte $\overline{\lambda}_j = \rho_j - \omega_j i$ eine Nullstelle mit der gleichen Vielfachheit m_j, wie λ_j.

Ein Fundamentalsystem von Lösungen der *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

wird gebildet durch die Funktionen

$$x^k e^{\lambda_j x}, \qquad 0 \le k < m_j$$

für die reellen Nullstellen λ_j, zusammen mit den Funktionen

$$x^k e^{\rho_j x} \cos \omega_j x \qquad \text{und} \qquad x^k e^{\rho_j x} \sin \omega_j x, \qquad 0 \le k < m_j$$

für jedes *Paar* $\rho_j \pm \omega_j i$ von komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Genannt wurden insgesamt n Funktionen, und sie sind linear unabhängig und bilden eine Basis des Lösungsraums der homogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist eine beliebige reelle Linearkombination der genannten Grundlösungen.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung kann man mit Variation der Konstanten bestimmen (aber für Ordnungen > 2 gibt es dabei wesentlich mehr zu rechnen, als für Gleichungen von Ordnung 2, und wir verzichten auf eine detaillierte Beschreibung).

Wenn die Inhomogenität ein Quasipolynom ist, dann kann man für eine partikuläre Lösung wieder den in Satz 9.13 beschriebenen Quasipolynomansatz verwenden und die Koeffizienten auf die gleiche Weise wie dort bestimmen. Alle Details der Lösungsmethode von Satz 9.13 gelten wörtlich auch für lineare inhomogene Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (9.18) erhält man wie immer bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, wenn man zu einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung alle Lösungen der homogenen Gleichung addiert.

9.4 Die Eulersche Differentialgleichung

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine spezielle lineare Differentialgleichung mit *nichtkonstanten* Koeffizienten, die man nach einer geeigneten Substitution auf eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten zurückführen kann, die man mit den bisher beschriebenen Methoden lösen kann.

Es handelt sich um die ***Eulersche Differentialgleichung***

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \tag{9.20}$$

die natürlich nur im Bereich $x \neq 0$ wirklich eine Differentialgleichung ist. Aus diesem Grund machen wir bei der Untersuchung dieser Gleichung die Zusatzannahme, dass $x > 0$.

Man kann ähnlich wie in Satz 9.7 durch einen geeigneten Ansatz Lösungen der homogenen Gleichung (mit $f = 0$) finden, aber diesen Weg wollen wir nicht im Detail beschreiben, sondern einen anderen Lösungsweg angeben, mit dem man nach ein wenig Aufbereitung die Differentialgleichung (9.20) mit bekannten Methoden lösen kann.

Wir verwandeln die Differentialgleichung durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen

$$t = \ln x,$$

oder anders gesagt, durch die Substitution $x = e^t$, die möglich ist, weil $x > 0$.

Mit dieser Substitution können wir y als eine Funktion $u(t)$ von t auffassen, d.h., wir setzen

$$u(t) := y(e^t) = y(x) \tag{9.21}$$

und führen so eine neue abhängige Variable u ein. Wir erlauben uns, u für y oder y für u zu schreiben, je nachdem, ob wir die abhängige Variable als Funktion von x oder als Funktion von t auffassen wollen—als Funktion von x nennen wir sie y aber als Funktion von t nennen wir sie u.

Bei der Bildung von Ableitungen müssen wir natürlich unterscheiden zwischen der Ableitung $'$ nach x und der Ableitung $\dot{}$ nach t. Beim Umrechnen zwischen beiden Varianten mit der Kettenregel kommt ins Spiel, dass

$$\frac{dx}{dt} = \frac{de^t}{dt} = e^t = x,$$

d.h., $\dot{x} = x$.

Mit der Kettenregel, der Produktregel, der Entsprechung $x = e^t$ und somit $\dot{x} = x$, und mit der Konvention, dass u als Funktion von t und y als

Funktion von x zu verstehen ist, haben wir die „Übersetzungstabelle“

$$\begin{aligned}
u &= y \\
\dot{u} &= y'\dot{x} = xy' \\
\ddot{u} &= \frac{d}{dt}xy' = \dot{x}y' + xy''\dot{x} = x^2y'' + xy' \\
\dddot{u} &= \frac{d}{dt}(x^2y'' + xy') = 2x\dot{x}y'' + x^2y'''\dot{x} + \dot{x}y' + xy''\dot{x} \\
&= x^3y''' + 3x^2y'' + xy'
\end{aligned} \tag{9.22}$$

usw., aus der wir zurückrechnen können, dass

$$\begin{aligned}
y &= u \\
xy' &= \dot{u} \\
x^2y'' &= \ddot{u} - xy' = \ddot{u} - \dot{u} \\
x^3y''' &= \dddot{u} - 3x^2y'' - xy' = \dddot{u} - 3\ddot{u} + 3\dot{u} - \dot{u} = \dddot{u} - 3\ddot{u} + 2\dot{u}.
\end{aligned} \tag{9.23}$$

Mit einer Induktion (die wir hier nicht nachvollziehen) kann man zeigen, dass allgemein gilt

$$x^n y^{(n)} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt} - 1\Big)\Big(\frac{d}{dt} - 2\Big)\cdots\Big(\frac{d}{dt} - (n-1)\Big)u. \tag{9.24}$$

Wenn man in der Eulerschen Differentialgleichung die Terme $x^k y^{(k)}$ durch die rechten Seiten der Gleichungen in den Übersetzungstabellen (9.23) und (9.24) ersetzt, erhält man eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die man mit den Methoden aus den Abschnitten 9.2 und 9.3 lösen kann.

Anschließend ersetzt man t durch $\ln x$ und erhält auf diese Weise die Lösung der ursprünglichen Eulerschen Differentialgleichung.

Beispiele 9.16 a) Wir lösen die Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' - 4y = x \tag{9.25}$$

im Bereich $x > 0$.

Die Substitution $x = e^t$, $y(x) = u(t)$ und die Übersetzungen aus (9.23) verwandeln die Differentialgleichung (9.25) in

$$\ddot{u} - \dot{u} + \dot{u} - 4u = \ddot{u} - 4u = e^t, \tag{9.26}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Das charakteristische Polynom der linken Seite ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4$ mit den Nullstellen ± 2, so dass die Funktionen e^{2t} und e^{-2t} ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung bilden.

Die Inhomogenität ist ein 1-Quasipolynom von Grad 0, und 1 ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so dass die Differentialgleichung (9.26) eine partikuläre Lösung der Gestalt $u_p(t) = ae^t$ besitzt. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$ae^t - 4ae^t = -3ae^t = e^t,$$

woraus folgt, dass $a = -1/3$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (9.26) lautet also

$$u(t) = -\frac{1}{3}e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}.$$

Dies müssen wir zurückübersetzen in die ursprünglichen Variablen (insbesondere müssen wir jedes Vorkommnis von e^t durch x ersetzen), und wir erhalten für die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung (9.25) die Funktion

$$y(x) = -\frac{x}{3} + c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}.$$

b) Wir lösen noch die homogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0 \tag{9.27}$$

im Bereich $x > 0$.

Die Substitution $x = e^t$, $y(x) = u(t)$ und die Übersetzungen aus (9.23) verwandeln diese Differentialgleichung in

$$\ddot{u} - \dot{u} + \dot{u} + 4u = \ddot{u} + 4u = 0. \tag{9.28}$$

Das charakteristische Polynom der linken Seite ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4$ mit zwei komplexen Nullstellen $\pm 2i$. Deshalb bilden $\cos 2t$ und $\sin 2t$ ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Die Rückübersetzung in die ursprünglichen Variablen geschieht, indem wir t durch $\ln x$ ersetzen. Die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung (9.27) lautet also

$$y(x) = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x).$$

Kapitel 10

Systeme von linearen Differentialgleichungen

Mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen, die wir bisher betrachtet haben, kann man *eindimensionale* Probleme lösen, aber echte Anwendungen sind selten so einfach.

In der wirklichen Welt finden Bewegungen von Körpern in einem Kraftfeld gleichzeitig in drei unabhängigen Richtungen statt, und die Komponenten der Bewegung in den verschiedenen Koordinatenrichtungen sind miteinander gekoppelt. Und auch wenn eine einzelne Größe oder nur eine einzelne Richtung von Interesse ist, so muss man in der Regel nicht nur die Entwicklung eines einzelnen Körpers berechnen, sondern eines *Systems* von mehreren Körpern, die miteinander verbunden sind oder auf andere Weise miteinander gekoppelt sind.

Die Beschreibung solcher physikalischer Systeme erfordert die Verfolgung von mehreren Größen, die durch mehrere Variablen zu erfassen sind, und deren Veränderung nicht nur vom eigenen Zustand, sondern auch vom Zustand der anderen Variablen abhängt. Die physikalischen Gesetze für solche Systeme formulieren sich nicht als eine einzelne Differentialgleichung, sondern als ein System von Differentialgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &\vdots \\ y_k' &= f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_k). \end{aligned} \tag{10.1}$$

Bemerkung 10.1 Dass wir in (10.1) ein System von Differentialgleichungen *erster* Ordnung geschrieben haben stellt keine wesentliche Einschränkung

dar, denn mit einem einfachen Trick kann man jede Differentialgleichung höherer Ordnung durch Einführung neuer Variablen in ein äquivalentes System von Gleichungen erster Ordnung verwandeln.

Das geht wie folgt. Betrachten wir aus einem System von Differentialgleichungen n-ter Ordnung eine Gleichung, die die Gestalt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, u, u', \ldots, u^{(n-1)}, \ldots, v, v', \ldots, v^{(n-1)}) \tag{10.2}$$

hat, wo $u \ldots v$ eventuell vorhandene weitere Variablen darstellen sollen.

Für jede in diesem System schon vorhandene Variable, nennen wir sie zur Illustration w, führen wir zusätzliche Variablen $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein, die die Ableitungen von w darstellen sollen, und diese Intention machen wir fest, indem wir neue Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} w' &= w_1 \\ w_1' &= w_2 \\ &\vdots \\ w_{n-2}' &= w_{n-1} \end{aligned}$$

hinzufügen (das machen wir für *jede* in der ursprünglichen Differentialgleichung erscheinenden Variablen); die ursprüngliche Gleichung (10.2) ersetzen wir durch

$$y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}, u, u_1, \ldots, u_{n-1}, \ldots, v, v_1, \ldots, v_{n-1}) \tag{10.3}$$

Entsprechend verfahren wir mit allen anderen Differentialgleichungen n-ter Ordnung im ursprünglichen System.

Das Differentialgleichungssystem wird zwar aufgebläht durch das Hinzufügen zusätzlicher „Hilfsgleichungen“, aber am Ende erscheinen keine höheren Ableitungen mehr explizit im System und sowohl die neu hinzugefügten Gleichungen wie auch die umgewandelten ursprünglichen Gleichungen (10.3) sind Gleichungen *erster* Ordnung geworden.

10.1 Lineare Differentialgleichungssysteme und ihre Grundeigenschaften

Wir sind wegen der gerade gemachten Bemerkung berechtigt, uns auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zu beschränken, aber diese Theorie ist immer noch viel zu weit gestreut und zu allgemein, als dass wir sie in der Kürze der uns zur Verfügung stehenden Zeit eingehend behandeln könnten.

Deshalb werden wir uns, wie schon im letzten Kapitel, auf einen einfachen Fall beschränken, der den Vorteil hat, eine bekannte und praktikable Lösungsmethode zu besitzen. Wie in Kapitel 9 werden wir nur ***lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten*** behandeln.

Bemerkung und Definition 10.2 Ein ***(homogenes) lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in*** n ***Variablen*** ist ein Differentialgleichungssystem der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1' & = & a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n \\ y_2' & = & a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \cdots & + & a_{2n}y_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 & + & a_{n2}y_2 & + & \cdots & + & a_{nn}y_n \end{array} \tag{10.4}$$

Die Koeffizienten a_{ij} dürfen Funktionen von x sein.

Wir sagen, das lineare Differentialgleichungssystem hat ***konstante Koeffizienten***, wenn die a_{ij} Konstanten sind. Auf diesen Fall werden wir uns im Folgenden beschränken.

Für den Umgang mit linearen Differentialgleichungssystemen ist es bequemer, anstelle der Gestalt (10.4) die *Vektor- und Matrixschreibweise* zu verwenden.

Dann schreibt sich das System (10.4) in der Form

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \tag{10.5}$$

wo $\mathbf{y}$ der Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ist, und wo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix der rechten Seite von (10.4) ist.

Es ist klar (durch leichtes Nachrechnen), dass jede Linearkombination von Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems wieder eine Lösung des gleichen Systems ist. Das heißt, der Lösungsraum des Differentialgleichungssystems (10.5) bildet einen Vektorraum über $\mathbf{R}$.

Eine ***Anfangsbedingung*** für das Differentialgleichungssystem (10.5) besteht aus der Angabe einer „Anfangszeit“ x_0 und der Angabe der Werte aller y_i zu dieser Zeit, d.h., die Angabe des Vektors $\mathbf{y}(x_0)$.

Auch für solche Differentialgleichungssysteme gilt der Satz von Picard-Lindelöf, und weil die Gleichung (10.5) für jeden Anfangswert eindeutig lösbar ist und die Beziehung zwischen Lösungen und ihren Anfangswerten offensichtlich linear ist (d.h., unter Bildung von Linearkombinationen erhalten bleibt), ist auch der ***Lösungsraum*** des Differentialgleichungssystems (10.5) ein n-dimensionaler Vektorraum.

Ein System $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ von n Lösungen von (10.5), das eine Basis des Lösungsraums bildet, nennt sich ein ***Fundamentalsystem von Lösungen***.

Genau dann bilden n vorgegebene Lösungen ein Fundamentalsystem, wenn sie linear unabhängig sind, oder wenn jede beliebige Lösung $\mathbf{y}$ des Differentialgleichungssystems sich in der Form

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{y}_1(x) + c_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x)$$

schreiben lässt, für geeignete Konstanten c_i.

Wenn $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden, so kann man aus ihnen eine Matrix (oder genauer eine matrixwertige Funktion) $Y(x)$ zusammensetzen, deren j-te Spalte die j-te Grundlösung $\mathbf{y}_j$ ist.

Diese Matrix kann man elementweise Ableiten und weil jede Spalte der Matrix eine Lösung des Differentialgleichungssystems (10.5) ist, erfüllt die gesamte Matrix die „matrixwertige“ Differentialgleichung

$$Y' = AY. \tag{10.6}$$

Die Matrix Y nennen wir eine ***Fundamentalmatrix*** oder eine ***fundamentale Matrixlösung*** des Differentialgleichungssystems (10.5).

Weil die Spalten einer Fundamentalmatrix ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems bilden, sind sie zu jeder „Zeit“ x linear unabhängig, und das bedeutet, dass *die Fundamentalmatrix $Y(x)$ für jedes x invertierbar ist*, und dass ihre Determinante, die wir die ***Wronski-Determinante*** $\big|Y(x)\big|$ des Fundamentalsystems nennen, nie 0 wird.

10.2 Erinnerungen aus der Eigenwerttheorie

Die Lösungsmethode, die wir für lineare Differentialgleichungssysteme vorstellen werden, hängt sehr stark von der ***Spektraltheorie*** ab, also der Theorie von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix, und sie erfordert Berechnungen in dieser Theorie.

Deshalb müssen wir kurz an die Grundbegriffe und Grundergebnisse dieser Theorie erinnern, damit wir sie anwenden können.

Definition 10.3 Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbf{R}$ oder über $\mathbf{C}$.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{C}$ heißt ein ***Eigenwert*** von A, wenn es einen Vektor $\mathbf{v} \neq 0 \in \mathbf{C}^n$ gibt, so dass

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{10.7}$$

Jeden solchen Vektor $\mathbf{v}$ nennen wir einen ***Eigenvektor*** zum Eigenwert λ.

Wichtig! der Vektor $\mathbf{v}$ *darf* komplex sein, auch wenn A eine reelle Matrix ist, weil es auch für reelle A nichtreelle Eigenwerte geben kann, für die kein reeller Eigenvektor möglich ist; und der Vektor $\mathbf{v}$ *muss* ungleich $\mathbf{0}$ sein, weil der Vektor $\mathbf{0}$ automatisch Gleichung (10.7) für *jede* Zahl λ erfüllt und deshalb in dieser Hinsicht keine besondere Beziehung zu einer einzelnen Zahl λ besitzt und kein besonderes Merkmal einer einzelnen Zahl (wie das Merkmal, ein Eigenwert zu sein) bestimmen kann.

Bemerkung und Definition 10.4 Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert einer Matrix A, wenn es einen *nichtverschwindenden* Vektor $\mathbf{v}$ gibt, für den die Beziehung (10.7) gilt. Diese Beziehung kann man umschreiben als

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{10.8}$$

(hier ist I die $n \times n$ Einheitsmatrix) und es gibt genau dann einen nichtverschwindenden Vektor, für den die letzte Gleichheit gilt, wenn die Matrix $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist, oder gleichbedeutend, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Das liefert uns eine leichte Methode, um die Eigenwerte einer Matrix zu bestimmen. Wir betrachten λ als eine Unbekannte und setzen

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I). \tag{10.9}$$

Aus den üblichen Formeln oder Regeln für die Berechnung einer Determinante ist klar, dass $\chi(\lambda)$ ein *Polynom von Grad n in λ ist.* Dieses Polynom heißt das ***charakteristische Polynom*** der Matrix A.

Die *Eigenwerte* von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. *Eigenvektoren* zu einem auf diese Weise erkannten Eigenwert λ kann man finden, indem man die Gleichung (10.8) für einen Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ auflöst, mit Gauß-Elimination oder jeder anderen Methode.

Bemerkung 10.5 Es ist leicht, sich bei der Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer Matrix zu verrechnen. Als Kontrolle auf grobe Fehler kann man darauf achten, dass wenigstens folgende Merkmale stimmen:

Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix hat die Gestalt

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Spur}(A)\, \lambda^{n-1} + \cdots + \det A, \tag{10.10}$$

wo

$$\operatorname{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen der Matrix bezeichnet. Diese Größe wird die ***Spur*** der Matrix genannt.

Wenn $n = 2$ bestimmt die Formel (10.10) das charakteristische Polynom völlig, und wir haben

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Spur}(A)\, \lambda + \det A.$$

Für große Matrizen (etwa ab Größe 5×5) ist es besser, die Eigenwerte der Matrix durch numerische Iterationsverfahren zu bestimmen, als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu berechnen, denn bei der Nullstellenbestimmung für Polynome hohen Grades treten zu viele Rundungsfehler auf.

Satz 10.6 *Sei A eine $n \times n$-Matrix und χ_A ihr charakteristisches Polynom.*

a) *Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ hat genau n komplexe Nullstellen, wenn man sie mit Vielfachheiten zählt, aber sie müssen nicht alle verschieden sein.*

   Als Konsequenz hat A genau n komplexe Eigenwerte, wenn man sie mit Vielfachheiten zählt, aber sie müssen nicht alle verschieden sein.

b) *Zu jedem Eigenwert λ, von Vielfachheit m, gibt es immer* mindestens *einen und höchstens m* linear unabhängige *Eigenvektoren. Die Anzahl kann aber echt kleiner als m sein.*

c) *Wenn A eine reelle Matrix ist, erscheinen nichtreelle Eigenwerte immer in Konjugiertenpaaren von gleicher Vielfachheit m, d.h., wenn $\lambda \notin \mathbf{R}$ ein komplexer Eigenwert von A von Vielfachheit m ist, dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A von Vielfachheit m.*

d) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer linear unabhängig.*

   Insbesondere, wenn alle Eigenwerte verschieden sind (d.h., wenn alle Eigenwerte einfach sind), dann gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren und sie bilden eine Basis von $\mathbf{C}^n$.

e) *Eine reelle* symmetrische *Matrix hat nur reelle Eigenwerte, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Bemerkung und Definition 10.7 Sei A eine $n \times n$-Matrix und sei λ ein m-facher Eigenwert von A.

Ein Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ ist ein Vektor $\mathbf{v} \neq 0$, für den gilt

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{10.11}$$

Wir wissen nach Satz 10.6 b) und 10.6 d), dass es zu jedem Eigenwert Eigenvektoren gibt, und dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, aber weil die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu einem Eigenwert kleiner als die Vielfachheit des Eigenwerts sein kann, findet man nicht immer eine Basis des Vektorraumes $\mathbf{C}^n$ bestehend nur aus Eigenvektoren.

Eine solche Basis kann aber für verschiedene Anwendungen sehr nützlich sein. Abhilfe für die Nichterfüllung dieses Wunsches kann man schaffen, wenn man die definierende Eigenschaft (10.11) eines Eigenvektors ein wenig lockert.

Wir nennen einen Vektor $\mathbf{v} \neq 0$ einen ***Hauptvektor*** von A zum Eigenwert λ, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, so dass

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{10.12}$$

Die kleinste solche Zahl k heißt die ***Stufe*** des Hauptvektors.

Die Eigenvektoren sind genau die Hauptvektoren der Stufe 1, aber im allgemeinen kann es auch Hauptvektoren höherer Stufen geben.

Lemma 10.8 *Sei A eine $n \times n$-Matrix und sei λ ein m-facher Eigenwert von A. Sei $\mathbf{v}$ ein Hauptvektor von A der Stufe k zum Eigenwert λ.*

a) *Für jede natürliche Zahl $j < k$ ist*

$$\mathbf{v}_j := (A - \lambda I)^j \mathbf{v}$$

ein Hauptvektor der Stufe $k - j$ von A zum Eigenwert λ.

b) *Die k Vektoren $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Beide Teile sind sehr leicht zu beweisen. Teil a) gilt, weil

$$(A - \lambda I)^{k-j} \mathbf{v}_j = (A - \lambda I)^{k-j}(A - \lambda I)^j \mathbf{v} = (A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

aber

$$(A - \lambda I)^{k-j-1} \mathbf{v}_j = (A - \lambda I)^{k-j-1}(A - \lambda I)^j \mathbf{v} = (A - \lambda I)^{k-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Für Teil b) betrachten wir eine nichttriviale Linearkombination

$$c_j\mathbf{v}_j + c_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + c_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0},$$

wo wir annehmen können, dass diese Darstellung mit einem nichtverschwindenden Koeffizienten $c_j \neq 0$ beginnt. Multiplikation beider Seiten mit der Matrix $(A - \lambda I)^{k-j-1}$ verwandelt obige Gleichung in

$$c_j\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0},$$

woraus folgt $c_j = 0$ (weil $\mathbf{v}_{k-1} \neq \mathbf{0}$), in Widerspruch zu unserer Annahme.

Also gibt es keine Darstellung von $\mathbf{0}$ als nichttriviale Linearkombination der $\mathbf{v}_i$ und sie sind linear unabhängig. ■

Lemma 10.9 *Hauptvektoren für verschiedene Eigenwerte sind immer linear unabhängig.*

Insbesondere kann kein Vektor gleichzeitig ein Hauptvektor für zwei verschiedene Eigenwerte sein.

Der Beweis ist nicht schwierig, aber ein wenig technisch, und wir verzichten deshalb darauf, ihn wiederzugeben.

Satz 10.10 *Sei A eine $n \times n$-Matrix und sei λ ein m-facher Eigenwert von A.*

Die Matrix A besitzt m linear unabhängige Hauptvektoren zum Eigenwert λ (aber nie mehr als m).

Korollar 10.11 *Sei A eine $n \times n$-Matrix.*

a) *Sei λ ein m-facher Eigenwert von A.*

   Die höchste Stufe, die ein Hauptvektor von A zum Eigenwert λ haben kann, ist m.

   (Dies gilt, weil sonst die Aussage von Lemma 10.8 b) uns mehr als m linear unabhängige Hauptvektoren zu diesem Eigenwert liefern würde.)

   Man kann m linear unabhängige Hauptvektoren zum Eigenwert λ finden, indem man mit den gängigen Methoden eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)^m \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

   bestimmt.

b) Es gibt eine Basis von $\mathbf{C}^n$ bestehend aus Hauptvektoren von A.

Man kann eine solche Basis bestimmen, indem man für jeden Eigenwert λ nach der Methode von Teil a) m linear unabhängige Hauptvektoren findet, wo m die Vielfachheit von λ ist.

Diese Hauptvektoren für alle Eigenwerte λ zusammengenommen bilden die gesuchte Basis.

Beispiel 10.12 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 0 \cdot 1 = (\lambda - 2)^2,$$

und folglich ist 2 ein doppelter Eigenwert und es gibt keine anderen Eigenwerte.

Es gilt

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \mathbf{0},$$

so dass jeder Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Hauptvektor von höchstens 2. Stufe ist, und jede Basis eine Basis aus Hauptvektoren ist.

Sei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der zweite Standardbasisvektor. Es gilt

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\mathbf{v}$ tatsächlich die maximale Stufe 2 haben muss, aber der erste Standardbasisvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat Stufe 1 und ist ein Eigenvektor.

10.3 Die Spektralmethode zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme

Wir stehen jetzt vor dem Problem, wie man Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems (10.5) bestimmen kann.

Wenn das System eindimensional ist, gibt es keine Schwierigkeit, denn dann haben wir nur eine einzige Differentialgleichung

$$y' = ay$$

und wir wissen schon, oder haben mit Trennung der Variablen schon berechnet, dass die allgemeine Lösung $y = ce^{ax}$ lautet.

Es gibt eine direkte Verallgemeinerung dieser bekannten Lösung zum n-dimensionalen Fall, denn man kann mit Hilfe der Exponentialreihe eine matrixwertige und auf Matrizen anwendbare Exponentialfunktion definieren, und diese, mit der Matrix A an der Stelle des Skalars a, liefert tatsächlich eine fundamentale Matrixlösung des Differentialgleichungssystems (10.5).

Darauf wollen wir aber nicht näher eingehen, denn die Exponentialfunktion für Matrizen ist nicht einfach zu berechnen und die vorgeschlagene Lösungsmethode deshalb nicht für praktische Anwendungen geeignet.

Aber eine andere „indirekte“ eindimensionale Idee bringt uns tatsächlich ans Ziel. Wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Koeffizientenmatrix A ist zum Eigenwert λ, so gilt

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

und aus diesem Grund reduziert sich das Differentialgleichungssystem (10.5) an Stellen x_0, wo $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, zu der einfacheren und vor allem *eindimensionalen* Form

$$\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}.$$

Diese Differentialgleichung, obwohl sie im $\mathbf{R}^n$ beheimatet ist, ist eindimensional, weil sie sich ganz auf der Geraden durch $\mathbf{y}_0$ abspielt.

Die bekannte Lösung für die eindimensionale lineare Differentialgleichung kann man direkt auf diese Eigengerade übertragen, und sie lautet dann

$$\mathbf{y}(x) = ce^{\lambda x}\mathbf{y}_0 \qquad \text{mit } c = e^{-\lambda x_0}.$$

Man prüft leicht nach, dass dies tatsächlich eine Lösung des Differentialgleichungs*systems* (10.5) ist, denn es gilt

$$\mathbf{y}' = \lambda ce^{\lambda x}\mathbf{y_0} = \lambda\mathbf{y}(x) = A\mathbf{y}(x),$$

weil $\mathbf{y}(x)$, als nichtverschwindendes skalares Vielfaches von dem Eigenvektor $\mathbf{y}_0$, auch ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.

Um ein Fundamentalsystem von Lösungen zu haben, könnte man diesen Ansatz einfach auf n linear unabhängige Eigenvektoren anwenden. Das funktioniert, solange es tatsächlich n linear unabhängige Eigenvektoren gibt, was ja nicht immer der Fall sein muss. Aber wenn zu wenige Eigenvektoren vorhanden sind, kann man auf Hauptvektoren zurückgreifen und mit ihrer Hilfe die fehlenden Lösungen ergänzen. Die genauen Lösungsansätze erläutern wir in

Satz 10.13 (Spektralmethode) *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbf{R}$. Auf folgende Weise erhält man ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}. \tag{10.13}$$

Sei λ ein Eigenwert von A und m seine Vielfachheit, und sei $\mathbf{v}$ ein Hauptvektor zum Eigenwert λ.

Für jede natürliche Zahl j setze

$$\mathbf{v}_j = (A - \lambda I)^j \, \mathbf{v}.$$

Dann ist

$$\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(x) := \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j}{j!} \, e^{\lambda x} \, \mathbf{v}_j = e^{\lambda x} \, \mathbf{v} + x e^{\lambda x} \, \mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \, e^{\lambda x} \, \mathbf{v}_{m-1} \tag{10.14}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems (10.13).

Die Lösungen $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$ für eine Menge von linear unabhängigen Hauptvektoren $\mathbf{v}$ sind auch linear unabhängig.

Insbesondere, die Lösungen $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$ für die Vektoren aus einer Basis von $\mathbf{R}^n$ bestehend aus Hauptvektoren bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Wir vermerken zum Schluss:

a) Die Formel (10.14) *zeigt die maximal mögliche Anzahl von Termen in der Lösung $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$, aber für Hauptvektoren $\mathbf{v}$, die nicht die maximale Stufe haben, sind die hinteren Summanden in der Formel $\mathbf{0}$; die Anzahl der nichtverschwindenden Summanden ist gleich der Stufe des Hauptvektors.*

b) Insbesondere, wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist, dann ist

$$\mathbf{y}_{\mathbf{v}}(x) = e^{\lambda x} \, \mathbf{v}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$ eine Lösung ist. Sei

$$\mathbf{u}_j := \frac{x^j}{j!} \, e^{\lambda x} \mathbf{v}_j \tag{10.15}$$

der j. Summand auf der rechten Seite von (10.14).

Wir benutzen diese Notation auch für $j \geq m$, aber in diesem Fall ist $\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ und deshalb auch $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$.

Da $\mathbf{u}_0 = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ haben wir

$$\mathbf{u}_0' = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}_0, \tag{10.16}$$

und für $j \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_j' &= \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\, e^{\lambda x}\, \mathbf{v}_j + \lambda\, \frac{x^j}{j!}\, e^{\lambda x}\, \mathbf{v}_j \\
&= \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\, e^{\lambda x}(A - \lambda I)\, \mathbf{v}_{j-1} + \lambda \mathbf{u}_j \\
&= (A - \lambda I)\Big[\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\, e^{\lambda x}\, \mathbf{v}_{j-1}\Big] + \lambda \mathbf{u}_j \\
&= (A - \lambda I)\, \mathbf{u}_{j-1} + \lambda \mathbf{u}_j \\
&= A\mathbf{u}_{j-1} - \lambda \mathbf{u}_{j-1} + \lambda \mathbf{u}_j
\end{aligned} \tag{10.17}$$

Diese Berechnung gilt auch für $j = m$, obwohl $\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$, denn die definierende Formel (10.15) gilt für jedes j, auch wenn der Ausdruck auf der rechten Seite $\mathbf{0}$ ist.

Nun gilt nach Definition und weil $\mathbf{u}_m$ null ist, dass

$$\mathbf{y}_\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_{m-1} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_{m-1} + \mathbf{u}_m.$$

Deshalb ist

$$\mathbf{y}_\mathbf{v}{}' = \mathbf{u}_0' + \mathbf{u}_1' + \cdots + \mathbf{u}_m',$$

und wenn wir die Summanden rechts durch ihre Entsprechung nach den Formeln (10.16) und (10.17) ersetzen, so heben sich alle Beiträge $\pm\lambda\mathbf{u}_j$ paarweise weg, bis auf den Beitrag $\lambda\mathbf{u}_m$ aus (10.17) für $\mathbf{u}_m'$, der ohnehin $\mathbf{0}$ ist.

Übrig bleiben die Beiträge

$$A\mathbf{u}_0 + A\mathbf{u}_1 + \cdots + A\mathbf{u}_{m-1} = A\mathbf{y}_\mathbf{v},$$

und das zeigt, dass $\mathbf{y}_\mathbf{v}$ das Differentialgleichungssystem (10.13) löst.

Die Aussage über die lineare Unabhängigkeit der Lösungen lässt sich mit ein paar Komplikationen ähnlich beweisen, wie Lemma 10.8 b). Wir verzichten auf die nicht sehr interessanten Details.

Die Aussagen a) und b) sind klar. ■

Bemerkung 10.14 Die Formel (10.14) sieht kompliziert aus, aber sie ist in Wirklichkeit sehr leicht zu merken.

In (10.14) wird die Summe auf der rechten Seite nach dem $(m-1)$-ten Summanden abgebrochen, weil alle weiteren $\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ sind. Es schadet aber nichts, wenn man sich diese Nullsummanden hinzudenkt, und dann sieht man, dass die rechte Seite nichts anderes ist als die Potenzreihe für

$$\exp\bigl(x(A-\lambda I)\bigr)$$

mal $e^{\lambda x}\mathbf{v}$, d.h., die Terme kann man sich formal merken als $e^{\lambda x}$ mal die Summanden der Exponentialreihe für $x(A-\lambda I)$ mal den Vektor $\mathbf{v}$.

In dieser Hinsicht haben wir also *doch* den auf Seite 190 kurz erwähnten Exponentialfunktionsansatz für die Konstruktion von Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems realisiert.

Beispiele 10.15 a) Wir lösen das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \tag{10.18}$$

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^2 - \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \lambda + \det\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 35 \\ &= (\lambda-7)(\lambda+5). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 7 und -5.

Da wir zwei verschiedene einfache Eigenwerte haben, werden wir eine Basis aus Eigenvektoren erhalten.

Wir suchen einen Eigenvektor zum Eigenwert 7 durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 12 \\ 3 & 1-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Die Koeffizientenmatrix *muss* singulär sein, weil wir von den Diagonalelementen der ursprünglichen Matrix einen Eigenwert abgezogen haben. Das bedeutet, dass die zweite Gleichung automatisch ein Vielfaches der ersten Gleichung ist und die gleichen Lösungen wie die erste hat.

Wir müssen also nur eine nichttriviale Lösung der Gleichung

$$-6x + 12y = 0$$

finden. Dazu kann y jeden nichtverschwindenden Wert annehmen und $x = 2y$.

Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 7.

Wir suchen noch einen Eigenvektor zum Eigenwert -5 durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1+5 & 12 \\ 3 & 1+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Die Koeffizientenmatrix *muss* wieder singulär sein, so dass die zweite Gleichung automatisch ein Vielfaches der ersten Gleichung ist und die gleichen Lösungen hat.

Wir müssen also nur eine nichttriviale Lösung der Gleichung

$$6x + 12y = 0$$

finden. Dazu kann y jeden nichtverschwindenden Wert annehmen und $x = -2y$.

Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 5.

Weil $n = 2$ und wir zwei Eigenvektoren gefunden haben, müssen wir keine Hauptvektoren suchen, und die Lösungen

$$e^{7x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e^{-5x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems (10.18).

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{7x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Wir lösen das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \text{für} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{10.19}$$

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7) \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 7).\end{aligned}$$

Die Matrix hat also einen einfachen Eigenwert 7 und einen doppelten Eigenwert 1.

Wir suchen zuerst einen Eigenvektor zum Eigenwert 7 durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2-7 & 1 & 2 \\ 1 & 2-7 & 2 \\ 2 & 2 & 5-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist mit Gauß-Jordan Elimination leicht zu lösen: wir vertauschen die ersten beiden Zeilen, ziehen Vielfache von der ersten Zeilen von den anderen beiden ab, um die letzten Eintragungen in der ersten Spalte zu 0 zu machen, kürzen den offensichtlichen Faktor -12 aus der zweiten Zeile und machen die dritte Zeile zu $\mathbf{0}$, indem wir von ihr ein Vielfaches der zweiten Zeile abziehen. Das Ergebnis ist die reduzierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die die beiden Gleichungen

$$2y - z = 0 \qquad \text{und} \qquad x - 5y + 2z = 0$$

darstellt.

Die letzte Koordinate ist frei wählbar. Mit $z = 2$ erhalten wir $y = 1$ und dann $x = -2z + 5y = 1$.

Also ist $(1, 1, 2)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 7.

Wir suchen jetzt Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-1 & 2 \\ 2 & 2 & 5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Man sieht sofort, dass die letzten beiden Zeilen Vielfache der ersten sind, so dass die Matrix Rang 1 hat und wir nur eine unabhängige Gleichung haben:

$$x + y + 2z = 0.$$

Der Lösungsraum (also der Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert 1) ist deshalb zweidimensional.

Die letzten beiden Koordinaten sind frei wählbar und bestimmen x. Mit der Wahl $y = 1$, $z = 0$ erhalten wir $x = -1$ und wir finden $(-1, 1, 0)^T$ als einen Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Mit der Wahl $y = 0$, $z = 1$ erhalten wir $x = -2$ und wir finden $(-2, 0, 1)^T$ als einen zweiten Eigenvektor zum Eigenwert 1, linear unabhängig von dem ersten.

Die drei gefundenen Eigenvektoren bilden eine Basis von $\mathbf{R}^3$ und wir erhalten mit ihnen ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{7x}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(x) = e^{x}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_3(x) = e^{x}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{7x}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{x}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3 e^{x}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

c) Wir lösen das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \text{für} \qquad A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 2 & 1\\0 & 2 & 3\end{pmatrix}. \tag{10.20}$$

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\0 & 2-\lambda & 1\\0 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\\ &= -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4)\\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4).\end{aligned}$$

Die Matrix hat also einen einfachen Eigenwert 4 und einen doppelten Eigenwert 1.

Wir suchen zuerst einen Eigenvektor zum Eigenwert 4 durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 & 3 \\ 0 & 2-4 & 1 \\ 0 & 2 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Die letzte Zeile ist minus die zweite und wir haben also nur zwei unabhängige lineare Gleichungen

$$-2y + z = 0 \qquad \text{und} \qquad -3x + 2y + 3z = 0.$$

Die letzte Koordinate ist frei wählbar. Mit $z = 6$ erhalten wir $y = 3$ und dann $x = \frac{1}{3}(2y + 3z) = 8$.

Also ist $(8, 3, 6)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4.

Wir suchen jetzt Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 3 \\ 0 & 2-1 & 1 \\ 0 & 2 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Die letzte Zeile ist ein Vielfaches der zweiten, die erste aber nicht, so dass der Rang der Matrix 2 ist. Deshalb ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems eindimensional und wir finden nur einen unabhängigen Eigenvektor.

In diesem Fall müssen wir also auf Hauptvektoren ausweichen. Um sie zu finden quadrieren wir die Koeffizientenmatrix $A - I$ des letzten linearen Gleichungssystems und lösen stattdessen

$$(A - I)^2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Alle drei Zeilen sind Vielfache voneinander und wir haben nur eine unabhängige Gleichung

$$y + z = 0$$

(nach Kürzung eines Faktors aus der Gleichung). In dieser Gleichung kommt x nicht vor.

Der Rang der Matrix ist 1 und deshalb ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems zweidimensional. Wir können x und y unabhängig voneinander frei wählen und dann ist $z = -y$. Also bilden die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Hauptvektorenraumes der Matrix $A - I$.

Der Eigenvektor zum Eigenwert 4 liefert eine Lösung

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{4x} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

des Differentialgleichungssystems (10.20).

Wir erhalten zwei weitere linear unabhängige Lösungen aus den Hauptvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$, und zwar

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2(x) &= e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + xe^x \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_3(x) &= e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + xe^x \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} -x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} -x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass wir die Lösung $\mathbf{y}_2$ etwas schneller hätten erhalten können, wenn wir erkannt hätten, dass $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)^T$ sogar ein Eigenvektor ist, und nicht ein Hauptvektor höherer Stufe.

Aber das nachzuprüfen kostet auch Zeit, und es ist insgesamt effizienter, sich die *einheitliche* (aber manchmal überflüssige Schritte erfordernde) Hauptvektorenmethode zu merken, als eine Sonderbehandlung für Eigenvektoren einzuführen, die man sich getrennt merken muss und auf deren Anwendbarkeit man achten muss.

Bemerkung 10.16 Zum Schluss wollen wir noch kurz erläutern, was zu tun ist, wenn einige der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix eines linearen Differentialgleichungssystems komplex sind. Wenn die Koeffizientenmatrix reell ist, treten solche Eigenwerte nur als Konjugiertenpaare auf.

Am einfachsten ist es, beim Auftreten von komplexen Eigenwerten komplex weiterzurechnen, und wie oben beschrieben *komplexe* Eigenvektoren und Hauptvektoren für diese Eigenwerte zu bestimmen. Diese ganze Berechnung hat über $\mathbf{C}$ stattzufinden.

Zum Schluss erhält man ***komplexwertige*** Lösungen des gegebenen reellen Differentialgleichungssystems, aber aus ihnen kann man leicht reelle Lösungen extrahieren.

Man bekommt sie, indem man einfach den Realteil und den Imaginärteil einer komplexen Lösung hernimmt.

Wie das Ergebnis aussieht erläutern wir kurz für den Spezialfall, wo die Lösung aus einem *Eigenvektor* gewonnen wurde, aber die Beschreibung lässt sich leicht auch auf Hauptvektorenlösungen ausweiten.

Sei $\lambda = \rho + \omega i$ ein komplexer Eigenwert der Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems, und sei $\mathbf{v}$ ein komplexer Eigenvektor zum Eigenwert λ. Diesen Vektor können wir auch in seinen Realteil und Imaginärteil zerlegen; es gibt reelle Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$, so dass

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}.$$

Zu dem komplexen Eigenvektor gehört eine komplexe Lösung

$$e^{\lambda x}\mathbf{v} = e^{\rho x}(\cos\omega x + i\sin\omega x)(\mathbf{u} + i\mathbf{w}),$$

und deren Real- und Imaginärteil sind die reellen Lösungen

$$e^{\rho x}\big(\cos(\omega x)\mathbf{u} - \sin(\omega x)\mathbf{w}\big) \qquad \text{und} \qquad e^{\rho x}\big(\cos(\omega x)\mathbf{w} + \sin(\omega x)\mathbf{u}\big).$$

Es lohnt sich aber nicht, diese Formeln auswendig zu lernen, sondern es ist einfacher und zuverlässiger, die genannten Lösungen von Fall zu Fall direkt aus der berechneten komplexen Lösung zu entnehmen.

Kapitel 11

Fourierreihen

Nachdem wir jetzt gewöhnliche Differentialgleichungen in vielen Aspekten behandelt haben, wollen wir uns den wichtigen *partiellen Differentialgleichungen* der Technik zuwenden. Das werden wir allerdings noch nicht in diesem Kapitel machen, denn um die Lösungsmethoden für partielle Differentialgleichungen vollständig beschreiben zu können, brauchen wir noch ein unerlässliches Werkzeug.

Ein wichtiger Ansatz bei der Lösung mancher partiellen Differentialgleichungen besteht darin, sie in mehrere *gewöhnliche Differentialgleichungen* für die einzelnen beteiligten Variablen zu zerlegen. Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen können wir inzwischen gut lösen, aber es stellt sich heraus, das die Lösungen manchmal zu *komplexen* Nullstellen des charakteristischen Polynoms gehören und deshalb Linearkombinationen von Cosinus und Sinusfunktionen sind.

Auch partielle Differentialgleichungen haben Anfangsbedingungen (und auf eine räumliche Variable bezogene Randbedingungen), aber weil eine partielle Differentialgleichung Ableitungen in verschiedene Richtungen involviert, sind die Lösungen Funktionen von mehreren Variablen, und die Anfangsbedingungen und Randbedingungen werden nicht durch einzelne Zahlenwerte beschrieben, sondern durch *Funktionen* der jeweils anderen Variablen.

Weil der oben erwähnte Lösungsansatz spezielle (und insbesondere oft trigonometrische) Lösungsfunktionen produziert, ist es schwierig, Anfangsbedingungen zu erfüllen, die nicht die gleiche Sorte von Funktion sind. Deshalb kann man die Grundlösungen, d.h., die Lösungen der zur Hilfe herangezogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen, nicht direkt als Lösung der partiellen Differentialgleichung verwenden. Stattdessen flickt man die wahre Lösung aus vielen verschiedenen Grundlösungen zusammen und kann so beliebige Anfangsfunktionen gut angleichen, auch wenn sie nicht die Gestalt einer einzelnen Grundlösung haben.

Dieses „Zusammenflicken“ geschieht durch eine *Reihenentwicklung* mit den Grundlösungen, und weil die Grundlösungen im besprochenen Fall trigonometrische Funktionen sind, eben durch eine so genannte ***trigonometrische Reihe***, deren Summanden Cosinus und Sinusfunktionen sind und nicht wie sonst üblich Vielfache von Potenzen einer Variablen.

Abbildung 11.1: Jean Baptiste Joseph Fourier

Diese Ideen stammen von Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), einem französischen Mathematiker und Physiker, der im frühen 19. Jahrhundert sich mit der Ausbreitung von Wärme befasste. Er hat die Gestalt der Wärmeleitungsgleichung ausgearbeitet und sie mit Hilfe von trigonometrischen Reihen gelöst. Nach ihm werden diese trigonometrischen Reihen ***Fourierreihen*** genannt.

11.1 Trigonometrische Reihen

Definition 11.1 a) Sei n eine natürliche Zahl. Ein ***trigonometrisches Polynom von Grad*** n ist eine Funktion der Gestalt

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \omega kx + b_k \sin \omega kx), \tag{11.1}$$

wo ω eine positive reelle Konstante ist und wo die a_k und b_k reelle Zahlen sind.

b) Eine ***trigonometrische Reihe*** ist ein Ausdruck der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega k x + b_k \sin \omega k x), \tag{11.2}$$

wo ω eine positive reelle Konstante ist und wo die a_k und b_k reelle Zahlen sind.

Zunächst wollen wir (11.2) tatsächlich nur als einen Ausdruck ohne nähere Bedeutung auffassen, bis wir in der Lage sind zu erklären, wie man einer Funktion einen solchen Ausdruck zuordnen kann, und ob und in welchem Sinne diese Reihe gegen die Funktion konvergiert.

Es gibt einen Grund für die merkwürdige Schreibweise des 0-ten Terms $a_0/2$, den wir bald werden erklären können und der mit der Berechnung der Koeffizienten aus der zugeordneten Funktion zu tun hat—diese uneinheitliche Schreibweise für die Koeffizienten erlaubt eine einheitliche Formel für ihre Berechnung.

Um kurz zu wiederholen: ein erfolgreicher Lösungsansatz für partielle Differentialgleichungen bewegt uns dazu, Funktionen, wie immer sie auch aussehen mögen, durch trigonometrische Reihen darstellen zu wollen. Diese Darstellung hat aber einen vielleicht ungewollten aber auf jeden Fall bedeutsamen Nebeneffekt: trigonometrische Funktionen verändern ihren Wert nicht, wenn man ihr Argument (also den Wert, der in die Funktion eingegeben wird) um 2π erhöht. Das bedeutet, dass jede Funktion, die durch eine trigonometrische Reihe dargestellt wird, eine ähnliche Eigenschaft haben muss—höchstens können wir durch eine Umskalierung erreichen, dass der genannte Effekt bei einem anderen Inkrementen als 2π einsetzt.

Definition 11.2 Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ***periodisch*** mit ***Periode*** $L > 0 \in \mathbf{R}$, wenn für *jedes* $x \in \mathbf{R}$ gilt

$$f(x + L) = f(x). \tag{11.3}$$

Eine solche Funktion wiederholt ihre Werte in Abständen von L Längeneinheiten auf der reellen Achse.

Bemerkung 11.3 a) Die Periode einer periodischen Funktion ist nicht eindeutig bestimmt. Insbesondere, wenn f periodisch ist mit Periode L, dann ist f auch periodisch mit Periode $2L$ oder mit Periode $3L$ oder allgemeiner mit Periode kL für jedes $k \neq 0 \in \mathbf{Z}$.

b) Wenn f periodisch ist mit Periode L und wenn $\omega \neq 0 \in \mathbf{R}$, dann ist

$$g(x) := f(\omega x)$$

periodisch mit Periode L/ω.

c) Die trigonometrischen Funktionen cos, sin, tan usw. sind periodisch mit Periode 2π.

d) Sei $L \neq 0 \in \mathbf{R}$ und sei

$$\omega := \frac{2\pi}{L}. \tag{11.4}$$

Dann sind die Funktionen

$$x \mapsto \cos \omega x \qquad \text{und} \qquad x \mapsto \sin \omega x$$

periodisch mit Periode L.

e) Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ periodisch mit Periode L. Dann ist der Wert des Integrals

$$\int_a^{a+L} f(x)\,dx$$

unabhängig von der Wahl des linken Endpunkts a.

In anderen Worten, *das Integral einer periodischen Funktion über eine Periode hängt nicht davon ab, über* ***welches*** *Intervall der Länge L man integriert.*

Beweis. Alle Behauptungen, bis vielleicht auf die letzte, sind entweder wohlbekannt oder sehr einfach durch Nachrechnen zu belegen.

Aussage e) über das Integral ist klar, wenn man a um ein Vielfaches von L verändert, weil dann genau die gleichen Werte unter dem Integralzeichen stehen wie vorher.

Wenn man a um einen Betrag kleiner als L verändert, also a durch einen Endpunkt $b \in [a, a+L]$ ersetzt, dann hat man

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+L} f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{a+L} f(x)\,dx \\
&= \int_{a+L}^{b+L} f(x)\,dx + \int_b^{a+L} f(x)\,dx \\
&= \int_b^{a+L} f(x)\,dx + \int_{a+L}^{b+L} f(x)\,dx \\
&= \int_b^{b+L} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Da man aber jede Veränderung von a zusammensetzen kann aus einer Verschiebung um ein Vielfaches von L und einer Verschiebung um weniger als L, gilt Aussage e) für beliebige Veränderungen von a. ■

Wir wollen untersuchen, wie wir eine vorgegebene periodische Funktion f durch eine trigonometrische Reihe darstellen können.

Um zu verstehen, wie man das am besten macht, ist es hilfreich, mit einer einfacheren Frage zu beginnen. Sei ein ***trigonometrisches Polynom*** f gegeben, dessen Werte wir kennen, aber dessen Darstellung (11.1) als trigonometrisches Polynom wir nicht wissen. Wie kann man die Koeffizienten a_k und b_k aus den Werten von f berechnen?

Dabei kommen uns die so genannten ***Orthogonalitätsrelationen*** zwischen den trigonometrischen Funktionen zur Hilfe.

Hilfssatz 11.4 (Erinnerung) *Für die trigonometrischen Funktionen gelten die* ***Additionsformeln***

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{11.5a}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \tag{11.5b}$$

Diese Formeln kann man am leichtesten mit der Eulerschen Formel

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

und den üblichen Eigenschaften der Exponentialfunktion beweisen.

Addiert man in geeigneten Paarungen zwei dieser Formeln, einmal für $\alpha+\beta$ und einmal für $\alpha-\beta$, und nutzt man aus, dass $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, so erhält man als Korollar sofort die folgenden nützlichen

Rechenregeln 11.5 Für Produkte von zwei trigonometrischen Funktionen gelten die Formeln

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \tag{11.6a}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) \tag{11.6b}$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \tag{11.6c}$$

Bemerkung 11.6 Sei ω eine reelle Zahl $\neq 0$ und sei $L = 2\pi/\omega$. Dann gilt für jedes $a \in \mathbf{R}$, dass

$$\int_a^{a+L} \cos\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_a^{a+L} = 0 \tag{11.7a}$$

und

$$\int_a^{a+L} \sin \omega x \, dx = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x \Big|_a^{a+L} = 0, \tag{11.7b}$$

weil $\sin \omega x$ und $\cos \omega x$ Funktionen von Periode L sind.

Die Voraussetzung, dass $\omega \neq 0$, ist natürlich wesentlich, denn

$$\int_a^{a+L} \cos 0 \, dx = \int_a^{a+L} 1 \, dx = L \tag{11.8a}$$

und

$$\int_a^{a+L} \sin 0 \, dx = \int_a^{a+L} 0 \, dx = 0 \tag{11.8b}$$

Der Clou in der Berechnung der Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms sind die aus den obigen Beziehungen leicht herzuleitenden aber äußerst wichtigen ***Orthogonalitätsrelationen*** zwischen trigonometrischen Funktionen verschiedener Frequenzen $k\omega$:

Satz 11.7 (Orthogonalitätsrelationen) *Sei $L > 0 \in \mathbf{R}$ und sei $\omega = 2\pi/L$ (so dass die Funktionen $\cos \omega x$ und $\sin \omega x$ Periode L haben).*

Seien k und l natürliche Zahlen. Dann gilt

$$\frac{2}{L} \int_0^L \cos k\omega x \cos l\omega x = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = l \neq 0; \\ 2, & \text{wenn } k = l = 0; \\ 0, & \text{wenn } k \neq l \end{cases} \tag{11.9a}$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin k\omega x \sin l\omega x = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = l \neq 0; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{11.9b}$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin k\omega x \cos l\omega x = 0 \tag{11.9c}$$

Beweis. Man ersetze die Integranden durch die passenden rechten Seiten der Formeln (11.6) und lese aus Bemerkung 11.6 die Werte der Integrale ab. ■

Man sieht, dass das Integral eines Produktes von zwei trigonometrischen Funktionen $\sin k\omega x$ und $\cos k\omega x$ genau dann nicht 0 ist, wenn beide Faktoren die gleiche Sorte von trigonometrischer Funktion sind und die gleiche Frequenz (und insbesondere gleiches k) haben. Deshalb kann man mit den Orthogonalitätsrelationen die einzelnen Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms „herauslösen“.

Satz 11.8 *Sei*

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \omega kx + b_k \sin \omega kx)$$

ein trigonometrisches Polynom von Grad n und sei $L = 2\pi/\omega$. Dann gilt

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \cos k\omega x \, dx \tag{11.10a}$$

und

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \sin k\omega x \, dx. \tag{11.10b}$$

Beweis. Nach den Orthogonalitätsrelationen liefert nur der Summand von p, der so aussieht wie der rechte Faktor im Integrand, einen nichtverschwindenden Beitrag zum Integral, und dieser Beitrag ist *Eins* mal den Koeffizienten von p, außer wenn der rechte Faktor $\cos 0$ ist—in diesem Fall liefert das Integral *zweimal* dem „konstanten Term“ von p.

Das aber ist a_0, weil wir die Konvention benutzen, den konstanten Term als die *Hälfte* des 0-ten Koeffizienten zu schreiben! (Da haben wir also die Erklärung für diese mysteriöse Konvention.) ■

Diesen Satz, der uns erlaubt, die Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms zu berechnen, wollen wir „umwidmen“, um mit ihm einer beliebigen periodischen Funktion eine *trigonometrische Reihe* zuzuordnen.

11.2 Fourierreihen

Definition 11.9 Sei $L > 0$ und sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine auf endlichen Intervallen Riemann integrierbare Funktion mit Periode L. Sei $\omega = 2\pi/L$.

Wir *definieren*

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos k\omega x \, dx \qquad (\text{für } k \in \mathbf{N}) \tag{11.11a}$$

und

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin k\omega x \, dx \qquad (\text{für } k \geq 1 \in \mathbf{N}) \tag{11.11b}$$

und wir assoziieren zu f die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos \omega kx + b_k \sin \omega kx), \tag{11.12}$$

die wir die ***Fourierreihe*** von f nennen.

Die a_k und b_k heißen die ***Fourierkoeffizienten*** von f.

Sei n eine natürliche Zahl. Die Partialsumme

$$p_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos \omega kx + b_k \sin \omega kx)$$

der Summanden der Fourierreihe bis einschließlich Index n ist ein trigonometrisches Polynom und heißt das ***n-te Fourierpolynom*** von f.

Für die Fourier*reihe* benutzen wir die Notation

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos \omega kx + b_k \sin \omega kx),$$

um kundzutun, dass die trigonometrische Reihe auf der rechten Seite die Fourierreihe von f ist.

Diese Notation *hat keine weitere Bedeutung als das.* Insbesondere sagt sie nichts über die Konvergenz der Fourierreihe gegen f aus!

Bemerkung 11.10 Fouriers Idee, die Wärmeleitung mit Hilfe von Zerlegungen von Funktionen in trigonometrische Reihen zu beschreiben, war damals neu, aber die Idee an sich, Funktionen in trigonometrische Reihen zu zerlegen, war nicht ganz neu. In der Musik wurden ja schon immer Töne in ihre Grundtöne und Obertöne zerlegt, wobei die relative Stärke der verschiedenen Obertöne die ***Klangfarbe*** des Tons bestimmt (aber nicht den Ton auf der Tonleiter, der gehört wird—dieser wird durch den Grundton charakterisiert).

Man kann sich eine Fourierreihenentwicklung einer Funktion also als eine Art „musikalische“ Beschreibung der Funktion durch Bestimmung ihrer Klangfarbe vorstellen.

Bemerkung 11.11 Unsere Motivation und Herleitung der Fourierreihe einer Funktion f geht schon wegen der Gestalt der Reihensummanden davon aus, dass f eine periodische Funktion ist.

Nicht immer aber kommen in Anwendungen solchen Funktionen vor. Oft untersucht man einen Gegenstand von einer Länge L, wie etwa eine Stange oder einen Draht, und hat nur auf diesem Gegenstand, d.h., auf einem Intervall der Länge L, eine Funktion f vorgegeben.

Wir erlauben uns, auch für solche auf einem endlichen Intervall vorgegebene nichtperiodische Funktionen eine Fourierreihe zu definieren, indem wir die vorgegebene Funktion f ***periodisch fortsetzen.***

Das heißt, dass wir die gegebene Definition von f auf dem halboffenen Grundintervall $[0, L)$ anwenden, und diese Definition auch auf alle um Vielfache von L verschobenen Kopien des Intervalls übernehmen, so dass

$$f(x + kL) := f(x)$$

für jedes x im Intervall und jedes $k \in \mathbf{Z}$.

Diese Definition ordnet *jedem* Punkt in $\mathbf{R}$ einen eindeutigen Wert zu und sorgt durch seine Gestalt dafür, dass die so resultierende Funktion L-periodisch ist auf ganz $\mathbf{R}$.

Für diese periodische Fortsetzung von f können wir dann die Fourierreihe definieren, und sie wird alle Eigenschaften haben, die wir weiter unten für die Fourierreihen periodischer Funktionen angeben werden.

Beispiel 11.12 Wir betrachten als Beispiel die ***gleichgerichtete Sinusschwingung*** mit der Definition

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{wenn } 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & \text{wenn } \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \tag{11.13}$$

und dies periodisch fortgesetzt auf $\mathbf{R}$. Die Periode ist $L = 2\pi$ und deshalb wird $\omega = 1$ sein.

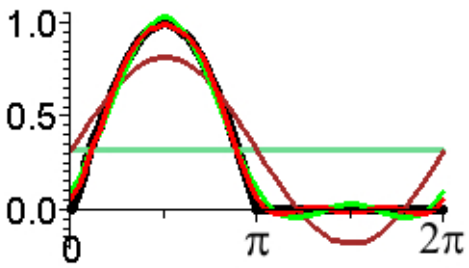


Abbildung 11.2: Die gleichgerichtete Sinuskurve und ihre ersten vier Fourierpolynome

Für die Fourierkoeffizienten finden wir, wenn $k \neq 1$, dass

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos kx\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big(\sin(1+k)x + \sin(1-k)x\big)\,dx && \text{(aus (11.6b))} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{1}{1+k}\cos(1+k)x - \frac{1}{1-k}\cos(1-k)x\Big)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{1}{1+k}\big(\cos(1+k)\pi - \cos 0\big) - \frac{1}{1-k}\big(\cos(1-k)\pi - \cos 0\big)\Big).
\end{aligned}$$

Wenn k ungerade ist, dann ist $1 \pm k$ gerade und

$$\cos(1 \pm k)\pi = \cos 0 = 1,$$

so dass die Differenzen in den inneren Klammern 0 sind und $a_k = 0$.

Wenn k gerade ist, dann ist $1 \pm k$ ungerade und

$$\cos(1 \pm k)\pi = -\cos 0 = -1,$$

so dass die Differenzen in den inneren Klammern -2 sind und

$$a_k = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k}\Big) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{1-k^2} = \frac{2}{\pi(1-k^2)}.$$

Dies gilt auch für $k = 0$, so dass

$$a_0 = \frac{2}{\pi}.$$

Wenn $k = 1$ können wir die Berechnung von a_k so beginnen wie oben, aber der zweite Summand in der mittleren Zeile wird 0, so dass wir in den weiteren Zeilen den zweiten Summanden einfach weglassen können (dadurch kommen wir auch nicht dazu, verbotenerweise durch 0 zu dividieren).

Weil aber 1 ungerade ist, gilt für den verbleibenden Summanden in der letzten Zeile dieser Berechnung die Bemerkung über die Differenz von Cosinuswerten für ungerade k, d.h., auch

$$a_1 = 0.$$

Für die b_k gilt, wenn $k \neq 1$, dass

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin kx\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big(-\cos(1+k)x + \cos(1-k)x\big)\,dx && \text{(aus (11.6a))} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{1}{1+k}\sin(1+k)x + \frac{1}{1-k}\sin(1-k)x\Big)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{1}{1+k}\big(\sin(1+k)\pi - \sin 0\big) + \frac{1}{1-k}\big(\sin(1-k)\pi - \sin 0\big)\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $\sin m\pi$ für jede ganze Zahl m null ist.

Wenn $k = 1$ können wir die Berechnung von b_k so beginnen wie oben, aber der zweite Summand in der dritten Zeile wird zu $\cos 0 = 1$. Dessen Integral liefert einen Beitrag π zum Gesamtwert des Integrals, während der erste Summand wie für jedes anderes $k \in \mathbf{N}$ einen Beitrag 0 liefert.

In der vorletzten Zeile dieser Berechnung steht also

$$b_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}.$$

Alle anderen b_k sind 0.

Wir haben also

$$f \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx$$

(hier haben wir die geraden k, für die alleine gilt $a_k \neq 0$, als $2n$ für beliebige natürliche Zahlen n geschrieben, um die Notation der Summe der Cosinusterme zu vereinfachen).

Abbildung 11.2 auf Seite 209 zeigt eine Periode der gleichgerichteten Sinuskurve als schwarze Kurve im Hintergrund, überlagert von den ersten vier Partialsummen der Fourierreihe in verschiedenen Farben.

11.3 Das Symmetrieverhalten von Fourierreihen

Beispiel 11.13 Als zweites Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) := x$$

auf dem Intervall $(-1, 1]$, und wir setzen diese Funktion auf ganz $\mathbf{R}$ periodisch fort. Die Periode der Fortsetzung ist dann $L = 2$, und wir haben

$$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Die periodische Fortsetzung ist an den ungeraden ganzzahligen Stellen auf $\mathbf{R}$ unstetig und erinnert (wenn man an den Unstetigkeitsstellen eine Verbindungsgerade hinzuzeichnet) an einen Sägezahn.

In Abbildung 11.3 sehen Sie eine Periode dieser Funktion, aber nicht das Intervall $[-1, 1]$, auf dem wir die Funktion zunächst definiert hatten, sondern die Periode $[0, 2]$ mit einer Unstetigkeitsstelle mitten drin. Das Bild zeigt auch die 0-te bis vierte Fourierpolynome und man kann so ihr Verhalten an den Unstetigkeitsstellen gut sehen.

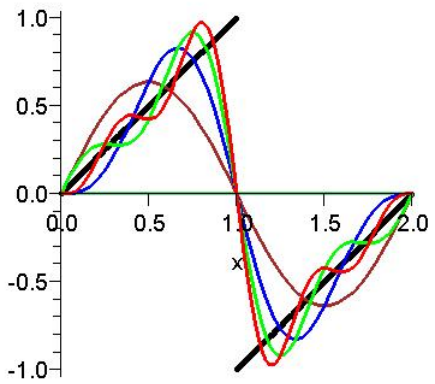


Abbildung 11.3: Eine Sägezahnschwingung und ihre ersten Fourierpolynome

Wir wollen jetzt die Fourierkoeffizienten berechnen. Für $k = 0$ haben wir

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x \cos 0 \, dx = \int_{-1}^{1} x \, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

und für $k > 0$ berechnen wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x\cos k\pi x\,dx = \int_{-1}^{1} x\cos k\pi x\,dx \\
&= \frac{1}{k\pi}\,x\sin k\pi x\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{k\pi}\int_{-1}^{1}\sin k\pi x\,dx \\
&= 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_{-1}^{1} && \text{(die 0, weil } \sin(\pm k\pi) = 0) \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\big(\cos k\pi - \cos(-k\pi)\big) \\
&= 0. && \text{(weil } \cos(-y) = \cos y)
\end{aligned}$$

Also sind alle $a_k = 0$. Für die b_k müssen wir nur $k \geq 1$ berücksichtigen und wir erhalten, wieder mit partieller Integration,

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x\sin k\pi x\,dx = \int_{-1}^{1} x\sin k\pi x\,dx \\
&= -\frac{1}{k\pi}\,x\cos k\pi x\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{k\pi}\int_{-1}^{1}\cos k\pi x\,dx \\
&= (-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_{-1}^{1} && \text{(da } \cos(\pm k\pi) = (-1)^k) \\
&= (-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}. && \text{(da } \sin(\pm k\pi) = 0)
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f hat also nur Sinusterme und lautet

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin k\pi x.$$

Vielleicht überrascht es, dass diese einfache Funktion keinen einzigen Cosinusterm in ihrer Fourierreihe hat. Das ist aber kein Zufall, sondern eine allgemeine Erscheinung, die *immer* eintritt bei Funktionen, die wie f an der Stelle $-x$ das Negative ihres Wertes bei x annehmen—diese Symmetrieeigenschaft ist dafür verantwortlich, wie wir gleich zeigen werden.

Man findet auch leicht die Stellen in der Berechnung der Koeffizienten a_k für die Funktion f die dazu führen, dass der Wert am Ende 0 ist—es sind dies die beiden am rechten Rand kommentierten Zeilen in der Berechnung, und am Kommentar erkennt man, dass auch die Symmetrieeigenschaften von Sinus und Cosinus eine Rolle spielen.

Hand in Hand mit dem Verschwinden der Cosinuskoeffizienten geht eine weitere Besonderheit, die nicht so ins Auge fällt, nämlich der Faktor 2, der in den letzten beiden Zeilen der Berechnung der b_k erscheint. Hier ist tatsächlich etwas verdoppelt worden und diese beiden Phänomene kann man zunächst ausnutzen, um die Berechnung der Fourierreihe einer Funktion mit Symmetrieeigenschaften ein wenig abzukürzen.

Der eigentliche Nutzen dieser Symmetriephänomene ist aber ein anderer, der viel wichtiger ist und auf den wir anschließend in Bemerkung 11.17 hinweisen werden.

Zuerst wollen wir aber genauer untersuchen, was es mit diesem Symmetrieverhalten auf sich hat.

Definition 11.14 Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine auf der ganzen reellen Geraden oder auf einem symmetrischen Intervall $[-a, a]$ definierte Funktion, die aber nicht periodisch sein muss.

Wir sagen, dass f eine ***gerade*** Funktion ist oder ***symmetrisch*** ist, wenn für jedes $x \in \mathbf{R}$ gilt

$$f(-x) = f(x).$$

Wir sagen, dass f eine ***ungerade*** Funktion ist oder ***antisymmetrisch*** ist, wenn für jedes $x \in \mathbf{R}$ gilt

$$f(-x) = -f(x).$$

Die Namen „gerade“ und „ungerade“ kommen aus der Tatsache, dass gerade Potenzen von x gerade Funktionen sind und ungerade Potenzen von x ungerade Funktionen sind. Entsprechend, die Taylorreihenentwicklung einer geraden Funktion enthält nur Summanden mit geradem Index (also gerade Potenzen von x) und die Taylorreihe einer ungeraden Funktion enthält nur ungerade Summanden im gleichen Sinn.

Bemerkung 11.15 Sei $\omega \neq 0$ eine reelle Zahl. Bekanntlich ist die Funktion $\cos \omega x$ eine gerade Funktion, und die Funktion $\sin \omega x$ ist eine ungerade Funktion.

Auch die Fourierreihenentwicklungen von geraden oder ungeraden Funktionen enthalten nur die Summanden, die die gleiche Art von Symmetrie aufweisen:

Satz 11.16 *Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine periodische Funktion mit Periode $2L$ (beachten Sie, dass in diesem Satz L die* halbe *Periode bezeichnet).*

a) *Wenn f eine* gerade *Funktion ist, dann enthält die Fourierreihe von f nur Cosinusterme (d.h., die Koeffizienten b_k sind 0), und für die Koeffizienten a_k gilt die vereinfachte Berechnung*

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx. \tag{11.14a}$$

b) *Wenn f eine* ungerade *Funktion ist, dann enthält die Fourierreihe von f nur Sinusterme (d.h., die Koeffizienten a_k sind 0), und für die Koeffizienten b_k gilt die vereinfachte Berechnung*

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx. \tag{11.14b}$$

Die Formeln sehen zwar ähnlich aus, wie die allgemeinen Formeln (11.11) *für die Fourierkoeffizienten, aber sie sind anders. Sie sind vom Aussehen anders, weil das Argument der trigonometrischen Funktion unter dem Integralzeichen in* (11.11) $2k\pi x/L$ *ist. Ihre Bedeutung ist anders, weil L hier die halbe und nicht die volle Periode bezeichnet.*

Beweis. Wie man leicht nachrechnet ist das Produkt einer geraden mit einer geraden Funktion oder einer ungeraden mit einer ungeraden Funktion gerade, und das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Es gilt nämlich

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-1)^k f(x)g(x) = (-1)^k (fg)(x),$$

wo k die Anzahl der ungeraden Funktionen unter f und g ist; das Produkt ist also genau dann gerade, wenn k gerade ist, d.h., wenn f und g beide gerade ($k = 0$) oder beide ungerade ($k = 2$) sind.

Für einen geraden oder ungeraden Integranden h gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} h(x)\,dx &= \int_{-L}^{0} h(x)\,dx + \int_0^L h(x)\,dx \\
&= \int_0^L h(-x)\,dx + \int_0^L h(x)\,dx \\
&= \int_0^L \pm h(x)\,dx + \int_0^L h(x)\,dx \\
&= \pm\int_0^L h(x)\,dx + \int_0^L h(x)\,dx.
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde im linken Summanden $-x$ für x substituiert, was nach der Substitutionsregel im Integral einen Vorzeichenwechsel bewirkt, den man auch, wie hier, durch eine Vertauschung der Integrationsgrenzen ausdrucken kann. Das $\pm$-Zeichen ist $+$, wenn h gerade ist, und $-$, wenn h ungerade ist.

Wenn dieses Zeichen $-$ ist, also wenn h ungerade ist, dann ist die Summe in der letzten Zeile 0. Wenn das Zeichen $+$ ist, also wenn h gerade ist, dann ist die Summe in der letzten Zeile $2\int_0^L h(x)\,dx$.

Also gilt

$$\int_{-L}^{L} h(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^L h(x)\,dx, & \text{wenn } h \text{ gerade ist;} \\ 0, & \text{wenn } h \text{ ungerade ist.} \end{cases} \tag{11.15}$$

Diese Berechnung wenden wir nun auf die in den Formeln für die Fourierkoeffizienten erscheinenden Produkte $f(x)\cos k\omega x$ und $f(x)\sin k\omega x$ in der Rolle von h an, wo

$$\omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L},$$

weil $2L$ die Periode von f ist.

Wenn f gerade ist, ist $f(x)\cos k\omega x$ gerade, nach den Bemerkungen am Anfang des Beweises, und wir erhalten deshalb nach (11.15) für die a_k die in (11.14a) angegebene Formel, während $f(x)\sin k\omega x$ ungerade ist und wir aus Gleichung (11.15) schließen können, dass die b_k null sind.

Wenn f ungerade ist, ist $f(x)\sin k\omega x$ gerade, nach den Bemerkungen am Anfang des Beweises, und wir erhalten deshalb nach (11.15) für die b_k die in (11.14b) angegebene Formel, während $f(x)\cos k\omega x$ ungerade ist und wir aus Gleichung (11.15) schließen können, dass die a_k null sind. ■

Bemerkung 11.17 Die Aussage von Satz 11.16 liest sich wie eine nette aber vielleicht nicht ganz wesentliche Feststellung über die merkwürdigen Fourierreihen von Funktionen von einer speziellen Gestalt, aber in Wirklichkeit handelt es sich hier um einen zentralen und sehr nützlichen Satz, denn in den Anwendungen von Fourierreihen zur Lösung partieller Differentialgleichungen kommen die homogenen Randbedingungen, die man mit allgemeinen Fourierreihen erfüllen kann, nur bei kreisförmigen Gegenständen vor.

Partielle Differentialgleichungen auf einem Intervall oder einem Rechteck erfordern zu ihrer Lösung (bei den üblichen Randbedingungen) die Anpassung von Funktionen durch *reine Sinusreihen* oder *reine Cosinusreihen.*

Solche Reihendarstellungen mit nur einer Sorte von trigonometrischer Funktion erhält man aber leicht mit Hilfe von Satz 11.16.

Gegeben sei eine Funktion f definiert auf einem endlichen Intervall $[0, L]$. Um f in eine beliebige Fourierreihe zu entwickeln würde man f einfach periodisch fortsetzen und für die Fortsetzung die Fourierkoeffizienten nach den Integralformeln in Definition 11.9 berechnen.

Will man aber eine reine ***Sinusreihenentwicklung*** haben, so setzt man f zunächst *ungerade* auf $[-L, 0]$ fort, durch die Definition

$$f(-x) := -f(x), \qquad \text{wenn } -L \leq x < 0,$$

und die so erweiterte ungerade Funktion auf $[-L, L]$ setzt man dann $2L$-periodisch auf ganz $\mathbf{R}$ fort und berechnet ihre Fourierreihe.

Diese wird nach Satz 11.16 nur Sinusterme enthalten, deren Koeffizienten sich genau nach Formel (11.14b) berechnen. Wir haben Satz 11.16 vorausschauend so formuliert (für eine Funktion von Periode $2L$ statt L), dass die dortigen Formeln sich für diese Anwendung unverändert übernehmen lassen.

Entsprechend für eine reine ***Cosinusreihenentwicklung*** setzt man f zunächst *gerade* auf $[-L, 0]$ fort, durch die Definition

$$f(-x) := f(x), \qquad \text{wenn } -L \leq x < 0,$$

und die durch die Erweiterung erhaltene gerade Funktion auf $[-L, L]$ setzt man dann $2L$-periodisch auf ganz $\mathbf{R}$ fort und berechnet ihre Fourierreihe, die nach Satz 11.16 nur Cosinusterme enthalten wird, deren Koeffizienten sich genau nach Formel (11.14a) berechnen.

Man beachte, dass man diese Fortsetzungen von f nur im Kopf vornehmen muss, aber nicht wirklich hinschreiben muss, denn in den Formeln (11.14a) und (11.14b) stehen nur Werte von f aus dem ursprünglichen Definitionsbereich $[0, L]$.

Beispiel 11.18 Die Funktion $g(x) := x$ auf $[0, \pi]$ ist in eine reine Sinusreihe zu entwickeln.

Dazu erweitert man g ungerade auf $[-\pi, 0]$ und erhält so die Funktion f aus Beispiel 11.13 und die gleiche trigonometrische Reihe, die wir in diesem Beispiel ermittelt haben.

Alternativ kann man die Koeffizienten direkt durch Integrale über $[0, \pi]$ ausdrücken:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin \frac{k\pi x}{\pi} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx$$

und man wird, auch so, genau die gleichen Werte erhalten, wie in Beispiel 11.13, wie man mit einer leichten Abänderung der dortigen Berechnung nachvollziehen kann.

11.4 Das Konvergenzverhalten der Fourierreihe

Bisher haben wir uns nur mit der *Berechnung* von Fourierreihen beschäftigt, aber wir wissen immer noch nicht, was, wenn überhaupt etwas, diese Reihen mit den Werten der beschriebenen Funktionen verbindet.

Am liebsten hätten wir, dass die Fourierreihe einer periodischen Funktion überall gegen die Funktion konvergiert, so dass man Funktionswerte mit der Fourierreihe näherungsweise berechnen kann. Leider ist das nur manchmal der Fall, aber in diesem Abschnitt wollen wir einige relevante Grundeigenschaften der Fourierreihendarstellung, hauptsächlich in Bezug auf die Konvergenz, auflisten. Auf die Beweise werden wir nicht eingehen.

Satz 11.19 *Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stückweise stetige periodische Funktion (das schließt ein, dass an den Unstetigkeitsstellen x die einseitigen Grenzwerte*

$$f(x-) := \lim_{y\uparrow x} f(y) \qquad \textit{und} \qquad f(x+) := \lim_{y\downarrow x} f(y)$$

existieren, aber verschieden sind).

a) Wenn f stückweise stetig differenzierbar ist, dann konvergiert die Fourierreihe von f an jeder Stelle x gegen $\frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big)$.

Insbesondere konvergiert die Fourierreihe an jeder Stetigkeitsstelle x gegen $f(x)$.

b) Wenn f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, dann konvergiert die Fourierreihe von f an jeder Stelle x ***absolut*** *gegen $f(x)$.*

Das klingt alles sehr befriedigend, aber wenn f Unstetigkeitsstellen hat, dann machen die einzelnen Fourierpolynome von f trotzdem große Ausschläge in der Nähe der Unstetigkeitsstellen. Unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen gilt aber eine andere Art von Konvergenz, die wörtlich zeigt, dass diese großen Ausschläge nicht sehr ins Gewicht fallen.

Definition 11.20 Sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbf{R}$. Eine Funktion $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ heißt ***quadratintegrabel*** auf $[a, b]$, wenn die Funktion f^2 integrierbar ist auf $[a, b]$ (und ein endliches Integral hat).

Summen und Differenzen von quadratintegrablen Funktionen sind wieder quadratintegrabel.

Seien f und g quadratintegrable Funktionen auf $[a, b]$. Wir definieren den ***quadratischen Abstand*** von f zu g als

$$\|g - f\|_2 := \Big(\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)^2 \, dx\Big)^{1/2}$$

Seien f_n (für $n \in \mathbf{N}$) und f quadratintegrable Funktionen auf $[a, b]$. Wir sagen, die Folge $\{ f_n \}$ konvergiert ***im quadratischen Mittel*** gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0,$$

oder gleichbedeutend, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)^2 \, dx = 0.$$

Dies ist tatsächlich eine „Konvergenz im Mittel“, denn sie kann gelten, auch wenn einzelne Werte der f_n stark vom entsprechenden Wert von f abweichen. Die Abweichungen dürfen nur nicht auf einem zu großen Bereich vorkommen.

Satz 11.21 *Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine L-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ (oder jedem anderen Intervall von Länge L) quadratintegrabel ist.*

a) Sei $n \in \mathbf{N}$ und sei p_n das n-te Fourierpolynom von f.

Auf jedem Intervall von Länge L ist p_n unter allen trigonometrischen Polynomen von Grad n im quadratischen Mittel die beste Annäherung zu f, d.h., p_n ist das trigonometrische Polynom von Grad n mit dem kleinsten quadratischen Abstand zu f.

b) Die Fourierreihe von f konvergiert gegen f im quadratischen Mittel auf jedem Intervall der Länge L.

Wir wollen zwar nicht auf den nicht ganz einfachen aber sehr aufschlussreichen Beweis dieses Satzes eingehen, aber trotzdem ein interessantes „Nebenprodukt“ der Beweismethode vorstellen (ohne Beweis).

Satz 11.22 (Parsevalsche Gleichung) *Sei $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ eine L-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ (oder jedem anderen Intervall von Länge L) quadratintegrabel ist, und sei*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos \frac{2k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{L}\Big)$$

die Fourierreihe von f.

Dann gilt die ***Parsevalsche Gleichung***

$$\frac{2}{L}\int_0^L \big(f(x)\big)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \tag{11.16}$$

Wir schließen dieses Kapitel mit einigen einfachen Anwendungen dieser Konvergenzaussagen.

Beispiel 11.23 In Beispiel 11.13 hatten wir für die Funktion $f(x) = x$ auf $[-1, 1]$ gezeigt, dass

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\sin k\pi x.$$

Diese Funktion (periodisch fortgesetzt) ist stückweise stetig differenzierbar mit Unstetigkeitsstellen bei den ungeraden ganzen Zahlen.

a) Weil $\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl ist, konvergiert die Fourierreihe bei $x = \frac{1}{2}$ und zwar gegen x, also gegen $\frac{1}{2}$.

   Wenn k gerade ist, dann ist $\sin k\frac{\pi}{2} = \sin\frac{k}{2}\pi = 0$. Wenn $k = 2m+1$ ungerade ist, dann ist $(-1)^{k+1} = +1$ und $\sin\frac{(2m+1)\pi}{2} = (-1)^m$.

   Also ist die Reihe rechts $2/\pi$ mal die alternierende Summe der Kehrwerte der ungeraden Zahlen, und wir haben

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\Big)$$

   oder, wenn wir mit $\pi/2$ multiplizieren,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Es gilt

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

   Aus der Parsevalschen Gleichung und mit den oben berechneten Fourierkoeffizienten erhalten wir also

$$\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2},$$

woraus wir nach einer einfachen Umformung die bekannte Reihensumme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

entnehmen können.

Kapitel 12

Die Wärmeleitungsgleichung

Zum Schluss der Vorlesung wollen wir noch einige der wichtigen ***partiellen Differentialgleichungen*** der Technik besprechen und vor allem im Detail die ***Wärmeleitungsgleichung*** oder ***Diffusionsgleichung***, die die Ausbreitung von Wärme in einem Leiter beschreibt.

Wir werden aber auch andere wichtige Gleichungen zumindest ansprechen, bei deren Lösung ähnliche Ideen eingehen, wie bei der Wärmeleitungsgleichung, wenn auch die Details der Lösungen anders sind.

Es handelt sich in allen Fällen um ***partielle Differentialgleichungen***, deren Lösungen Funktionen

$$u(x, y, \dots)$$

von mehreren Variablen sind, wobei in die Differentialgleichung partielle Ableitungen von u in mehrere Richtungen eingehen, in der Regel auch partielle Ableitungen nicht nur erster Ordnung.

Das ist natürlich ein sehr breites und unübersichtliches Feld, aber die Standardgleichungen der Technik sind von einem speziellen Typ, der ihre theoretische Behandlung erleichtert.

12.1 Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir werden uns beschränken auf die Behandlung von ***linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten***, da die drei uns hauptsächlich interessierenden Gleichungen alle von dieser Art sind.

Definition 12.1 Eine solche partielle Differentialgleichung in n unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ hat die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k u_{x_k} + cu = h(x_1, \ldots, x_n), \tag{12.1}$$

wo wir hier die in Notation 6.3 eingeführte Schreibweise verwenden, die partiellen Ableitungen in verschiedene Koordinatenrichtungen durch einen Index zu kennzeichnen (so dass zum Beispiel u_{xy} eine Abkürzung für $\partial^2 u/\partial x \partial y$ ist). Die a_{ij}, b_k und c sind reelle Konstanten.

Da $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$, kann man den Gesamtbeitrag von a_{ij} und a_{ji} beliebig auf diese beiden Summanden aufteilen, und man macht das normalerweise so, dass $a_{ij} = a_{ji}$, damit die Koeffizientenmatrix der Doppelsumme symmetrisch wird.

Die Summe der Terme mit den Ableitungen höchster Ordnung in der Differentialgleichung, in diesem Fall die Doppelsumme auf der linken Seite mit den partiellen Ableitungen genau der Ordnung 2, nennt man den ***Hauptteil*** der partiellen Differentialgleichung (12.1).

Wie bei den linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen heißt die Funktion h auf der rechten Seite die ***Inhomogenität*** der Differentialgleichung, und die Gleichung heißt ***homogen***, wenn $h \equiv 0$, und ***inhomogen*** sonst.

Bemerkung 12.2 (Superpositionsprinzip) Für lineare partielle Differentialgleichungen der Gestalt (12.1) gilt wie bei den linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ein ***Superpositionsprinzip***.

Sind u_1 und u_2 Lösungen von Differentialgleichungen (12.1) mit den gleichen linken Seiten aber mit Inhomogenitäten h_1 bzw. h_2, und sind a und b reelle Zahlen, so löst au_1+bu_2 die Differentialgleichung (12.1) mit der gleichen linken Seite aber mit Inhomogenität $ah_1 + bh_2$.

Daraus folgt auch, dass der Lösungsraum einer homogenen Differentialgleichung der Gestalt (12.1) ein Vektorraum bildet.

Das Superpositionsprinzip spielt eine wichtige Rolle bei der schrittweisen Konstruktion von Lösungen (auch wenn die Details der Konstruktion nicht ganz die gleichen sind, wie bei den gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen).

Wir nennen (für zwei Variablen) die wichtigsten linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die in Ingenieuranwendungen vorkommen.

Beispiele 12.3 a) Die homogene ***Wärmeleitungsgleichung*** oder ***Diffusionsgleichung*** in einer Raumvariablen x und einer Zeitvariablen t

hat die Gestalt

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \tag{12.2}$$

wo a^2 eine positive Konstante ist, die von den Materialeigenschaften und speziell von der Wärmeleitfähigkeit im Material abhängt.

b) Die homogene ***Wellengleichung*** oder ***Schwingungsgleichung*** in einer Raumvariablen x und einer Zeitvariablen t hat die Gestalt

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{12.3}$$

wo c die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung oder einer Welle im betrachteten Medium ist.

c) Die ***Potentialgleichung*** (oder ***Laplacegleichung***, wenn homogen, ***Poissongleichung***, wenn inhomogen) in zwei räumlichen Variablen x und y hat die Gestalt

$$u_{xx} + u_{yy} = h(x, y). \tag{12.4}$$

Diese Gleichung heißt ***Potentialgleichung***, weil die Lösung das Potential einer elektrischen Ladung mit Ladungsdichte h oder das Gravitationspotential einer Masse mit Dichtefunktion h wiedergibt.

Außerdem beschreibt die Potentialgleichung den stationären Zustand, den ein Körper mit Wärmezufuhr beschrieben durch h nach langer Zeit annimmt (wenn die Wärmeleitung ein Gleichgewicht erreicht hat).

Die drei partiellen Differentialgleichungen in Beispiele 12.3 repräsentieren drei verschiedene *Typen* von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Definition 12.4 Wir geben für die Typeneinteilung linearer partieller Differentialgleichungen nicht die allgemeine Definition an, sondern illustrieren sie am Beispiel

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + pu_x + qu_y + ru = h(x, y) \tag{12.5}$$

einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Variablen x und y.

Der Typ wird bestimmt durch die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

des Hauptteils der partiellen Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (12.5) heißt

elliptisch, wenn die Matrix A positiv (oder negativ) definit ist, d.h., wenn sie zwei nichtverschwindende Eigenwerte mit dem gleichen Vorzeichen hat, oder wenn $\det A > 0$. Die Potentialgleichung, zum Beispiel, ist elliptisch.

hyperbolisch, wenn die Matrix A einen positiven und einen negativen Eigenwert hat, also wenn $\det A < 0$, wie das bei der Wellengleichung der Fall ist.

parabolisch, wenn die Matrix A einen Eigenwert 0 hat aber nicht die Nullmatrix ist. Die Wärmeleitungsgleichung ist eine parabolische partielle Differentialgleichung.

Zu jeder partiellen Differentialgleichung (12.5) gibt es ein quadratisches Polynom in zwei Variablen, das die gleichen Koeffizienten hat, wie die Differentialgleichung, und die Namen der drei Typen rühren daher, dass die Niveaukurven dieses quadratischen Polynoms im elliptischen Fall Ellipsen sind, im hyperbolischen Fall Hyperbeln sind, und im parabolischen Fall Parabeln sind.

Bemerkung 12.5 Anders als es bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Fall war, werden wir nicht versuchen, eine *allgemeine* Lösung der von uns betrachteten partiellen Differentialgleichungen zu bestimmen, denn es ist kaum möglich, *alle* Lösungen unter einen Hut zu bringen.

Vielmehr werden wir *einzelne* Lösungen suchen, die einen vorgegebenen Anfangszustand haben und die ein vorgegebenes Verhalten am Rand des Definitionsbereichs der Gleichung aufweisen.

Zur Lösung partieller Differentialgleichungen benötigen wir also immer ***Anfangsbedingungen*** und ***Randbedingungen***, die die gewünschte Lösung festlegen. Wir lösen also nicht Differentialgleichungen, sondern bestimmte ***Anfangs- und Randwertprobleme.***

12.2 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen uns als Erstes mit der Wärmeleitungsgleichung beschäftigen und möchten kurz erläutern, warum diese Differentialgleichung die Wärmeleitung beschreibt.

Bevor wir beginnen, lohnt es sich, eine Definition nachzuholen, die in Kapitel 2 vergessen wurde (weil wir dort keine unmittelbare Anwendung dafür hatten).

Definition 12.6 Sei n eine natürliche Zahl und sei $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, die eventuell nur auf einer offenen Teilmenge von $\mathbf{R}^n$ definiert ist.

Der ***Laplace Operator*** Δ ist der Differentialoperator, der einer solchen Funktion f das Skalarfeld

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}, \tag{12.6}$$

zuordnet, also die Summe der zweifachen Ableitungen (zweimal in die gleiche Richtung) von f in die n Koordinatenrichtungen.

Das Symbol Δ für den Laplace Operator bitte nicht verwechseln mit dem Symbol ∇ für den Gradienten!

Bemerkung 12.7 Der Ausdruck für den Laplace Operator sieht ähnlich aus wie der Ausdruck für die Divergenz eines Vektorfeldes, außer dass die Ableitungen doppelt sind und dass der Laplace Operator auf Skalarfelder angewendet wird.

Es gibt aber die sehr nützliche Beziehung

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \tag{12.7}$$

die man unmittelbar nachrechnen kann.

Jetzt zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung.

Wir betrachten einen Körper (oder eine Platte oder eine Stange oder ein Draht) mit einer Temperaturverteilung $T(\mathbf{x}, t)$ in Abhängigkeit vom Ort $\mathbf{x}$ und der Zeit t.

Der ***Wärmefluss*** in dem Körper,

$$\mathbf{F} = -\kappa \nabla T,$$

ist entgegengesetzt und proportional zum Temperaturgradienten. Die Proportionalitätskonstante $\kappa > 0$ ist die Wärmeleitfähigkeit des Materials.

Wir nehmen an, dass von einer äußeren Quelle Wärme dem Körper zugeführt (oder abgeführt) wird, und diese Wärmezufuhr in Abhängigkeit von Zeit und Ort wird beschrieben durch einen Funktion $Q(\mathbf{x}, t)$.

Die Energiedichte $E(\mathbf{x}, t)$ an jeder Stelle ist proportional zur Temperatur; die Proportionalitätskonstante σ ist die ***spezifische Wärme*** des Materials. Es gilt also

$$E(\mathbf{x}, t) = \sigma T(\mathbf{x}, t). \tag{12.8}$$

Der Zuwachs (oder die Abnahme) an Energie an jeder Stelle kommt durch zwei Einflüsse zustande — die Senkdichte (oder Quelldichte) des Wärmeflusses, gemessen durch die *negative* Divergenz dieses Vektorfeldes (wo die Divergenz positiv ist, fließt Wärme weg!), und als zweiten Einfluss die äußere Wärmezufuhr Q.

Hieraus und unter Berücksichtigung von (12.8) erhalten wir die Formel

$$\sigma\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{F} + Q = -\operatorname{div}(-\kappa\nabla T) + Q$$
$$= \kappa \operatorname{div}\nabla T + Q = \kappa\Delta T + Q$$

Nach Division durch σ und Umbenennung einiger Konstanten und Funktionen wird das zu

$$T_t = a^2\Delta T + h, \tag{12.9}$$

wo $a^2 = \kappa/\sigma$ und $h = Q/\sigma$.

Die Anzahl der räumlichen Dimensionen haben wir hier nicht genau festgelegt, und die gefundene Differentialgleichung passt zu mehreren sinnvollen Möglichkeiten: zu einem dreidimensionalen Körper, zu einer Platte (zweidimensional), oder zu einem Stab oder einem Draht (eindimensional).

Im Falle einer einzelnen räumlichen Koordinate x hat (12.9) die Gestalt

$$T_t = a^2 T_{xx} + h,$$

was im homogenen Fall ($h = 0$) mit Gleichung (12.2) übereinstimmt.

Wir werden aber später auch *inhomogene* Wärmeleitungsgleichungen lösen. In der Herleitung haben wir gesehen, dass die Inhomogenität von einer *äußeren Wärmezufuhr* herkommt.

Bevor wir über Lösungsmethoden reden, wollen wir noch kurz über die Form der Nebenbedingungen sprechen, denen unsere Lösung auch genügen soll.

Wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall, also den Fall eines *Stabes der Länge* L, auf dem die Wärmeleitung zu untersuchen ist.

Die ***Anfangsbedingung*** gibt einfach die Temperaturverteilung $T(t_0, x)$ entlang des Stabes zu einer Startzeit t_0 an. Sie wird beschrieben durch eine Funktion $\alpha(x)$, so dass

$$T(t_0, x) = \alpha(x).$$

Die ***Randbedingungen*** beschreiben die *zeitliche* Entwicklung der Temperatur an den Endpunkten des Stabes, also bei $x = 0$ und $x = L$. Es gibt zwei Sorten von Randbedingungen.

Die erste Sorte schreibt einfach die Temperatur an diesen Stellen für alle Zeiten vor — man kann das so verstehen, dass die Umgebung, in die der Stab

eingespannt ist, ihre Temperatur an die Stabenden weitergibt. Diese Art von Randbedingung hat die Gestalt

$$T(0,t) = r_1(t) \qquad \text{und} \qquad T(L,t) = r_2(t)$$

für vorgegebene Funktionen r_1 und r_2.

Die zweite Art von Randbedingung beschreibt nicht die Temperatur an den Stabenden, sondern *den Wärmefluss durch die Stabenden*, durch Angabe des Temperaturgradienten T_x.

Homogene Randbedingungen dieser Art ($T_x = 0$) besagen, dass der Stab am entsprechenden Ende ***wärmeisoliert*** ist.

Natürlich kann man beide Sorten von Randbedingung kombinieren, das heißt, an einem Ende die genaue Temperatur vorschreiben und am anderen Ende den Wärmefluss oder Temperaturgradienten.

12.3 Der Separationsansatz zur Lösung partieller Differentialgleichungen

Die Bestimmung der Lösung eines speziellen Anfangs- und Randwertproblems wird ein genau umrissenes schrittweises Verfahren sein, an das wir uns zunächst langsam herantasten müssen. Die erste Frage, die sich bei diesem Herantasten stellt, ist wie man überhaupt Lösungen von einer partiellen Differentialgleichung finden kann.

Dabei spielt es noch keine Rolle, ob die Lösung für ein spezielles Problem oder für spezielle Nebenbedingungen geeignet ist. Wir wollen einfach *irgendwelche* Lösungen finden und sehen, was wir mit ihnen anfangen können.

Eine gute Idee, die tatsächlich oft zu Lösungen führt, ist der ***Bernoullische Produktansatz*** oder ***Separationsansatz***, den wir für den Fall erläutern, in dem die partielle Differentialgleichung und ihre Lösung von zwei Variablen, sagen wir x und y, abhängen. Der Ansatz ist aber auch anwendbar, wenn mehr Variablen involviert sind.

Der Ansatz besteht darin, eine Lösung $u(x,y)$ zu suchen, die sich als ein Produkt

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

von zwei Funktionen X und Y schreiben lässt, wo X nur von der Variablen x abhängt und Y nur von der Variablen y abhängt.

Diesen Ansatz setzt man in die partielle Differentialgleichung ein, wobei jede partielle Ableitung nach x nur auf den Faktor $X(x)$ in u wirkt, und jede partielle Ableitung nach y nur auf den Faktor $Y(y)$ wirkt.

Das Ergebnis ist eine Gleichung, in der Ableitungen verschiedener Ordnungen der Funktionen X und Y involviert sind. Diese Gleichung versucht man so aufzulösen, dass die X und Y Anteile voneinander getrennt werden, auf verschiedene Seiten einer Gleichheit, und die Gleichung dann die Gestalt annimmt

$$D_1X(x) = D_2Y(y), \tag{12.10}$$

wo D_1 ein Differentialoperator ist, in dem nur Ableitungen nach x vorkommen, und D_2 ein Differentialoperator ist, in dem nur Ableitungen nach y vorkommen.

Wenn man nun x variiert, aber y fest lässt, so bleibt die rechte Seite von Gleichung (12.10) konstant, weil sie nicht von x abhängt. Weil aber die linke Seite gleich der rechten Seite ist, muss sie auch konstant bleiben, obwohl sie dem Anschein nach von x abhängt.

Das gleiche Argument zeigt, dass auch die rechte Seite von (12.10) eine *konstante* Funktion von y ist. Nicht nur das — da beide Seiten von (12.10) einander gleich sind, müssen sie den *gleichen* konstanten Wert annehmen, und wir können Gleichung (12.10) präzisieren zu

$$D_1X(x) = \lambda = D_2Y(y), \tag{12.11}$$

wo λ eine reelle Konstante ist.

Für jede feste Wahl von λ ist jede Hälfte der Doppelgleichung (12.11) eine ***gewöhnliche Differentialgleichung*** für X oder Y, die man mit bekannten Mitteln lösen kann, und die Lösungen setzen sich zusammen zu einer Lösung $X(x)Y(y)$ der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung.

Man erhält sogar eine ganze Schar solcher Lösungen, indem man verschiedene Werte von λ ausprobiert, und kann diese Lösungen, entweder einzeln oder kombiniert, an Rand- und Anfangsbedingungen anzupassen versuchen.

Wir illustrieren den Separationsansatz an einem Beispiel.

Beispiel 12.8 Wir betrachten auf dem Quadrat $[0, L] \times [0, L]$ der Kantenlänge L die homogene Potentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{12.12}$$

Wir suchen eine Lösung, die auf drei Seiten identisch 0 ist, und nur auf der „oberen“ Seite mit $y = L$ andere Randwerte annehmen darf (für die Werte im Innern des Quadrats machen wir keine Einschränkung).

Wir versuchen den Separationsansatz

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

und setzen dies in (12.12) ein. Die Differentialgleichung nimmt dann die Gestalt

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{12.13}$$

an.

Natürlich ist $u \equiv 0$ immer eine Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung, aber nicht eine sehr interessante, und deshalb suchen wir andere Lösungen und nehmen an, dass $u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$.

Dann dürfen wir (12.13) durch $X(x)Y(y)$ dividieren, was die Variablen voneinander trennt:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0.$$

Nach einer kleinen Umwandlung und unter Berücksichtung des Prinzips des Separationsansatzes führt dies zu den Gleichungen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

(wo λ eine Konstante ist).

Die Hälften dieser Doppelgleichung sind gewöhnliche Differentialgleichungen

$$X''(x) = \lambda X(x) \qquad \text{und} \qquad Y''(y) = -\lambda Y(y). \tag{12.14}$$

Das charakteristische Polynom der linken Gleichung (als Polynom in μ, da der Buchstabe λ schon in Gebrauch ist) ist

$$\chi(\mu) = \mu^2 - \lambda,$$

mit Nullstellen $\pm\sqrt{\lambda}$, wenn $\lambda \geq 0$, und $\pm i\sqrt{|\lambda|}$, wenn $\lambda < 0$.

Um die Notation für beide Fälle ein wenig zu vereinfachen, setzen wir

$$\omega := \sqrt{|\lambda|} \geq 0.$$

Die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung für X lautet

$$X(x) = \begin{cases} \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}, & \text{wenn } \lambda > 0; \\ \alpha + \beta x, & \text{wenn } \lambda = 0; \\ \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x, & \text{wenn } \lambda < 0. \end{cases} \tag{12.15}$$

Damit u wie gewünscht am rechten und linken Rand des Quadrats konstant 0 wird, muss entweder $Y \equiv 0$ sein (was aber wieder zur unerwünschten trivialen Lösung $u \equiv 0$ führen würde) oder, wie wir für andere Lösungen verlangen müssen,

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Auch X darf nicht *identisch* 0 sein!

Die Bedingung $X(0) = 0$ schränkt die Lösung wie folgt ein:

Wenn $\lambda > 0$ muss $\alpha + \beta = 0$ sein, also $\beta = -\alpha$ und $X(x) = 2\alpha \sinh x$.

Wenn $\lambda = 0$ muss $\alpha = 0$ sein und $X(x) = \beta x$.

Wenn $\lambda < 0$ muss $\alpha = 0$ sein und $X(x) = \beta \sin \omega x$.

Die Funktion $\sinh x$ hat $\cosh x > 0$ als ihre Ableitung, ist deshalb monoton steigend und hat 0 als *einzige* Nullstelle. Wenn $\lambda > 0$ kann also $X(L) = 2\alpha \sinh L$ nicht 0 sein und deshalb fällt dieser Fall weg.

Wenn $\lambda = 0$ kann $X(L) = \beta L$ nicht 0 sein (sonst wäre $\beta = 0$ und $X \equiv 0$), und deshalb fällt auch dieser Fall weg.

Unter den genannten Randbedingungen ist also nur der Fall $\lambda < 0$ möglich, und die zweite Randbedingung verlangt in diesem Fall aber, dass

$$X(L) = \beta \sin \omega L = 0.$$

Der Sinus hat seine Nullstellen bei den Vielfachen von π. Es muss also

$$\omega L = k\pi \qquad \text{oder} \qquad \omega = \frac{k\pi}{L}$$

sein, wo k eine positive ganze Zahl ist (nicht 0, und nicht negativ, weil $\omega \geq 0$).

Wir stellen also fest, dass

$$X(x) = \sin \frac{k\pi}{L} x \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\omega^2 = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}.$$

Die Differentialgleichung für Y aus (12.14) hat die gleiche Gestalt, wie die Gleichung für X, außer dass λ durch $-\lambda$ ersetzt wird und deshalb jetzt den Wert $+k^2\pi^2/L^2$ annimmt. Das entsprechende zur Zahl ω hat immer noch den Wert $k\pi/L$, aber wir erhalten für Y die Lösung

$$Y(y) = \alpha e^{\omega y} + \beta e^{-\omega y},$$

die dem Fall „$\lambda > 0$“ entspricht.

Weil u auf der „unteren“ Seite des Quadrats verschwinden soll, muss $Y(0) = 0$ sein und somit $\alpha = -\beta$ sein. Dann ist Y ein Vielfaches von $\sinh \omega y$.

Nehmen wir dies als eine Grundlösung und kombinieren sie mit der zu diesem Wert von ω passenden Lösung für X, so erhalten wir für die aufgestellte Potentialgleichung (12.12) die Lösung

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = \sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big) \sinh\Big(\frac{k\pi y}{L}\Big). \tag{12.16}$$

Obwohl wir hier nur ein Beispiel rechnen wollten und nicht die „volle“ Lösung der Potentialgleichung, sei bemerkt, dass wir mit dem gegebenen

Randverhalten auf den drei unteren Seiten des Quadrats eine *beliebige* stetige Randfunktion auf der oberen Seite einstellen können, indem wir die gewünschte Randfunktion in eine Fourierreihe entwickeln und die Summanden durch Lösungen der Form (12.16) anpassen.

12.4 Lösungsmethode für die Wärmeleitungsgleichung

Wir haben jetzt das Werkzeug parat, das bei der Lösung der schon genannten wichtigen partiellen Differentialgleichungen der Technik benötigt wird. Als erste Anwendung wollen wir mit allen Einzelheiten beschreiben, wie man die eindimensionale ***Wärmeleitungsgleichung***

$$u_t - a^2 u_{xx} = h(x,t) \tag{12.17}$$

für beliebige stetige Anfangs- und Randbedingungen und beliebige stetige Inhomogenitäten h vollständig lösen kann.

Diese Differentialgleichung beschreibt die Temperaturentwicklung in einem Stab endlicher Länge L, das von einer äußeren Wärmequelle so erwärmt oder gekühlt wird, dass ohne berüchsichtigung der Wärmeleitung die Temperatur an jedem Ort x auf dem Stab zu jeder Zeit t um $h(x,t)$ Temperaturgrad pro Zeiteinheit steigen würde. Das ist also die physikalische Bedeutung der Inhomogenität h.

Die positive Konstante a^2 gibt die Wärmeleitfähigkeit des Stabes an. Ihre genaue Größe ist eine Materialkonstante, die natürlich außerdem den verwendeten Maßeinheiten angepasst werden muss.

Wir legen eine Raumkoordinate x entlang des Stabes an, so dass ein Stabende bei $x = 0$ liegt und das andere Stabende bei $x = L$. Wir betrachten ***Randbedingungen***, die die Temperatur an den Enden des Stabes zu jeder Zeit vorgeben, also zwei Funktionen $r_1(t)$ und $r_2(t)$, so dass

$$u(0,t) = r_1(t) \qquad \text{und} \qquad u(L,t) = r_2(t). \tag{12.18}$$

Es sind auch anders geartete Randbedingungen möglich (etwa, dass Stabenden wärmeisoliert sind), aber diese wollen wir zunächst nicht behandeln.

Wir lassen die Zeit ab $t = 0$ laufen, und um die Lösung eindeutig festzulegen geben wir den gesamten Temperaturverlauf entlang des Stabes zu dieser Zeit als eine ***Anfangsbedingung***

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{12.19}$$

vor, wo u_0 eine stetige Funktion des Ortes x ist, für die aus Kompatibilitätsgründen gelten muss

$$u_0(0) = r_1(0) \qquad \text{und} \qquad u_0(L) = r_2(0).$$

Um zusammenzufassen: für einen Stab fester Länge L aus einem bekanntem Material (weshalb die Konstante a^2 einen festen und bekannten Wert hat) liegen uns drei wichtige, die Lösung bestimmende Daten vor:

- die ***Randbedingung*** (bestehend aus r_1 und r_2),
- die ***Anfangsbedingung*** (bestehend aus u_0) und
- die ***Inhomogenität*** h.

Das ist ein bisschen viel, um es alles auf einmal zu berücksichtigen, und deshalb werden wir das ***Superpositionsprinzip*** verwenden, um die Aufgabe in *drei einfachere Aufgaben* zu zerlegen, die wir einzeln lösen können und deren Lösungen wir am Ende zu einer Gesamtlösung der Anfangs- und Randwertaufgabe zusammensetzen können.

Was diese Teilaufgaben einfacher macht ist die Tatsache, dass in jeder von Ihnen nur *eine* der drei Grunddaten ungleich 0 ist, und die anderen beiden sind viel leichter zu erfüllen, als sonst, weil sie „trivial“, sprich null sind.

Wir haben also ein ***Dreischrittverfahren***, um die gesuchte Lösung des Anfangs- und Randwertproblems zu konstruieren, und in jedem Schritt erfüllen wir genau *eine* der oben aufgelisteten Bedingungen oder Daten, aber so, dass alles am Ende zusammenpasst.

Die Reihenfolge der Schritte entspricht der obigen Auflistung der Grunddaten, und die einzelnen Schritte beschreiben wir jetzt:

12.4.1 Schritt I: Erfüllung der Randbedingungen

Als Erstes erfüllen wir die Randbedingungen, und das Merkwürdige an diesem Schritt ist, dass wir uns überhaupt nicht um die Differentialgleichung kümmern. Uns ist egal, ob dieser erste Beitrag zur Lösung homogene Anfangsbedingungen aufweist oder die homogene Differentialgleichung erfüllt — **alles ist uns recht!**

Denn noch haben wir keine anderen Lösungsbeiträge, die wir schützen müssen oder die wir nicht verändern dürfen. Die Idee ist, nur die Randbedingung zu erfüllen, was in der Regel sehr einfach ist, und dann *die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung so anzupassen*, dass die restlichen Beiträge nicht die ursprünglichen Bedingungen erfüllen, sondern nur die *Abweichungen* der ersten Teillösung von einer richtigen Lösung wettmachen.

Der erste Schritt erfüllt die Randbedingung genau, aber in Bezug auf die anderen Bedingungen behandeln wir ihn wie eine *Annäherung* an die richtige Lösung, die wir, obwohl sie falsch ist, im weiteren Verlauf nicht verwerfen, sondern deren Fehler wir nur versuchen auszubügeln.

Also: wir betrachten im ersten Schritt nur die Funktionen r_1 und r_2, die die Temperaturentwicklung an den Enden des Stabes beschreiben, und versuchen diese Funktionen zu ergänzen zu einer für *alle* $x \in [0, L]$ und für alle $t \geq 0$ definierten Funktion $R(x,t)$, so dass

$$R(0,t) = r_1(t) \qquad \text{und} \qquad R(L,t) = r_2(t).$$

Dies ist die *einzige* Bedingung, die die Funktion R erfüllen muss — sie muss *nicht* die inhomogene Differentialgleichung erfüllen und *nicht* die richtigen Anfangswerte haben.

Eine solche Funktion heißt eine ***Fortsetzung der Randwerte*** und sie lässt sich sehr leicht erhalten durch eine lineare Angleichung der Randwerte an den beiden Enden des Stabes, zum Beispiel nach der einfachen Formel

$$R(x,t) = \Big(1 - \frac{x}{L}\Big) r_1(t) + \frac{x}{L}\, r_2(t) = r_1(t) + \frac{x}{L}\,\big(r_2(t) - r_1(t)\big). \tag{12.20}$$

Dies ist nicht die einzige Möglichkeit, eine Fortsetzung zu gewinnen! Jede andere Regel, die die Funktionswerte am Rand angleicht, wäre genau so geeignet.

Die Funktion $R(x,t)$ ist der *erste Teilbeitrag* zur Lösung.

Für die weiteren Schritte suchen wir Teillösungen, die ***homogene Randbedingungen*** erfüllen, d.h., die bei $x = 0$ und bei $x = L$ null sind. Auf diese Weise werden im Endergebnis die im ersten Teilschritt erreichten richtigen Randbedingungen nicht mehr verändert oder zerstört.

Die im ersten Teilschritt gefundene Funktion R leistet aber auch einen Beitrag zu den Anfangswerten und zur Inhomogenität, und die Lösungen der weiteren Teilschritte müssen nur den *Restbeitrag* zu den gewünschten Werten liefern, nicht die gewünschten Werte selber. Deshalb müssen wir vor dem Weiterrechnen die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung verändern, damit sie nur diesen Restbeitrag widerspiegeln.

Die Anfangsbedingung justieren wir, indem wir von ihr den Anfangswert von R abziehen, d.h., wir ersetzen die Funktion u_0, die die insgesamt gewünschte Anfangsbedingung wiedergibt, durch

$$v_0(x) := u_0(x) - R(x,0). \tag{12.21}$$

Entsprechend vermindern wir auch die Inhomogenität in der ursprünglichen Differentialgleichung durch den Beitrag von R zur Inhomogenität: das

ist die Funktion, die entsteht, wenn wir R in die linke Seite der Differentialgleichung einsetzen. In anderen Worten, wir ersetzen h durch die neue Inhomogenität

$$H(x,t) = h(x,t) - \frac{\partial R}{\partial t}(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x,t). \tag{12.22}$$

Weil wir *vor* der Berechnung der weiteren Teillösungen die spätere Wirkung von R kompensieren, werden am Ende durch Addition von R zu den weiteren Teillösungen doch die richtigen Anfangswerte und die richtige Inhomogenität herauskommen.

12.4.2 Schritt II: Erfüllung der Anfangsbedingung

Im zweiten Schritt suchen wir eine Lösung $v(x,t)$ der *homogenen* partiellen Differentialgleichung

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \tag{12.23}$$

mit *homogenen* Randbedingungen

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \tag{12.24}$$

und mit den Anfangswerten

$$v(x,0) = v_0(x). \tag{12.25}$$

Die letzte Bedingung stellen wir kurz zurück und überlegen zunächst, wie wir überhaupt Lösungen der homogenen Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen erhalten können. Solche Lösungen können wir, ähnlich wie in Beispiel 12.8, mit dem Separationsansatz gewinnen.

Wir machen also den Ansatz

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

und setzen dies in (12.23) ein. Aus der Differentialgleichung ergibt sich die Beziehung

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0. \tag{12.26}$$

Da die triviale Lösung $v \equiv 0$ uns nicht weiterhilft, nehmen wir an, dass $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, und dürfen (12.26) durch $a^2 X(x)T(t)$ dividieren (auch $a^2 \neq 0$, denn sonst gäbe es in dem Stab keine Wärmeleitung und keine partielle Differentialgleichung zu lösen), und wir erhalten

$$\frac{T'(t)}{a^2\, T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0,$$

woraus unter Beachtung des Prinzips des Separationsansatzes folgt:

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{12.27}$$

für eine Konstante λ.

Die rechte Hälfte dieser Doppelgleichung schreibt sich um als die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X''(x) = \lambda X(x), \tag{12.28}$$

und weil v homogene Randbedingungen erfüllen muss, also für $x = 0$ und für $x = L$ null wird, muss wie in Beispiel 12.8

$$X(0) = X(L) = 0$$

sein, aber X darf nicht identisch 0 sein.

Nach genau dem gleichen Argument wie in Beispiel 12.8 können wir daraus schließen, dass

$$X(x) = \sin\frac{k\pi}{L}x \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

für eine positive ganze Zahl k.

Die andere Hälfte der Doppelgleichung (12.27) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für T der Gestalt

$$T'(t) = \lambda a^2\,T(t).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist ein beliebiges reelles Vielfaches von

$$T(t) = e^{\lambda a^2 t} = e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}t}$$

Für jede positive ganze Zahl k erhalten wir also für v eine Grundlösung

$$v_k(x,t) = X(x)T(t) = e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}t}\sin\frac{k\pi x}{L} \tag{12.29}$$

mit homogenen Randwerten und mit dem Anfangswert

$$v_k(x,0) = \sin\frac{k\pi x}{L} \tag{12.30}$$

(weil $T(0) = 1$).

Im allgemeinen wird *keine* dieser Grundlösungen den gewünschten Anfangswert v_0 annehmen, aber die Form der Anfangswertfunktion der Grundlösungen v_k zeigt uns deutlich den weiteren Weg.

Wir entwickeln die Anfangswertfunktion v_0 in eine *reine Sinusfourierreihe,* wie in Bemerkung 11.17 erklärt:

$$v_0 \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L}. \tag{12.31}$$

Die Fourierreihe konvergiert gegen v_0 auf $[0, L]$, wenn v_0 stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

Die Funktion

$$v(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2}t} \sin \frac{k\pi x}{L} \tag{12.32}$$

löst die homogene partielle Differentialgleichung (12.23) und erfüllt homogene Randbedingungen, weil die v_k das tun, und sie nimmt den gewünschten Anfangswert

$$v(x,0) = v_0(x)$$

an, auf Grund der gegen v_0 konvergierenden Sinusreihenentwicklung (12.31).

12.4.3 Schritt III: Erfüllung der inhomogenen Differentialgleichung

Im dritten und letzten Schritt suchen wir eine Lösung $w(x,t)$ der *inhomogenen* partiellen Differentialgleichung

$$u_t - a^2 u_{xx} = H(x,t) \tag{12.33}$$

mit *homogenen* Randbedingungen

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \tag{12.34}$$

und der *homogenen* Anfangsbedingung

$$w(x,0) = 0. \tag{12.35}$$

Diesen Schritt müssen wir nur ausführen, wenn die Inhomogenität H tatsächlich nicht 0 ist (sonst erfüllt schon die Lösung zu Schritt II die gewünschte partielle Differentialgleichung), und wir können deshalb von vornherein davon ausgehen, dass $w \not\equiv 0$ sein wird.

Wir wollen einmal sehen, wie weit wir bei *dieser* Aufgabe mit dem Separationsansatz kommen (eine andere Lösungsmethode kennen wir ja nicht). Wir machen also den Ansatz

$$w(x,t) = X(x)T(t)$$

und setzen dies in (12.33) ein. Aus der Differentialgleichung ergibt sich die Beziehung

$$X(x)T'(t) - a^2X''(x)T(t) = H(x,t). \tag{12.36}$$

Da $w(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$, können wir versuchen, die Variablen zu trennen, indem wir (12.36) durch $a^2X(x)T(t)$ dividieren, aber wir müssen leider feststellen, dass das nur klappt, wenn H eine ganz spezielle Form hat, weil in der Regel die rechte Seite nach dieser Division immer noch von beiden Variablen abhängt, die sich nicht getrennt haben und nicht trennen lassen.

Eine der seltenen günstigen Konstellationen ist aber die, in der gerade zufällig

$$H(x,t) = X(x)F(t) \tag{12.37}$$

für die *gleiche* Funktion X, die in der Darstellung von w vorkommt! In diesem Fall verwandelt sich (12.36) in die getrennte Doppelgleichung

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{F(t)}{a^2\,T(t)}$$

oder

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} - \frac{F(t)}{a^2\,T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{12.38}$$

(Es gibt weiter günstige Konstellationen, zum Beispiel wenn H eine Zerlegung der Gestalt $Y(x)T(t)$ hat für die gleiche Funktion T, die im Ansatz für w vorkommt, aber wir kommen ohne diese anderen Fälle aus und werden sie nicht weiter besprechen).

Die „günstige“ Bedingung, die wir hier gestellt haben, ist etwas merkwürdig, weil sie vom gewählten Ansatz für w abhängt, aber wir lassen uns dadurch nicht beunruhigen und fragen einfach, wie es weitergehen würde, wenn wir gerade ein solches günstiges H erwischt hätten.

Da w homogene Randbedingungen erfüllen muss, können wir auf genau die gleiche Weise wie bei Schritt II aus der rechten Hälfte der Doppelgleichung (12.38) und den Randbedingungen für X schließen, dass

$$X(x) = \sin\frac{k\pi}{L}x \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

für eine positive ganze Zahl k.

Die andere Hälfte der Doppelgleichung (12.38) ist jetzt eine *inhomogene* lineare gewöhnliche Differentialgleichung für T der Gestalt

$$T'(t) = \lambda a^2\,T(t) + F(t).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung haben wir in Kapitel 8 in Bemerkung 8.11, Gleichung (8.30) angegeben, wo in unserem jetzigen Fall $A(t) = \int \lambda a^2\,dt = \lambda a^2 t$. Sie lautet

$$T(t) = e^{\lambda a^2 t}\Big(c + \int_0^t e^{-\lambda a^2 s} F(s)\,ds\Big) = e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2}t}\Big(c + \int_0^t e^{\frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2}s} F(s)\,ds\Big).$$

Da wir Lösungen mit homogenen Anfangswerten suchen, muss gelten $T(0) = c = 0$ und die Lösung für T lautet genauer

$$T(t) = e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2}t} \int_0^t e^{\frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2}s} F(s)\,ds, \tag{12.39}$$

wenn die Inhomogenität $H(x,t)$ die spezielle Gestalt

$$H(x,t) = \sin\Big(\frac{k\pi}{L}x\Big) F(t)$$

hat.

Dass die Inhomogenität *genau* diese Gestalt hat, kommt fast nie vor, aber wir können *jede* stetige und stückweise stetig differenzierbare Inhomogenität immer in eine konvergente Reihendarstellung zerlegen, deren Summanden so aussehen!

Das führt jetzt zu folgender Lösungsmethode für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (12.33) mit homogenen Rand- und Anfangsbedingungen.

Wir zerlegen die gegebene Inhomogenität $H(x,t)$ für $0 \le x \le L$ in eine von t parametrisierte Sinusfourierreihe in x:

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\frac{k\pi x}{L}, \qquad \text{wo} \\ F_k(t) &:= \frac{2}{L}\int_0^L H(x,t)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx. \end{aligned} \tag{12.40}$$

Dann lösen wir mit dem Separationsansatz wie oben vorgeführt für jeden Summanden dieser Fourierreihe die Wärmeleitungsgleichung mit diesem Summanden als Inhomogenität und mit homogenen Rand- und Anfangsbedingungen.

Die genannten Summanden haben die günstige Gestalt, die den Separationsansatz gelingen lässt, und wir erhalten für jedes k eine Teillösung

$$w_k(x,t) = T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

wo T_k durch (12.39) gegeben ist, mit F_k in der Rolle von F.

Ausmultipliziert hat diese Lösung die Gestalt

$$w_k(x,t) = \left[e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}t} \int_0^t e^{\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}s} F_k(s)\,ds \right] \sin\frac{k\pi x}{L} \tag{12.41}$$

Die Teillösung w_k erfüllt homogene Rand- und Anfangswertbedingungen, und sie löst die Differentialgleichung für den k-ten Summanden der Sinusreihenentwicklung von H als Inhomogenität.

Wir setzen

$$w(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}t} \int_0^t e^{\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}s} F_k(s)\,ds \right] \sin\frac{k\pi x}{L} \tag{12.42}$$

und erhalten so eine Lösung der im dritten Schritt angepeilten inhomogenen Wärmeleitungsgleichung (12.33) mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen (da alle Summanden w_k solche Bedingungen erfüllen).

12.4.4 Zusammensetzen der Teillösungen zu einer Gesamtlösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen jetzt zu einer Gesamtlösung der ursprünglich angegebenen inhomogenen Wärmeleitungsgleichung (12.17) mit den ursprünglich angegebenen Randwerten $r_1(t)$ und $r_2(t)$ und den ursprünglich angegebenen Anfangswerten $u_0(t)$ kommen.

Dazu führen wir die oben beschriebenen drei Schritte aus, wobei wir den ersten Schritt überspringen können, wenn $r_1 = r_2 \equiv 0$, den zweiten Schritt überspringen können, wenn die *justierten* Anfangswerte v_0 null sind, und den dritten Schritt weglassen können, wenn die *justierte* Inhomogenität H null ist.

Die Gesamtlösung schreibt sich dann als

$$u(x,t) = R(x,t) + v(x,t) + w(x,t), \tag{12.43}$$

wo die drei Summanden rechts in Gleichungen (12.20), (12.32) und (12.42) definiert wurden. Die nach dem ersten Schritt vorgenommene Korrektur sorgt dafür, dass u trotz des Beitrags von R die richtigen Anfangswerte und die richtige Inhomogenität erzeugt.

Wir können die Ergebnisse der drei Rechenschritte hier noch einmal im Detail festhalten.

Sei

$$R(x,t) = \Big(1 - \frac{x}{L}\Big) r_1(t) + \frac{x}{L}\, r_2(t) = r_1(t) + \frac{x}{L}\,\big(r_2(t) - r_1(t)\big),$$

sei

$$v_0(x) := u_0(x) - R(x,0) = u_0(x) - r_1(0) + \frac{x}{L}\big(r_1(0)) - r_2(0)\big),$$

und seien

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

die Sinusreihenkoeffizienten von v_0.

Sei

$$H(x,t) := h(x,t) - \frac{\partial R}{\partial t}(x,t) - a^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x,t) = h(x,t) - r_1'(t) + \frac{x}{L}\big(r_2'(t) - r_1'(t)\big)$$

und seien

$$F_k(t) := \frac{2}{L}\int_0^L H(x,t)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

die Sinusreihenkoeffizienten (bezüglich der Variablen x) von H.

Dann löst

$$\begin{aligned} u(x,t) = r_1(t) &+ \frac{x}{L}\big(r_2(t) - r_1(t)\big) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}t}\left[b_k + \int_0^t e^{\frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}s}F_k(s)\,ds\right]\sin\frac{k\pi x}{L} \end{aligned} \tag{12.44}$$

die Wärmeleitungsgleichung (12.17) mit den Randwerten $u(0,t) = r_1(t)$ und $u(L,t) = r_2(t)$ und mit den Anfangswerten $u(x,0) = u_0(t)$.

Beispiele 12.9 a) Ein dünner, wärmeisolierter Kupferdraht ist 100 cm lang und hat die Temperatur 0°C. Das linke bzw. rechte Drahtende wird zur Zeit $t = 0$ auf 20°C bzw. 40°C erwärmt, und diese Temperaturen bleiben für alle $t \geq 0$ fest. Die Temperaturleitzahl für Kupfer ist bekannt und beträgt a^2=1,14 $\mathrm{cm}^2\,\mathrm{sec}^{-1}$.

Wir wollen die Temperaturentwicklung $u(x,t)$ in diesem Draht berechnen und die Funktion $u(x,t)$ für die Zeiten $t = 1$, 5, 10, 20 und 60 Minuten zeichnen.

Zunächst müssen wir die Angaben in eine Wärmeleitungsgleichung mit Rand- und Anfangsbedingungen übersetzen.

Aufgepasst! Weil wir uns für gewisse in *Minuten* angegebene Zeiten interessieren, wollen wir Minuten als Zeiteinheit verwenden. Die Wärmeleitzahl für Kupfer ist aber in $\mathrm{cm}^2\,\mathrm{sec}^{-1}$ gegeben, und wir müssen sie stattdessen in $\mathrm{cm}^2\,\mathrm{min}^{-1}$ umrechnen, offensichtlich, indem wir sie mit 60 multiplizieren.

Also verwenden wir für a^2 den Wert $1{,}14 \cdot 60 = 68{,}4$. Unsere Wärmeleitungsgleichung lautet

$$u_t - 68{,}4\, u_{xx} = 0 \tag{12.45}$$

und ist homogen, weil der Draht nicht von außen erwärmt oder gekühlt wird.

Wir haben $L = 100$ cm und wir betrachten die Differentialgleichung auf dem Intervall $[0, 100]$.

Die Randwerte sind für alle Zeiten fest und hängen also nicht von t ab. Angegeben sind

$$u(0,t) = 20 \qquad \text{und} \qquad u(100,t) = 40. \tag{12.46}$$

Die Anfangsbedingung ist gegeben als

$$u_0(x) := u(x,0) = 0. \tag{12.47}$$

Natürlich sind diese Anfangsbedingungen *nicht* verträglich mit den Randbedingungen, aber das ist nicht wirklich schlimm (und auch nicht wirklich unrealistisch). Man hat sich das so vorzustellen, dass ein auf 0°C gekühlter Draht zwischen zwei warme Stützen gespannt wird; am Anfang gibt es einen Temperatursprung an den Drahtenden, aber die Temperatur gleicht sich schließlich an und nach kurzer Zeit gibt es kaum noch eine Diskrepanz. Wir machen also mit diesen Werten einfach weiter.

Erster Schritt: Als Fortsetzung der Randbedingung nehmen wir

$$R(x,t) = 20 + \frac{x}{100} \cdot (40 - 20) = 20 + \frac{x}{5}. \tag{12.48}$$

Mit diesem ersten Beitrag zur Lösung müssen wir als nächstes die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung korrigieren, bevor wir weitermachen können.

Als neue Anfangsbedingung erhalten wir

$$v(x,0) = v_0(x) = 0 - R(x,0) = -20 - \frac{x}{5}. \tag{12.49}$$

Als neue Inhomogenität erhalten wir

$$H(x,t) = 0 - R_t + 68{,}4 R_{xx} = 0,$$

d.h., die Differentialgleichung ist immer noch homogen.

Zweiter Schritt: Wir müssen v_0 auf dem den Kupferdraht darstellenden Intervall $[0, 100]$ in eine Fourier-Sinusreihe entwickeln.

Die Koeffizienten sind

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{100}\int_0^{100}\Big(-20-\frac{x}{5}\Big)\sin\frac{k\pi x}{100}\,dx \\
&= \frac{2}{100}\cdot\frac{100}{k\pi}\int_0^{100}\Big(20+\frac{x}{5}\Big)\Big(\cos\frac{k\pi x}{100}\Big)'\,dx \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(nun partielle Integration)} \\
&= \frac{2}{k\pi}\left[\Big(20+\frac{x}{5}\Big)\cos\frac{k\pi x}{100}\right]\Bigg|_0^{100} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{100}\Big(20+\frac{x}{5}\Big)'\cos\frac{k\pi x}{100}\,dx \\
&= \frac{2}{k\pi}(40\cos k\pi - 20\cos 0) - \frac{2}{k\pi}\int_0^{100}\frac{1}{5}\cos\frac{k\pi x}{100}\,dx \\
&= \frac{2}{k\pi}\big((-1)^k 40 - 20\big) - \frac{200}{5k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{100}\Bigg|_0^{100} \\
&= \frac{2}{k\pi}\big((-1)^k 40 - 20\big) - 0 \\
&= \frac{-40+(-1)^k 80}{k\pi} = \begin{cases} -120/k\pi, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist;} \\ 40/k\pi, & \text{wenn } k \text{ gerade ist.}\end{cases}
\end{aligned}$$

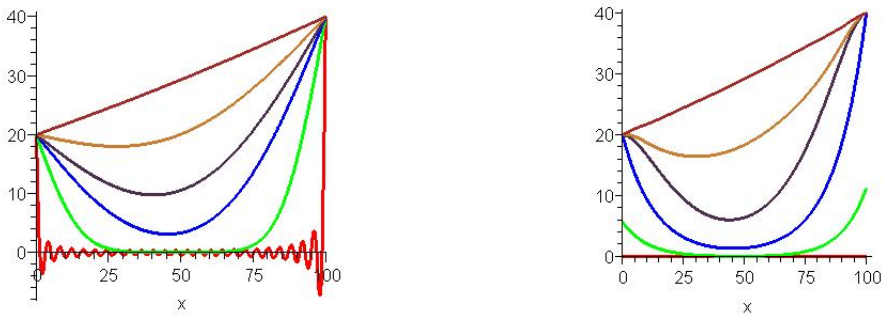
Damit haben wir als Lösung des zweiten Schritts, also der homogenen partiellen Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen und der Anfangsbedingung aus (12.49), die Funktion

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-40+(-1)^k\,80}{k\pi}\,e^{-\frac{k^2\pi^2\cdot 68{,}4}{100^2}t}\sin\frac{k\pi x}{100} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-40+(-1)^k\,80}{k\pi}\,e^{-0{,}00684\,k^2\pi^2 t}\sin\frac{k\pi x}{100}
\end{aligned}$$

Den dritten Lösungsschritt müssen wir nicht ausführen, weil die Differentialgleichung immer noch homogen ist. Als Lösung haben wir also

insgesamt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= R(x,t) + v(x,t) \\ &= 20 + \frac{x}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-40 + (-1)^k\, 80}{k\pi}\, e^{-0{,}00684\, k^2\pi^2 t} \sin\frac{k\pi x}{100}. \end{aligned} \tag{12.50}$$



(a) analytisch berechnet (b) numerisch berechnet

Abbildung 12.1: Verschiedene Zeitpunkte der Wärmeleitung im ungekühlten Kupferdraht

Abbildung 12.1 zeigt den Temperaturverlauf im Draht am Anfang und, wie wir vorhatten, für die Zeiten $t = 1$, 5, 10, 20 und 60 Minuten.

Das Linke der beiden Bilder zeigt die soeben berechnete Lösung (12.50), wo die Reihenentwicklung aufsummiert wird. Diese Lösung hält nach Konstruktion an den Endpunkten tatsächlich die vorgegebenen Temperaturen ein.

Das rechte Bild zeigt numerisch berechnete Lösungen; hier steigt die Temperatur an den Enden allmählich an, und diese Lösungen sind physikalisch in ihrem Randverhalten vielleicht etwas realistischer, aber sie enthalten Rundungsfehler.

Die Diskrepanz zwischen den analytisch und den numerisch bestimmten Lösungen am Rand entsteht durch die Unverträglichkeit zwischen der Rand- und der Anfangswertbedingung.

b) Jetzt wollen wir annehmen, dass der Draht nicht nur wie bisher an den Enden auf 20°C bzw. 40°C gehalten wird, sondern dass er auch entlang

seiner Länge gekühlt wird durch ein Kühlaggregat, das (ohne die anderen Einflüsse) die Temperatur an jeder Stelle um 1°C/min absenken würde. Dadurch ändert sich die ursprüngliche partielle Differentialgleichung auf

$$u_t - 68{,}4\, u_{xx} = -1. \tag{12.51}$$

Die Rand- und Anfangswertbedingungen bleiben unverändert, so dass wir hier die gleiche Fortsetzung der Randwerte R verwenden können, wie eben, und deshalb nach der Anpassung der Anfangswerte die gleichen Anfangswerte haben, wie eben.

Es bleibt auch dabei, dass der Einfluss von R keine Veränderung der Inhomogenität bewirkt, d.h., die für die Randwertfortsetzung korrigierte partielle Differentialgleichung ist immer noch (12.51).

Die ersten beiden Lösungsschritte liefern das gleiche Ergebnis, wie in Teil a), aber diesmal müssen wir auch Schritt III durchführen, denn die Inhomogenität

$$H(x,t) = -1$$

ist jetzt nicht null.

Zunächst berechnen wir die Sinusreihenkoeffizienten der Inhomogenität. Sie lauten

$$\begin{aligned}
F_k(t) &= \frac{2}{100}\int_0^{100} H(x,t)\sin\frac{k\pi x}{100}\,dx \\
&= \frac{1}{50}\int_0^{100} -\sin\frac{k\pi x}{100}\,dx \\
&= \frac{1}{50}\cdot\frac{100}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{100}\Big|_0^{100} \\
&= \frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0) \\
&= \frac{2}{k\pi}\big((-1)^k - 1\big) \\
&= \begin{cases} -4/k\pi, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist;} \\ 0, & \text{wenn } k \text{ gerade ist.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nach Gleichung (12.41) sind die Beiträge w_k zur Lösung von Schritt III

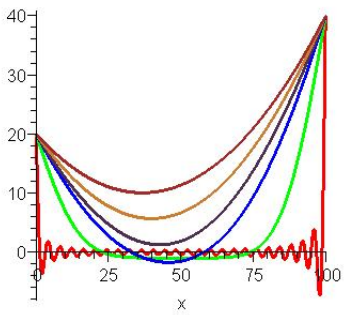
also null für gerade k, und für ungerade k sind sie

$$\begin{aligned}
w_k(x,t) &= e^{-\frac{k^2\pi^2\cdot 68{,}4}{100^2}\,t}\left[\int_0^t e^{\frac{k^2\pi^2\cdot 68{,}4}{100^2}\,s}\cdot\frac{-4}{k\pi}\,ds\right]\sin\frac{k\pi x}{100}\\
&= e^{-0{,}00684\,k^2\pi^2 t}\left[\int_0^t -\frac{4}{k\pi}e^{0{,}00684\,k^2\pi^2 s}\,ds\right]\sin\frac{k\pi x}{100}\\
&= e^{-0{,}00684\,k^2\pi^2 t}\left[-\frac{4}{0{,}00684\,k^3\pi^3}e^{0{,}00684\,k^2\pi^2 s}\Big|_0^t\right]\sin\frac{k\pi x}{100}\\
&= \frac{4}{0{,}00684\,k^3\pi^3}\left(e^{-0{,}00684\,k^2\pi^2 t}-1\right)\sin\frac{k\pi x}{100}\\
&= \frac{1}{0{,}00171\,k^3\pi^3}\left(e^{-0{,}00684\,k^2\pi^2 t}-1\right)\sin\frac{k\pi x}{100}
\end{aligned}$$

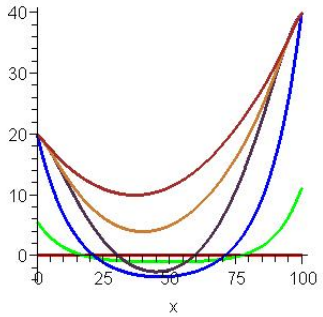
Für die Lösung der inhomogenen Gleichung (12.51) müssen wir also zur Lösung (12.50) der homogenen Gleichung noch einen Beitrag

$$w(x,t) = \sum_{k\in\mathbf{N}\text{ ungerade}} \frac{1}{0{,}00171\,k^3\pi^3}\left(e^{-0{,}00684\,k^2\pi^2 t}-1\right)\sin\frac{k\pi x}{100}$$

addieren. Wegen der unhandlichen Ausdrücke lohnt es sich nicht, die Gesamtformel hier noch einmal anzugeben.



(a) analytisch berechnet



(b) numerisch berechnet

Abbildung 12.2: Verschiedene Zeitpunkte der Wärmeleitung im gekühlten Kupferdraht

Abbildung 12.2 zeigt den Temperaturverlauf im gekühlten Draht am Anfang und für die Zeiten $t = 1$, 5, 10, 20 und 60 Minuten. Man sieht, dass

die Temperatur in der Mitte des Drahtes zunächst heruntergeht, aber später wegen der Wärmeleitung aus den Drahtenden wieder steigt.

Das Linke der beiden Bilder zeigt die analytisch berechnete Lösung mit den Reihensummen. Diese Lösung hält nach Konstruktion an den Endpunkten tatsächlich die vorgegebenen Temperaturen ein. Das rechte Bild zeigt numerisch berechnete Lösungen; hier steigt die Temperatur an den Enden wieder allmählich an, und diese Lösungen sind physikalisch vielleicht etwas realistischer, aber enthalten Rundungsfehler.

12.5 Anders geartete Randbedingungen

In Abschnitt 12.4 haben wir beschrieben, wie man die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung löst für Randbedingungen, die direkt die Temperaturen an den Enden des Stabes angeben.

Oft will man aber Randbedingungen behandeln, die nicht die Temperatur, sondern den *Wärmefluss* durch die Endpunkte angeben, ausgedrückt durch den ***Temperaturgradienten*** u_x (siehe die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung auf Seite 227). Eine häufige Randbedingung besagt, dass der Stab an einem Ende ***wärmeisoliert*** ist — das entspricht der *homogenen* Randbedingung dieser Art. Aber auch nichthomogene Wärmeflussbedingungen sind denkbar.

Wenn man Randbedingungen dieser neuen Art an beiden oder nur an einem Ende des Stabes behandeln will, sind einige Anpassungen im Lösungsweg für die Wärmeleitungsgleichung erforderlich, die wir hier beschreiben wollen.

Wir gehen wieder von einer Wärmeleitungsgleichung der Gestalt (12.17) aus und suchen eine Lösung, die eine Anfangswertbedingung (12.19) erfüllt und Randwertbedingungen beschrieben durch zwei Funktionen $r_1(t)$ und $r_2(t)$, die jetzt aber nicht die *Temperatur* an den Enden beschreiben, sondern an einem oder an beiden Enden den ***Temperaturgradienten***

$$u_x(0,t) \qquad \text{oder} \qquad u_x(L,t).$$

12.5.1 Fortsetzung der Randbedingungen

Wie kann man jetzt die Randbedingungen fortsetzen zu einer Funktion $R(x,t)$, die bei $x = 0$ und bei $x = L$ das richtige Randverhalten hat?

Wenn die Randbedingungen die Gestalt

$$u_x(0,t) = r_1(t) \qquad \text{und} \qquad u_x(L,t) = r_2(t) \tag{12.52}$$

haben, die an beiden Enden den Temperaturgradienten vorgibt, kann man zunächst die *Werte* $r_1(t)$ und r_2 wie in (12.20) zu einer Funktion

$$\rho(x,t) = r_1(t) + \frac{x}{L}\big(r_2(t) - r_1(t)\big).$$

fortsetzen, und diese Funktion bezüglich x integrieren, um eine Funktion

$$R(x,t) = xr_1(t) + \frac{x^2}{2L}\big(r_2(t) - r_1(t)\big) \tag{12.53}$$

mit den gewünschten Temperaturgradienten an beiden Enden zu erhalten.

Wenn nur an einem Ende der Temperaturgradient vorgegeben wird, so hat die Funktion

$$\rho(x,t) = xr_i(t) \qquad \text{(mit dem passenden Wert von } i\text{)}$$

den richtigen Temperaturgradienten, aber am anderen Ende den falschen Wert. Das lässt sich leicht durch Addition einer geeigneten Funktion nur von t korrigieren, die den Temperaturgradienten nicht beeinflusst.

Als die Fortsetzung der Randbedingungen $R(x,t)$ nehmen wir also

$$\begin{aligned} r_1(t) + xr_2(t), &\quad \text{damit } R(0,t) = r_1(t),\ R_x(L,t) = r_2(t); \\ (x-L)r_1(t) + r_2(t), &\quad \text{damit } R_x(0,t) = r_1(t),\ R(L,t) = r_2(t). \end{aligned} \tag{12.54}$$

Mit der gewählten Fortsetzung „korrigiert“ man jetzt den Anfangswert und die Inhomogenität der Differentialgleichung auf die gleiche Weise, wie in Formeln (12.21) und (12.22) beschrieben.

12.5.2 Anpassung der weiteren Lösung an homogene Randbedingungen

Anschließend bestimmen wir wie in den Teilabschnitten 12.4.2 und 12.4.3 weitere Teilbeiträge zur Lösung, die zusammen genommen die angepasste inhomogene partielle Differentialgleichung mit den angepassten Anfangsbedingungen erfüllen, und *homogene Randbedingungen* erfüllen.

Wegen der veränderten Art der Randbedingungen bedeuten aber homogene Randbedingungen jetzt etwas anderes, als früher, und deshalb kommen wir jetzt zu einem anderen Ergebnis bei der Anwendung des Separationsansatzes.

Die homogenen Randbedingungen betreffen die Werte 0 und L der Variablen x und wirken sich deshalb beim Separationsansatz

$$X(x)T(t)$$

auf die Gestalt der Funktion X aus. Nach wie vor muss sie eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$X''(x) = \lambda X(x) \tag{12.55}$$

erfüllen, aber jetzt so, dass bei $x = 0$ oder $x = L$ oder an beiden Stellen $X' = 0$ anstelle von $X = 0$ gelten muss.

Um uns nicht zu sehr zu verzetteln, betrachten wir zunächst nur die Situation, wo an *beiden* Enden $X' = 0$ verlangt wird, und wir wiederholen kurz dafür die Überlegungen, die wir in Beispiel 12.8 zum Separationsansatz angestellt hatten.

Die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (12.55) hat wieder die Gestalt (12.15) in Abhängigkeit vom Vorzeichen von λ. Deshalb hat X' die Gestalt

$$X'(x) = \begin{cases} \omega\big(\alpha e^{\omega x} - \beta e^{-\omega x}\big), & \text{wenn } \lambda > 0; \\ \beta, & \text{wenn } \lambda = 0; \\ \omega\big(\beta \cos \omega x - \alpha \sin \omega x\big), & \text{wenn } \lambda < 0. \end{cases} \tag{12.56}$$

Wir erinnern daran, dass $\omega = \sqrt{|\lambda|}$ und dies ist immer ungleich 0, dort wo es in (12.56) erscheint.

Wenn $\lambda > 0$, dann bedeutet $X'(0) = 0$, dass $\alpha - \beta = 0$, also ist $\alpha = \beta$ und in diesem Fall gilt

$$X'(x) = 2\alpha\omega \sinh \omega x.$$

Der hyperbolische Sinus hat aber keine Nullstelle außer 0, so dass $X'(L) = 0$ nur möglich ist, wenn $\alpha = 0$ und $X \equiv 0$. Deshalb fällt der Fall $\lambda > 0$ wieder weg.

Wenn $\lambda = 0$, dann bedeutet $X'(0) = 0$, dass $\beta = 0$ und $X(x) \equiv \alpha$ ist konstant. Offensichtlich verschwindet die Ableitung jeder konstanten Funktion X überall, also insbesondere auch bei 0 und bei L wie gewünscht.

Wenn $\lambda < 0$, dann bedeutet $X'(0) = 0$, dass $\beta = 0$, so dass X ein Vielfaches von $\cos \omega x$ ist und

$$X'(x) = -\alpha\omega \sin \omega x.$$

Dies wird null bei $x = L$ genau dann, wenn ωL ein Vielfaches von π ist, d.h., wenn

$$\omega L = k\pi \qquad \text{oder} \qquad \omega = \frac{k\pi}{L},$$

wo k eine positive ganze Zahl ist (in unserem jetzigen Fall nicht 0, weil $\lambda \neq 0$, und nicht negativ, weil $\omega \geq 0$).

Wir finden also Grundlösungen für die neuen Randbedingungen, bei denen

$$X(x) = \cos\frac{k\pi}{L}x \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\omega^2 = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

für eine beliebige natürliche Zahl k (in dieser Formel ist auch $k = 0$ erlaubt, und liefert die konstante Lösung für X, die wir gefunden haben im Fall $\lambda = 0$).

Am Ende stellen wir fest, dass für homogene Randbedingugen im Sinne des Wärme*flusses* an beiden Enden sich gegenüber homogenen *Temperaturen* an beiden Enden nichts Weiteres ändert, als dass die Sinusfunktionen in der früheren Lösung sich in Cosinusfunktionen des gleichen Arguments verwandelt haben.

Das heißt, dass wir jetzt zur Bestimmung der Lösungsbeiträge $v(x,t)$ und $w(x,t)$ in Schritten II und III die Anfangsfunktion v_0 und die Inhomogenität H in eine reine *Cosinus*reihe entwickeln müssen. Mit den gefundenen Koeffizienten a_k anstelle von b_k in Schritt II und $F_k(t)$ in Schritt III konstruieren wir die Lösungen $v(x,t)$ und $w(x,t)$ auf genau die gleiche Weise und mit den gleichen Reihenentwicklungen, wie vorher, aber wir ersetzen die Faktoren

$$\sin\frac{k\pi x}{L} \qquad \text{durch entsprechende Faktoren} \qquad \cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Und natürlich haben wir jetzt auch einen Summanden für $k = 0$.

Die Anpassung an „wärmeisolierte“ homogene Randbedingungen an beiden Enden des Stabes war also recht einfach und unproblematisch. Wie sieht es aber bei gemischten Randbedingungen aus, wo ein Stabende wärmeisoliert ist und das andere Temperatur 0 hat? Hier gibt es zwei Konstellationen, die durch Spiegelung des Stabes ineinander übergehen, und wir behandeln zur Illustration nur den Fall, wo bei $x = 0$ die Temperatur null sein soll, und bei $x = L$ der Temperaturgradient verschwindet.

Wir greifen die bisher für andere Randbedingungen durchgeführte Herleitung an der Stelle auf, wo der Separationsansatz zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$X'' = \lambda X$$

für den Faktor $X(x)$ des Lösungsansatzes $X(x)T(t)$ führt, und wir eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von λ machen und in jedem der Fälle versuchen, die allgemeine Lösung an die Randbedingung anzupassen.

Diesmal verlangen die homogenen Randbedingungen, dass

$$X(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad X'(L) = 0.$$

Wenn $\lambda > 0$, dann hat die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung für X die Gestalt

$$X(x) = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x} \qquad \text{und} \qquad X'(x) = \omega\big(\alpha e^{\omega x} - \beta e^{-\omega x}\big),$$

aus der linken Randbedingung folgt $\beta = -\alpha$, und die rechte Randbedingung besagt, dass

$$\omega\alpha\big(e^{\omega L} + e^{-\omega L}\big) = 2\omega\alpha\cosh\omega L = 0,$$

was unmöglich ist, wenn $\alpha \neq 0$, weil der hyperbolische Cosinus *nie* null wird.

Wenn $\lambda = 0$, dann hat die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung für X die Gestalt

$$X(x) = \alpha + \beta x \qquad \text{und} \qquad X'(x) = \beta,$$

aus der linken Randbedingung folgt $\alpha = 0$ und aus der rechten Randbedingung $\beta = 0$.

Nichttriviale Lösungen finden wir also wieder einmal höchstens für $\lambda < 0$. Dann hat die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung für X die Gestalt

$$X(x) = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x \qquad \text{und} \qquad X'(x) = \omega\big(\beta\cos\omega x - \alpha\sin\omega x\big),$$

aus der linken Randbedingung folgt $\alpha = 0$, und die rechte Randbedingung reduziert sich auf

$$\cos\omega L = 0.$$

Die Nullstellen der Cosinusfunktion sind die *ungeraden* Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

Wir brauchen also, dass für eine beliebige natürliche Zahl k gilt

$$\omega L = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{(2k+1)\pi}{2L}.$$

Die Grundlösungen, die wir mit dem Separationsansatz ermitteln, haben also einen Faktor $X(x)$ der Gestalt

$$X(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}, \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\omega^2 = -\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4L^2}.$$

Die weitere Bestimmung der Lösung nach der bisherigen Methode verlangt nun, dass wir Funktionen wie v_0 oder $H(x,t)$ in eine Sinusreihe entwickeln, bei der die Sinusfaktoren aber die spezielle Form

$$\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}$$

haben müssen.

Wie können wir solche Reihenentwicklungen erhalten? Hier ist ωL nicht ein beliebiges Vielfaches von π, sondern ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$. Wir erinnern uns aber, dass die „einfacheren“ Sinusreihen, in denen ωL ein Vielfaches von π ist, durch eine *Symmetrieeigenschaft* zustande kommen — man erhält sie für *ungerade* Funktionen von Periode $2L$. Die entsprechenden Sinusfunktionen haben auch $2L$ und nicht L als Periode.

Die spezielleren Sinusfunktionen, die wir jetzt brauchen, haben Periode $4L$! Erst wenn wir $4L$ zu x addieren, addieren wir ein ganzzahliges Vielfaches von 2π zum Argumenten der Sinusfunktion, und kein kleineres Vielfaches der Stablänge als $4L$ ist eine Periode dieser Funktionen.

Aus diesem Grund lohnt es sich in dieser Hinsicht generell Sinusfunktionen von Periode $4L$ zu betrachten; sie haben die allgemeine Gestalt

$$\sin\frac{2\pi m x}{4L} = \sin\frac{m\pi x}{2L}$$

für eine ganze Zahl $m \neq 0$.

Neben der Tatsache, dass diese Funktionen, wie jede Sinusfunktion, *ungerade* sind, entdecken wir auf Grund der Additionstheoreme auch bei Spiegelung in $x = L$ (d.h., im *rechten* Endpunkt unseres Stabes von Länge L) eine nützliche Symmetrie. Wenn wir $L - x$ durch $L + x$ ersetzen, oder was das Gleiche bedeutet, wenn wir

$$x = L - (L - x) \qquad \text{durch} \qquad L + (L - x) = 2L - x$$

ersetzen, finden wir

$$\begin{aligned}
\sin\frac{m\pi(2L-x)}{2L} &= \sin\frac{m\pi(2L)}{2L}\cos\frac{m\pi(-x)}{2L} \\
&\qquad + \cos\frac{m\pi(2L)}{2L}\sin\frac{m\pi(-x)}{2L} \\
&= \sin\bigl(m\pi\bigr)\cos\frac{m\pi x}{2L} \\
&\qquad - \cos\bigl(m\pi\bigr)\sin\frac{m\pi x}{2L} \\
&= 0\cdot\cos\frac{m\pi x}{2L} - (-1)^m\sin\frac{m\pi x}{2L} \\
&= (-1)^{m+1}\sin\frac{m\pi x}{2L}.
\end{aligned}$$

In anderen Worten, diese speziellen Sinusfunktionen sind *ungerade* bezüglich des Koordinatenursprungs, und *gerade oder ungerade* bezüglich des

Punkts $x = L$, je nachdem, ob m *un*gerade oder gerade ist. Ferner haben sie Periode $4L$.

Sei f eine beliebige ungerade Funktion von Periode $4L$, die auch bezüglich des Punktes $x = L$ gerade oder ungerade ist. Weil f bezüglich 0 ungerade ist, ist die Fourierreihe von f eine reine Sinusreihe

$$f \sim \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{2L}$$

und die Koeffizienten berechnen sich nach der Formel

$$b_m = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{2L}\, dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{2L}\, dx \tag{12.57}$$

(dies ist Formel (11.14b) aus Satz 11.16 b), wo wir aber jedes Vorkommnis von L durch $2L$ ersetzen mussten, weil die Periode von f hier doppelt so groß ist, wie in Satz 11.16).

Bezüglich der Symmetrie von f um den Punkt $x = L$ können wir aber jetzt genau so argumentieren, wie in Satz 11.16, um das Integral (12.57) zu vereinfachen. Aus den gleichen Gründen wie dort wird das Integral 0, wenn f und die Sinusfunktion entgegengesetzte Symmetrie um $x = L$ haben, und es schreibt sich als

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{2L}\, dx, \tag{12.58}$$

wenn f und die Sinusfunktion die gleiche Symmetrie aufweisen, d.h., wenn f gerade ist bezüglich $x = L$ und wenn m ungerade ist, oder wenn f ungerade ist bezüglich $x = L$ und wenn m gerade ist.

Die Beweise wollen wir nicht weiter ausführen, weil sie nur eine Wiederholung aus Kapitel 11 wären.

Aber mit dieser neuen Symmetrieeigenschaft und den vereinfachten Ausdrücken für die Integrale (12.57) können wir jetzt auf ähnliche Weise, wie in Bemerkung 11.17 vorgeschlagen, Fourierreihenentwicklungen erzeugen, die nicht nur ausschließlich Sinusterme (oder Cosinusterme) enthalten, sondern sogar welche, in denen als ωL nur *ungerade* Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ erscheinen.

Dazu beginnen wir mit einer Funktion f definiert auf $[0, L]$, setzen sie zunächst „L-gerade“ fort auf $[L, 2L]$, setzen diese *erweiterte* Funktion ungerade fort auf $[-2L, 0]$, und zum Schluss setzen wir diese doppelte Erweiterung $4L$-periodisch auf die ganze reelle Gerade fort.

Diese Funktion hat eine Fourierreihe, die *nur* Sinussummanden enthält und *nur* solche, bei denen ωL ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Zur Berechnung dieser Fourierreihe müssen wir aber nicht die erweiterte Funktion über ihre gesamte Periode $4L$ integrieren, sondern es reicht, das in (12.58)

gegebene Integral von 0 bis L zu berechnen. Und dieses Integral können wir ausrechnen, ohne f wirklich auf eine viermal so lange Periode zu erweitern — in das Integral gehen ohnehin nur die Werte von f auf dem Grundintervall $[0, L]$ ein.

(Übrigens: theoretisch können wir auch Sinusreihen erzeugen, in denen als ωL nur gerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ erscheinen, aber das ist nichts Neues! Das sind einfach die bisherige Sorte von Sinusreihen mit ganzzahligen Vielfachen von π; die dafür erforderliche ungerade Symmetrie bezüglich $x = L$ hat nämlich jede ungerade $2L$-periodische Funktion von x automatisch!)

Wir bemerken zum Schluss, dass Formel (12.58) *fast* so aussieht, wie die Grundformel (11.11b) für die Sinuskoeffizienten der allgemeinen Fourierreihe. Nur eine kleinigkeit ist anders: bei jeder zusätzlichen Einschränkung über die Gestalt der Fourierreihensummanden, oder in anderen Worten, bei jeder zusätzlichen Symmetrie der betrachteten Funktionen, bleibt zwar der „Rahmen“ des Integrals, mit dem man die Koeffizienten berechnet, d.h., der Bruch $2/L$ vor dem Integralzeichen und die Integrationsgrenzen, so wie er vorher war, aber das Argument der trigonometrischen Funktion unter dem Integralzeichen halbiert sich von $2\pi kx/L$ zu $\pi kx/L$ und schließlich zu $\pi kx/2L$.

Jetzt, wo wir wissen, wie man Funktionen in diese neue speziellere Art von Sinusreihe entwickeln kann, lassen sich Wärmeleitungsgleichungen mit gemischten homogenen Randbedingungen nach dem bisherigen allgemeinen Verfahren lösen — man entwickelt die Anfangsbedingung $v_0(x)$ oder die Inhomogenität $H(x,t)$ in eine solche Sinusreihe, bestimmt die Koeffizienten b_k bzw. $F_k(t)$ und verarbeitet sie auf die schon in den Abschnitten 12.4.2 und 12.4.3 beschriebene Weise weiter, und setzt die Ergebnisse wie dort zu Lösungsbeiträgen $v(x,t)$ und $w(x,t)$ zusammen; die einzige Neuerung bei diesem Schritt, ist dass die Sinusfunktionen in den Lösungen jetzt in den Argumenten ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ enthalten anstelle der beliebigen Vielfachen von π.

Aus Zeitgründen wollen wir es bei dieser allgemeinen Beschreibung belassen, ohne die detaillierten Formeln aufzuführen (es ist ohnehin besser und effizienter, das allgemeine Verfahren und seine Begründung verstanden zu haben, als etliche verschiedene Formeln auswendig zu lernen und im richtigen Moment und für die richtige Anwendung aus der Versenkung zu holen — dabei macht man *sicher* Fehler). Auch auf weitere Beispiele wollen wir verzichten.

Kapitel 13

Die Wellengleichung

In Kapitel 12 haben wir die Grundtechniken für die Lösung einfacher partieller Differentialgleichungen gelernt. Im jetztigen Kapitel wollen wir sie ganz kurz anwenden, um eine weitere wichtige partielle Differentialgleichung der Technik zu lösen: die Wellengleichung.

13.1 Anfangs- und Randwertprobleme für die Wellengleichung

Die Wellengleichung beschreibt die Bewegung einer schwingenden Saite. Wir stellen uns vor, dass eine Saite der Länge L zwischen den Lagen $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist, und wir wollen den vertikalen Ausschlag $u(x, t)$ der Saite von einer Ruhelage aus bestimmen, als Funktion des Ortes x und der Zeit t.

Die partielle Differentialgleichung dafür lautet

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x, t), \tag{13.1}$$

wo, wie bei der Wärmeleitungsgleichung, die positive Zahl c^2 eine Materialkonstante ist (ihre Quadratwurzel c ist die horizontale *Ausbreitungsgeschwindigkeit* einer Schwingung in der Saite). Die Inhomogenität h ist eine äußere Störung der Saite, d.h., eine zusätzliche Beschleunigung oder Dämpfung, die der natürlichen Eigenschwingung der Saite aufgesetzt ist.

Die partielle Differentialgleichung selber unterscheidet sich von der Wärmeleitungsgleichung nur dadurch, dass in ihr die *zweite* Ableitung von u nach der Zeit erscheint, anstelle der einfachen Ableitung.

Wie bei der Wärmeleitungsgleichung werden wir nicht versuchen, die Wellengleichung an sich zu lösen, sondern mit ihr verbundene Anfangs- und Randwertprobleme.

Wieder gibt es zwei Sorten von Randbedingungen: wir können entweder den Ausschlag der Saite an den beiden Enden beschreiben:

$$u(0,t) = r_1(t) \qquad \text{und} \qquad u(L,t) = r_2(t), \tag{13.2}$$

wo man hier vorschreibt, dass die Saite sich an ihren Enden auf eine ganz bestimmte Weise auf und ab bewegt; oder man kann sich vorstellen, dass die Enden der Saite mit einem frei beweglichen Reiter auf einer senkrechten Schiene verbunden sind, so dass ihre vertikale Bewegung durch die inneren Kräfte der Saite bestimmt ist, aber die horizontale Lage der Enden sich nicht verändert.

Die Reiter werden sich immer so einstellen, dass die Saite senkrecht zu den tragenden Schienen ist und deshalb *horizontal* von ihnen weggeht, und die Randbedingungen lauten dann

$$u_x(0,t) = 0 \qquad \text{und} \qquad u_x(L,t) = 0. \tag{13.3}$$

Physikalisch sinnvoll sind hier in der Regel nur *homogene* Randbedingungen dieser Art.

Auch für die erste Sorte von Randbedingung, wo die Saite an den Enden sich nicht frei bewegen kann, werden sehr oft homogene Randbedingungen vorausgesetzt, die einer fest eingespannten Saite entsprechen. Nur selten wird man die Saitenenden tatsächlich auf und ab bewegen wollen.

Während für die Wärmeleitungsgleichung die Angabe einer einzigen Temperaturverteilung als Anfangsbedingung ausreichte, brauchen wir bei der Wellengleichung sowohl die Angabe der Anfangslage der Saite wie auch ihrer Anfangsgeschwindigkeit. Das entspricht der höheren Ordnung der Wellengleichung in der Variablen t. Die gleiche Saite im Ruhestand oder schon in Bewegung wird sich in der Zukunft verschieden entwickeln.

Der Lösungsweg für die Wellengleichung ähnelt sehr dem Lösungsweg für die Wärmeleitungsgleichung. Falls man inhomogene Randbedingungen hat, so berechnet man zunächst eine ***Fortsetzung der Randwerte*** wie im letzten Kapitel beschrieben, und anschließend korrigiert man damit die Anfangsbedingungen und die Inhomogenität der Differentialgleichung nach einem Schema analog zu dem in Kapitel 12.

Wir gehen deshalb im Rest dieses Kapitels davon aus, dass wir Lösungen mit *homogenen* Randbedingungen suchen. Dabei werden wir nur Randbedingungen der Gestalt

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

betrachten (also nicht die Sorte, wo die Saite an einem frei beweglichen Reiter befestigt ist).

13.2 Anpassung von Anfangswerten

Als zweiten Schritt in Richtung auf eine Gesamtlösung müssen wir eine *homogene* Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{13.4}$$

mit homogenen Randbedingungen, aber mit vorgegebenen Anfangswerten lösen. Diese seien gegeben als

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = v_0(x). \tag{13.5}$$

Wir probieren wieder den Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

(und nehmen an, dass u und somit auch die Faktoren X und T nicht immer 0 sind).

Wenn wir dies in die partielle Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir

$$XT'' - c^2 X'' T = 0,$$

was sich nach Division durch $c^2 XT$ ($\neq 0$) leicht „separieren“ lässt zu

$$\frac{T''}{c^2 T} = \lambda = \frac{X''}{X}. \tag{13.6}$$

Für X erhalten wir die übliche gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' = \lambda X$$

und aus den homogenen Randbedingungen für die partielle Differentialgleichung dazu die Nebenbedingung, dass

$$X(0) = 0 = X(L).$$

Aus diesen Bedingungen folgt, wie wir inzwischen sehr gut wissen, dass (bis auf einen konstanten Faktor, den wir in T aufnehmen können und deshalb hier nicht berücksichtigen müssen)

$$X(x) = \sin\frac{k\pi x}{L} \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2} \tag{13.7}$$

für eine positive natürliche Zahl k.

Die *andere* in (13.6) enthaltene gewöhnliche Differentialgleichung, für T, lautet

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \lambda T = -\frac{k^2\pi^2 c^2}{L^2} T, \tag{13.8}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$T(t) = \alpha \cos \frac{k\pi ct}{L} + \beta \sin \frac{k\pi ct}{L}.$$

Diese Lösung erfüllt die Anfangsbedingungen

$$T(0) = \alpha \qquad \text{und} \qquad T'(0) = \beta \frac{k\pi c}{L},$$

woraus für unseren Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ folgt

$$u(x,0) = \alpha \sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big) \qquad \text{und} \qquad u_t(x,0) = \beta \frac{k\pi c}{L} \sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big). \tag{13.9}$$

Wir wissen aber, dass wir uns mit diesen Lösungen (die wahrscheinlich nicht zur tatsächlichen Anfangsbedingung passen) nicht zufrieden geben müssen, sondern sie mittels Reihenentwicklung zu einer Lösung zusammensetzen können, die beliebige stetige Anfangsbedingungen erfüllt.

Dazu entwickeln wir die Anfangswertfunktionen $u_0(x)$ und $v_0(x)$ in Sinusfourierreihen:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \qquad \text{und} \qquad v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi x}{L} \tag{13.10}$$

mit

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx \qquad \text{und} \qquad c_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx.$$

Die Gesamtlösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[b_k \cos\Big(\frac{k\pi ct}{L}\Big) \sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big) + \frac{c_k L}{k\pi c} \sin\Big(\frac{k\pi ct}{L}\Big) \sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big) \Big] \tag{13.11}$$

erfüllt die homogene Wellengleichung (13.4) mit homogenen Randbedingungen und den gewünschten Anfangsbedingungen (13.5), wie man durch Einsetzen von $t = 0$ in u und u_t und Vergleich mit den Reihenentwicklungen (13.10) sofort nachrechnet.

13.3 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Als letzten Schritt zur Erlangung einer Gesamtlösung wollen wir eine *inhomogene* Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = H(x,t) \tag{13.12}$$

mit homogenen Randbedingungen und homogenen Anfangswerten

$$u(x,0) = 0 = u_t(x,0)$$

lösen.

Wir probieren wieder den Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

(und bemerken, dass u und somit auch die Faktoren X und T nicht identisch 0 sind, weil wir sonst eine Lösung der schon behandelten *homogenen* Wellengleichung hätten).

Wenn wir dies in die partielle Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir

$$XT'' - c^2 X''T = H(x,t), \tag{13.13}$$

was sich im allgemeinen *nicht* separieren lässt. Wie wir schon bei der Wärmeleitungsgleichung gesehen haben, gibt es aber Ausnahmesituationen, in denen die Separation doch gelingt, zum Beispiel, wenn gerade zufällig

$$H(x,t) = X(x)F(t) \tag{13.14}$$

für die *gleiche* Funktion X, die in der Darstellung von u vorkommt! In diesem Fall verwandelt sich (13.13) in die getrennte Gleichung

$$\frac{T''(t)}{c^2\,T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{F(t)}{c^2\,T(t)}$$

oder

$$\frac{T''(t)}{c^2\,T(t)} - \frac{F(t)}{c^2\,T(t)} = \lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{13.15}$$

Da u homogene Randbedingungen erfüllen muss, können wir, wie üblich, aus der rechten Hälfte der Doppelgleichung (13.15) und den Randbedingungen für X schließen, dass

$$X(x) = \sin\frac{k\pi}{L}x \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$$

für eine positive ganze Zahl k (auch Vielfache dieser Lösung sind möglich, aber wir können sie in der Gestaltung des Faktors T mit berücksichtigen).

Die andere Hälfte der Doppelgleichung (13.15) ist jetzt eine *inhomogene* lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für T der Gestalt

$$T''(t) - F(t) = \lambda c^2\,T(t) = -\frac{k^2\pi^2c^2}{L^2}\,T(t)$$

oder

$$T''(t) + \frac{k^2\pi^2c^2}{L^2}\,T(t) = F(t). \tag{13.16}$$

Im Einklang mit den homogenen Anfangsbedingungen suchen wir hiervon eine partikuläre Lösung $T(t)$ mit

$$T(0) = T'(0) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser gewöhnlichen Differentialgleichung hat offensichtlich die Nullstellen

$$\pm\frac{k\pi c}{L}i$$

und somit bilden

$$y_1(t) = \cos\frac{k\pi ct}{L} \qquad \text{und} \qquad y_2(t) = \sin\frac{k\pi ct}{L}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der entsprechenden homogenen Gleichung

$$T''(t) + \frac{k^2\pi^2c^2}{L^2}\,T(t) = 0.$$

Die Wronski-Determinante dieses Fundamentalsystems ist

$$\det\begin{pmatrix} \cos\frac{k\pi ct}{L} & \sin\frac{k\pi ct}{L} \\ -\frac{k\pi c}{L}\sin\frac{k\pi ct}{L} & \frac{k\pi c}{L}\cos\frac{k\pi ct}{L} \end{pmatrix} = \frac{k\pi c}{L}.$$

Mit Variation der Konstanten (wie sie in Abschnitt 9.3 erklärt wurde) finden wir eine partikuläre Lösung von Gleichung (13.16) der Gestalt $c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$, wo die Koeffizienten $c_i(t)$ sich aus der Lösung des linearen Gleichungssystems (9.15) oder direkter aus den Formeln (9.16) bestimmen lassen:

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -\frac{y_2(t)F(t)}{|W(t)|} = -\frac{L}{k\pi c}\,F(t)\sin\frac{k\pi ct}{L}, \\ c_2'(t) &= \frac{y_1(t)h(t)}{|W(t)|} = \frac{L}{k\pi c}\,F(t)\cos\frac{k\pi ct}{L}. \end{aligned}$$

Weil wir jetzt eine Lösung mit homogenen Anfangsbedingungen suchen, soll $c_i(0) = 0$ sein und wir können die Koeffizienten $c_i(t)$ bestimmen, indem

wir die rechte Seite obiger Gleichungen ab $t = 0$ integrieren. Das führt zu der Lösung

$$c_1(t) = -\frac{L}{k\pi c}\int_0^t F(s)\sin\frac{k\pi cs}{L}\,ds,$$

$$c_2(t) = \frac{L}{k\pi c}\int_0^t F(s)\cos\frac{k\pi cs}{L}\,ds$$

für die „variierten Konstanten“.

Dass die Inhomogenität *genau* die Gestalt (13.14) hat, kommt fast nie vor, aber wir können jede stetige und stückweise stetig differenzierbare Inhomogenität immer in eine konvergente Reihendarstellung zerlegen, deren Summanden diese Gestalt haben; bezüglich der Variablen x ist dies einfach die Fourier-Sinusreihendarstellung von $H(x,t)$, und die Variable t verhält sich wie ein Parameter.

Wir setzen also

$$F_k(t) := \frac{2}{L}\int_0^L H(x,t)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx, \tag{13.17}$$

so dass

$$H(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

und wir setzen

$$\begin{aligned}\alpha_k(t) &= -\frac{L}{k\pi c}\int_0^t F_k(s)\sin\frac{k\pi cs}{L}\,ds\\ &= -\frac{2}{k\pi c}\int_0^t\int_0^L H(x,s)\sin\frac{k\pi cs}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx\,ds, \qquad (13.18a)\\ \beta_k(t) &= \frac{L}{k\pi c}\int_0^t F_k(s)\cos\frac{k\pi cs}{L}\,ds\\ &= \frac{2}{k\pi c}\int_0^t\int_0^L H(x,s)\cos\frac{k\pi cs}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx\,ds. \qquad (13.18b)\end{aligned}$$

Die Lösung der Wellengleichung (13.12) mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen ist dann

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\alpha_k\cos\Big(\frac{k\pi ct}{L}\Big)\sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big) + \beta_k\sin\Big(\frac{k\pi ct}{L}\Big)\sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big)\Big]. \tag{13.19}$$

Die Gesamtlösung eines Anfangs- und Randwertproblems zu (13.1) erhält man wie immer als die Summe der Fortsetzung der Randwerte mit den oben berechneten Lösungen (13.11) und (13.19) für die homogene Differentialgleichung mit den korrigierten Anfangswerten, bzw. für die korrigierte inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten.