

Skriptum zur Vorlesung
Einführung in die Topologie

Prof. Dr. Gordon Wassermann

Sommersemester 2007

Inhaltsverzeichnis

Was ist Topologie?	v
1 Topologische Räume	1
2 Stetige Abbildungen	39
3 Konvergenz, Häufung und Filter	83
4 Kompakte und lokalkompakte Räume	107
5 Zusammenhängende Räume	129
6 Homotopie und die Fundamentalgruppe	161
7 Überlagerungen	191
8 Anwendungen der Fundamentalgruppe	221

Abbildungsverzeichnis

1	Die Brücken von Königsberg	viii
2	Ein Torus	ix
1.1	Einheitsbälle in den drei Metriken auf \mathbf{R}^2	33
5.1	Der Kammraum X	156
6.1	Eine Homotopie auf $D^n \setminus \{0\}$	168
6.2	Ein Kreis mit angeheftetem Intervall	171
6.3	Das mittlere Intervall kann zusammengezogen werden.	173
6.4	Homotopie mit festen Endpunkten	175
6.5	$\hat{u}(w)$, die Schleife w zurückgeholt von x_1 nach x_0 entlang u	186
6.6	Die Homotopie K von Schleifen bei y_0	188
7.1	Überlagerungen.	194
7.2	Schrittweise Konstruktion einer Hochhebung.	199
7.3	Warum \tilde{w} eine Schleife ist.	202
7.4	Die Konstruktion von \tilde{f}	203
7.5	Ist \tilde{f} wohldefiniert?	204
7.6	Warum \tilde{f} stetig ist.	206
7.7	Warum p_* injektiv ist.	208
7.8	φ ist ein Homomorphismus.	213
7.9	Der Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen.	217
8.1	Eine Retraktion von D^2 auf S^1	223

Was ist Topologie?

Diese Vorlesung will eine *Einführung in die Topologie* geben, aber bevor wir richtig damit beginnen und die fundamentalen (sich als ziemlich abstrakt erweisenden) Definitionen hinschreiben, sollten wir schon eine Vorstellung davon haben, mit welchen Fragen und Gegenständen sich die Topologie beschäftigt und welche intuitiven Ideen durch die in diesen Definitionen erscheinenden Begriffe mathematisch erfassbar gemacht werden sollen.

Diese kleine Vordiskussion wird sich schon deshalb lohnen, weil die „intuitiven Grundgedanken“ der Topologie viel abstrakter und nebulöser sind, als die anderer Gebiete der Mathematik. Trotzdem kommen Sie überall in der Mathematik vor, vielleicht gerade *weil* sie ein verdecktes Substrat unserer Erfahrungswelt erfassen, das nicht primär mit speziellen Situationen verbunden ist, die nur in isolierten Gebieten der Mathematik vorkommen und diese Teilgebiete besonders prägen.

Der hohe Abstraktionsgrad des topologischen Grundgedankens ist aber zum Glück kein dauerhaftes Hindernis für das Verstehen topologischer Inhalte, denn die topologische Welt ist geometrisch und lässt sich deshalb bildhaft und sehr einprägsam vorstellen; man muss aber wissen, welche Merkmale der Bilder topologisch relevant sind und welche nicht, und das wollen wir in diesem einleitenden Abschnitt aufklären.

Ohne diese kleine Vordiskussion scheinen schon die ersten Definitionen der Topologie nicht viel Sinn zu machen. Wenn man aber weiss, welcher Gedanke in diesen Definitionen angepeilt ist und wie dieser Gedanke in der Definition festgehalten wird, dann sind die Dinge, die daraus folgen, nicht schwerer zu begreifen, als in anderen Teilen der Mathematik.

Die moderne Division der Mathematik in Teilgebiete ist eine relativ junge Erscheinung; viele der Grundvorstellungen, die aus der heutigen Mathematik nicht mehr wegzudenken sind, haben erst in der Mitte des vorigen Jahrhunderts ihre heutige Ausprägung erfahren. Für den größten Teil seiner Geschichte hat die Mathematik sich ohne ein einheitliches Strukturgebilde mit speziellen *Problemen und Fragen* befasst, die manchmal von der Natur oder den Naturwissenschaften gestellt wurden und manchmal aus der spiele-

rischen Neugierde der Menschen stammten, aber immer waren die Bemühungen der Mathematiker auf das Lösen spezieller Aufgaben gerichtet, und neue Mathematik wurde oft zweckbestimmt entwickelt, um diese Fragen anzugehen. Die philosophischen Grundlagen der neu eingeführten Begriffe waren oft sehr unklar und führten zu essentiellen Diskussionen über die Zulässigkeit gewisser Konstrukte oder Methoden. Hier spielten oft vage Begriffe wie „Offensichtlichkeit“ oder „Natürlichkeit“ eine Rolle, die heute als irrelevant und problematisch angesehen werden.

Erst im 19. Jahrhundert entwickelten sich erfolgreiche Ansätze zur generellen Lösung des immer wiederkehrenden ontologischen Problems („Existieren die von uns verwendeten mathematischen Objekte wirklich?“), und Mathematiker begannen langsam, ihre Wissenschaft als eine *Einheit* zu sehen, in der es um die Untersuchung von „mathematischen Strukturen“ verschiedener Arten im Wesentlichen geht. Cantors Mengenlehre lieferte am Ende das Werkzeug, um solche Strukturen einheitlich zu beschreiben und zu erfassen, und führte zum schließlichen Siegeszug dieser modernen Denkweise.

Was sind die wichtigen mathematischen Strukturen? Die sich ausbreitende Mathematik, die sich in der Lage sah, immer neue Fragen und Probleme anzugehen und zu lösen, lieferte viele Beispiele, die zwar verschieden waren aber auch viele Gemeinsamkeiten hatten.

So haben die Zahlen im Laufe der Geschichte immer neue Gestalten angenommen: zuerst nur natürliche und positive rationale Zahlen, später (schon bei den alten Griechen) „geometrische“ Zahlen, die auch irrational sein konnten, im beginnenden Mittelalter negative Zahlen, dann reelle Zahlen und schließlich die komplexen Zahlen, die erst durch die „Erfindung“ der Gaußschen Zahlenebene allgemeine Akzeptanz erfuhren. Im 19. Jahrhundert gesellten sich noch die Quaternionen und die Cayley-Zahlen hinzu, sowie gewisse Zahlkörper zwischen \mathbf{Q} und \mathbf{C} . Für alle diese Zahlenmengen gab es Grundrechenarten, die den üblichen Gesetzen der Arithmetik gehorchten, oder in manchen Fällen auch nicht. Allmählich wurde klar, dass auch andere Gebilde (wie Bewegungen oder Permutationen oder Polynome) ähnliche Rechenoperationen zuließen, und so entwickelte sich allmählich der Begriff einer algebraischen Struktur sowie der Objekte, wie Gruppen, Körper, Ringe, die diese Struktur in verschiedenen Ausprägungen tragen. Der Begriff der „algebraischen Struktur“ hat sich also aus vielen, jedermann bekannten Beispielen herauskristallisiert.

Die Beschäftigung mit Strukturen hat sich als lohnend erwiesen, weil diese Denkart die Gemeinsamkeiten von vielen Situationen organisiert zusammenfasst und so die gleichzeitige Behandlung von vielen Einzelproblemen auf effiziente Weise ermöglicht.

Die *topologische* Struktur hat sich auf eine ähnliche Art als „kleinster

gemeinsamer Nenner“ aus bekannten Situationen und Merkmalen herausgeschält, aber sie ist in ihrer Natur viel schwerer zu sehen, als die algebraische Struktur, weshalb sich die Grundbegriffe der Topologie auch etwas später entwickelt haben. Trotzdem sind topologische Gedanken viel älter als die Topologie an sich (aus diesem Grund taucht der Name *Euler*, zum Beispiel, oft in der Topologie auf). Um zu verstehen, was Topologie ist, wollen wir also sehen, welche Beispiele und Fragestellungen zur Entwicklung dieser Struktur geführt haben.

Die topologische Struktur ist eine geometrische Struktur, aber es handelt sich nicht um den vordergründigen und sichtbaren Teil der Geometrie, bei der es um feste „bemaßbare“ Größen wie Längen und Winkel und um Begriffe wie Gerade und Kreis geht, in deren Definition Längen und Winkel eingehen; diese sind die Grundbegriffe der klassischen Geometrie, aber sie spielen keine große Rolle in der Topologie.

Diese klassischen geometrischen Merkmale fanden schon vor langer Zeit Einzug in unsere Begriffs- und Vorstellungswelt. In ihrer Verkörperung in der euklidischen Geometrie haben sie etwa 2000 Jahre lang einen wesentlichen und beherrschenden Teil der Mathematik ausgemacht. Sie bestimmen in dieser Ausprägung eine eindeutige und deshalb sehr *steife* Struktur, die bis ins 19. Jahrhundert hinein überhaupt keine Variationen zuließ.

Entfernt man aus der euklidischen Geometrie die tragenden Balken Länge und Winkel, bleibt trotzdem etwas über, eine „weichere“ Struktur, deren Vorhandensein man daran erkennen kann, dass es interessante geometrische Aussagen gibt, die auch ohne die rigiden Merkmale ausdrückbar und richtig sind.

Einige wichtige frühe Aussagen topologischer Natur stammen von Euler. Dazu gehört die Lösung des **Königsberger Brückenproblems**. Abbildung 1 auf Seite viii, entnommen aus der **MacTutor History of Mathematics**, einem sehr interessanten Internetangebot¹ der School of Mathematics and Statistics an der University of St. Andrews in Schottland, zeigt die **sieben Brücken von Königsberg** zu Eulers Zeiten. Das Brückenproblem bestand darin, einen Spazierweg zu finden, der über alle sieben Brücken führt aber jede Brücke nur einmal kreuzt. Euler hat mit einem Argument, den man heute der **Graphentheorie** zuordnen würde, gezeigt, dass kein solcher Weg möglich ist.

Eulers Arbeit über das Brückenproblem hatte den Titel *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, also „Die Lösung eines Problems bezüglich der Geometrie der **Lage**“. Es handelte sich für Euler also schon um

¹http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Topology_in_mathematics.html

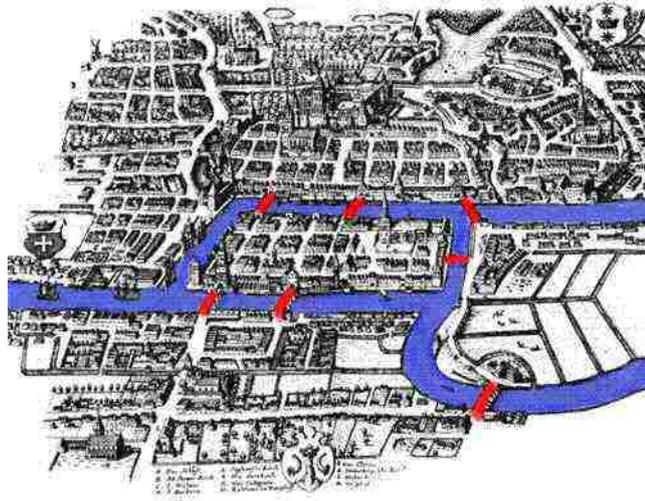


Abbildung 1: Die Brücken von Königsberg

ein *geometrisches* Problem, bei dem aber nur die **Lage** der Brücken und Stadtgebiete und Inseln zueinander eine Rolle spielte, nicht ihre Entfernungen zueinander oder irgendwelche sonstigen genauen Abmessungen.

Praktisch die gleiche Terminologie, nämlich *Analysis situs*, war eine frühe Bezeichnung für die Topologie, und das Wort **Topologie** selber besagt eigentlich das Gleiche auf Griechisch: die *Lehre der Lage*.

Ein weiteres topologisches Ergebnis aus Eulers Schaffen ist die bekannte Polyederformel

$$E - K + F = 2,$$

eine immer geltende Beziehung zwischen der Anzahl E der Ecken, der Anzahl K der Kanten und der Anzahl F der Flächen eines beliebigen konvexen Polyeders. Für andere Flächen (zum Beispiel für den **Torus** aus Abbildung 2 auf Seite ix, der nicht konvex ist und ein Loch umschließt) oder für Polyeder höherer Dimensionen gelten ähnliche Formeln, in denen die Anzahlen der Ecken, Flächen usw. beliebiger Zwischendimensionen eingehen, und in denen eine andere Zahl anstelle der 2 auf der rechten Seite der Formel stehen kann.

Diese Zahl heißt die **Euler-Charakteristik** des entsprechenden Gebildes und hängt von der „topologischen“ Struktur des Körpers ab, aber nicht von der detaillierten Realisierung des Körpers als Polyeder.

Die Euler-Charakteristik des Torus ist übrigens 0 und von der zweidimensionalen Sphäre S^2 , die sich als die Oberfläche eines konvexen Polyeders darstellen lässt, ist sie 2, wie Eulers Formel aus dem 18. Jahrhundert besagt.

Die hier genannten Beispiele deuten auf die Existenz einer irgendwie gearteten Struktur hin, in der sich der Torus von der Sphäre unterscheidet,

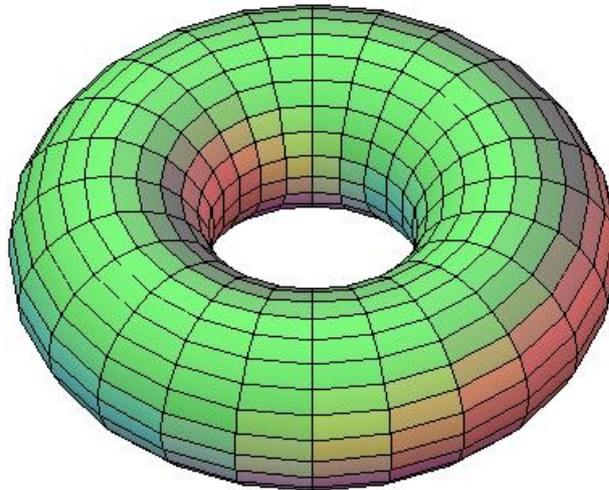


Abbildung 2: Ein Torus

und in der sich die Stadt Königsberg mit ihren Brücken zu Eulers Zeiten von der jetzigen Stadt Kaliningrad mit ihren Brücken unterscheidet (heute ist in Kaliningrad, dem früheren Königsberg, ein Weg möglich, der einmal über jede Brücke führt).

Diese Struktur muss sehr abstrakt und nebulös sein, denn kleine Veränderungen oder Verschiebungen oder Deformationen der genannten Gebilde verändern die relevante Eigenschaft nicht. Beim Brückenproblem ist nur wichtig, welche Stadtteile und Inseln mit wievielen Brücken verbunden sind, aber nicht, wo die Brücken genau liegen, geschweige denn, wie lang sie sind oder in welche Richtung sie führen. Bei der Euler-Charakteristik von Torus und Sphäre spielt es keine Rolle, ob die Flächen schön glatt und symmetrisch sind oder ob sie verzerrt und verbeult sind; deshalb kann man die Sphäre auch ruhig durch etwas kantiges wie ein Tetraeder ersetzen, ohne die Euler-Charakteristik zu verändern.

Was man aber nicht machen darf, ist die Gebilde zu zerschneiden oder aufzureißen, oder Löcher in sie zu bohren. Dürfte man das tun, so könnte man Brückenverbindungen in Königsberg trennen und zwischen anderen Stadtteilen aufbauen, oder man könnte die geschichtlich stattgefundenen Zerstörungen und Neubauten nachmachen und das Brückensystem des 18. Jahrhunderts in das heutige verwandeln, oder man könnte zwei Löcher in die Sphäre schneiden und die Ränder miteinander verkleben, so dass ein Torus

entsteht.

Die zulässigen Veränderungen, die die (uns noch nicht bekannte) „topologische“ Struktur nicht verändern, sind also allmähliche „kontinuierliche“ Verzerrungen ohne Risse, etwa so, als wären die untersuchten Gebilde nicht rigide, sondern aus Gummi gebaut, das sich stauchen und dehnen kann. In der Tat wird Topologie im Englischen oft popularisierend als *rubber sheet geometry* beschrieben.

Aus dieser Beschreibung kann man erahnen, auf was es wirklich ankommt. Die topologische Struktur betrifft die Art, wie die einzelnen Punkte des Gebildes *mit ihren Nachbarn* verklebt sind; sie betrifft gewissermaßen den Kitt, der den „Punktstaub“ des Objekts zu einer Gesamtheit verbindet, die zwar dehnbar und verzerrbar ist, aber nicht auseinander reißt.

Hier spielt wirklich die lokale Struktur eine sehr große Rolle, und topologische Begriffe und Aussagen nehmen oft Bezug auf „benachbarte Punkte“, ohne dass das „benachbart sein“ auf einer tatsächlichen Entfernungsmessung beruhen kann. Aus diesem Grund macht es keinen Sinn, von zwei partikulären Punkten zu behaupten, sie seien benachbart oder nicht. Der Begriff „benachbart“ macht nur in *quantisierten*² Aussagen Sinn, die für einen Punkt x behaupten, dass *alle zu x genügend nahe* Punkte eine gewisse Eigenschaft haben, oder dass es *beliebig nahe zu x* Punkte mit einer gewissen Eigenschaft gibt.

Ein typisches Beispiel einer solchen Aussage ist die Definition der Stetigkeit, losgelöst von der rigiden Struktur, die von der euklidischen Entfernung im \mathbf{R}^n gegeben ist. Ohne genaue Entfernungsangaben kann man Stetigkeit wie folgt definieren:

Eine Funktion $f: X \longrightarrow Y$ heißt **stetig** bei $a \in X$, wenn die Bilder $f(x)$ der Punkte von X *beliebig nahe* bei $f(a)$ liegen (d. h., egal wie nahe man voraussetzt), wenn x *genügend nahe* bei a liegt.

Natürlich ist das noch keine richtige Definition, weil wir nicht gesagt haben, was „beliebig nahe“ und „genügend nahe“ heißen soll oder wie man eine bestimmte Nähe voraussetzen oder nachprüfen kann, aber wir werden, wenn wir richtig mit der Vorlesung beginnen, eine Präzisierung dieser Begriffe geben, und dann werden wir eine echte Definition der Stetigkeit haben, die ohne die aus der *Analysis I* bekannten ε und δ auskommt.

Auf ähnliche Weise kann man mit der topologischen Struktur verwandte Begriffe wie Folgenkonvergenz definieren. Wir sehen also, dass auch die

²*Quantisierte* Aussagen sind solche, in denen die **Quantoren** „es gibt“ oder „für alle“ vorkommen.

Grundbegriffe der Analysis, wie Cauchy sie begründet hat, eigentlich *topologische* Begriffe sind, weshalb Sie auch in den Anfängervorlesungen *Analysis I–III* schon mit etwas Topologie Bekanntschaft gemacht haben.

Betrachtet man die Topologie aus einem anderen Blickwinkel, so stellt man fest, dass die genannten aus der Cauchyschen Analysis stammenden Ideen geradezu charakteristisch für die Topologie sind.

In der Mathematik untersuchen wir gewisse mathematische Objekte versehen mit einer bestimmten mathematischen Struktur, sowie die Abbildungen, die diese Strukturen respektieren oder unter denen die Strukturmerkmale erhalten bleiben.

Aus psychologischen Gründen neigen wir sehr stark dazu, die *Objekte* mathematischer Theorien (Gruppen, Körper, Vektorräume, topologische Räume, Flächen, Kurven, Wahrscheinlichkeitsräume usw.) als den eigentlichen Gegenstand der Mathematik zu betrachten, und die strukturerhaltenden Abbildungen als eine Beigabe zu sehen, die nur den Zweck hat, den Vergleich verschiedener Objekte zu ermöglichen.

Aber es gibt auch die entgegengesetzte und zwar ungewohntere, aber elegantere und oft ergiebigere Sichtweise, die die strukturerhaltenden Abbildungen in den Vordergrund rückt und sie zu den eigentlichen Trägern der Struktur macht. Oft liefert diese Auffassung wesentliche Einsichten, die die Objekte nicht so klar zur Schau tragen.

Ein frühes Beispiel dafür ist Felix Kleins *Erlanger Programm*. Klein schlug in seiner Antrittsvorlesung in Erlangen 1872 vor, Geometrien dadurch erfassbar und klassifizierbar zu machen, dass man anstelle der wichtigen *Gegenstände* der Geometrie (wie Geraden, Kreise usw.) die Gruppen der Transformationen betrachtet, unter denen für eine bestimmte Geometrie diese Begriffe invariant bleiben. Für die euklidische Geometrie der Ebene oder des Raumes ist die entsprechende charakteristische Transformationsgruppe die Gruppe der *Bewegungen*, also der Verknüpfungen von Drehungen, Spiegelungen und Translationen.

Diese moderne Idee von Klein, Lie und anderen war sehr produktiv und hat zu einer rasanten Entwicklung in der Geometrie geführt.

Wenn man die *Topologie* auf die gleiche Weise beschreiben will, so sind die charakteristischen Abbildungen eines topologischen Raumes die *stetigen Abbildungen* des Raumes in sich. In dieser Sichtweise ist Topologie also die Theorie der *Stetigkeit* (was ihre Wichtigkeit in der gesamten Mathematik unterstreicht).

In letzter Instanz reicht aber keiner der beiden Zugänge zu einer neuen mathematischen Theorie alleine aus, um die Theorie adäquat zu beschreiben oder verständlich zu machen. Die strukturerhaltenden Abbildungen festzulegen, ohne zu sagen, welche Struktur von ihnen eigentlich erhalten wird, kann

tatsächlich formal ausreichen, um die Merkmale der Struktur eindeutig zu bestimmen, aber es ist keine große Hilfe für den Lernenden, um zu verstehen, worin genau die Struktur besteht. Die Angabe der Bewegungsgruppe eines euklidischen Raumes kann benutzt werden, um festzulegen, was Geraden, Kreise usw. sind, aber warum diese Begriffe wichtig sind und wie man sie „verinnerlichen“ kann wird durch diese Beschreibung nicht klar.

Deshalb ist eine „Hybridstrategie“ die beste: man definiert die wichtigen *Objekte* und gibt eine objektbezogene Beschreibung der Struktur, um die es gehen soll; man definiert anhand der Objekte, welche Abbildungen als strukturerhaltend gelten; aber anschließend, wenn man die Grundlagen der Theorie schon verstanden hat, kann es tatsächlich produktiver sein, neue Instanzen der Struktur durch die direkte Angabe der dafür relevanten strukturerhaltenden Abbildungen festzulegen.

So werden wir auch in der Topologie vorgehen: wir definieren in Kapitel 1 zuerst, was ein topologischer Raum ist, anschließend, was die strukturerhaltenden Abbildungen sind (in der Topologie *heißen* die strukturerhaltenden Abbildungen *stetig*), und später können wir weitere topologische Räume durch die Angabe der auf ihnen definierten oder in sie abbildenden stetigen Funktionen eindeutig bestimmen.

Ich hoffe, dass Sie jetzt eine kleine Vorstellung davon haben, worüber es in der Topologie geht. Natürlich gehört viel mehr zur Topologie, als in diesem kurzen Blick durch die Eingangstür sichtbar wurde, oder als man in einer einsemestrigen Vorlesung behandeln kann. Deshalb möchte ich noch ein bisschen mehr dazu sagen, welche weiterführenden Themen es in der Topologie gibt und was genau der Gegenstand dieser Vorlesung sein wird.

Die Struktur, die wir oben als *die topologische Struktur* beschrieben haben, ist ziemlich abstrakt und sehr einfach. Man muss zwar mit den Grundlagen beginnen, aber wenn man nur auf die Grundstruktur Bezug nimmt, lassen sich nur ziemlich allgemeine Aussagen herleiten; erst eine Spezialisierung durch Hinzunahme weiterer Strukturmerkmale erlaubt tiefere und interessantere Ergebnisse.

Es gibt also zunächst ein elementares Grundgebiet in der Topologie, das sich direkt aus den Grunddefinitionen heraus herleitet. Weil die hier eingehende Struktur im Wesentlichen nur durch gewisse Familien von Mengen bestimmt ist (deren Elemente man aus dem geometrischen Verständnis heraus *Punkte* nennt), heißt dieser Zweig der Topologie die *mengentheoretische Topologie* (auf englisch *point set topology*). Es gibt tatsächlich einige sehr wichtige Begriffe, die schon in diesem einfachen und allgemeinen Rahmen erscheinen, aber diese Theorie tritt trotzdem schnell an ihre Grenzen, in dem Sinne, dass die für die gesamte Mathematik wichtigsten Ergebnisse der mengentheoretischen Topologie klassisch und schon länger bekannt sind,

so dass dieses Gebiet nicht mehr zu den Brennpunkten der mathematischen Forschung gehört.

Heute noch von sehr großem Interesse sind eher die Spezialgebiete der Topologie. Sie kann man in zwei Gruppen einteilen.

Die mengentheoretische Topologie bezieht sich auf die reinste und spartanischste topologische Struktur, die es gibt: im Wesentlichen (bis auf wichtige Beispielsklassen) nur die „Nachbarschaftsstruktur“ und sonst nichts. Die Einfachheit der Struktur kann es sehr schwierig machen, interessante neue Sätze zu beweisen.

Ein produktiver Gedanke, um die Theorie lebendiger und für wichtige Probleme auch in den Naturwissenschaften relevanter zu machen, besteht darin, die topologische Struktur mit weiteren Strukturmerkmalen zu ergänzen, was im Wesentlichen auch bewirkt, dass man sich auf eine Klasse spezieller aber weitverbreiteter topologischer Räume einschränkt. Diese können durch ihr Erscheinen in einer wichtigen Anwendung der Topologie vorgegeben sein (das ist der Fall, zum Beispiel, für die Differentialtopologie, in der die Räume eine differenzierbare Struktur haben und Anwendungen auch in der Physik haben, oder für die Theorie der Funktionenräume oder der topologischen Vektorräume, die wichtige Gegenstände der Funktionalanalysis sind) oder sie können einfach als eine Klasse „alltäglicher“ Räume gewählt werden, um gewisse Pathologien auszuschließen und somit Sätze leichter beweisbar zu machen (das gilt unter anderem für die Theorie der CW-Komplexe, Räume, die aus Scheiben des \mathbf{R}^n zusammengeklebt sind, oder für die PL-Topologie, deren Gegenstände eine lokale affine Struktur haben). Solche Spezialisierungen bilden wichtige eigenständige Gebiete der Mathematik.

Es gibt aber auch eine andere Art der Spezialisierung, die darin besteht, dass man *Hilfsmittel aus anderen Gebieten der Mathematik* hinzuzieht, um rein topologische Probleme zu lösen. Eines der wichtigsten topologischen Probleme ist das *Klassifikationsproblem*, nämlich das Problem festzustellen, wann zwei topologische Räume (die oberflächlich betrachtet sehr verschieden aussehen können) die gleiche topologische Struktur haben. Die intuitive „Flexibilität“ der topologischen Struktur macht dieses Problem schwer lösbar.

Die mengentheoretische Topologie bietet einige Mittel (die wir auch besprechen werden) an, um dieses Problem anzugehen, aber sie reichen nur in wenigen, einfachen Fällen aus. So kann man mit „hauseigenen“ topologischen Mitteln etwa ein Intervall in \mathbf{R} von einem Kreis unterscheiden, aber schon beim Vergleich einer Kreisscheibe mit einer Sphäre wird es viel schwerer, bei Sphäre und Torus schwieriger noch und mit rein topologischen Mitteln kaum noch zu bewältigen.

Eine erstaunliche Idee (entliehen aus der Analysis) leistet hier Abhilfe: genauso wie man aus der *linearen* (und deshalb leicht rechnerisch zu hand-

habenden) totalen Ableitung einer differenzierbaren Abbildung sehr viel Information über die differenzierbare Abbildung selber gewinnen kann, die mit analytischen Methoden schwer zugänglich ist, kann man, sogar auf mehrere verschiedene Weisen, topologischen Räumen algebraische Objekte (Gruppen oder Ringe) zuordnen, die die topologische Struktur zwar nur ungenau widerspiegeln, aber dafür ermöglichen, topologische Fragen in vielen Fällen durch eine einfache algebraische Berechnung zu entscheiden.

Diese äußerst produktive und erfolgreiche Idee ist der Gegenstand der **algebraischen Topologie**; auch dieses Gebiet hat Anwendungen in vielen anderen Teilen der Mathematik.

Die jetzige Vorlesung behandelt zunächst die wichtigsten allgegenwärtigen Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie, aber verzichtet auf eine weiterführende Darstellung einiger speziellerer Themen. Dadurch bleibt Zeit übrig für einen kurzen Einblick in den am leichtesten zugänglichen Teil der algebraischen Topologie, nämlich in die **Homotopietheorie**. Auch sie tritt außerhalb der Topologie in Erscheinung; zum Beispiel ist die **Umlaufzahl** einer Kurve um einen Punkt in der komplexen Ebene, die in der komplexen Integration eine wichtige Rolle spielt, ein homotopietheoretischer Begriff.

Im kommenden Wintersemester schließt sich als *Topologie II* eine detailliertere Vorlesung über algebraische Topologie an die jetzige *Einführung in die Topologie* an. In dieser Fortsetzung wird es um den zweiten wichtigen Zweig der algebraischen Topologie gehen, nämlich um die **Homologietheorie**.

Dieses Skriptum bietet Ihnen eine genaue Vorlage zum Verständnis der Vorlesung, aber wenn Sie später oder schon während der Vorlesung Ihre Kenntnisse vertiefen wollen und ein bisschen weiter blicken wollen, als es in der beschränkten Zeit einer Vorlesung möglich ist, mögen Ihnen die folgenden Empfehlungen eine Hilfe sein bei der Suche nach passender Ergänzungsliteratur:

Literatur

- [1] James R. Munkres. *Topology—A First Course*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1974. ISBN: 0-139-25495-1.
- [2] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2000, internationale Taschenbuchausgabe erschienen Juli 2003. ISBN: 0-13-178449-8, € 76,99.
- [3] Th. Camps, S. Kühling, G. Rosenberger. *Einführung in die mengentheoretische und die algebraische Topologie*. Berliner Studienreihe zur Mathematik Band 15, Heldermann Verlag, Lemgo 2006. Neues Buch

- von Dortmunder Topologen, den Themen und dem Aufbau unserer Vorlesung sehr gut angepasst. ISBN: 3-88538-115-X, € 36,00.
- [4] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 8. Auflage 2005. ISBN: 3-540-21393-7, € 19,95.
- [5] Allan J. Sieradski. *An Introduction to Topology and Homotopy*. PWS-KENT Publishing Company, Boston 1991. ISBN: 0-534-92960-5.
- [6] J. Nagata. *Modern General Topology*. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford 1985, € 202,90.
- [7] John L. Kelley. *General Topology*. D. Van Nostrand, Princeton-Toronto-London-New York 1955 Nachdruck als Springer Graduate Texts in Mathematics 27. ISBN: 0-387-90125-6, € 56,50.
- [8] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage 2001. ISBN: 3-540-67790-9, € 24,95.
- [9] H. Schubert. *Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart 1975.
- [10] Sze-Tsen Hu. *Introduction to General Topology*. Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam 1966.
- [11] Michael Gemignani. *Elementary Topology*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1967 Nachdruck bei Dover Books 1990. ISBN: 0-486-66522-4, € 12,95.
- [12] Erich Ossa. *Topologie*. Vieweg Studium Nr. 42, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1992. ISBN: 3-528-07242-3, € 27,90.

Kapitel 1

Topologische Räume

Die Objekte, die man in der Topologie untersucht, heißen *topologische Räume*, und wie wir in der Einleitung gewarnt haben ist ihre heutzutage übliche (und einfachste) Definition etwas abstrakt; ihre intuitive Bedeutung ist nicht ganz leicht zu erfassen. Wir wollen uns deshalb langsam an diese Definition heranarbeiten, ausgehend von dem Grundverständnis der Topologie als die „Lehre der Nähe“, wie wir sie in der Einleitung charakterisiert haben.

Viele Autoren erleichtern den Einstieg in die Topologie, indem sie mit einer einfach verständlichen Version beginnen, die auf Entfernungsmessung beruht. Die topologischen Räume, die man auf diese Weise erhält, werden uns als wichtige Beispiele dienen, aber die Stärke der topologischen Sichtweise liegt ja gerade darin begründet, dass sie Geometrie ohne Entfernungsmessung erfassbar macht, und deshalb werden wir es vorziehen, schon bei der Einführung der Grundstruktur „topologisch“ zu denken und Mittel zu suchen, um den Begriff der Nähe völlig ohne Messung auszudrücken.

Wir hatten in der Einleitung erläutert, dass eine exakte Messung von Entfernungen nicht nötig ist, wenn wir nur quantisierte Aussagen über Nähe benötigen und nicht über Nähe in Verbindung mit einzelnen Punktpaaren sprechen wollen. Aus diesem Gedanken heraus lässt sich schnell die Definition einer zu unserem Zweck genau passenden Struktur gewinnen.

Wir formulieren diese Definition zunächst intuitiv. Wenn wir eine Menge von Punkten mit einer Struktur versehen wollen, die es erlaubt, über alle Punkte zu sprechen, die *genügend nahe* zu einem gegebenen Punkt x sind, oder zu sagen, dass für Punkte *beliebig nahe* zu x etwas gilt, dann können wir das tun, wenn wir *durch geeignete Mengen* beschreiben, welche Punkte „genügend nahe“ zu x sind.

Da es bei jeder Aufgabe verschieden strenge Auffassungen dafür geben kann, was „genügend nahe“ ist, wovon keine gegenüber den anderen bevorzugt sein soll, und da aus diesem Grund sinnvolle wahre topologische Aussagen für

alle solche Auffassungen gelten sollen, reicht eine einzige Menge nicht aus, um „genügend nahe zu x “ zu beschreiben, sondern wir müssen den Begriff durch eine Familie von Mengen ausdrücken, die alle solche gültigen Auffassungen erfasst.

Unser Modell für diesen Begriff wird etwas einfacher, wenn wir nicht den Anspruch haben, für eine bestimmte Auffassung von Nähe *genau* angeben zu wollen, welche Punkte in dieser Auffassung nahe zu x liegen *und welche nicht*. Die Bedeutung der anzugebenden Mengen A ist weniger streng zu sehen; jede dieser Mengen soll nur die Eigenschaft haben, dass für eine akzeptierte Fassung des Kriteriums alle Punkte genügend nahe bei x zu A gehören. Die „nahen“ Punkte müssen aber A nicht ausfüllen — A darf noch weitere, „überflüssige“ Punkte enthalten.

Mathematisch erfassen wir den intendierten Begriff der Nähe durch die Familie *aller* Mengen A , die die obige Eigenschaft haben. Was für uns eine erlaubte Auffassung von „genügend nahe bei x “ ist, wird durch diese Mengenfamilie genau umrissen.

Die Mengen in dieser Familie sind als „Nachbarschaften“ von x zu verstehen, und weil sie verschieden groß sein können und es verschiedene Auffassungen von „genügend nahe“ gibt, gibt es auch engere und breitere Nachbarschaften, sozusagen.

Diese Erklärung ist schon die Definition von topologischer Struktur, die wir suchen, bis auf die unwichtige sprachliche Tatsache, dass die betreffenden Mengen auf deutsch nicht „Nachbarschaften“, sondern **Umgebungen** genannt werden. Auf Englisch heißen sie aber tatsächlich **neighborhoods**.

Definition 1.1 Sei X eine Menge.

- a) Sei $x \in X$. Ein **Umgebungssystem** für x ist eine nichtleere Familie \mathcal{N}_x von Teilmengen von X , so dass
- i) für jede Menge $A \in \mathcal{N}_x$ gilt $x \in A$;
 - ii) für jede Menge $A \in \mathcal{N}_x$ und für jede Menge B mit $A \subseteq B \subseteq X$ gilt $B \in \mathcal{N}_x$;
 - iii) wenn A und $B \in \mathcal{N}_x$, dann ist auch $A \cap B \in \mathcal{N}_x$.

Die Mengen A aus \mathcal{N}_x heißen **Umgebungen** von x .

- b) Sei

$$\mathcal{N} = \{ \mathcal{N}_x \mid x \in X \}$$

eine durch die Punkte von X indizierte Familie von Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, so dass für jedes $x \in X$ die zu x gehörige Familie \mathcal{N}_x aus \mathcal{N} ein Umgebungssystem für x ist.

Die Familie \mathcal{N} heißt **kohärent**, wenn

- iv) für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung $A \in \mathcal{N}_x$ es eine Umgebung $B \in \mathcal{N}_x$ gibt, so dass

$$A \in \mathcal{N}_y \quad \text{für jedes } y \in B.$$

Wir sagen dazu auch, dass die Umgebungssysteme \mathcal{N}_x aus \mathcal{N} **kohärent** sind.

Eine kohärente Familie \mathcal{N} von Umgebungssystemen \mathcal{N}_x der Punkte von X nennt man ein (**globales**) **Umgebungssystem auf X** .

Definition 1.2 (vorläufig) Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X versehen mit einem globalen Umgebungssystem \mathcal{N} .

Hier sind noch einige Erläuterungen erforderlich. In Bedingungen 1.1 i)–iv) werden einige wichtige intuitive Vorstellungen über das Verhalten von Umgebungen und über die Bedeutung des Begriffs „genügend nahe“ festgehalten, die vielleicht nicht unmittelbar klar sind.

Bedingung 1.1 a) i) ist einleuchtend; eine Umgebung von einem Punkt soll den Punkt selber auch enthalten, denn er ist sicher *immer* genügend nahe zu sich.

Bedingung ii) drückt nur aus, dass eine Umgebung alle „genügend nahen“ Punkte zu x enthalten muss, aber auch weitere Punkte enthalten darf. Macht man die Menge noch größer, d. h., fügt man noch weitere Punkte hinzu, enthält sie immer noch die alten Punkte und somit immer noch im bisherigen Sinn alle Punkte genügend nahe zu x . Deshalb sind Obermengen von Umgebungen von x wieder Umgebungen von x .

Bedingung iii) spiegelt die Vorstellung wider, dass die Konjunktion (also das Und) von zwei akzeptierten Auffassungen von „genügend nahe“ auch eine gültige Auffassung davon ist. Wenn A alle Punkte enthält, die in einer Auffassung genügend nahe bei x liegen, und wenn B alle Punkte enthält, die in einer anderen Auffassung genügend nahe bei x liegen, dann gehören die Punkte, die in beiden Sinnen „genügend nahe“ bei x sind, zu beiden Mengen A und B , also auch zum Durchschnitt.

Die Kohärenzbedingung iv) will sagen, dass Punkte nahe zu einem Punkt *nahe bei x* auch nahe zu x sind. Genauer: wenn eine Menge A alle Punkte enthält, die in einer gewissen Nähe zu x liegen, dann gilt für alle Punkte y nahe genug bei x und für alle Punkte z genügend nahe zu y , dass z immer noch in der gewissen Nähe zu x liegt und deshalb zu A gehört.

Also: A enthält alle Punkte genügend nahe zu Punkten genügend nahe bei x und ist deshalb eine Umgebung nicht nur von x , sondern auch von allen Punkten genügend nahe bei x .

„Nähe zu x “ betrifft zunächst nur den einen Punkt x und bestimmt eine *lokale Struktur* um x . Diese könnte von Punkt zu Punkt stark variieren, so dass die lokalen Strukturen keine sinnvolle Struktur auf dem ganzen Raum ergäben. Aber die Kohärenzbedingung gleicht die lokalen Strukturen benachbarter Punkte aneinander an und macht sie miteinander verträglich. Erst auf Grund der Kohärenzbedingung fügen sich die lokalen Strukturen zu einer globalen Struktur zusammen.

Umgebungssysteme beschreiben genau das, was wir unter einer „topologischen“ Struktur verstehen wollten, und mit ihrer Hilfe können wir wie in Definition 1.2 definieren, was ein „topologischer Raum“ ist.

Aber obwohl sie unsere Intention genau wiedergibt, ist diese Definition nicht sehr befriedigend und wir werden sie nur provisorisch benutzen, bis wir etwas Besseres haben. Umgebungssysteme sind sehr klobig und unhandlich, die sie charakterisierenden Eigenschaften 1.1 i)–iv) sind kompliziert und der Umgang mit ihnen ist nicht ganz einfach.

Schön wäre es, wenn wir *die gleiche Struktur* anders und einfacher erfassen könnten. Und das geht tatsächlich! Es gibt eine elegante Umformulierung dieser Ideen, die zu einer einheitlichen und kurzen Definition führt (ohne Zergliederung in lokale punktbezogene und globale Bedingungen), mit der es sich wesentlich bequemer und unkomplizierter weiterarbeiten lässt, als mit Umgebungssystemen. Diese elegantere Fassung ist heute die Standarddefinition der topologischen Struktur und wird auch unsere Grunddefinition sein.

Dabei ändern wir nichts an unserer Auffassung dessen, was ein topologischer Raum ist. Nur die Beschreibung wird verbessert; die neue Definition wird, wie wir in Satz 1.13 zeigen werden, äquivalent zur alten sein. Und es wird sogar Situationen geben, für die die alte Definition besser und bequemer ist, so dass wir sie nicht ganz aus den Augen verlieren wollen.

Der Übergang von Definition 1.1 zu der einfacheren Version wird begünstigt durch die Kohärenzbedingung. In Definition 1.1 wird eine Beziehung zwischen Mengen A und Punkten x beschrieben, nämlich die Beziehung, dass A eine *Umgebung* von x ist, wobei in unserer Vorstellung (wie auch im Aufbau der Definition) der Punkt die führende Rolle hat — wir fixieren uns auf *einen* Punkt x , und interessieren uns dafür, welche *Mengen* Umgebungen dieses Punktes sind.

Wir machen aber eine interessante Entdeckung, wenn wir die Rollen vertauschen und zu *einer* vorgegebenen Menge A fragen, welche *Punkte* diese Menge als Umgebung haben, d. h., wenn wir die Umgebungsrelation umkehren.

Definition 1.3 Sei X ein topologischer Raum mit dem Umgebungssystem \mathcal{N} , und sei $A \subset X$ eine Teilmenge von X und $x \in X$.

Wir nennen x einen *inneren Punkt* von A , wenn A eine Umgebung von x ist. Die Menge

$$\overset{\circ}{A} := A^\circ := \{x \in X \mid A \in \mathcal{N}_x\} \quad (1.1)$$

der inneren Punkte von A heißt schlicht das *Innere* von A .

Das Innere einer Menge ist in einem gewissen Sinne die *Dualisierung* des Umgebungssystems eines Punktes. So wie die Umgebungssysteme aller Punkte zusammengenommen eine topologische Struktur beschreiben, tun es auch die Inneren aller Mengen zusammengenommen. Das ist einfach die „duale“ Beschreibung der selben Struktur, aber sie erweist sich als viel einfacher als die ursprüngliche Beschreibung.

Um das besser zu verstehen untersuchen wir die Grundeigenschaften der Inneren von Mengen und der Familie der Inneren aller Mengen.

Bemerkung 1.4 Sei X ein topologischer Raum mit Umgebungssystem \mathcal{N} .

- a) Für jede Menge $A \subseteq X$ gilt $A^\circ \subseteq A$, denn wenn $x \in A^\circ$, dann ist $A \in \mathcal{N}_x$, woraus aus Bedingung 1.1 a) i) folgt, dass $x \in A$.
- b) Es ist nicht gesagt, dass eine gegebene Menge A überhaupt Umgebung irgendeines Punktes sein muss. In anderen Worten, das Innere einer Menge kann leer sein.

Das Innere der leeren Menge ist wegen Teil a) sogar sicher leer.

Wegen der Kohärenzbedingung hat das Innere einer Menge eine schöne, symmetrische Eigenschaft:

Lemma 1.5 Sei X ein topologischer Raum mit dem Umgebungssystem \mathcal{N} , und sei $A \subset X$ eine Teilmenge von X . Dann ist A° eine Umgebung jedes seiner Punkte.

In anderen Worten, es gilt immer

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ. \quad (1.2)$$

Beweis. Sei $x \in A^\circ$. Dann ist A eine Umgebung von x , und die Kohärenzbedingung 1.1 b) iv) besagt, dass es eine Umgebung B von x gibt, so dass A eine Umgebung jedes Punktes von B ist.

Nach Definition des Inneren bedeutet das, dass $B \subseteq A^\circ$. Weil aber B eine Umgebung von x ist, folgt aus Bedingung 1.1 a) ii), dass auch A° eine Umgebung von x ist, was wir zeigen wollten. ■

Lemma 1.5 zeigt, dass es Mengen U gibt, die Umgebungen jedes ihrer Punkte sind (und die somit ihr eigenes Inneres sind). Ferner, weil das Innere einer Menge immer diese Eigenschaft hat, und weil die Relation innerer Punkt zu sein die Umkehrung der Umgebungsrelation ist, *bestimmen die Mengen mit der gerade genannten Eigenschaft die Umgebungsrelation eindeutig.*

Das präzisieren wir in den nächsten Definitionen und Sätzen, die gleichzeitig die gesuchte einfachere Charakterisierung topologischer Struktur beinhalten.

Definition 1.6 Sei X ein topologischer Raum mit dem Umgebungssystem \mathcal{N} . Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, wenn

$$U = \overset{\circ}{U}, \quad (1.3)$$

in anderen Worten, wenn die Menge U eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Bemerkung 1.7 Aus den Beziehungen (1.3) und (1.2) sieht man sofort, dass eine Menge U genau dann offen ist, wenn es eine Menge gibt, deren **Inneres** U ist.

Die Familie der offenen Mengen (oder gleichbedeutend, die Familie der Inneren aller Mengen) hat folgende wichtige Grundeigenschaften.

Lemma 1.8 Sei X ein topologischer Raum mit dem Umgebungssystem \mathcal{N} und sei \mathcal{T} die Familie aller offenen Teilmengen von X . Dann gilt folgendes:

- a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
- b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ eine beliebige Familie von offenen Mengen. Dann ist

$$\bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \in \mathcal{T}.$$

- c) Seien $U \in \mathcal{T}$ und $V \in \mathcal{T}$. Dann ist $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Beweis. Zu a): Wie in Bemerkung 1.4 b) schon erwähnt ist $\emptyset^\circ = \emptyset$ (also $\emptyset \in \mathcal{T}$).

Nach Definition 1.1 a) ist das Umgebungssystem \mathcal{N}_x eines Punktes x immer eine *nichtleere* Familie von Umgebungen, d. h., jeder Punkt x besitzt mindestens eine Umgebung $A \subseteq X$. Wegen Bedingung 1.1 a) ii) ist dann auch X eine Umgebung von x .

In anderen Worten, X ist eine Umgebung jedes Punktes $x \in X$ und somit ist $X \in \mathcal{T}$.

Zu b): Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ eine beliebige Familie von offenen Mengen und sei

$$x \in V := \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U.$$

Dann gibt es eine Menge $U_0 \in \mathcal{A}$ mit $x \in U_0$. Weil U_0 offen ist, ist U_0 eine Umgebung von x . Nach Bedingung 1.1 a) ii) ist auch die größere Menge V eine Umgebung von x .

In anderen Worten, V ist eine Umgebung jedes seiner Punkte und ist somit offen.

Zu c): Seien U und V offen und sei $x \in U \cap V$. Weil U und V offene Mengen um x sind, sind sie Umgebungen von x . Nach Bedingung 1.1 a) iii) ist auch $U \cap V$ eine Umgebung von x .

Also ist $U \cap V$ eine Umgebung jedes seiner Punkte, und somit offen. ■

Die Eigenschaften aus Lemma 1.8 a)–c) charakterisieren die Familien der offenen Mengen von topologischen Räumen genauso, wie die Bedingungen 1.1 i)–iv) die Umgebungssysteme charakterisieren; in anderen Worten, wir könnten die topologische Struktur auch mit Hilfe dieser Eigenschaften definieren, und das werden wir jetzt tun.

Definition 1.9 Sei X eine Menge. Eine **Topologie** auf X ist eine Familie \mathcal{T} von Teilmengen von X , mit den Eigenschaften

- a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
- b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ eine beliebige Familie von offenen Mengen. Dann ist

$$\bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \in \mathcal{T}.$$

- c) Seien $U \in \mathcal{T}$ und $V \in \mathcal{T}$. Dann ist $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Die Elemente U von \mathcal{T} werden die **offenen Mengen** der Topologie \mathcal{T} genannt.

Die drei Bedingungen a)–c) nennt man oft die „**Axiome der Topologie**“.

Bemerkung 1.10 In Definition 1.9 c) wird nur verlangt, dass in einer Topologie der Durchschnitt von *zwei* offenen Mengen wieder offen ist.

Daraus folgt aber sehr einfach durch mathematische Induktion, dass jeder *endliche* Durchschnitt von offenen Mengen wieder offen ist (auch wenn mehr als zwei Mengen daran beteiligt sind).

Man kontrastiere das mit Bedingung 1.9 b): beliebige, auch *unendliche* Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen.

Für Durchschnitte gilt das nicht, wie wir bald an Beispielen sehen werden.

Wir haben in Definition 1.6 gesehen, wie man aus einem Umgebungssystem eine Topologie gewinnen kann. Das geht auch umgekehrt:

Lemma und Definition 1.11 Sei X eine Menge und sei \mathcal{T} eine Topologie auf X . Sei $x \in X$ und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge von X .

Wir nennen A eine **Umgebung von x** (in der Topologie \mathcal{T}), wenn es eine Menge $U \in \mathcal{T}$ gibt mit

$$x \in U \subseteq A. \quad (1.4)$$

Die Familie \mathcal{N}_x aller Umgebungen von x bildet im Sinne von Definition 1.1 a) ein Umgebungssystem für x . Die Familie

$$\mathcal{N} = \{ \mathcal{N}_x \mid x \in X \}$$

dieser Umgebungssysteme ist kohärent und bildet somit im Sinne von Definition 1.1 b) ein globales Umgebungssystem auf X .

Wir nennen dieses Umgebungssystem das **Umgebungssystem der Topologie \mathcal{T}** .

Beweis. Wir müssen zuerst für die Familie \mathcal{N}_x der Umgebungen von x im Sinne von Lemma und Definition 1.11 die Eigenschaften 1.1 a) i)–iii) nachweisen und anschließend die Kohärenz der Familie der lokalen Umgebungssysteme beweisen.

Aber noch bevor wir das tun, müssen wir sicherstellen, dass, wie in Definition 1.1 a) gefordert, die Familien \mathcal{N}_x alle nichtleer sind! Das stimmt aber, weil $X \in \mathcal{T}$ und deshalb X nach (1.4) eine Umgebung von jedem Punkt ist. Das heißt, für jedes $x \in X$ gilt

$$X \in \mathcal{N}_x \neq \emptyset.$$

Bedingung 1.1 a) i) (dass x ein Element jeder seiner Umgebungen ist) ist sofort klar aus der definierenden Eigenschaft (1.4), und auch Bedingung 1.1 a) ii) folgt sofort aus dieser Formel, denn wenn A eine Umgebung von x ist und $B \supseteq A$, dann gibt es eine offene Menge U mit

$$x \in U \subseteq A \subseteq B,$$

so dass auch B eine Umgebung von x ist.

Für Bedingung 1.1 a) iii), seien A und B Umgebungen von x . Dann gibt es offene Mengen U und $V \in \mathcal{T}$ mit

$$x \in U \subseteq A \quad \text{und} \quad x \in V \subseteq B.$$

Wegen Bedingung 1.9 c) ist auch $U \cap V \in \mathcal{T}$ und wir haben

$$x \in U \cap V \subseteq A \cap B,$$

was besagt, dass auch $A \cap B$ eine Umgebung von x ist.

Nun zum Beweis von Bedingung 1.1 b) iv): Sei $x \in X$ und sei A eine Umgebung von x . Dann gibt es eine offene Menge U mit

$$x \in U \subseteq A.$$

Nach Definition ist U selber eine Umgebung von x , und weil U offen ist, ist A eine Umgebung von jedem Punkt von U .

Das ist aber gerade die Kohärenzbedingung, mit U in der Rolle der Umgebung B in Bedingung 1.1 b) iv). ■

Bemerkung 1.12 Aus der definierenden Eigenschaft (1.4) für die Umgebungen einer Topologie ist sofort klar, dass *eine offene Menge U eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist*, im Sinne von Lemma und Definition 1.11.

Dass Topologien wirklich die gleiche Struktur beschreiben, wie Umgebungssysteme, ist der Inhalt des folgenden, jetzt sehr einfach zu beweisenden Satzes.

Satz 1.13 Sei X eine Menge.

- a) Sei \mathcal{N} ein globales Umgebungssystem auf X . Dann bilden die offenen Mengen von \mathcal{N} (im Sinne von Definition 1.6) eine Topologie auf X , die wir die **Topologie des Umgebungssystems \mathcal{N}** nennen.
- b) Sei \mathcal{T} eine Topologie auf X . Dann bilden die in Lemma und Definition 1.11 definierten Familien von Umgebungen der Punkte von x ein globales Umgebungssystem auf X .
- c) Die in Teilen a) und b) definierten Zuordnungen von Topologien zu Umgebungssystemen und von Umgebungssystemen zu Topologien sind Umkehrabbildungen zueinander (und somit Bijektionen).

In anderen Worten, das Umgebungssystem, das von der Topologie eines globalen Umgebungssystems \mathcal{N} bestimmt wird, ist wieder gleich \mathcal{N} , und die Topologie des Umgebungssystems einer Topologie \mathcal{T} ist wieder gleich \mathcal{T} .

Beweis. Die Behauptung von a) wurde schon in Lemma 1.8 bewiesen. Die Behauptung von b) wurde schon in Lemma und Definition 1.11 bewiesen. Wir müssen hier also nur noch Teil c) nachprüfen.

Sei \mathcal{N} ein globales Umgebungssystem auf X und sei \mathcal{T} die von \mathcal{N} bestimmte Topologie, bestehend aus den Teilmengen von X , die Umgebungen jedes ihrer Punkt sind. Sei \mathcal{N}' das von \mathcal{T} bestimmte Umgebungssystem auf X .

Sei $x \in X$. Ist $A \in \mathcal{N}_x$, d. h., ist A eine Umgebung von x im ursprünglichen Umgebungssystem \mathcal{N} auf X , so gehört x per Definition zu A° . Nach Bemerkung 1.7 ist A° eine offene Menge in der Topologie \mathcal{T} , und weil

$$x \in A^\circ \subseteq A,$$

ist A nach Definition auch eine Umgebung von x im Umgebungssystem der Topologie \mathcal{T} . Wir haben also gezeigt, dass

$$\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{N}'_x.$$

Für die andere Inklusion, sei $A \in \mathcal{N}'_x$. Dann gibt es nach Definition von \mathcal{N}' eine Menge $U \in \mathcal{T}$ mit

$$x \in U \subseteq A.$$

Weil U offen in der Topologie von \mathcal{N} ist, ist U nach Definition 1.6 eine \mathcal{N} -Umgebung jedes seiner Punkte, insbesondere auch von x , woraus aus Definition 1.1 a) ii) dann folgt, dass A auch eine \mathcal{N} -Umgebung von x ist.

In anderen Worten, es gilt auch

$$\mathcal{N}'_x \subseteq \mathcal{N}_x,$$

und damit haben wir die Gleichheit.

Wir müssen noch zeigen, dass der Übergang von einer Topologie zu ihrem Umgebungssystem und weiter zur Topologie dieses Umgebungssystems auch die Identität ist, also wieder genau die Topologie liefert, mit der man angefangen hat.

Sei \mathcal{T} eine Topologie, sei \mathcal{N} das von dieser Topologie bestimmte Umgebungssystem und sei \mathcal{T}' seine Topologie.

Für $U \in \mathcal{T}$ besagt schon Bemerkung 1.12, dass U eine \mathcal{N} -Umgebung jedes seiner Punkte ist und deshalb nach Definition 1.6 auch eine offene Menge von \mathcal{T}' ist. Also $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Umgekehrt, wenn $V \in \mathcal{T}'$, dann ist V eine \mathcal{N} -Umgebung jedes seiner Punkte, was nach der Definition von \mathcal{N} bedeutet, dass es für jeden Punkt $y \in V$ eine offene Menge $V_y \in \mathcal{T}$ gibt mit

$$y \in V_y \subseteq V.$$

Daraus ist klar, dass

$$V = \bigcup_{y \in V} V_y,$$

und weil jedes $V_y \in \mathcal{T}$, gilt nach Bedingung 1.9 b), dass auch $V \in \mathcal{T}$.

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ und es gilt die Gleichheit. ■

Die wesentliche Bedeutung von Satz 1.13 ist, dass Umgebungssysteme und Topologien *völlig äquivalente* Beschreibungen der gleichen Art von Struktur sind, d. h., man kann sie gegeneinander austauschen.

Weil aber die Grundeigenschaften 1.9 a)–c) einer Topologie viel einfacher sind, als die Grundeigenschaften 1.1 i)–iv) eines globalen Umgebungssystems, bevorzugt man es in der Regel, Definition 1.9 zur Standarddefinition einer topologischen Struktur zu erheben.

Das wollen wir auch tun und wir revidieren daher unsere schon gemachte Definition eines topologischen Raumes:

Definition 1.14 (endgültig) Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X versehen mit einer Topologie \mathcal{T} , oder etwas formaler, ein geordnetes Paar

$$(X, \mathcal{T}),$$

wo X eine Menge und \mathcal{T} eine Topologie auf X ist.

Im Laufe der Vorlesung werden wir viele Beispiele von topologischen Räumen und von Topologien kennen lernen, und einige Beispiele kennen wir eigentlich schon aus den Anfängervorlesungen Analysis, denn alle Begriffe dort, in denen „ ε und δ “ vorkommen, sind eigentlich topologische Begriffe.

Um überhaupt Beispiele zur Hand zu haben, beginnen wir unsere Bekanntmachung mit der Topologie anhand von drei sehr einfachen Räumen.

Beispiele 1.15 a) Sei X eine Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X , also die Familie *aller* Teilmengen von X , ist eine Topologie auf X .

In dieser Topologie ist *jede* Teilmenge offen.

Die Klauseln von Definition 1.9 sind alle Abschlussbedingungen, d. h., sie verlangen, dass gewisse Mengen zu einer Topologie gehören *müssen*, aber sie schließen keine Mengen aus. Weil jede Teilmenge zu $\mathcal{P}(X)$ gehört, sind diese Abschlussbedingungen alle erfüllt und $\mathcal{P}(X)$ ist tatsächlich eine Topologie.

Die Topologie $\mathcal{P}(X)$ heißt die *diskrete Topologie* auf X .

Dieser Name stammt daher, dass jeder einzelne Punkt für sich schon eine offene Menge bildet und die Familie der offenen Mengen somit den Raum in einzelne, „diskrete“ Punkte zergliedert.

b) Sei X eine Menge. Die Familie

$$\mathcal{T} := \{ \emptyset, X \}$$

ist eine Topologie auf X , genannt die *indiskrete Topologie*.

Sie heißt so, weil alle Punkte nur zu einer einzigen offenen Menge, nämlich X , zusammengefasst sind, und die Topologie überhaupt nicht zwischen verschiedenen Punkten des Raumes unterscheidet.

Es ist sehr leicht, anhand von Definition 1.9 nachzuprüfen, dass \mathcal{T} eine Topologie ist. Axiom 1.9 a) verlangt, dass genau die beiden \mathcal{T} gestaltenden Mengen \emptyset und X zu jeder Topologie gehören müssen. Dieses Axiom ist also erfüllt.

Die anderen beiden Axiome verlangen, dass gewisse Vereinigungen und Durchschnitte von offenen Mengen wieder offen sein müssen. Die einzigen Vereinigungen und Durchschnitte, die man mit den beiden Mengen \emptyset und X bilden kann, sind wieder \emptyset oder X und gehören deshalb zu \mathcal{T} . Also ist \mathcal{T} eine Topologie.

- c) Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **koendlich** oder **kofinit**, wenn ihr Komplement $X \setminus U$ endlich ist. (Man sagt dazu auch, dass U **fast alle** Punkte von X enthält.)

Die Familie

$$\mathcal{K} := \{U \subseteq X \mid U = \emptyset \text{ oder } U \text{ koendlich}\} \quad (1.5)$$

ist eine Topologie auf X , genannt die **koendliche Topologie** oder die **kofinite Topologie**.

Davon kann man sich leicht überzeugen. Die Menge X ist koendlich und die leere Menge wird in (1.5) explizit als offen vorausgesetzt. Jede Obermenge einer koendlichen Menge ist auch koendlich, und jede Vereinigung von koendlichen Mengen ist eine Obermenge von jeder von ihnen und deshalb auch koendlich; deshalb ist eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen.

Das Komplement eines endlichen Durchschnits von koendlichen Mengen ist nach den de Morganschen Regeln die Vereinigung der Komplemente der einzelnen Mengen; wenn diese Komplemente alle endlich sind, dann ist ihre (endliche) Vereinigung immer noch endlich, der endliche Durchschnitt von koendlichen Mengen also wieder koendlich.

Damit gelten für die koendliche Topologie tatsächlich alle drei Axiome der Topologie.

Diese paar Beispiele sind noch nicht sehr aufregend, und vor allem kommen hier etwas „exotische“ Topologien vor, Beispiele, die noch nicht dazu geeignet sind, das Gefühl zu erwecken, dass Topologie etwas Wesentliches ist oder dass die topologische Sichtweise tiefe und sinnvolle Einblicke gewährt. In

dieser Liste fehlen auch Topologien, die wir in Prinzip schon kennen, wie die Topologie der euklidischen Räume \mathbf{R}^n .

Keine Angst! Wir werden sehr bald weitere und interessantere Beispiele geben, aber schon an der kleinen Liste in Beispiel 1.15 lassen sich einige nützliche Grundbegriffe erklären. Es lohnt sich auch, die nächsten Beispiele (darunter auch die Topologie von \mathbf{R}^n) ein bisschen vorzubereiten, um sie einfacher oder in größerer Allgemeinheit einführen zu können. Die Gründe werden wir in Bemerkung 1.17 gleich erklären.

Schon an unseren ersten beiden Beispielen 1.15 a) und b) sieht man, dass eine Menge mehrere verschiedene Topologien tragen kann. Deshalb hätte man gerne eine wenn auch grobe Methode, verschiedene Topologien zu vergleichen.

Definition 1.16 Sei X eine Menge und seien \mathcal{S} und \mathcal{T} Topologien auf X .

Wir sagen, dass \mathcal{T} *feiner* ist als \mathcal{S} , oder gleichbedeutend, dass \mathcal{S} *größer* ist als \mathcal{T} , wenn

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T},$$

in anderen Worten, wenn jede Menge, die in \mathcal{S} offen ist, auch in \mathcal{T} offen ist (aber \mathcal{T} vielleicht zusätzliche offene Mengen hat).

Wenn man die (etwas ungenaue) Vorstellung hat, dass eine Topologie einen Raum in kleine Bereiche „unterteilt“ oder „zergliedert“, dann ist diese Aufteilung bei einer feineren Topologie tatsächlich etwas „feinmaschiger“, als bei einer gröberen.

Statt *feiner* sagt man manchmal auch *stärker*, und statt *größer* sagt man manchmal auch *schwächer*. Eine Topologie wird also „stark“, indem sie viele offene Mengen hat.

Bemerkung 1.17 a) Sei X eine Menge. Die Relationen *feiner* und *größer* sind partielle Ordnungen auf der Familie aller Topologien auf X (denn sie sind mit Hilfe der Relation \subseteq definiert, die eine partielle Ordnung ist), aber sie sind im allgemeinen keine totalen Ordnungen.

Zwei Topologien auf X müssen also nicht unbedingt vergleichbar sein. Beispiele dafür können Sie sich als Übung leicht überlegen.

b) Sei X eine Menge. Die diskrete Topologie ist die feinste Topologie, die es auf X geben kann; sie ist vergleichbar mit und feiner als jede andere Topologie. Das ist klar, denn sie enthält *jede* Teilmenge von X als offene Menge.

Die indiskrete Topologie ist die grösste Topologie, die es auf X geben kann, und sie ist vergleichbar mit und gröber als jede andere Topologie. Das ist klar, weil jede Topologie nach Bedingung 1.9 a) sowohl \emptyset wie

auch X als offene Mengen enthalten muss, und dies sind die *einzigsten* offenen Mengen der indiskreten Topologie.

- c) Die drei Beispiele 1.15 wurden nicht wegen ihrer Wichtigkeit ausgewählt, sondern weil die Topologien in diesen Beispielen sich ohne Mühe direkt angeben lassen. Nur wenige Topologien sind so einfach, wie diese, und in der Regel ist die unmittelbare und ausführliche Angabe aller offenen Mengen einer Topologie umständlich und mühsam.

Aber es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, Topologien auf vereinfachte Weise zu bestimmen, ohne dass man jede einzelne offene Menge explizit angeben muss. Die meisten und die interessantesten Topologien werden mit Hilfe solcher Methoden definiert, die wir jetzt nach und nach einführen werden.

In manchen Fällen wäre es sogar einfacher, die zur Topologie gehörenden *Umgebungssysteme* anzugeben, als die Topologien selber. Dass ist unter anderem der Fall für die „Standardtopologie“ auf den euklidischen Räumen \mathbf{R}^n , die in der Analysis benutzt wird. Der Hauptgrund, warum wir diese Topologie noch nicht angegeben haben, ist aber nicht, dass sie schwer zu beschreiben ist, sondern hängt damit zusammen, dass in die Definition dieser Topologie der Absolutbetrag oder in höheren Dimensionen die euklidische Vektorlänge eingeht, und die „Nähe“ in diesem Fall somit tatsächlich durch eine mit Zahlen messbare Entfernung definiert wird.

Das erweist sich als ein sehr produktives und viel allgemeineres Prinzip, das eine wichtige große Klasse von topologischen Räumen erzeugt, die so genannten *metrischen Räume*. Aus Effizienzgründen wollen wir lieber in Bälde die ganze Klasse einheitlich beschreiben und besprechen, als nur ihren wichtigsten Vertreter vorweg zu behandeln, mit genau den gleichen Überlegungen und Begründungen, die dann später für den allgemeinen Fall wiederholt werden müssten.

Schon eine kleine Änderung des Blickwinkels kann die Beschreibung oder den Umgang mit einer Topologie in manchen Fällen vereinfachen. Ein Beispiel für einen solchen Fall ist die Definition der *koendlichen Topologie*, in der diejenigen Mengen offen sind, deren *Komplemente* endlich sind.

Da Teilmengen einer Menge und ihre Komplemente in dieser Menge sich gegenseitig eindeutig bestimmen, kann man jede Familie von Teilmengen (wie die offenen Mengen einer Topologie) durch die Familie der Komplemente dieser Teilmengen ersetzen, und die neue Familie hat den gleichen „Informationsinhalt“, weil sie die alte eindeutig beschreibt.

Im Falle der koendlichen Topologie bringt diese Blickwinkeländerung tatsächlich eine Vereinfachung und eine Ersparnis: die Komplemente von koendlich offenen Mengen sind (bis auf den ganzen Raum X selber) *endlich*, und das ist tatsächlich eine leichter zu nennende Klasse, als die offenen Mengen es sind.

Diese spezielle Blickwinkeländerung ist auch in vielen anderen Situationen von Vorteil, so dass wir dieser Klasse von Komplementen von offenen Mengen einen eigenen Namen geben wollen:

Definition 1.18 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum (in anderen Worten, sei X eine Menge und sei \mathcal{T} eine Topologie auf X).

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$, also, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Bemerkung 1.19 Nach den de Morganschen Regeln ist Komplementierung mit der Bildung von Vereinigungen und Durchschnitten „antivertauschbar“, d. h., man kann die Operationen vertauschen, aber dabei kehren sich Vereinigung und Durchschnitt ineinander um.

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Durch Anwendung der de Morganschen Regeln erhält man sofort, dass die abgeschlossenen Mengen dieser Topologie folgende Regeln erfüllen.

- a) X und \emptyset sind immer abgeschlossen (weil sie Komplemente der offenen Mengen \emptyset und X sind).
- b) Sei \mathcal{A} eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen. Dann ist

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

wieder abgeschlossen (d. h., *beliebige* Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen).

- c) Seien B_1, B_2, \dots, B_n endlich viele abgeschlossene Mengen. Dann ist

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$

wieder abgeschlossen (d. h., *endliche* Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen).

Ferner, wieder auf Grund der de Morganschen Regeln ist klar, dass *jede Familie \mathcal{A} von Teilmengen von X , die den Regeln a)–c) genügt, die Familie der abgeschlossenen Mengen einer Topologie ist* (die offenen Mengen dieser Topologie sind natürlich die Komplemente der Mengen aus \mathcal{A}).

Dies hätte man also als alternative Definition von „topologischer Struktur“ benutzen können.

Wie wir schon erwähnt haben, hätte man mit dieser alternativen Definition die koendliche Topologie auf einer Menge X sehr einfach definieren können als die Topologie, deren abgeschlossenen Mengen (neben X) die endlichen Teilmengen sind.

Das System der abgeschlossenen Mengen einer Topologie ist nur eine Übersetzung des Systems der offenen Mengen, das in manchen Fällen gerade zufällig einfacher aussehen kann, als die Topologie selber.

Es gibt aber auch eine Methode, die Angabe einer Topologie erheblich abzukürzen. Sie basiert auf der Tatsache, dass die Definition einer Topologie auf drei **Abschlussregeln** basiert, die vorschreiben, dass wenn gewisse Mengen offen sind, dann auch andere daraus konstruierbare Mengen (nämlich Vereinigungen und endliche Durchschnitte) offen sein müssen. Die Existenz mancher offenen Mengen impliziert also die Existenz weiterer offener Mengen nach festen Regeln.

Wegen dieser Regeln kann man eine Topologie beschreiben, ohne dass man *alle* offenen Mengen nennen muss. Es reicht, ein System von offenen Mengen anzugeben, aus denen alle anderen nach den bekannten Regeln erzeugbar sind. Es genügt also die Angabe eines **Erzeugendensystems** von offenen Mengen, und dieser Gedanke bringt in der Topologie ähnliche Gewinne, wie die Einführung von Basen von Vektorräumen in der linearen Algebra bringt.

Die Anwendung dieses Gedankens ist noch nicht einmal besonderen Anforderungen unterworfen — zu *jeder* Familie von Mengen gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste Topologie, in der die angegebenen Mengen offen sind.

Lemma und Definition 1.20 Sei X eine Menge, sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei \mathcal{T}_λ eine Topologie auf X .

a) Dann ist

$$\mathcal{T} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$$

eine Topologie auf X . Sie ist gröber als jedes \mathcal{T}_λ und sie ist die feinste Topologie auf X mit dieser Eigenschaft.

b) Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X . Dann ist

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \mathcal{T}(\mathcal{O}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ Topologie auf } X \\ \mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}}} \mathcal{T}$$

eine Topologie auf X , in der jede Menge aus \mathcal{O} offen ist. Sie ist die größte Topologie mit dieser Eigenschaft.

$\langle \mathcal{O} \rangle$ heißt die von \mathcal{O} **erzeugte** Topologie auf X .

c) Die Topologie

$$\mathcal{S} := \left\langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda \right\rangle$$

ist feiner als jede der Topologien \mathcal{T}_λ und ist die größte Topologie auf X mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Zu a): Wir müssen für \mathcal{T} die drei Axiome der Topologie nachprüfen. Axiom 1.9 a) ist erfüllt, weil die Mengen \emptyset und X zu jeder der Topologien \mathcal{T}_λ gehören, also auch zu ihrem Durchschnitt.

Entsprechend, wenn \mathcal{A} eine Familie von offenen Mengen von \mathcal{T} ist, dann gehört jede Menge $U \in \mathcal{A}$ zu jedem \mathcal{T}_λ . Weil die \mathcal{T}_λ Topologien sind, gehört auch $\bigcup_{\mathcal{A}} U$ zu jedem \mathcal{T}_λ und somit zu \mathcal{T} . Das Gleiche gilt für $\bigcap_{\mathcal{A}} U$, falls \mathcal{A} endlich ist. Das beweist die Axiome 1.9 b) und 1.9 c).

Da

$$\mathcal{T} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$$

schon *mengentheoretisch*, also bezüglich der Mengeninklusion, das Infimum (oder „größte untere Schranke“) der \mathcal{T}_λ ist, ist sie gröber als jedes \mathcal{T}_λ und feinst mit dieser Eigenschaft.

Zu b): Dass $\langle \mathcal{O} \rangle$ eine Topologie ist, folgt aus Teil a).

Aus der Definition ist klar, dass $\mathcal{O} \subseteq \langle \mathcal{O} \rangle$, und da $\langle \mathcal{O} \rangle$ der Durchschnitt *aller* \mathcal{O} enthaltenden Topologien ist, ist sie die kleinste (in anderen Worten die *größte*) solche Topologie.

Zu c): Nach Teil b) ist \mathcal{S} die größte Topologie, die eine Obermenge von $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ ist, oder gleichbedeutend, die eine Obermenge von *jeder* \mathcal{T}_λ ist. Das heißt, sie ist die größte Topologie, die *feiner* ist als jede \mathcal{T}_λ . ■

Ein Teil der Aussage von Lemma und Definition 1.20 ist, dass jede Familie von Topologien auf einer Menge ein Infimum und ein Supremum bezüglich der „feiner“-Relation hat, aber der wichtigste Teil von diesem Lemma ist Teil b), weil er erlaubt, Topologien eindeutig zu definieren, in dem man nur einige ihrer offenen Mengen angibt.

Allerdings wird die volle Stärke dieser Möglichkeit, Topologien abgekürzt zu definieren, selten genutzt, weil es etwas umständlich ist, alle offenen Mengen aus den Erzeugenden zu konstruieren. Als guter und sehr häufig verwendeter Kompromiss erweist sich eine Zwischenstufe zwischen der expliziten Angabe aller offenen Mengen und der Angabe einer möglichst kleinen Erzeugendenmenge.

Definition 1.21 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Eine Familie \mathcal{B} von Teilmengen von X heißt eine **Basis** für \mathcal{T} , wenn

- a) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, d. h., jede Menge aus \mathcal{B} ist offen, und
- b) jede offene Menge aus \mathcal{T} schreibt sich als eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .

Es ist trivial und klar, dass die Angabe einer Basis die Topologie eindeutig bestimmt (als die Familie aller Vereinigungen von Basismengen).

Bemerkung 1.22 Die Bedingungen a) und b) aus Definition 1.21 kann man zu der folgenden äquivalenten Einzelbedingung kombinieren:

Die Familie \mathcal{B} ist eine Basis für die Topologie \mathcal{T} genau dann, wenn \mathcal{T} die Familie aller Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{B} ist.

Man sieht leicht, dass das äquivalent ist zu den beiden Bedingungen 1.21 a) und b). Denn wenn diese beiden Bedingungen gelten, dann ist wegen Bedingung 1.21 b) jede offene Menge eine Vereinigung von Basismengen, und umgekehrt wegen Bedingung 1.21 a) ist jede Basismenge, und somit auch jede Vereinigung von Basismengen, offen.

Anders herum, wenn die kombinierte Bedingung gilt, dann ist einerseits jede offene Menge in \mathcal{T} eine Vereinigung aus Basismengen (was Bedingung 1.21 b) beweist) und jede Vereinigung aus Basismengen, insbesondere jede *einzelne* Basismenge, ist offen, was 1.21 a) beweist.

Beispiele 1.23 a) Das trivialste (und uninteressanteste) Beispiel für eine Basis erhält man, wenn man bemerkt, dass jede Topologie \mathcal{T} eine Basis für sich selber ist.

- b) Sei X eine Menge. Die Familie

$$\mathcal{E} := \{ \{x\} \mid x \in X \}$$

aller Einpunktteilmengen von X bildet eine Basis für die diskrete Topologie auf X .

Jede Teilmenge von X ist offen in dieser Topologie, also auch die Einpunktmengen, so dass Bedingung 1.21 a) erfüllt ist.

Und jede Teilmenge ist die Vereinigung der Einpunktmengen ihrer Elemente, so dass Bedingung 1.21 b) gilt. Übrigens, auch die leere Menge ist eine Vereinigung von Einpunktmengen, nämlich die Vereinigung der *leeren* Familie von Einpunktmengen.

Da wir noch kaum topologische Räume kennen, können wir im Moment keine sinnvollen weiteren Beispiele angeben. Aber das Finden von Basen von bekannten Topologien ist auch nicht der Zweck dieser Einrichtung; vielmehr wollen wir Basen benutzen, um *neue* Topologien zu definieren.

Dazu müssen wir aber erst einmal wissen, welche Mengenfamilien überhaupt als Basen für eine Topologie taugen — leider sind es nicht alle!

Auskunft darüber gibt folgendes Lemma.

Lemma 1.24 *Sei X eine Menge und sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen von X .*

Genau dann gibt es eine Topologie \mathcal{T} auf X , die \mathcal{B} als Basis hat, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

a)

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X.$$

b) *Für je zwei Mengen $A \in \mathcal{B}$ und $B \in \mathcal{B}$ und für jeden Punkt $x \in A \cap B$ gibt es eine Menge $C \in \mathcal{B}$ mit*

$$x \in C \subseteq A \cap B.$$

Die erste Bedingung besagt, dass jeder Punkt zu einer Basismenge gehören muss. Was die zweite Bedingung betrifft, so muss der Durchschnitt von zwei Basismengen zwar nicht selber wieder eine Basismenge sein, aber er muss sich als eine Vereinigung von Basismengen schreiben lassen.

Beweis. Wir müssen beide Richtungen des „genau dann“ beweisen.

„ \Rightarrow “: Sei die Familie \mathcal{B} Basis einer Topologie \mathcal{T} . Das bedeutet nach Bemerkung 1.22, dass \mathcal{T} die Familie aller Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{B} ist.

Da der ganze Raum X offen ist, ist er eine Vereinigung aus Basismengen, und da die Vereinigung *aller* Basismengen nicht noch größer als X werden kann, ist auch diese Vereinigung gleich X , was a) beweist.

Für b): als Basismengen sind A und B offen, also ist auch $A \cap B$ offen (nach dem dritten Axiom der Topologie). Deshalb ist $A \cap B$ eine Vereinigung von Basismengen, und das ist die Aussage von b).

„ \Leftarrow “: es gelten die Bedingungen a) und b). Sei

$$\mathcal{T} := \left\{ U \subseteq X \mid \text{es gibt } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ mit } U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right\} \quad (1.6)$$

die Familie aller Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{B} . Wenn wir zeigen, dass \mathcal{T} eine Topologie ist, dann ist \mathcal{B} nach Bemerkung 1.22 eine Basis für \mathcal{T} und wir sind fertig.

Die drei Bedingungen 1.9 a)–c) müssen nachgeprüft werden.

Die leere Menge hat die Gestalt der Menge U auf der rechten Seite von (1.6) mit $\mathcal{A} = \emptyset$. Und X ist die Vereinigung *aller* Elemente von \mathcal{B} wegen Bedingung a). Also gilt 1.9 a).

Jede Vereinigung von Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{B} ist wieder eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} . Deshalb gilt 1.9 b).

Für 1.9 c), seien U und $V \in \mathcal{T}$.

Sei $x \in U \cap V$. Dann ist $x \in U$ und $x \in V$ und es gibt Mengen A und $B \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in A \subset U \quad \text{und} \quad x \in B \subseteq V,$$

weil U und V Vereinigungen aus \mathcal{B} sind.

Nach Bedingung 1.24 b) gibt es eine Menge $C \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in C \subseteq A \cap B \subseteq U \cap V.$$

Weil für jedes $x \in U \cap V$ eine solche Inklusion gilt, ist auch $U \cap V$ eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} und gehört deshalb zu \mathcal{T} .

Damit haben wir gezeigt, dass \mathcal{T} eine Topologie auf X ist, und wir wissen schon, dass in diesem Fall \mathcal{B} eine Basis für \mathcal{T} ist. ■

Der Begriff einer Basis einer Topologie ist ein Werkzeug, das uns helfen wird, viele weitere und interessante Beispiele von Topologien zu konstruieren.

Bevor wir erste Anwendungen von dieser Konstruktionsmethode geben, wollen wir zur Vollständigkeit noch eine Verallgemeinerung des Basisbegriffs erwähnen, die wie sich herausstellt genau dem Begriff einer *Erzeugendmenge* entspricht.

Definition 1.25 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Eine Familie \mathcal{C} von Teilmengen von X heißt eine *Subbasis* für \mathcal{T} , wenn die Familie

$$\mathcal{D} := \{ C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n \mid n \in \mathbf{N}, C_i \in \mathcal{C} \}$$

aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus \mathcal{C} eine Basis für \mathcal{T} ist.

Man beachte, dass auch $X \in \mathcal{D}$, da X nach Konvention der Durchschnitt von *keinen* Mengen aus \mathcal{D} ist.

Bemerkung 1.26 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und \mathcal{C} eine Familie von Teilmengen von X .

- a) Wenn \mathcal{C} eine Subbasis für \mathcal{T} ist, dann ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, d. h., jede Menge aus der Subbasis ist offen.

Das ist klar, denn jede Menge $U \in \mathcal{C}$ ist auch ein endlicher Durchschnitt aus \mathcal{C} (nämlich der Durchschnitt nur dieser einzigen Menge), und die endlichen Durchschnitte aus \mathcal{C} sind Basismengen und somit offen.

b) Genau dann ist \mathcal{C} eine Subbasis für \mathcal{T} , wenn $\mathcal{T} = \langle \mathcal{C} \rangle$.

Der Beweis ist nicht schwer und wird dem Leser als Übung überlassen.

Obwohl man im Allgemeinen topologische Strukturen mit Hilfe von Topologien angibt (wegen ihrer klaren und einfachen charakterisierenden Eigenschaften), gibt es doch Situationen, in denen man topologische Begriffe bequemer mit Umgebungssystemen beschreiben kann. Wir wollen deshalb nicht unerwähnt lassen, dass es auch hierfür einen Basisbegriff gibt, insbesondere für die lokalen Umgebungssysteme.

Definition 1.27 Sei X eine Menge, sei $x \in X$ und sei \mathcal{N}_x ein lokales Umgebungssystem bei x .

Eine Familie $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ heißt eine **Umgebungsbasis** für \mathcal{N}_x , wenn es für jede Umgebung $A \in \mathcal{N}_x$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ gibt mit

$$U \subseteq A,$$

d. h., wenn das Umgebungssystem aus allen Obermengen von Mengen aus \mathcal{U}_x besteht.

Beachten Sie, dass jede Menge aus der Umgebungsbasis selber auch eine Umgebung von x sein muss!

Auch hier ist es sehr leicht zu charakterisieren, welche Mengenfamilien Umgebungsbasis eines lokalen Umgebungssystems sein können.

Lemma 1.28 Sei X eine Menge und sei $x \in X$. Sei \mathcal{U} eine nichtleere Familie von Teilmengen von X .

Genau dann ist \mathcal{U} die Umgebungsbasis eines lokalen Umgebungssystems \mathcal{N}_x bei x , wenn gilt:

a) Für jedes $U \in \mathcal{U}$ ist $x \in U$.

b) Für je zwei Mengen $U \in \mathcal{U}$ und $V \in \mathcal{U}$ gibt es eine Menge $W \in \mathcal{U}$ mit

$$W \subseteq U \cap V.$$

Wenn \mathcal{U} Umgebungsbasis eines lokalen Umgebungssystems \mathcal{N}_x bei x ist, so ist dieses Umgebungssystem eindeutig bestimmt und besteht aus allen Obermengen der Mengen aus \mathcal{U} .

Beweis. Wenn \mathcal{U} Umgebungsbasis eines lokalen Umgebungssystems bei x ist, so ist dieses Umgebungssystem nach Definition 1.27 eindeutig bestimmt als die Familie \mathcal{N}_x der Obermengen der Mengen aus \mathcal{U} .

Wir müssen also nur zeigen, dass diese Familie genau dann ein lokales Umgebungssystem bei x ist, wenn die beiden Bedingungen 1.28 a) und b) erfüllt sind.

„ \Rightarrow “: Da jede Menge aus \mathcal{U} Obermenge von sich ist, muss sie eine Umgebung von x sein und deshalb nach Definition 1.1 a) i) den Punkt x enthalten. Das beweist Bedingung a).

Ferner ist nach Definition 1.1 a) iii) der Durchschnitt von zwei Umgebungen (und insbesondere auch der Durchschnitt von zwei Mengen aus der Umgebungsbasis \mathcal{U}) wieder eine Umgebung, und ist somit Obermenge einer Basismenge. Das beweist Bedingung b).

„ \Leftarrow “: Wir nehmen an, dass $\mathcal{U} \neq \emptyset$ die Bedingungen a) und b) erfüllt. Sei \mathcal{N}_x die Familie aller Obermengen von Mengen aus \mathcal{U} . Wir müssen zeigen, dass \mathcal{N}_x ein lokales Umgebungssystem bei x ist.

Da \mathcal{U} nicht leer ist, ist auf jeden Fall $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$.

Da nach a) jede Menge aus \mathcal{U} den Punkt x enthält, tut das auch jede Obermenge einer Menge aus \mathcal{U} , und das beweist Bedingung 1.1 a) i).

Die Bedingung 1.1 a) ii) gilt, weil jede Obermenge einer Obermenge einer Menge aus \mathcal{U} selber Obermenge einer Menge aus \mathcal{U} ist.

Und wenn A und B aus \mathcal{N}_x sind, dann gibt es Mengen U und $V \in \mathcal{U}$ mit

$$U \subseteq A \quad \text{und} \quad V \subseteq B.$$

Nach b) gibt es eine Menge $W \in \mathcal{U}$ mit

$$W \subseteq U \cap V \subseteq A \cap B,$$

weshalb auch $A \cap B \in \mathcal{N}_x$ und Bedingung 1.1 a) iii) erfüllt ist.

\mathcal{N} ist also nach Definition 1.1 a) tatsächlich ein lokales Umgebungssystem bei x . ■

Hier jetzt ein wichtiges Beispiel für die Definition einer *Topologie* mit Hilfe einer Basis.

Definition 1.29 Sei X eine Menge und sei $<$ eine *totale* Ordnung auf X .

Um die folgende klassische Definition effizient und einheitlich formulieren zu können, fügen wir zwei zusätzliche Hilfselemente $-\infty$ und ∞ zu X hinzu und erweitern die Ordnung $<$ zu der erweiterten Menge

$$\tilde{X} := X \cup \{-\infty, \infty\}$$

durch die Vorschrift

$$-\infty < a < \infty \quad \text{für alle } a \in X.$$

Aus Bequemlichkeit oder zur Verdeutlichung schreiben wir oft auch $+\infty$ für das Hilfselement ∞ .

Für je zwei Elemente a und $b \in \tilde{X}$ definieren wir (wie üblich)

$$(a, b) := \{x \in X \mid a < x < b\}. \quad (1.7)$$

Wir nennen diese Menge das von a und b bestimmte **offene Intervall** in der geordneten Menge $(X, <)$, und wir nennen a den **linken Endpunkt** und b den **rechten Endpunkt** dieses Intervalls.

Wir erlauben, diese Notation auch für $a \geq b$ zu verwenden, aber bemerken, dass in diesem Fall $(a, b) = \emptyset$.

Wenn $a < b$ und wenn beide Elemente aus X stammen (also nicht $\pm\infty$ sind), nennen wir das Intervall (a, b) ein **eigentliches Intervall**.

Wenn $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ (oder beides), dann nennen wir (a, b) einen **Strahl** oder ein **uneigentliches Intervall**.

In seltenen Fällen werden wir, wie wir es auf \mathbf{R} gewohnt sind, auch halb-offene oder abgeschlossene Intervalle betrachten, die einen oder beide Endpunkte mit enthalten. Wir definieren und notieren sie wie üblich:

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in X \mid a \leq x < b\} && \text{(rechts halboffenes Intervall)} \\ (a, b] &:= \{x \in X \mid a < x \leq b\} && \text{(links halboffenes Intervall)} \\ [a, b] &:= \{x \in X \mid a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)} \end{aligned}$$

An den Enden mit der eckigen Klammer darf nur ein Element aus X stehen, also nicht $\pm\infty$. An dem Ende mit einer runden Klammer darf $\pm\infty$ stehen; in diesem Fall nennen wir das Intervall einen **abgeschlossenen Strahl**.

Lemma und Definition 1.30 Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge.

Die offenen Intervalle von X (einschließlich der uneigentlichen!) bilden die Basis einer Topologie \mathcal{T} auf X .

Diese Topologie heißt die **Ordnungstopologie** der totalen Ordnung $<$.

Beweis. Um die Behauptung zu beweisen, dass die offenen Intervalle die Basis einer Topologie bilden, müssen wir die Bedingungen 1.24 a) und b) nachprüfen.

Bedingung 1.24 a) gilt, weil $X = (-\infty, \infty)$ selber ein uneigentliches offenes Intervall ist.

Für Bedingung 1.24 b), seien $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ zwei offene Intervalle in X . Weil die Ordnung $<$ (auch erweitert zu \tilde{X}) total ist, hat jedes Paar von (nicht unbedingt verschiedenen) Elementen ein größeres Element und ein kleineres (die eventuell gleich sind).

Sei μ das Größere von a und c und sei ν das Kleinere von b und d . Offensichtlich ist

$$(a, b) \cap (c, d) = (\mu, \nu)$$

wieder ein offenes Intervall, und damit auf jeden Fall eine Vereinigung von offenen Intervallen. Daraus folgt sofort Bedingung 1.24 b). ■

Definition 1.31 Die *Standardtopologie* auf den reellen Zahlen \mathbf{R} ist die Ordnungstopologie der üblichen Ordnung.

Die offenen Mengen dieser Topologie sind alle Vereinigungen von offenen Intervallen und offenen Strahlen.

Die offenen Strahlen kann man aus der Basis weglassen, denn jeder offene Strahl ist eine Vereinigung von offenen Intervallen:

$$(a, \infty) = \bigcup_{b>a} (a, b) \quad \text{und} \quad (-\infty, b) = \bigcup_{a<b} (a, b).$$

Die gerade beschriebene Topologie ist tatsächlich die übliche Topologie auf \mathbf{R} , aber die Definition ist nicht unbedingt die übliche Definition, denn in den Anfängervorlesungen Analysis definiert man die Topologie auf \mathbf{R} meistens mit Hilfe von ε -Intervallen, also von „kleinen“ Intervallen bezüglich einer Messung.

Es handelt sich trotzdem um die gleiche Topologie, aber die Definition aus der Analysis hat den Vorteil, dass sie sich auch auf höherdimensionalen euklidischen Räumen anwenden lässt, die keine Ordnung (oder zumindest keine zur Topologie passende Ordnung) tragen und auf denen zur Definition einer Topologie die Intervalle durch etwas anderes ersetzt werden müssen, vielleicht durch eine geeignete Verallgemeinerung.

Das ist noch nicht alles. Die „kleine“ Zahl ε , die in die analytische Definition der Topologie auf \mathbf{R}^n eingeht, ist ein Entfernungsmaß, und diese Definition kann man entsprechend auch auf anderen Räumen anwenden, die in keinem direkten Bezug zu den euklidischen Räumen stehen müssen, solange es auf diesen Räumen ein „vernünftiges“ Entfernungsmaß gibt. Wir haben die Topologie ja als einen Versuch eingeführt, den Begriff der Nähe und der Nachbarschaft auch ohne die Möglichkeit einer direkten Messung auszudrücken, aber wo man doch messen *kann*, muss dies doch viel leichter gehen.

In der Tat geht es leichter, und wir werden jetzt erklären, wie. Das ist für uns ein guter Testfall, denn wenn wir die topologische Struktur richtig und

zu unserem Vorhaben passend beschrieben haben, dann muss sich die durch Entfernungsmessung beschriebene Struktur ganz einfach als eine Instanz der allgemeinen topologischen Struktur erweisen und sich als topologischen Raum ohne Mühe beschreiben oder implementieren lassen.

Ein „vernünftiges“ Entfernungsmaß hat folgende leicht nachzuvollziehende Eigenschaften.

Definition 1.32 Sei X eine Menge. Eine *Metrik* oder *Entfernungsfunktion* auf X ist eine Funktion

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$$

mit den Eigenschaften:

a) Für je zwei Punkte x und $y \in X$ ist

$$d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y. \quad (\text{positiv definit})$$

b) Für je zwei Punkte x und $y \in X$ ist

$$d(x, y) = d(y, x). \quad (\text{Symmetrie})$$

c) Für je drei Punkte x, y und $z \in X$ ist

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Man nennt $d(x, y)$ die *Entfernung von x zu y* .

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) , wo X eine Menge ist und d eine Metrik auf X ist.

Die drei Eigenschaften einer Metrik haben folgende sinnvolle intuitive Bedeutung.

Eigenschaft a) besagt, dass Entfernungen zwischen verschiedenen Punkten immer positiv sind, aber dass die Entfernung von einem Punkt zu sich selber immer 0 ist. Die erste Bedingung schwächt man gelegentlich ein bisschen ab, und erlaubt, dass auch verschiedene Punkte die Entfernung 0 zueinander haben können. Eine Funktion d , für die dies gilt, aber die sonst alle Eigenschaften einer Metrik hat, nennt man eine *Pseudometrik*. Entsprechend nennt man eine Menge versehen mit einer Pseudometrik einen *pseudometrischen Raum*.

Eigenschaft b), die Symmetrie, besagt, dass die Entfernung nicht gerichtet ist, d. h., die Entfernung von x zu y ist immer gleich der Entfernung von y zu x . Für eine statische geometrische Struktur wie die Topologie ist das

genau das erwartete Verhalten, aber man kann sich auch Entfernungsvorstellungen denken, die nicht symmetrisch sind (und so etwas kommt durchaus im Alltagsleben vor, zum Beispiel im Verkehrswesen).

Die **Dreiecksungleichung**, Bedingung c), heißt so, weil sie im Wesentlichen aussagt, dass jede Seite des von x , y und z gebildeten Dreiecks kürzer ist als die Summe der Längen der anderen beiden Seiten. Diese bekannte Eigenschaft aus der euklidischen Geometrie will man allgemein für Entfernungsmessungen beibehalten.

Bevor wir Beispiele angeben (die sehr leicht zu finden sind), wollen wir, weil es so einfach ist, noch schnell sagen, wie eine Metrik zu einer Topologie führt.

Bei der Einführung der Topologie in diesem Kapitel hatten wir auf Seite 2 beschlossen, die topologische Struktur mit Mengen zu beschreiben, die alle Punkte enthalten, die *genügend nahe* zu einem gegebenen Punkt x sind; diese Mengen wurden **Umgebungen** des Punktes x genannt, und so kamen wir zu unserer ersten Definition.

In einem metrischen Raum kann man direkt mit Hilfe der Metrik sagen, was „genügend nahe“ bedeuten soll, und wenn man das tut, findet man sofort die richtige und sehr natürliche Definition für die Umgebungen in der metrischen Topologie.

Zunächst eine wichtige vorbereitende Definition:

Definition 1.33 Sei (X, d) ein metrischer (oder pseudometrischer) Raum, sei $x \in X$ und sei $r > 0 \in \mathbf{R}$. Die Menge

$$B_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}$$

besteht aus allen Punkten, deren Entfernung zu x bezüglich der Metrik oder Pseudometrik kleiner als r ist. Wir nennen diese Menge den **offenen Ball von Radius r um x** .

Lemma und Definition 1.34 Sei (X, d) ein metrischer oder pseudometrischer Raum. Sei $x \in X$. Die offenen Bälle $B_r(x)$ bilden eine Umgebungsbasis \mathcal{B}_x um x .

Das von dieser Umgebungsbasis bestimmte lokale Umgebungssystem bei x wollen wir mit \mathcal{M}_x bezeichnen; es heißt das von der Metrik (oder Pseudometrik) d bestimmte **lokale metrische Umgebungssystem bei x** .¹

¹Beachten Sie, dass die Umgebungen in diesem Umgebungssystem genau die Mengen sind, die für ein gewisses $r > 0$ alle Punkte enthalten, deren mit d gemessene Entfernung zu x kleiner als r ist, und die in diesem Sinne „genügend nahe“ zu x sind!

Die Familie der lokalen metrischen Umgebungssysteme bei den Punkten von X ist kohärent und definiert deshalb eine Topologie \mathcal{T}_d auf X , die wir die **metrische Topologie der Metrik (oder Pseudometrik) d** nennen.

Die Familie \mathcal{C} aller offenen Bälle in X (um alle Punkte von X) ist eine Basis für die metrische Topologie.²

Auch wenn d nur eine Pseudometrik ist, sprechen wir von den **metrischen** Umgebungssystemen und der **metrischen** Topologie.

Beweis. Die hier gegebene Definition hängt von einigen Behauptungen ab, die wir noch beweisen müssen.

Wir müssen zeigen, dass die offenen Bälle $B_r(x)$ um einen Punkt x tatsächlich eine Umgebungsbasis bei x bilden.

Zunächst sind die Bälle $B_r(x)$ für jedes $r > 0 \in \mathbf{R}$ definiert, so dass die Familie der offenen Bälle um x nicht leer ist.

Weil $d(x, x) = 0 < r$, ist $x \in B_r(x)$, so dass Bedingung 1.28 a) erfüllt ist. Bedingung 1.28 b) gilt, weil wir für je zwei Radien r und s haben, dass

$$B_r(x) \cap B_s(x) = B_{\min(r,s)}(x).$$

Der Durchschnitt von zwei Basismengen ist sogar selber eine Basismenge (und nicht nur Obermenge einer Basismenge, was gereicht hätte).

Damit sind die Voraussetzungen aus Lemma 1.28 erfüllt und die offenen Bälle um x bilden eine lokale Umgebungsbasis.

Wir müssen zeigen, dass die von diesen Umgebungsbasen erzeugten lokalen Umgebungssysteme \mathcal{M}_x kohärent sind.

Dazu zeigen wir zuerst, dass jeder offene Ball $B_r(x)$ eine Umgebung jedes seiner Punkte ist.

Sei $y \in B_r(x)$ und sei $s := d(x, y)$ und $t := r - s$. Aus der Dreiecksungleichung folgt für jedes $z \in B_t(y)$, dass

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = s + d(y, z) < s + t = s + r - s = r.$$

In anderen Worten, $B_t(y) \subseteq B_r(x)$. Daraus folgt, dass $B_r(x) \in \mathcal{M}_y$, und das gilt, wie behauptet, für alle $y \in B_r(x)$.

Nun zum Nachweis der Kohärenz. Sei $x \in X$ und sei $A \in \mathcal{M}_x$. Dann gibt es ein Radius $r > 0$, so dass $B_r(x) \subseteq A$. Natürlich ist $B_r(x)$ eine Umgebung von x , und wir haben gerade gesehen, dass $B_r(x)$ sogar eine Umgebung jedes $y \in B_r(x)$ ist.

Weil $A \supseteq B_r(x)$, ist auch $A \in \mathcal{M}_y$ für jedes $y \in B_r(x)$. Das ist die Kohärenzbedingung, die wir nachweisen wollten.

²Normalerweise wird die metrische Topologie mit dieser Basis definiert und nicht über die metrischen Umgebungssysteme.

Weil die \mathcal{M}_x kohärent sind, bestimmen sie wirklich eine Topologie \mathcal{T}_d auf X . Wir haben oben gezeigt, dass jeder offene Ball eine Umgebung jedes seiner Punkte ist; deshalb sind die offenen Bälle auch wirklich offen in der metrischen Topologie. Als letzter nachzuweisender Punkt müssen wir zeigen, dass sie eine Basis dieser Topologie bilden, und dazu ist nur noch Bedingung 1.21 b) nachzuprüfen (jede offene Menge ist eine Vereinigung von Basismengen).

Sei $U \in \mathcal{T}_d$ eine beliebige offene Menge in der metrischen Topologie. Da sie offen ist, ist sie eine Umgebung jedes ihrer Punkte, und weil die offenen Bälle um jeden Punkt eine Umgebungsbasis bilden, gibt es für jedes $x \in U$ einen offenen Ball $B(x)$ um x mit $x \in B(x) \subseteq U$.

Hieraus folgt, dass U die Vereinigung dieser offenen Bälle $B(x)$ ist und damit eine Vereinigung von Basismengen.

Beachten Sie, dass nirgendwo im Beweis benutzt wurde, dass verschiedene Punkte eine echt positive Entfernung zueinander haben müssen. Deshalb gelten alle Behauptungen auch dann, wenn d nur eine Pseudometrik ist. ■

Wir wollen jetzt einige Beispiele von Metriken und von den von ihnen induzierten Topologien betrachten. Wir werden auf diese Weise viele topologische Räume konstruieren können, aber wir sollten bemerken, dass wir manchmal nach dieser Methode Räume konstruieren werden, die wir vorher schon kannten, und das wir manchmal auch verschiedene Metriken finden werden, die trotzdem die gleiche Topologie erzeugen.

Beispiele 1.35 Sei X eine Menge.

a) Für x und $y \in X$ setzen wir

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = y; \\ 1, & \text{wenn } x \neq y. \end{cases}$$

Diese Funktion $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ ist eine Metrik, und ihre metrische Topologie auf X ist die diskrete Topologie.

Die Funktion d ist offensichtlich positiv definit und symmetrisch. Was die Dreiecksungleichung betrifft, so ist in der nachzuweisenden Ungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

die linke Seite höchstens 1 und die rechte Seite mindestens 1, außer wenn $x = y = z$; dann sind aber alle Terme in der Ungleichung 0 und sie gilt auch in diesem Fall.

Für jeden Punkt x ist

$$B_1(x) = \{y \mid d(x, y) < 1\} = \{y \mid d(x, y) = 0\} = \{x\},$$

so dass alle Einpunktmengen offene Bälle und somit offen in der metrischen Topologie sind.

Da jede Menge eine Vereinigung von Einpunktmengen ist, ist jede Teilmenge von X offen und die metrische Topologie ist diskret.

- b) Wenn X mehr als ein Element hat, kann die indiskrete Topologie nicht die Topologie einer echten Metrik sein.

Denn sei d eine Metrik auf X und seien $x \neq y \in X$. Sei $r := d(x, y) > 0$. Dann ist $y \notin B_r(x)$ und $B_r(x)$ ist eine offene Menge, die nichtleer ist, weil sie x enthält, aber die nicht X ist, weil sie y nicht enthält.

Also gibt es mehr offene Mengen als nur \emptyset und X und die Topologie ist nicht indiskret.

Aber die *Pseudometrik*

$$\mu(x, y) := 0 \quad \text{für alle } x, y \in X$$

induziert offensichtlich die indiskrete Topologie, denn X ist ihr einziger offener Ball. Und natürlich ist klar, dass μ tatsächlich eine Pseudometrik ist.

Wir sehen schon an diesem einfachen Beispiel, dass manche Topologien sich durch Metriken definieren lassen und andere nicht.

Definition 1.36 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *metrisierbar*, wenn es auf X eine Metrik d gibt, so dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Wir haben gesehen, dass die diskrete Topologie immer metrisierbar ist, aber die indiskrete Topologie auf einem mehrelementigen Raum nicht.

Die wichtigsten, weil wohl auch am häufigsten in der Mathematik benutzten topologischen Räume sind die euklidischen Räume \mathbf{R}^n , und ihre Standardtopologie ist eine metrische.

Sie werden sicher eine Idee haben, welche Metrik diese Topologie definiert: bestimmt handelt es sich um die euklidische Entfernung, die auch benutzt wird, um die Länge von Vektoren zu messen, und die man aus den Koordinaten von zwei Punkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen kann. Diese Entfernungsmessung ist auch diejenige, mit der man im Alltag die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten in der Ebene oder im Raum bestimmt.

Es wird Sie überraschen, dass es auch andere, „naiver“ aufgebaute und deshalb leichter für Berechnungen zu benutzende Metriken auf \mathbf{R}^n gibt, die alle die *gleiche* Topologie liefern und deshalb für Topologen, zumindest, gleichwertig sind.

Lemma und Definition 1.37 (Metriken auf \mathbf{R}^n) *Folgende Funktionen $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ sind Metriken:*

a) Die Funktion $d_e: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch

$$d_e((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

heißt die **euklidische Metrik** auf \mathbf{R}^n .

b) Die Funktion $d_t: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch

$$d_t((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$$

heißt die **Taxi-Metrik** auf \mathbf{R}^n .

(Hinter dem Namen steckt der Gedanke, dass Taxifahrer mit dem Taxameter nicht die Luftlinienentfernung zwischen zwei Punkten messen, sondern die mit dem Taxi im Straßenraster gefahrene Entfernung. Amerikanische Städte haben oft eine rechteckiges Straßenraster und dann ist die zurückgelegte Entfernung die Summe der Längen der in jeder Himmelsrichtung zurückgelegten Strecken, wie in dieser Formel.)

c) Die Funktion $d_\infty = d_m: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch

$$d_m((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$$

heißt die **Maximumsmetrik** oder die **Unendlichmetrik** auf \mathbf{R}^n .

Der Name Unendlichmetrik hat nichts mit den Entfernungswerten zu tun, sondern rührt daher, dass man die euklidische Metrik aus Teil a) zu einer ganzen Familie von Metriken erweitern kann, indem man den Exponenten 2 in den Quadraten und sein Kehrwert in der Quadratwurzel durch andere Zahlen p und ihre Kehrwerte ersetzen kann. Mit $p = 1$ erhält man die Taxi-Metrik. Man kann auch $p = \infty$ nehmen, und dann dominiert der größte Summand so stark, dass nur er im Endergebnis noch sichtbar ist — das liefert genau die Maximumsmetrik.

Beweis. Aus den Formeln ist klar, dass alle drei Funktionen d_e , d_t und d_m positiv definit und symmetrisch sind. Um zu zeigen, dass sie Metriken sind, muss nur noch die Dreiecksungleichung nachgeprüft werden.

Für die euklidische Metrik folgt die Dreiecksungleichung aus der Minkowski-Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

wenn man für drei Punkte (x_1, \dots, x_n) , (y_1, \dots, y_n) und $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ die a_i in der Minkowski-Ungleichung durch $x_i - y_i$ und die b_i durch $y_i - z_i$ ersetzt.

Obwohl die Minkowski-Ungleichung sehr bekannt ist und meistens in der Anfängervorlesung *Lineare Algebra* bewiesen wird, wiederholen wir den Beweis hier kurz für Leser, denen er nicht geläufig ist. Dieser Beweis wird nicht in der Vorlesung vorgetragen.

Die Minkowski-Ungleichung vergleicht zwei nichtnegative Größen, so dass man eine äquivalente Ungleichung erhält, wenn man beide Seiten quadriert. Diese hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = (\text{linke Seite von (1.8)})^2 \leq \\ &(\text{rechte Seite von (1.8)})^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n b_i^2. \end{aligned}$$

Wenn man jetzt von den äußeren Ausdrücken in dieser Kette von Gleichungen und Ungleichungen die gemeinsamen Beiträge

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

wegkürzt und den Rest durch 2 dividiert, erhält man die wieder zu (1.8) äquivalente Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$

Um diese Ungleichung zu beweisen, reicht es, wenn wir die strengere Ungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}. \quad (1.9)$$

beweisen, wo wir die linke (kleinere) Seite durch ihren Betrag ersetzt haben.

Wieder sind jetzt beide Seiten nichtnegativ, und quadrieren liefert die zu (1.9) äquivalente **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right). \quad (1.10)$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist etwas trickreich zu beweisen und wir erinnern kurz an die Methode.

Wenn alle $b_i = 0$, dann ist (1.10) offenbar richtig, weil beide Seiten 0 sind.

Wir nehmen deshalb an, dass nicht alle b_i Null sind, das heißt, dass $\sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$, und wir bilden den Quotienten

$$\lambda := \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Für diese Zahl gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n (a_i - \lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 - 2\lambda a_i b_i + \lambda^2 b_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (1.10) ergibt sich, wenn wir hier den negativen Term auf die anderer Seite bringen (mit geändertem Vorzeichen, natürlich) und die Ungleichung mit der positiven Zahl $\sum_{i=1}^n b_i^2$ durchmultiplizieren.

Die Dreiecksungleichung **für die Taxi-Metrik** folgt sofort aus der bekannten und auf jeden Fall mit einer Fallunterscheidung leicht nachzuprüfenden Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Die Dreiecksungleichung **für die Maximumsmetrik** ist nicht schwer herzuleiten, aber man muss den Beweis richtig einfädeln.

Seien $x := (x_1, \dots, x_n)$, $y := (y_1, \dots, y_n)$ und $z := (z_1, \dots, z_n)$ drei Punkte in \mathbf{R}^n , und sei

$$a := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = d_m(x, y) \quad \text{und} \quad b := \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - z_j| = d_m(y, z).$$

Für jedes k zwischen 1 und n gilt nun

$$|x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \leq a + b,$$

so dass auch

$$d_m(x, z) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - z_k| \leq a + b = d_m(x, y) + d_m(x, z).$$

■

Bemerkung 1.38 Um deutlich zu machen, dass die drei Metriken aus Lemma und Definition 1.37 wirklich verschiedene Metriken auf \mathbf{R}^n sind, zeigen wir zur Illustration in jeder dieser Metriken auf \mathbf{R}^2 den Ball von Radius 1 um den Koordinatenursprung.

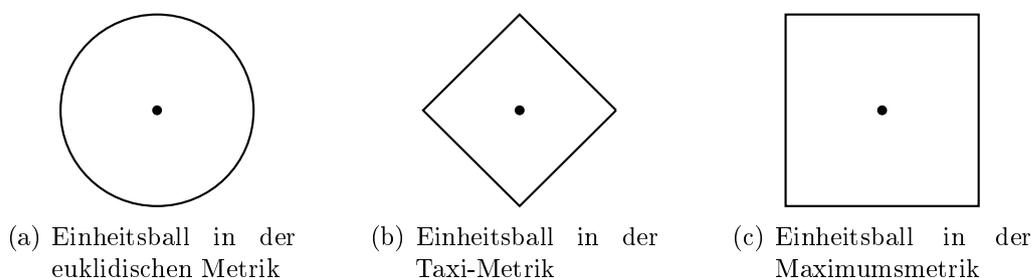


Abbildung 1.1: Einheitsbälle in den drei Metriken auf \mathbf{R}^2 .

Alle drei Zeichnungen haben die gleiche Breite und die gleiche Höhe, nämlich 2 im Maßstab der Bilder.

Aber obwohl die *Metriken* verschieden sind, bestimmen sie alle die *gleiche* metrische Topologie. Um zu verstehen warum, müssen wir kurz untersuchen, wann zwei Metriken die gleiche Topologie bestimmen oder allgemeiner, wann eine Metrik eine feinere oder gröbere Topologie bestimmt, als eine andere.

Am besten erläutert man das zuerst mit Umgebungsbasen.

Lemma 1.39 Sei X eine Menge und seien \mathcal{M} (mit zugehöriger Topologie \mathcal{S}) und \mathcal{N} (mit zugehöriger Topologie \mathcal{T}) globale Umgebungssysteme auf X .

Wenn es für die lokalen Umgebungssysteme \mathcal{M}_x Umgebungsbasen \mathcal{A}_x gibt und für die lokalen Umgebungssysteme \mathcal{N}_x Umgebungsbasen \mathcal{C}_x gibt mit der Eigenschaft, dass

es für jedes $x \in X$ und für jedes $C \in \mathcal{C}_x$ eine Menge $A \in \mathcal{A}_x$ gibt mit $A \subseteq C$,

dann ist die Topologie \mathcal{S} feiner als die Topologie \mathcal{T} .

Beweis. Die Bedingung impliziert, dass jede Basisumgebung aus \mathcal{C}_x auch zu \mathcal{M}_x gehört. Daraus folgt, dass auch alle Obermengen von Mengen aus \mathcal{C}_x zu \mathcal{M}_x gehören, d. h., dass

$$\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{M}_x$$

für jedes x .

Die offenen Mengen der beiden Topologien sind die Mengen, die Umgebungen jedes ihrer Punkte sind, im Sinne der jeweiligen lokalen Umgebungssysteme. Insbesondere, wenn $U \in \mathcal{T}$, dann gilt für jeden Punkt $x \in U$, dass

$$U \in \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{M}_x,$$

und somit, dass U auch offen in der zu \mathcal{M} zugehörigen Topologie \mathcal{S} ist.

In anderen Worten, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ und \mathcal{S} ist feiner. ■

Korollar 1.40 Sei X eine Menge und seien μ und ν Metriken auf X .

Wenn es eine Konstante $C > 0 \in \mathbf{R}$ gibt, so dass für je zwei Punkte x und $y \in X$ gilt

$$\mu(x, y) \leq C\nu(x, y) \tag{1.11}$$

(wir sagen dazu: ν **dominiert** μ), dann ist die metrische Topologie von ν feiner als die metrische Topologie von μ .

Wenn jede der Metriken μ und ν die andere dominiert (was möglich sein kann mit verschiedenen Konstanten C), dann bestimmen diese Metriken die gleiche metrische Topologie auf X .

Beweis. Für jede der beiden metrischen Topologien bilden die Bälle mit reellen Radien um jeden Punkt eine Umgebungsbasis an diesem Punkt für das lokale Umgebungssystem der zugehörigen metrischen Topologie.

Aus der Ungleichung (1.11) folgt für jeden Punkt x und für jeden Radius $r > 0$, dass

$$B_{r/C}^\nu(x) \subseteq B_r^\mu(x),$$

wo wir mit dem Exponenten kennzeichnen, nach welcher Metrik die Bälle bestimmt werden.

Aus Lemma 1.39 können wir nun direkt schließen, dass die metrische Topologie von ν feiner ist als die metrische Topologie von μ . ■

Lemma und Definition 1.41 Für die drei Metriken auf \mathbf{R}^n aus Lemma und Definition 1.37 gelten für je zwei Punkte

$$x := (x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$$

die Beziehungen

$$d_m(x, y) \leq d_e(x, y) \leq d_t(x, y) \leq n d_m(x, y). \quad (1.12)$$

Daraus folgt, dass alle drei Metriken die gleiche metrische Topologie auf \mathbf{R}^n definieren. Diese Topologie heißt die **Standardtopologie von \mathbf{R}^n** .

Beweis. Die linke Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass

$$\begin{aligned} d_m(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{(x_i - y_i)^2} \\ &= \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2} = d_e(x, y). \end{aligned}$$

Die mittlere Ungleichung wird klar, wenn man beide Seiten quadriert. Das Quadrat von $d_e(x, y)$ ist

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2, \quad (1.13)$$

und das Quadrat von

$$d_t(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.14)$$

enthält alle Summanden aus (1.13) und noch weitere nichtnegative Mischterme, ist also mindestens so groß.

Die rechte Ungleichung in (1.12) ist klar, weil die Summe in der Formel (1.14) für die Taxi-Metrik n Summanden hat, von denen jeder höchstens so groß ist, wie $d_m(x, y)$.

Aus (1.12) sehen wir sowohl, dass die Maximumsmetrik die euklidische und die Taxi-Metrik dominiert, wie auch, dass sie von ihnen dominiert wird. Also bestimmt sie die gleiche Topologie, wie die anderen beiden Metriken, und diese drei metrische Topologien auf \mathbf{R}^n sind gleich. ■

Bemerkung 1.42 Mit Lemma und Definition 1.41 haben wir jetzt endlich die Standardtopologie auf den euklidischen Räumen \mathbf{R}^n definieren können. Aber wir haben uns auch einen potentiellen Konflikt eingehandelt, denn für $n = 1$ hatten wir schon in Definition 1.31 die Standardtopologie auf \mathbf{R} als die Ordnungstopologie definiert.

In Wirklichkeit gibt es aber kein Problem: wenn $n = 1$ sind die drei Metriken d_e , d_t und d_m schon als Metriken gleich (wie man sofort anhand ihrer Definition sieht), und ihre metrische Topologie ist gleich der Ordnungstopologie der üblichen Ordnung.

Denn die metrische Topologie hat nach Lemma und Definition 1.34 alle offenen Bälle als Basis, und nach einer Bemerkung in Definition 1.31 bilden schon die eigentlichen offenen Intervalle (a, b) mit a und $b \in \mathbf{R}$ eine Basis für die Ordnungstopologie auf \mathbf{R} .

Es handelt sich hierbei um genau die gleichen Basismengen, denn auf \mathbf{R} gilt immer

$$B_r(x) = (x - r, x + r) \quad \text{und} \quad (a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Beide Topologien sind also gleich, weil sie die gleiche Basis haben!

Wir schließen diesen Abschnitt mit ein paar weiteren Beispielen, die eine kleine und sehr unvollständige Vorstellung davon geben können, welche komplizierte und interessante Räume man mit metrischen Topologien ausstatten kann.

Beispiele 1.43 a) Sei X eine Menge. Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $M > 0 \in \mathbf{R}$ gibt, so dass

$$|f(x)| < M \quad \text{für alle } x \in X. \quad (1.15)$$

Wir setzen

$$B(X, \mathbf{R}) := \{ f: X \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ beschränkt} \}.$$

Für je zwei Funktionen f und $g \in B(X, \mathbf{R})$ gibt es Zahlen M und $N > 0 \in \mathbf{R}$ mit

$$|f(x)| < M \quad \text{und} \quad |g(x)| < N \quad \text{für alle } x \in X,$$

woraus nach der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag folgt

$$|f(x) - g(x)| < M + N \quad \text{für alle } x \in X.$$

Wir können deshalb eine wohldefinierte Funktion

$$d: B(X, \mathbf{R}) \times B(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$$

durch die Vorschrift

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \infty$$

definieren.

Diese Funktion ist eine *Metrik* auf $B(X, \mathbf{R})$. Sie ist offensichtlich positiv definit und symmetrisch, und die Dreiecksungleichung beweist man wie für die Maximumsmetrik auf \mathbf{R}^n .

Nämlich, seien f, g und h drei beschränkte Funktionen $X \rightarrow \mathbf{R}$. Für jedes $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Bildet man jetzt das Supremum über alle $x \in X$, so findet man

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h).$$

Diese Metrik macht $B(X, \mathbf{R})$ zu einem metrischen Raum und mit der metrischen Topologie zu einem topologischen Raum.

Diese Konstruktion verallgemeinert die Maximumsmetrik auf \mathbf{R}^n , die wir erhalten, wenn wir $X = \{1, 2, \dots, n\}$ nehmen und den Punkt $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ mit der Funktion $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ identifizieren, für die $f(i) = x_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ (weil hier X endlich ist, ist diese Funktion automatisch beschränkt).

b) Sei A die Menge der absolut konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

mit reellen Summanden a_n , also genauer, sei A die Menge der Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ reeller Zahlen, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergiert.

Aus der Analysis bekannt, aber auch sehr leicht zu beweisen, ist die Tatsache, dass die Summe und die Differenz zweier absolut konvergenter Reihen wieder absolut konvergent ist.

Das erlaubt die Definition einer Metrik $d: A \rightarrow A$ durch die Vorschrift

$$d(\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| < \infty.$$

Auch diese Funktion ist offensichtlich positiv definit und symmetrisch, und mit den üblichen Eigenschaften der Reihenkonvergenz überträgt sich die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag sofort auf die Funktion d , so dass d tatsächlich eine Metrik ist.

Diese Metrik macht den Raum der absolut konvergenten reellen Reihen zu einem metrischen Raum und damit zu einem topologischen Raum mit der metrischen Topologie.

c) Sei $a < b \in \mathbf{R}$ und sei

$$I(a, b) := \left\{ f: [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ und } |f| \text{ sind integrierbar auf } [a, b] \right\}.$$

Für die Gestaltung dieses Beispiels spielt es keine wesentliche Rolle, ob Riemann- oder Lebesgue-Integrabilität zu verstehen ist (obwohl es sich natürlich *nicht* in beiden Varianten um den gleichen Funktionenraum handelt).

Auf $I(a, b) \times I(a, b)$ ist die Funktion

$$d(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \quad (1.16)$$

wohldefiniert, nichtnegativ und endlich. Wegen der Eigenschaften des Absolutbetrags und der Integration ist d symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung.

Aber ist d keine Metrik, sondern nur eine *Pseudometrik*, denn für beide Integralbegriffe kann das Integral in (1.16) Null werden, auch wenn der Integrand nicht überall 0 ist, also auch wenn die Funktionen f und g nicht genau gleich sind.

Trotzdem bestimmt d eine metrische Topologie auf der Menge der integrierbaren Funktionen und macht aus dieser Menge einen topologischen Raum.

Diese wenigen Beispiele geben nur einen Vorgeschmack auf die Vielfalt an topologischen Räumen, die möglich sind und auch in Anwendungen außerhalb der Topologie häufig vorkommen.

In den kommenden Kapiteln werden wir weitere Konstruktionsmethoden für topologische Räume kennen lernen und vielen weiteren Beispielen von wichtigen Räumen begegnen.

Kapitel 2

Stetige Abbildungen und topologische Konstruktionen

Wie wir in der Einleitung erklärt haben, besteht die produktivste Methode, eine Struktur zu beschreiben oder zu verstehen, sehr oft in der Untersuchung der *Abbildungen, die diese Struktur erhalten*.

Wir interessieren uns für topologische Räume, also für geometrische Gebilde, deren Struktur durch eine Topologie im Sinne von Definition 1.9 bestimmt wird. Die strukturtreuen Abbildungen für diese Struktur heißen *stetige* Abbildungen.

Diese Beschreibung von „stetigen Abbildungen“ ist aber noch viel zu ungenau, um uns zu einer vernünftigen mathematischen Definition dieses Begriffs zu führen. Wie kann eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen die Topologien der Räume „erhalten“, oder anders gesagt, was muss die Abbildung tun, um als strukturtreu für diese Struktur zu gelten?

Ein naiver Vorschlag wäre zu verlangen, dass die Bilder der offenen Mengen der ersten Topologie die offenen Mengen der zweiten Topologie sein müssen oder zumindest offen in der zweiten Topologie sein müssen, aber das ist überraschenderweise die *falsche* Idee, wie wir gleich sehen werden.

Wir finden die richtige (und vollständige, d. h., globale *und lokale*) Definition, wenn wir uns auf unsere intuitive Vorstellung von Stetigkeit berufen und die im Vorwort auf Seite x vorgeschlagene Formulierung aufgreifen und in die jetzt zur Verfügung stehende genaue Sprache der Topologie übersetzen.

Im Vorwort stand, dass eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ bei $a \in X$ stetig heißen soll, wenn die Bilder $f(x)$ von Punkten aus X in jedem verlangten Sinne genügend nahe bei $f(a)$ liegen, sobald die Punkte x selber genügend nahe bei a liegen.

Die „Sinne“ von „genügender Nähe zu einem Punkt y “ werden in unserer mathematischen Sprache durch die Umgebungen des Punktes dargestellt.

Welche Nähe zu $f(a)$ wir für die Bilder von Punkten aus X verlangen wollen wird also durch eine Umgebung von $f(a)$ anzugeben sein. Wenn wir sagen, dass Punkte „genügend nahe bei a “ in diese Umgebung abgebildet werden, können wir das auch damit ausdrücken, dass die *Urbildmenge* unter f der vorgegebenen Umgebung alle Punkte enthält, die „genügend nahe bei a “ sind. Das führt direkt zu folgender

Definition 2.1 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung.

Sei $a \in X$. Die Abbildung f heißt *stetig bei a* , wenn für jede Umgebung A von $f(a)$ (bezüglich der Topologie \mathcal{S}) die Urbildmenge

$$f^{-1}(A)$$

eine Umgebung von a ist in der Topologie \mathcal{T} .

Die Abbildung f heißt (global) *stetig*, wenn f bei *jedem* Punkt $a \in X$ stetig ist.

Die Stetigkeit hat also eine lokale Version (Stetigkeit bei einem Punkt) und eine globale Version (Stetigkeit als Abbildung $X \longrightarrow Y$).

Für den lokalen Stetigkeitsbegriff ist die Verwendung des lokalen Umgebungssystems sehr natürlich und bequem, aber den globalen Begriff würde man lieber ohne Umgebungssysteme und direkt mit der Topologie ausdrücken.

Lemma 2.2 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung.

Die Abbildung f ist (global) stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$, also für jedes $U \in \mathcal{S}$ gilt, dass $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, also dass $f^{-1}(U)$ offen ist in X .

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei f stetig und sei U eine offene Menge der Topologie \mathcal{S} auf Y . Sei

$$V := f^{-1}(U) \subseteq X.$$

Für jedes $a \in V$ haben wir $f(a) \in U$, und als offene Menge ist U eine Umgebung jedes seiner Punkte, also auch eine Umgebung von $f(a)$. Weil f

stetig ist bei a , ist nach Definition 2.1 das Urbild V eine Umgebung von a . Dies gilt für *jedes* $a \in V$, und deshalb ist $V = f^{-1}(U)$ offen in \mathcal{T} .

„ \Leftarrow “: Die Urbilder aller offenen Teilmengen von Y seien offen in X . Sei $a \in X$ und sei A eine Umgebung von $f(a)$.

Nach der Definition 1.11 der Umgebungen einer Topologie bedeutet das, dass es eine offene Menge $U \in \mathcal{S}$ gibt mit

$$f(a) \in U \subseteq A.$$

Daraus folgt

$$a \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(A),$$

und wiederum nach der Definition der Umgebungen einer Topologie und nach unserer Annahme, dass Urbilder offener Mengen offen sind und somit speziell $f^{-1}(U)$ offen ist, können wir schließen, dass $f^{-1}(A)$ eine Umgebung von a ist.

Nach Definition 2.1 ist f stetig bei a . Das gilt für jedes $a \in X$. Also ist f global stetig. ■

Die Bedingung aus Lemma 2.2 wird meistens als die Definition der Stetigkeit verwendet, solange man sich nur für die globale Stetigkeit interessiert.

Übrigens, hier sieht man, in welcher Hinsicht unsere erste naive Vorstellung auf Seite 39, welche Art von Abbildung die topologische Struktur erhält, falsch war. Dort hatten wir zuerst vorgeschlagen, dass die *Bilder* von offenen Mengen unter der Abbildung offen bleiben sollten. Aber bei der richtigen Definition sind es nicht die Bildmengen von offenen Mengen des Quellraums, sondern die *Urbildmengen* von offenen Mengen des Zielraums, die wieder offen sein müssen.

Obwohl die Bildmenge der psychologisch „direktere“ Begriff ist, ist das Urbildnehmen eine vernünftiger Wahl für die wesentliche strukturübertragende Mengenoperation, schon deshalb, weil im Gegensatz zur Bildmengenoperation das Urbildnehmen mit allen mengentheoretischen Grundoperationen (Komplement, Vereinigung und Durchschnitt) verträglich ist, was für Bildmengen nicht gilt — es ist nicht immer so, dass $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Deshalb werden auch in anderen Bereichen der Mathematik Urbilder häufig benutzt, um eine Struktur von einem Objekt auf ein anderes zu übertragen.

Hier nun ein paar triviale aber wichtige Grundeigenschaften der Stetigkeit.

Lemma 2.3 Seien (X, \mathcal{S}) , (Y, \mathcal{T}) und (Z, \mathcal{O}) topologische Räume.

a) Jede **konstante** Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist stetig.

- b) Die **Identitätsabbildung** $\text{id}_X: (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{S})$ ist stetig.
- c) Sei $a \in X$ und sei $f: X \longrightarrow Y$ stetig bei a und $g: Y \longrightarrow Z$ stetig bei $f(a)$. Dann ist $g \circ f: X \longrightarrow Z$ stetig bei a .

Daraus folgt, dass wenn f und g global stetig sind, dann ist auch $g \circ f$ global stetig.

Beweis. Zu a): Sei $y \in Y$ der konstante Wert von f , den f an jeder Stelle von X annimmt. Sei $U \subseteq Y$ offen.

Die Urbildmenge $f^{-1}(U)$ ist entweder leer, wenn $y \notin U$, oder ganz X , wenn $y \in U$. Da beide Möglichkeiten immer offen sind, ist f stetig.

Zu b): Hier geht es um die Identitätsabbildung von X mit der *gleichen* Topologie im Quell- und Zielraum. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist $\text{id}_X^{-1}(U) = U$ und deshalb wieder offen; also ist id_X stetig.

Zu c): Der Bildpunkt von a unter $g \circ f$ ist $g(f(a))$. Sei A eine Umgebung dieses Punktes in Z . Es gilt

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

Weil g stetig ist bei $f(a)$, ist $g^{-1}(A)$ eine Umgebung von $f(a)$, und weil f stetig ist bei a , ist $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ eine Umgebung von a .

Das zeigt, dass $g \circ f$ stetig ist bei a .

Wenn f und g global stetig sind, dann können wir dieses Argument für jedes $a \in X$ anwenden, und es folgt, dass auch $g \circ f$ global stetig ist. ■

Weil das Urbildnehmen unter einer Abbildung mit der Komplementenbildung vertauschbar ist, können wir in der Bedingung für die globale Stetigkeit aus Lemma 2.2 das Wort „offen“ überall durch „abgeschlossen“ ersetzen (das kann sich manchmal als nützlich erweisen):

Bemerkung 2.4 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) zwei topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

f ist genau dann stetig, wenn für jede *abgeschlossene* Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist in X .

Bevor wir uns in die Theorie der stetigen Abbildungen weiter vertiefen, wäre es nützlich, Kriterien zu haben, mit denen wir anhand von *Basen* oder *Umgebungsbasen* erkennen können, ob eine Abbildung stetig ist. (Auf diesem Weg werden wir auch die bekannte Definition der Stetigkeit aus der Analysis wiederfinden!)

Für die Diskussion darüber halten wir zwei offensichtliche und triviale Aussagen über Basen und Umgebungsbasen fest:

Bemerkung 2.5 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

a) Für jedes $x \in X$ ist

$$\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$$

eine Umgebungsbasis für das Umgebungssystem \mathcal{N}_x der Topologie \mathcal{T} .

Denn diese Behauptung ist nur eine Umformung der Definition 1.11 des Umgebungssystems der Topologie \mathcal{T} : die Umgebungen von x sind nach Definition die Obermengen der offenen Mengen um x , also der Mengen aus \mathcal{U}_x .

b) Allgemeiner, sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie \mathcal{T} .

Dann ist für jedes $x \in X$ die Familie

$$\mathcal{V}_x := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$$

schon eine Umgebungsbasis für das Umgebungssystem \mathcal{N}_x der Topologie \mathcal{T} .

Das ist leicht zu begründen, denn jede Basismenge um x ist offen und deshalb selber eine Umgebung von x . Und jede Umgebung von x enthält wie gesagt eine offene Menge U um x , die eine Vereinigung von Mengen aus der Basis \mathcal{B} ist und deshalb eine Basismenge B um x enthält, also eine Menge $B \in \mathcal{V}_x$.

Lemma 2.6 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung.

a) Sei $a \in X$, sei \mathcal{U}_a eine Umgebungsbasis für das lokale Umgebungssystem von \mathcal{T} bei a und sei $\mathcal{V}_{f(a)}$ eine Umgebungsbasis für das lokale Umgebungssystem von \mathcal{S} bei $f(a)$.

Folgende drei Bedingungen sind äquivalent:

- i) Die Abbildung f ist stetig bei a .
- ii) Für jede Menge $C \in \mathcal{V}_{f(a)}$ ist $f^{-1}(C)$ eine Umgebung von a .
- iii) Für jede Menge $C \in \mathcal{V}_{f(a)}$ gibt es eine Menge $A \in \mathcal{U}_a$ mit

$$A \subseteq f^{-1}(C), \quad \text{oder gleichbedeutend mit} \quad f(A) \subseteq C.$$

b) Sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie \mathcal{T} und sei \mathcal{C} eine Basis für die Topologie \mathcal{S} .

Die Abbildung f ist stetig bei $a \in X$ genau dann, wenn es für jede Menge $C \in \mathcal{C}$ mit $f(a) \in C$ eine Menge $B \in \mathcal{B}$ mit $a \in B$ gibt mit

$$B \subseteq f^{-1}(C), \quad \text{oder gleichbedeutend mit} \quad f(B) \subseteq C.$$

Die Abbildung f ist global stetig genau dann, wenn für jede Menge $C \in \mathcal{C}$ gilt, dass $f^{-1}(C)$ eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist, oder gleichbedeutend, wenn für jede Menge $C \in \mathcal{C}$ gilt, dass $f^{-1}(C) \in \mathcal{T}$.

Beweis. Zu a): Die Bedingungen ii) und iii) sind äquivalent, weil \mathcal{U}_a eine Umgebungsbasis für das lokale Umgebungssystem bei a ist. Bedingung ii) folgt aus i) nach der Definition der Stetigkeit, weil jede Menge $C \in \mathcal{V}_{f(a)}$ eine Umgebung von $f(a)$ ist.

Wir müssen nur noch zeigen, dass i) aus ii) folgt. Dazu sei V eine Umgebung von $f(a)$. Weil $\mathcal{V}_{f(a)}$ eine Umgebungsbasis bei $f(a)$ ist, gibt es eine Menge $C \in \mathcal{V}_{f(a)}$ mit $C \subseteq V$.

Daraus folgt $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(V)$, und da $f^{-1}(C)$ nach Bedingung ii) eine Umgebung von a ist, ist auch $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a und f ist stetig bei a .

Zu b): Die erste Aussage in Teil b) folgt sofort aus der Äquivalenz der Bedingungen a) i) und a) iii), wenn man Bemerkung 2.5 b) berücksichtigt (dass die Basismengen, die einen bestimmten Punkt enthalten, eine Umgebungsbasis bei diesem Punkt bilden).

Die Abbildung f ist global stetig genau dann, wenn f bei jedem Punkt von X stetig ist. Nach der ersten Aussage in Teil b) gilt das genau dann, wenn für jedes $C \in \mathcal{C}$ es um *jeden* Punkt von $f^{-1}(C)$ eine Menge $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $B \subseteq f^{-1}(C)$, oder gleichbedeutend, wenn $f^{-1}(C)$ eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist.

Das beweist die zweite Aussage. ■

Eine naheliegende Anwendung für diese Kriterien ist die Stetigkeit von Abbildungen zwischen (pseudo)metrischen Räumen.

Korollar 2.7 Seien (X, d) und (Y, d') metrische oder pseudometrische Räume, sei $a \in X$ und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Genau dann ist f stetig bei a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)). \quad (2.1)$$

Hier haben wir die gleiche Notation für die Bälle bezüglich der Metrik d und die Bälle bezüglich der Metrik d' benutzt, da diese Bälle in verschiedenen Räumen und um Punkte von verschiedenen Räumen liegen und deshalb kein Missverständnis aufkommen kann.

Die Bedingung kann man auch so formulieren: f ist genau dann stetig bei $a \in X$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$ gilt $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Das ist die klassische Definition der Stetigkeit, die jeder Studienanfänger in der ersten Analysisvorlesung lernt!

Beweis. Da in den metrischen Topologien die Bälle um einen Punkt eine Umgebungsbasis für das metrische Umgebungssystem an diesem Punkt bilden, folgt die Behauptung direkt aus der Äquivalenz der Bedingungen i) und iii) in Lemma 2.6 a). ■

In jeder mathematischen Theorie ist es wichtig zu wissen, welche Abbildungen die zu Grunde liegende Struktur respektieren, aber auch über diesen allgemeinen Aspekt hinaus haben die stetigen Abbildungen viele wichtige Anwendungen in der Topologie.

Man kann mit ihrer Hilfe Topologien vergleichen, wofür Lemma 2.8 auf der nächsten Seite ein Beispiel gibt.

Zu diesem Fragekreis gehört auch das wichtige Grundproblem, wann zwei verschiedene topologische Räume *gleich aussehende*, also strukturell gleiche, „isomorphe“ Topologien haben. Die Frage nach Isomorphismen tritt in jedem mathematischen Gebiet auf, weil eine gegebene Struktur sich immer auf viele Weisen realisieren lässt, mit Instanzen, die sich zwar unterscheiden, aber nur durch unwesentliche, nicht die eigentliche Struktur betreffende Merkmale.

In der Topologie ist die Isomorphiefrage sehr schwierig, aber für stetige Abbildungen gelten generell einige „topologische Erhaltungsgesetze“, die manchmal ausreichen, um zu erkennen, dass zwei Topologien wesentlich verschieden sind. Zwei Merkmale, die erhalten bleiben, sind so wichtig, dass wir ihnen später eigene Kapitel widmen werden.

Aber nicht nur sagen uns die stetigen Abbildungen zwischen zwei *bekannt*en topologischen Räumen viel über die topologische Struktur dieser Räume und ihre Beziehung zueinander. Man kann auch, wie schon im Vorwort auf Seite xi angedeutet, die stetigen Abbildungen zum eigentlichen Träger und *Definiens* der Struktur machen und durch eine Vorgabe der stetigen Abbildungen eine neue topologische Struktur erklären und festlegen. Mit dieser Methode erhält man eine elegante einheitliche Formulierung vieler wichtiger kanonischer Konstruktionen mit topologischen Räumen; dazu gehören Summen, kartesische Produkte und Quotienten topologischer Räume.

Wir beginnen diese Diskussion mit einer einfachen aber wichtigen Bemerkung über die enge Beziehung zwischen stetigen Abbildungen und den Topologien, die die Abbildungen verbinden. Diese enge Beziehung äußert sich darin, dass die genaue Kenntnis aller stetigen Abbildungen in einen Raum hinein oder aus einem Raum heraus die Topologie des Raumes eindeutig festlegt.

Lemma 2.8 *Sei X eine Menge und seien \mathcal{S} und \mathcal{T} zwei Topologien auf X .*

- a) *Genau dann ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, wenn $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$ stetig ist.*
- b) *Wenn für jeden topologischen Raum Z genau die gleichen Abbildungen $g: Z \rightarrow X$ stetig sind bezüglich \mathcal{S} wie bezüglich \mathcal{T} , dann ist $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.*
- c) *Wenn für jeden topologischen Raum Y genau die gleichen Abbildungen $h: X \rightarrow Y$ stetig sind bezüglich \mathcal{S} wie bezüglich \mathcal{T} , dann ist $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.*

Beweis. a) ist klar, denn für jede Teilmenge $U \subseteq X$ ist $\text{id}_X^{-1}(U) = U$. Die Identitätsabbildung zwischen den genannten Topologien auf X ist also genau dann stetig, wenn jede Menge aus \mathcal{S} auch in \mathcal{T} offen ist.

Zu b) und c): Wir wählen in b) $Z = X$ und in c) $Y = X$, versehen mit einer der Topologien \mathcal{S} oder \mathcal{T} . Die Identitätsabbildung id_X ist sicher stetig, wenn wir im „ursprünglichen“ X die gleiche Topologie \mathcal{S} oder \mathcal{T} wählen, wie im ursprünglichen Y oder Z .

Die Voraussetzung impliziert, dass id_X auch stetig sein muss, wenn wir im „ursprünglichen“ X die jeweils *andere* Topologie \mathcal{S} oder \mathcal{T} wählen als auf Y oder Z . Weil das für *beide* Wahlen \mathcal{S} und \mathcal{T} für die Topologie auf Y oder Z der Fall sein muss, haben wir in b) und in c), dass

$$\text{id}_X: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S}) \quad \text{und auch} \quad \text{id}_X: (X, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$$

stetig sind.

Aus Teil a) folgt sofort, dass $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, also dass beide Topologien gleich sind. ■

Korollar 2.9 *Aus Lemma 2.8 a) ist klar, dass die Identitätsabbildung einer Menge, die zwei verschiedene Topologien trägt, nicht immer stetig sein muss, was kein Widerspruch zu Lemma 2.3 b) ist.*

Insbesondere, wenn wir auf einer Menge X zwei Topologien $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{T}$ haben, von denen \mathcal{T} echt feiner ist als \mathcal{S} (zum Beispiel, wenn \mathcal{T} die diskrete und \mathcal{S} die indiskrete Topologie auf einer Menge mit mehr als einem Element ist), dann ist

$$\text{id}_X: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$$

stetig, aber die Umkehrfunktion $\text{id}_X: (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ ist nicht stetig!

Um nicht verschiedene Topologien auf einer Menge, sondern Topologien auf verschiedenen Mengen vergleichen zu können brauchen wir noch den Begriff eines „Isomorphismus“ der topologischen Struktur (der aber dummerweise nicht *Isomorphismus* genannt wird). Die Definition dieses Begriffs ist standardmäßig und klar:

Definition 2.10 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) zwei topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

Wir nennen f einen **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv ist, und wenn sowohl f wie auch die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ stetig sind.

Der Name ist also „Homöomorphismus“ und nicht Isomorphismus. Anders als bei algebraischen Isomorphismen muss man hier explizit verlangen, dass *auch die Umkehrabbildung* stetig ist. Korollar 2.9 zeigt, warum man das extra fordern muss.

Für Homöomorphismen gelten die üblichen Standardaussagen über Isomorphismen.

Bemerkung 2.11 a) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Die Identitätsabbildung

$$\text{id}_X: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$$

(zwischen den *gleichen* Topologien!) ist offensichtlich ein Homöomorphismus.

b) Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei

$$f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$$

ein Homöomorphismus. Dann ist f invertierbar und

$$f^{-1}: (Y, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$$

ist auch ein Homöomorphismus (da stetig, selber bijektiv und mit stetiger Umkehrabbildung f).

c) Seien (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{S}) und (Z, \mathcal{O}) topologische Räume und seien

$$f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S}) \quad \text{und} \quad g: (Y, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{O})$$

Homöomorphismen. Dann ist

$$g \circ f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Z, \mathcal{O})$$

auch ein Homöomorphismus.

Denn eine Verknüpfung von zwei bijektiven Abbildungen ist bijektiv, $g \circ f$ ist stetig nach Lemma 2.3 c), und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ist stetig nach Lemma 2.3 c), da f^{-1} und g^{-1} stetig sind als Umkehrabbildungen von Homöomorphismen.

Mit Homöomorphismen kann man verschiedene topologische Räume auf „gleiche Struktur“ vergleichen und klassifizieren.

Definition 2.12 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) zwei topologische Räume. Sie heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ bezüglich der genannten Topologien gibt.

Wir schreiben dann

$$(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S}) \quad \text{oder kürzer} \quad X \cong Y.$$

Aus Bemerkung 2.11 ist klar, dass Homöomorphie \cong eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller topologischen Räume ist.

Wenn eine Menge X mit einer Topologie \mathcal{T} versehen ist, dann haben wir in Lemma 2.8 gesehen, dass die bezüglich dieser Topologie stetigen Abbildungen zwischen X und anderen Räumen die Topologie eindeutig charakterisieren, d. h., nicht nur bestimmt die Topologie die stetigen Abbildungen, sondern die stetigen Abbildungen halten auch die Topologie eindeutig fest.

Es gilt aber noch mehr! Auch wenn wir noch keine Topologie auf X haben, aber eine irgendwo herrührende Vorstellung, welche mengentheoretischen Abbildungen zwischen X und gewissen topologischen Räumen stetig sein sollten, so bestimmt schon diese Vorstellung eine „effizienteste“ Topologie auf X , mit der sie in Erfüllung geht. Und dies liefert eine bequeme, einfache und leistungsfähige *Konstruktionsmethode* für neue Topologien, die für viele mathematische Standardkonstruktionen sehr geeignet ist.

Wir beschreiben zuerst, wie vorgegebene Abbildungen Topologien aus ihren Zielräumen in ihren Quellraum, oder umgekehrt aus ihren Quellräumen in ihren Zielraum, so übertragen können, dass die Abbildungen bezüglich der schon vorhandenen und der neu erschaffenen Topologie stetig werden. Das geht, wie gesagt, in jeder der beiden Richtungen entlang des Abbildungspfeils.

Definition 2.13 Sei X eine Menge, sei (Y, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $f: X \rightarrow Y$ eine (mengentheoretische) Abbildung.

Wir setzen

$$f^{-1}(\mathcal{T}) := \{ f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T} \}. \quad (2.2)$$

Weil $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$, und weil Urbildnehmen mit Vereinigung und Durchschnitt verträglich ist, prüft man sofort nach, dass $f^{-1}(\mathcal{T})$ eine Topologie auf X ist, und da sie genau aus den Teilmengen von X besteht, die offen sein müssen, wenn f stetig werden soll, ist f tatsächlich stetig bezüglich dieser Topologie, und $f^{-1}(\mathcal{T})$ ist die größte Topologie auf X mit dieser Eigenschaft.

Wir nennen $f^{-1}(\mathcal{T})$ die *unter f zurückgeholte Topologie von \mathcal{T}* , oder etwas vornehmer die *Initialtopologie* von f .

Der Name „Initialtopologie“ gibt kund, dass die neue Topologie dort entsteht, wo f beginnt.

Bemerkung 2.14 Seien (X, \mathcal{S}) und (Y, \mathcal{T}) topologische Räume und sei

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung.

Dann ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}$.

Hier ist nichts zu beweisen; dies ist einfach eine Umformulierung der Aussage in Definition 2.13, dass $f^{-1}(\mathcal{T})$ die größte Topologie auf X ist, in der f stetig ist!

Die Konstruktion in Definition 2.13 können wir leicht verallgemeinern. Es können mehrere Abbildungen von einer Menge in verschiedene topologische Räume eine Topologie auf der gemeinsamen Quellmenge bestimmen, in der sie *alle* stetig werden.

Definition 2.15 Sei X eine Menge, sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei ein topologischer Raum $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ und eine mengentheoretische Abbildung $f_\lambda: X \longrightarrow Y_\lambda$ gegeben.

Nach Lemma und Definition 1.20 c) gibt es eine größte Topologie \mathcal{T} auf X , die feiner als alle Topologien $f_\lambda^{-1}(\mathcal{T}_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ ist, also eine größte Topologie \mathcal{T} , in der alle Abbildungen f_λ stetig sind.

Man nennt diese Topologie \mathcal{T} die *Initialtopologie der Familie von Abbildungen $\mathcal{F} := \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$* .

Oft schreiben wir für diese Topologie auch $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, um die Familie von Abbildungen zu kennzeichnen, deren Initialtopologie sie ist.

Man beachte, dass in Definition 2.15 nicht verlangt wird, dass die topologischen Räume $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ alle verschieden sein müssen. Manchmal werden wir die Definition anwenden für eine Familie von Abbildungen von X in einen festen zweiten topologischen Raum (Y, \mathcal{S}) .

Es gibt eine „duale“ Konstruktion zur Initialtopologie, bei der die Rollen von Quell- und Zielraum vertauscht werden.

Definition 2.16 a) Sei X eine Menge, sei (Z, \mathcal{S}) ein topologischer Raum und sei $g: Z \rightarrow X$ eine (mengentheoretische) Abbildung. Wir setzen

$$g(\mathcal{S}) := \{ U \subseteq X \mid g^{-1}(U) \in \mathcal{S} \}. \quad (2.3)$$

Weil $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $g^{-1}(X) = Z$, und weil Urbildnehmen mit Vereinigung und Durchschnitt verträglich ist, sieht man auch hier, dass $g(\mathcal{S})$ eine Topologie auf X ist, und da sie genau aus den Teilmengen von X besteht, deren Urbilder offen sind und die somit der Stetigkeit von g nicht widersprechen, ist g tatsächlich stetig bezüglich dieser Topologie, und $g(\mathcal{S})$ ist die *feinste* Topologie auf X mit dieser Eigenschaft.

Wir nennen $g(\mathcal{S})$ die **Bildtopologie von \mathcal{S} unter g** , oder etwas gehobener die **Finaltopologie** von g . Der Name „Finaltopologie“ ist dadurch motiviert, dass die neue Topologie dort entsteht, wo g endet.

Ist \mathcal{T} eine beliebige Topologie auf X , so ist g genau dann stetig bezüglich \mathcal{T} , wenn $\mathcal{T} \subseteq g(\mathcal{S})$.

- b) Sei X eine Menge, sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei ein topologischer Raum $(Z_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ und eine mengentheoretische Abbildung $g_\lambda: Z_\lambda \rightarrow X$ gegeben.

Nach Lemma und Definition 1.20 a) gibt es eine feinste Topologie \mathcal{S} auf X , die gröber als alle Topologien $g_\lambda(\mathcal{S}_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ ist, also eine feinste Topologie \mathcal{S} , in der alle Abbildungen g_λ stetig sind.

Man nennt diese Topologie \mathcal{S} die **Finaltopologie der Familie von Abbildungen $\mathcal{F} := \{ g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$** .

Sie ist gegeben durch

$$\mathcal{S} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda(\mathcal{S}_\lambda) = \{ U \subseteq X \mid g_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{S}_\lambda \text{ für jedes } \lambda \in \Lambda \}.$$

Wir haben gerade gesehen, dass eine Familie von Abbildungen zwischen einer Menge und diversen topologischen Räumen eine kanonische Topologie auf der Menge bestimmt, in der die Abbildungen stetig werden. Darüber hinaus haben wir eine genaue Beschreibung dieser Topologie.

Sehr oft muss man auch wissen, welche weiteren Abbildungen zwischen dem gerade konstruierten topologischen Raum und anderen topologischen Räumen stetig sind. Sicher kann man das immer anhand der erzeugten Topologie entscheiden, deren Details man ja kennt, aber in vielen Fällen ist es zweckmäßiger und bequemer, diese Frage direkt anhand der Familie von Abbildungen zu prüfen, aus denen wir die neue Topologie als Initial- oder Finaltopologie gewonnen haben.

Wie das geht, sagt Lemma 2.18. Wir bereiten dieses Lemma mit einer kleinen Hilfsaussage vor.

Hilfssatz 2.17 Sei X eine Menge und seien (Z, \mathcal{S}) und (Y, \mathcal{T}) topologische Räume.

Seien $g: Z \rightarrow X$ und $f: X \rightarrow Y$ mengentheoretische Abbildungen. (Die Verknüpfung $f \circ g: Z \rightarrow Y$ ist aber eine Abbildung zwischen topologischen Räumen mit den angegebenen Topologien.)

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a) $f \circ g$ ist stetig.
- b) $f^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq g(\mathcal{S})$.
- c) f ist stetig bezüglich der Topologie $g(\mathcal{S})$ auf X .
- d) g ist stetig bezüglich der Topologie $f^{-1}(\mathcal{T})$ auf X .

Beweis. a) \iff b): Die Verknüpfung $f \circ g$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ gilt

$$(f \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U)) \in \mathcal{S},$$

oder nach der Definition der Bildtopologie $g(\mathcal{S})$, wenn für jedes $U \in \mathcal{T}$ gilt

$$f^{-1}(U) \in g(\mathcal{S}). \quad (2.4)$$

Aber $f^{-1}(\mathcal{T})$ besteht gerade aus den Mengen $f^{-1}(U)$ für $U \in \mathcal{T}$, so dass das Gelten von (2.4) für alle $U \in \mathcal{T}$ genau der Bedingung b) entspricht.

b) \iff c): Diese Äquivalenz ist die Aussage von Bemerkung 2.14 (mit $g(\mathcal{S})$ anstelle von \mathcal{S}).

b) \iff d): Diese Äquivalenz ist die Aussage der letzten Zeile von Definition 2.16 a) (mit $f^{-1}(\mathcal{T})$ an der Stelle von \mathcal{T}). \blacksquare

Lemma 2.18 a) Sei X eine Menge und für jedes λ in einer Indexmenge Λ sei f_λ eine Abbildung von X in einen topologischen Raum $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. Sei \mathcal{T} die Initialtopologie der Familie von Abbildungen $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Sei (Z, \mathcal{S}) ein topologischer Raum und $g: Z \rightarrow X$ eine Abbildung. Genau dann ist g stetig bezüglich \mathcal{T} , wenn die Abbildungen

$$f_\lambda \circ g: Z \rightarrow Y_\lambda$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ stetig sind.

Man beachte, dass nach Lemma 2.8 b) diese Bedingung die Topologie \mathcal{T} eindeutig charakterisiert.

b) Sei X eine Menge und für jedes λ in einer Indexmenge Λ sei g_λ eine Abbildung von einem topologischen Raum $(Z_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ nach X . Sei \mathcal{S} die Finaltopologie der Familie von Abbildungen $\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Sei (Y, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $h: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Genau dann ist h stetig bezüglich \mathcal{S} , wenn die Abbildungen

$$h \circ g_\lambda: Z_\lambda \rightarrow Y$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ stetig sind.

Man beachte, dass nach Lemma 2.8 c) diese Bedingung die Topologie \mathcal{S} eindeutig charakterisiert.

Beweis. Zu a): Wenn g stetig ist bezüglich \mathcal{T} , dann sind alle $f_\lambda \circ g$ stetig, da die f_λ immer stetig sind bezüglich ihrer Initialtopologie \mathcal{T} .

Umgekehrt, wenn alle $f_\lambda \circ g$ stetig sind, dann ist jedes f_λ stetig bezüglich der Topologie $g(\mathcal{S})$ nach Hilfssatz 2.17 c). Weil \mathcal{T} die größte Topologie auf X ist, bezüglich der die f_λ alle stetig sind, gilt

$$\mathcal{T} \subseteq g(\mathcal{S}),$$

was nach Definition 2.16 a) bedeutet, dass g stetig ist bezüglich der Topologie \mathcal{T} .

Zu b): Wenn h stetig ist bezüglich \mathcal{S} , dann sind alle $h \circ g_\lambda$ stetig, da die g_λ automatisch stetig sind bezüglich ihrer Finaltopologie \mathcal{S} .

Umgekehrt, wenn alle $h \circ g_\lambda$ stetig sind, dann ist jedes g_λ stetig bezüglich der Topologie $h^{-1}(\mathcal{T})$ nach Hilfssatz 2.17 d). Weil \mathcal{S} die feinste Topologie auf X ist, bezüglich der die g_λ alle stetig sind, gilt

$$h^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S},$$

was nach Bemerkung 2.14 bedeutet, dass h stetig ist bezüglich der Topologie \mathcal{S} . ■

Korollar 2.19 a) Sei X eine Menge und für jedes λ in einer Indexmenge Λ sei f_λ eine Abbildung von X in einen topologischen Raum $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. Sei \mathcal{T} die Initialtopologie der Familie von Abbildungen $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Sei Z eine Menge und sei $h: Z \rightarrow X$ eine mengentheoretische Abbildung. Sei $\mathcal{S} := h^{-1}(\mathcal{T})$ die Initialtopologie von h bezüglich der Topologie \mathcal{T} auf X .

Dann ist \mathcal{S} auch die Initialtopologie der Familie von Abbildungen

$$\mathcal{F} := \{f_\lambda \circ h: Z \rightarrow Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

b) Sei X eine Menge und für jedes λ in einer Indexmenge Λ sei g_λ eine Abbildung von einem topologischen Raum $(Z_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ nach X . Sei \mathcal{S} die Finaltopologie der Familie von Abbildungen $\{g_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Sei Y eine Menge und sei $h: X \rightarrow Y$ eine mengentheoretische Abbildung. Sei $\mathcal{T} := h(\mathcal{S})$ die Finaltopologie von h bezüglich der Topologie \mathcal{S} auf X .

Dann ist \mathcal{T} auch die Finaltopologie der Familie von Abbildungen

$$\mathcal{G} := \{h \circ g_\lambda: Z_\lambda \rightarrow Y \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Beweis. Für die (sehr einfachen) Beweise dieser Aussagen hat man die Wahl zwischen zwei Methoden. Da die Beweise der beiden Teile einander sehr ähnlich sind, wollen wir uns nicht auf eine Methode für beide Teile festlegen, sondern nutzen die Gelegenheit, beide Methoden vorzuführen, indem wir eine Methode für Teil a) anwenden und die andere für Teil b). Man versteht sofort, wie man die jeweilige Methode auch im anderen Teil hätte anwenden können.

Zu a): Die Initialtopologie von \mathcal{F} ist die größte Topologie auf Z , in der alle $f_\lambda \circ h$ stetig sind bezüglich der Topologien \mathcal{T}_λ auf Y_λ .

Aber nach Lemma 2.18 a) sind alle $f_\lambda \circ h$ stetig genau dann, wenn h stetig ist bezüglich \mathcal{T} . Also ist die Initialtopologie von \mathcal{F} auch die größte Topologie auf Z , in der h stetig ist bezüglich \mathcal{T} , und dies ist wiederum nach Definition die Initialtopologie von h bezüglich \mathcal{T} , also die Topologie \mathcal{S} .

Zu b): Sei W ein topologischer Raum und sei $\varphi: Y \rightarrow W$ eine Abbildung.

Nach Lemma 2.18 b) ist φ stetig bezüglich $\mathcal{T} = h(\mathcal{S})$ genau dann, wenn $\varphi \circ h$ stetig ist bezüglich \mathcal{S} , und das ist genau dann der Fall, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Abbildung $\varphi \circ h \circ g_\lambda: Z_\lambda \rightarrow W$ stetig ist bezüglich \mathcal{S}_λ .

Aber das ist nach Lemma 2.18 b) auch die Bedingung dafür, dass φ stetig ist bezüglich der Finaltopologie der Familie \mathcal{G} . Nach der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 2.8 c) ist diese Topologie also gleich \mathcal{T} . ■

In der Mathematik gibt es einige wichtige Standardkonstruktionen, die in fast allen Theorien vorkommen und in allen Theorien (in denen sie vorkommen) gleiche oder ähnliche allgemeine Eigenschaften haben. Diese Konstruktionen bauen aus Objekten der Theorie neue Objekte mit einem bestimmten Verhältnis zu den Objekten, aus denen sie konstruiert wurden.

Zu den wichtigen Konstruktionen gehören Unterobjekte (die ihre Struktur in einem gewissen Sinne als „Einschränkung“ der Struktur des Oberobjekts erhalten), Summen von Objekten (die aus den Summanden so zusammengebaut werden, dass die Summanden sich ohne gegenseitige Beeinträchtigung als Unterobjekte in der Summe wiederfinden), Quotienten eines Objekts

nach einem geeigneten Unterobjekt (in denen der ursprüngliche „Nenner“ des Quotienten zu einem trivialen, möglichst einfachen Bestandteil zusammenschrumpft), und Produkte von Objekten (die aus den Faktoren so zusammengebaut werden, dass die Faktoren sich ohne gegenseitige Beeinträchtigung als Quotienten des Produkts wiederfinden). Alle diese Konstruktionen kennen Sie vielleicht schon aus der Algebra, zum Beispiel.

In der Topologie lassen sich diese Konstruktionen am elegantesten und bequemsten mit Hilfe von Initial- und Finaltopologien beschreiben. Dieser Zugang hat die Vorteile, dass er die Systematik der Konstruktionen erkennbar macht (und klar macht, warum dies auch gesamtmathematisch und gebietsübergreifend gesehen die richtigen Konstruktionen sind) und dass er sich auch in Anbetracht der gerade bewiesenen Sätze als sehr hilfreich beim späteren Umgang mit den Konstrukten erweist.

Trotz der Abstraktheit dieser Definitionen ist es nicht schwer, aus ihnen eine direkte Beschreibung der konstruierten Topologien zu gewinnen, so dass man diese Konstruktionen auch informal gut verstehen kann (viel besser, als die Erfinder der modernen Topologie am Anfang des letzten Jahrhunderts sie verstanden haben).

Wir beginnen mit dem einfachsten und naheliegendsten Begriff, den eines *Unterraums* eines topologischen Raumes. Den können wir (anders als in der Algebra) auf jeder Teilmenge eines topologischen Raumes realisieren.

Definition 2.20 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Sei $i: A \hookrightarrow X$ die Inklusion von A in X .

Die von \mathcal{T} induzierte *Unterraumtopologie* auf A ist definiert als die Initialtopologie der Inklusion i . Wir bezeichnen diese Topologie mit $\mathcal{T}|A$.

Ein topologischer Raum (Y, \mathcal{S}) heißt ein *topologischer Unterraum* oder schlicht ein *Unterraum* von (X, \mathcal{T}) , wenn Y eine Teilmenge von X ist und wenn $\mathcal{S} = \mathcal{T}|Y$.

Da die Unterraumtopologie auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ eindeutig bestimmt ist durch die Topologie \mathcal{T} von X , sprechen wir meistens nur vom „Unterraum Y “ statt vom „Unterraum $(Y, \mathcal{T}|Y)$ “.

Die Unterraumtopologie kann man auch direkt angeben und sie hat eine sehr einfache Beschreibung.

Bemerkung 2.21 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

Eine Teilmenge $V \subseteq A$ ist offen in der Unterraumtopologie auf A genau dann, wenn es eine offene Teilmenge U von X gibt mit $V = U \cap A$.

In anderen Worten,

$$\mathcal{T}|A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Beweis. Sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion. Für jede Teilmenge $B \subseteq X$ gilt offensichtlich $i^{-1}(B) = B \cap A$.

Also ist

$$\mathcal{T}|A := i^{-1}(\mathcal{T}) := \{i^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}\} = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

■

Hier noch einige einfache aber nützliche Fakten über die Unterraumtopologie.

Lemma 2.22 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, sei $A \subseteq X$ und sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion. Auf A nehmen wir die Unterraumtopologie.

- a) Sei (Y, \mathcal{S}) ein topologischer Raum und $f: Y \rightarrow A$ eine Abbildung. Dann ist f stetig bezüglich $\mathcal{T}|A$ genau dann, wenn $i \circ f$ stetig ist.
- b) Sei (Y, \mathcal{S}) ein topologischer Raum und $f: Y \rightarrow A$ eine Abbildung. Dann kann man f auch als eine Abbildung $Y \rightarrow X$ betrachten, und f ist genau dann stetig als Abbildung nach X , wenn f stetig ist als eine Abbildung nach A .
- c) Sei Z ein topologischer Raum und $g: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung. Dann ist auch $g|A: A \rightarrow Z$ stetig.
- d) Eine Teilmenge $B \subseteq A$ ist genau dann abgeschlossen in der Unterraumtopologie, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge C von X gibt mit

$$B = C \cap A.$$

- e) Sei $B \subseteq A \subseteq X$. Dann trägt B eine Unterraumtopologie als Unterraum von X und eine Unterraumtopologie als Unterraum von A (wobei A die Unterraumtopologie von X trägt). Beide dieser Unterraumtopologien auf B sind gleich.

Das kann man auch so sagen:

$$(\mathcal{T}|A)|B = \mathcal{T}|B.$$

f) Wenn A eine offene Teilmenge von X ist, dann ist eine Teilmenge U von A genau dann offen in A , wenn U offen in X ist.

In anderen Worten, wenn $A \in \mathcal{T}$, dann ist

$$\mathcal{T}|A = \{U \subseteq A \mid U \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T} \cap \mathcal{P}(A).$$

g) Wenn A eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, dann ist eine Teilmenge $B \subseteq A$ genau dann abgeschlossen in A , wenn B abgeschlossen in X ist.

Beweis. a) ist die Aussage von Lemma 2.18 a), bezogen auf die Initialtopologie von i (die ja gleich der Unterraumtopologie ist).

b) besagt genau das Gleiche, wie a), aber drückt es nur in Worten statt Formeln aus.

Zu c): $g|A = g \circ i$ und ist somit als Verknüpfung von zwei stetigen Abbildungen stetig.

Zu d): Eine Teilmenge B von A ist genau dann abgeschlossen in der Unterraumtopologie, wenn $A \setminus B$ offen ist in der Unterraumtopologie.

Nach Bemerkung 2.21 ist das genau dann der Fall, wenn es eine offene Teilmenge U von X gibt, mit

$$A \setminus B = A \cap U,$$

oder äquivalent, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $C (= X \setminus U)$ gibt, mit

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus C).$$

Diese Gleichheit gilt genau dann, wenn auch die Komplemente bezüglich A gleich sind, also wenn

$$B = A \setminus (X \setminus C) = A \cap C.$$

Zu e): Dies ist einfach die Aussage von Korollar 2.19 a): Wenn j die Inklusion $B \rightarrow A$ bezeichnet, dann ist

$$(i \circ j)^{-1}(\mathcal{T}) = j^{-1}(i^{-1}(\mathcal{T}))$$

oder in anderen Worten

$$\mathcal{T}|B = (\mathcal{T}|A)|B.$$

Zu f): Wenn $U \subseteq A$ offen in X ist, dann ist U offen in A , weil für U als Teilmenge von A gilt

$$U = U \cap A.$$

Umgekehrt, wenn U offen in A ist, dann gibt es eine offene Teilmenge V von X mit $U = V \cap A$, aber weil auch A offen in X ist, folgt daraus, dass U als Durchschnitt zweier offener Mengen auch offen in X ist.

Zu g): In Anbetracht von Teil d) kann man das gleiche Argument verwenden, wie für Teil f); man muss nur jedes Vorkommen von „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzen. ■

Wir haben gerade gesehen, dass jede Teilmenge eines topologischen Raumes X eine kanonische Topologie trägt, nämlich die Unterraumtopologie. Hier ist auf dem großen Raum X die Topologie schon vorgegeben, und sie vererbt sich auf die Unterräume, für die wir vor dieser Konstruktion keine eigene Topologie kannten.

Wir wollen uns jetzt dem umgekehrten Problem widmen, vorgegebene topologische Räume (mit bekannten und ebenfalls vorgegebenen Topologien) zu einem neuen *Oberraum* „zusammenzukleben“, in dem die vorgegebenen Räume alle als Unterräume auftreten. Da keine besonderen Anforderungen an die bekannten Räume gestellt werden sollen, dürfen sie sich in dem großen Raum nicht schneiden (sonst müsste sich auf dem Schnitt eine gemeinsame Unterraumtopologie ergeben), aber der große Raum soll auch keinen überflüssigen Umfang haben, also keine Punkte enthalten, die nicht aus den vorgegebenen Unterräumen stammen.

Als Menge ist das leicht zu erreichen: wir fügen die vorgegebenen Räume einfach als disjunkte Vereinigung zusammen. Und die Topologie des großen Raumes wird dadurch bestimmt, dass die Unterraumtopologie auf jedem der vorgegebenen Räumen zu seiner vorgegebenen Topologie passt.

Definition 2.23 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein topologischer Raum.

Wir setzen

$$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda}^D X_\lambda.$$

Hier handelt es sich um die *disjunkte* Vereinigung der X_λ (auch wenn sie ursprünglich nicht disjunkt waren).

Die *formale* Definition der disjunkten Vereinigung ersetzt die X_λ durch Kopien, die durch einen Trick disjunkt gemacht wurden, und bildet die Vereinigung dieser Kopien. Der Standardtrick besteht darin, X_λ durch $X_\lambda \times \{\lambda\}$ zu ersetzen, und definiert die disjunkte Vereinigung als

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda}^D X_\lambda := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda \times \{\lambda\}),$$

aber wir wollen die Details der Realisierung außer Acht lassen und wie die meisten Mathematiker einfach so tun, als hätten wir irgendwie disjunkte Kopien von den X_λ erstellt und vereinigt.

Jedes X_λ ist eine (Kopie einer) Teilmenge der disjunkten Vereinigung und wir haben für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine kanonische Inklusion

$$i_\lambda: X_\lambda \longrightarrow \bigcup_{\mu \in \Lambda}^D X_\mu.$$

Wir definieren die **Summentopologie** \mathcal{T} auf X als die Finaltopologie der Familie von Inklusionen i_λ . Den topologischen Raum (X, \mathcal{T}) nennen wir die **Summe** der Räume $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ und wir schreiben dafür

$$(X, \mathcal{T}) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda).$$

Die Summe von topologischen Räumen wird manchmal auch ihr **Koprodukt** genannt.

Bemerkung 2.24 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein topologischer Raum. Sei

$$(X, \mathcal{T}) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda).$$

- a) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen in X , wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt, dass $U \cap X_\lambda$ offen ist in X_λ .
- b) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X , wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt, dass $A \cap X_\lambda$ abgeschlossen ist in X_λ .
- c) Jeder Summand X_λ von X ist sowohl offen wie auch abgeschlossen in X .
- d) Sei (Y, \mathcal{S}) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Abbildung

$$f|_{X_\lambda}: X_\lambda \longrightarrow Y$$

stetig ist.

Beweis. Wir bezeichnen mit i_λ die Inklusion $X_\lambda \longrightarrow X$.

Zu a): Nach Definition 2.16 b) ist die Finaltopologie der Familie der i_λ gleich dem Durchschnitt $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda(\mathcal{T}_\lambda)$; also ist $U \subseteq X$ genau dann offen in der

Summentopologie \mathcal{T} , wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt, dass $i_\lambda^{-1}(U) = U \cap X_\lambda$ offen ist in der Topologie \mathcal{T}_λ .

Zu b): Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X , wenn $X \setminus A$ offen ist in X , und nach Teil a) gilt das genau dann, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Menge

$$(X \setminus A) \cap X_\lambda = X_\lambda \setminus (A \cap X_\lambda)$$

offen ist in X_λ , oder gleichbedeutend, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Menge $A \cap X_\lambda$ abgeschlossen ist in X_λ .

Zu c): Für jedes $X_\lambda \subseteq X$ und für jedes $\mu \in \Lambda$ gilt

$$X_\lambda \cap X_\mu = \begin{cases} X_\mu, & \text{wenn } \mu = \lambda; \\ \emptyset, & \text{wenn } \mu \neq \lambda \text{ (weil die } X_\nu \text{ disjunkt sind in } X). \end{cases}$$

In beiden Fällen ist der Durchschnitt sowohl offen wie auch abgeschlossen in X_μ . Die Behauptung folgt dann aus Teilen a) und b).

Zu d): Weil $f|X_\lambda = f \circ i_\lambda$, ist dies einfach die Aussage von Lemma 2.18 b), die die Finaltopologie einer Familie von Abbildungen durch die stetigen Abbildungen in beliebige andere Räume charakterisiert. ■

Dieses Lemma zeigt, dass ein einer Summe von topologischen Räumen die Summanden „lose“ und mehr oder weniger unabhängig voneinander zu einem Gesamtraum zusammengefasst sind, aber die Topologie jedes Summanden beeinflusst nur ihn selber in der Gesamtheit, und keinen anderen Summanden. Trotzdem ist diese Konstruktion in manchen Situationen nützlich.

Die Summenkonstruktion gibt es auch in anderen Gebieten der Mathematik; sie wird allgemein charakterisiert durch folgende so genannte **universelle Eigenschaft**.

Satz 2.25 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein topologischer Raum. Sei

$$(X, \mathcal{T}) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda).$$

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei i_λ die kanonische Inklusion $X_\lambda \rightarrow X$.

Der Summenraum (X, \mathcal{T}) (zusammen mit den Inklusionen $i_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$) besitzt die „universelle Eigenschaft“, dass es zu jedem topologischen Raum (Y, \mathcal{S}) und zu jeder Familie von stetigen Abbildungen $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $F: X \rightarrow Y$ gibt mit

$$f_\lambda = F \circ i_\lambda \quad \text{für jedes } \lambda \in \Lambda.$$

Ferner bestimmt diese Eigenschaft die Summe bis auf Homöomorphie, d. h., ist X' mit stetigen Abbildungen $i'_\lambda: X_\lambda \rightarrow X'$ ein anderer topologischer Raum und eine andere Familie von kanonischen Abbildungen, die auch die genannte universelle Eigenschaft hat, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus $\varphi: X \rightarrow X'$, so dass

$$i'_\lambda = \varphi \circ i_\lambda \quad \text{für jedes } \lambda \in \Lambda$$

(woraus durch Verknüpfung mit φ^{-1} eine entsprechende Behauptung mit dem Homöomorphismus φ^{-1} folgt, bei der die Rollen von X und X' und von i_λ und i'_λ vertauscht sind).

Beweis. Der Beweis wird dem Leser als (umfangreiche aber nicht schwierige) Übung überlassen. Als Muster und Hilfe dabei diene der ähnliche Beweis der entsprechenden Behauptung für Produkträume in Satz 2.49 weiter unten. ■

Die bisherigen Konstruktionen von topologischen Unterräumen und von topologischen Summenräumen haben „Dualisierungen“, bei denen die Abbildungspfeile in die andere Richtung zeigen.

Für die Konstruktion eines topologischen Unterraums brauchten wir einen topologischen Raum X und eine *Teilmenge* A von X , die charakterisiert wird durch eine *injektive Abbildung* $i: A \rightarrow X$ (nämlich durch die Inklusion).

Die duale Konstruktion ist uns mengentheoretisch nicht so geläufig, aber wir brauchen wieder einen topologischen Raum X , eine Menge Y , und wegen der Umkehrung der Pfeile diesmal eine *surjektive Abbildung* $p: X \rightarrow Y$. Diese Abbildung bestimmt dann wieder eine Topologie auf der Menge.

Definition 2.26 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, sei Y eine Menge und sei $p: X \rightarrow Y$ eine *surjektive* Abbildung.

Wir nennen die Finaltopologie $p(\mathcal{T})$ von p die von p induzierte **Quotiententopologie** auf Y .

Allgemein heißt ein topologischer Raum (Y, \mathcal{S}) ein **Quotientenraum** oder einfach ein **Quotient** von (X, \mathcal{T}) , wenn es eine surjektive Abbildung $p: X \rightarrow Y$ gibt, deren Quotiententopologie \mathcal{T} ist. Die Abbildung p heißt die **Projektion** des Quotientenraumes Y von X . Die Topologie auf dem Quotienten Y ist durch die Projektion eindeutig bestimmt.

Eine andere häufig benutzte Sprechweise für Quotienten ist die folgende:

Definition 2.27 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume. Eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

heißt *identifizierend*, wenn f surjektiv ist und wenn \mathcal{S} die von f aus \mathcal{T} induzierte Quotiententopologie auf Y ist, d. h., wenn $\mathcal{S} = f(\mathcal{T})$.

Bemerkung 2.28 Um zu verstehen, was es mit Quotienten und identifizierenden Abbildungen auf sich hat, sollte man überlegen, wie surjektive Abbildungen zustande kommen.

Wenn wir auf einer Menge X eine Äquivalenzrelation \sim einführen, können wir die Menge X/\sim der Äquivalenzklassen dieser Relation bilden. Wir nennen diese Menge auch den *Quotienten* von X nach der Äquivalenzrelation \sim

Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von x mit $[x]$. Wir erhalten automatisch aus der Äquivalenzrelation eine *surjektive* Abbildung

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/\sim, \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

die wir die *Projektion* von X auf X/\sim nennen.

Umgekehrt bestimmt jede Abbildung $p: X \longrightarrow Y$ eine Äquivalenzrelation \sim auf X durch die Vorschrift

$$x \sim y : \iff p(x) = p(y),$$

und p induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{p}: X/\sim &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto p(x) \end{aligned}$$

von der Menge der Äquivalenzklassen X/\sim nach Y , mit der Eigenschaft, dass

$$\bar{p} \circ \pi = p.$$

Wenn man bedenkt, wie die Äquivalenzrelation definiert wurde, ist es klar, dass \bar{p} wohldefiniert und *injektiv* ist.

Wenn p surjektiv war, dann ist \bar{p} sogar *bijektiv*, und das ist der Grund, warum wir die Surjektivität der Abbildung in der Definition des Quotientenraums verlangt haben. Bis auf Verknüpfung mit der Bijektion \bar{p} ist eine surjektive Abbildung von X in eine andere Menge nichts anderes als die Projektion von X auf den Quotienten nach einer Äquivalenzrelation!

Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind die Urbildmengen $p^{-1}(\{y\})$ der einzelnen Punkte $y \in Y$. (Diese Urbildmengen heißen auch die *Fasern* von p .)

Umgekehrt kann man aus einer beliebigen Vorgabe einer Zerlegung von X in Äquivalenzklassen eine surjektive Abbildung p konstruieren, die diese

Klassen als Fasern hat. Dazu betrachte man die Äquivalenzrelation definiert durch die *Zugehörigkeit zur gleichen vorgegebenen Äquivalenzklasse* und man nehme als p die Projektion von X auf den Quotienten nach dieser Äquivalenzrelation.

Das Bilden von Quotienten nach einer Äquivalenzrelation hat eine wichtige geometrische Anwendung, denn in dem Quotienten werden die Punkte jeder Äquivalenzklasse zu einem einzigen Punkt *identifiziert* (deshalb sprechen wir von *identifizierenden Abbildungen*) oder zusammenschmolzen, als ob man sie alle „zusammengeklebt“ hätte. Die Quotiententopologie erlaubt, dies nicht nur mengentheoretisch, sondern auch *topologisch* zu machen, und dies ist ein wesentliches „Bastelwerkzeug“ der Topologie.

Das Wort Basteln können Sie wörtlich nehmen, denn man kann tatsächlich, als würde man es mit Papier oder Gummi und einem Kleber oder Garn machen, aus bekannten topologischen Räumen neue Räume „zusammenkleben“ oder „zusammennähen“.

Dazu muss man nur die einzelnen Bauteile, die man benötigt, sammeln (indem man sie zu einem Summenraum zusammenfasst) und dann überlegen, welche Stellen in den verschiedenen Bauteilen mit welchen Stellen in anderen Bauteilen verklebt werden sollen. Die Verklebungsvorschrift bestimmt eine Zerlegung in Punktclassen und somit eine Äquivalenzrelation, und der Quotient des Summenraums nach dieser Äquivalenzrelation ergibt das zusammengeklebte Objekt.

Beispiele werden wir später in der Vorlesung in Fülle kennen lernen, und dann auch über ausreichende topologische Mittel verfügen, um zu verstehen, warum eine gewisse Verklebung tatsächlich das gewollte Ergebnis liefert. Im Moment verzichten wir, auch aus Zeitgründen, auf die Angabe unvollständiger Beispiele.

Die Diskussion in Bemerkung 2.28 können wir gleich anwenden, um einen einfachen aber häufig anzutreffenden Spezialfall von Quotientenraum zu definieren.

Beispiel und Definition 2.29 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge (oder ein Unterraum) von X .

Wir definieren auf X eine Äquivalenzrelation \sim durch die Vorschrift, dass $x \sim y$ genau dann, wenn x und y beide zu A gehören, oder wenn $x = y$.

Man prüft sehr schnell nach, dass dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Ganz A bildet eine Äquivalenzklasse von \sim , und die anderen Äquivalenzklassen bestehen alle jeweils nur aus einem Punkt von $X \setminus A$.

Der Quotient von X nach \sim , versehen mit der Quotiententopologie indu-

ziert durch die Projektion, heißt der *Quotient von X nach dem Unterraum A* und wird mit X/A bezeichnet.

In diesem Quotienten wird ganz A zu einem einzigen Punkt identifiziert, und alle Punkte außerhalb von A werden so belassen, wie sie waren.

Hier einige einfache Fakten über Quotienten und identifizierende Abbildungen.

Lemma 2.30 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei

$$p: X \longrightarrow Y$$

eine identifizierende Abbildung.

- a) Die Abbildung p ist immer stetig, in anderen Worten, jede identifizierende Abbildung ist stetig.
- b) Sei (Z, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Abbildung

$$f: (Y, \mathcal{S}) \longrightarrow (Z, \mathcal{O})$$

ist stetig genau dann, wenn $f \circ p$ stetig ist.

- c) Eine Teilmenge $C \subseteq Y$ ist offen in Y genau dann, wenn $p^{-1}(C)$ offen ist in X , und C ist abgeschlossen in Y genau dann, wenn $p^{-1}(C)$ abgeschlossen ist in X .
- d) Sei (Z, \mathcal{O}) ein weiterer topologischer Raum und sei $q: Y \longrightarrow Z$ eine identifizierende Abbildung. Dann ist die Verknüpfung $q \circ p: X \longrightarrow Z$ auch identifizierend.

Beweis. Zu a): Wenn p identifizierend ist, dann ist die Topologie \mathcal{S} auf Y die Finaltopologie von p , und bezüglich dieser ist p immer stetig.

Zu b): Dies ist die Aussage von Lemma 2.18 b) für die Familie von Abbildungen, die nur aus p besteht.

Zu c): Die Aussage über offene Mengen ist nichts anderes als die Definition der Finaltopologie von p , und die Aussage über abgeschlossene Abbildungen ist äquivalent zur Aussage über offene Mengen durch Komplementenbildung.

Denn $C \subseteq Y$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $Y \setminus C$ offen ist in Y . Und für jede Menge $C \subseteq Y$ ist

$$p^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus p^{-1}(C),$$

woraus folgt, dass das Urbild einer Menge $C \subseteq Y$ genau dann abgeschlossen ist in X , wenn das Urbild von $Y \setminus C$ offen ist.

Daraus schließt man sofort, dass die Aussage in Teil c) über offene Mengen genau dann gilt, wenn die Aussage über abgeschlossene Mengen gilt, oder in anderen Worten, dass die Topologie auf Y genau dann die Finaltopologie von p ist, wenn gilt: $C \subseteq Y$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $p^{-1}(C)$ abgeschlossen ist in X .

Diese letzte Bedingung ist einfach die Definition der Finaltopologie, mit „offen“ durchgehend durch „abgeschlossen“ ersetzt.

Zu d): Die Verknüpfung der surjektiven Abbildungen p und q ist wieder surjektiv, und weil p und q identifizierend sind, ist

$$\mathcal{O} = q(\mathcal{S}) = q(p(\mathcal{T})) = (q \circ p)(\mathcal{T})$$

(nach Korollar 2.19 b)), und das besagt dann, dass $q \circ p$ identifizierend ist. ■

Der Beweis von Lemma 2.30 c) beinhaltet eine triviale aber doch oft hilfreiche Bemerkung, die identifizierende Abbildungen durch ihr Verhalten auf *abgeschlossenen* Mengen charakterisiert.

Bemerkung 2.31 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume. Eine Abbildung $p: X \rightarrow Y$ ist genau dann identifizierend, wenn p surjektiv ist und wenn eine Teilmenge $C \subseteq Y$ genau dann abgeschlossen ist in Y , wenn $p^{-1}(C)$ abgeschlossen ist in X .

Beweis. Die Abbildung p ist genau dann identifizierend, wenn p surjektiv ist und wenn die Topologie auf Y die Finaltopologie von p ist, und die zweite Bedingung lässt sich durch die angegebene Bedingung für abgeschlossene Mengen charakterisieren, wie im Beweis von Lemma 2.30 c) erläutert wurde. ■

Wir wollen noch ein Kriterium angeben, das häufig benutzt werden kann, um zu zeigen, dass eine Abbildung identifizierend ist. Zu dessen Formulierung brauchen wir noch einen einfachen Begriff — die am Anfang dieses Kapitels zuerst vorgeschlagene naive Definition der Stetigkeit war zwar nicht die richtige Definition der *Stetigkeit*, aber sie hat doch eine Verwendung.

Definition 2.32 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume.

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **offen**, wenn das Bild $f(U)$ jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ wieder offen ist in Y .

Eine Abbildung $g: X \rightarrow Y$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild $g(A)$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ wieder abgeschlossen ist in Y .

Bemerkung 2.33 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei \mathcal{B} eine Basis für die Topologie \mathcal{T} .

Dann ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann offen, wenn für jede Basismenge $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass $f(B) \in \mathcal{S}$.

Beweis. Basismengen sind immer offen und haben deshalb offene Bilder unter offenen Abbildungen.

Umgekehrt ist jede offene Menge U eine Vereinigung

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}} B$$

von Basismengen, und weil

$$f(U) = f\left(\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} f(B),$$

ist $f(U)$ eine Vereinigung von offenen Mengen und somit offen, wenn die Bilder von Basismengen unter f offen sind. Also reicht diese abgeschwächte Voraussetzung dafür aus, dass f eine offene Abbildung ist. ■

Lemma 2.34 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und die Abbildung $f: X \rightarrow Y$ sei surjektiv, stetig und offen.

Dann ist f identifizierend.

Beweis. Damit f identifizierend ist, müssen zwei Dinge erfüllt sein: f muss surjektiv sein, was nach Voraussetzung der Fall ist, und die Topologie \mathcal{S} auf Y muss die Finaltopologie von f sein, d. h., eine Menge $V \subseteq Y$ muss genau dann offen sein, wenn $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Wenn $V \subseteq Y$ offen ist, dann ist $f^{-1}(V)$ offen, weil f stetig ist.

Weil f surjektiv ist, gilt für jede Teilmenge $V \subseteq Y$, dass

$$f(f^{-1}(V)) = V$$

(ohne die Surjektivität könnte die linke Seite eine echte Teilmenge von V sein), und weil f eine offene Abbildung ist, ist V offen, wenn $f^{-1}(V)$ offen ist.

Damit ist gezeigt, dass \mathcal{S} tatsächlich die Finaltopologie von f ist, und f ist identifizierend. ■

Bemerkung 2.35 Nicht jede identifizierende Abbildung ist offen.

Zum Beispiel sei X ein topologischer Raum und sei A eine nichtoffene Teilmenge, die nichtleeres Inneres hat (ein Beispiel einer solchen Teilmenge wäre die abgeschlossene Einheitskreis im \mathbf{R}^n).

Die Projektion $p: X \rightarrow X/A$ aus Beispiel und Definition 2.29 ist nach Definition der Quotiententopologie identifizierend, aber sie ist nicht offen.

Denn sei $U = A^\circ \neq \emptyset$, und sei $P := \{p(A)\}$ die Einpunktmenge in X/A , zu der A im Quotienten zusammengeschmolzen wird.

P ist nicht offen, weil $A = p^{-1}(P)$ nicht offen ist, aber $P = p(U)$ weil U nicht leer ist. Also ist p keine offene Abbildung, obwohl sie identifizierend ist.

Sehr nützlich in Bezug auf identifizierende Abbildungen ist folgende eigentlich schon bewiesene Tatsache, die im Wesentlichen auch eine universelle Eigenschaft des Quotienten ausdrückt.

Korollar 2.36 Sei $p: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ eine identifizierende Abbildung zwischen topologischen Räumen. Sei (Z, \mathcal{O}) ein weiterer topologischer Raum und sei $f: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung, die als mengentheoretische Abbildung durch p faktorisiert, d. h., es gebe eine mengentheoretische Abbildung $\bar{f}: Y \rightarrow Z$, so dass

$$\bar{f} \circ p = f. \quad (2.5)$$

Dann ist \bar{f} eindeutig bestimmt und stetig.

Beweis. Die Abbildung \bar{f} , wenn sie existiert, ist eindeutig bestimmt durch die Werte von f , weil p surjektiv ist und an jeder Stelle $p(x) \in Y$ der Wert $\bar{f}(p(x))$ durch (2.5) festgelegt ist.

Und \bar{f} ist stetig nach Lemma 2.30 b), weil $f = \bar{f} \circ p$ stetig ist. ■

In der Topologie kommt es häufig vor, dass stetige Funktionen auf komplizierten Räumen sich nicht einheitlich oder durch eine einzige Formel definieren lassen, sondern nur durch eine Vielzahl von Formeln oder Bedingungen, die jeweils nur auf Teilräumen des gesamten Raumes anwendbar sind und deshalb Fallunterscheidungen in der Definition erforderlich machen. Es wird dann entsprechend kompliziert, die Stetigkeit einer solchen „aus Teilstücken zusammengesetzten“ Funktion nachzuweisen.

Dabei ist das Kriterium im unten stehenden Satz 2.39 sehr hilfreich, den wir mit Hilfe der jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln sehr einfach beweisen können. Wir brauchen vorher lediglich ein paar Definitionen, um den Satz formulieren zu können.

Definition 2.37 Sei X eine Menge und sei \mathcal{A} eine Familie von Teilmengen von X .

a) Wir nennen \mathcal{A} eine *Überdeckung* von X , wenn

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

- b) Die Menge X trage eine Topologie \mathcal{T} . Eine Überdeckung \mathcal{A} von X heißt **offen** (bzw. **abgeschlossen**), wenn jede Menge $A \in \mathcal{A}$ in der Topologie \mathcal{T} offen (bzw. abgeschlossen) ist.

Entsprechend verfährt man mit anderen topologischen Eigenschaften, die wir später kennen lernen werden.

Definition 2.38 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei \mathcal{A} eine Familie von Teilmengen von X .

Die Familie \mathcal{A} heißt **lokal endlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U hat, die nur endlich viele $A \in \mathcal{A}$ trifft, also so dass $U \cap A = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele $A \in \mathcal{A}$.

Weil jede Umgebung eines Punktes eine offene Menge um den Punkt enthält, können wir ohne Weiteres davon ausgehen, dass jeder Punkt eine *offene* Umgebung mit der genannten Eigenschaft hat.

Natürlich ist jede *endliche* Überdeckung automatisch lokal endlich. Dann kann man sogar $U = X$ nehmen.

Satz 2.39 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Sei \mathcal{A} eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung von X . Dann ist f genau dann stetig, wenn $f|_A$ stetig ist für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wenn f stetig ist, dann sind alle $f|_A$ für $A \in \mathcal{A}$ automatisch stetig. Wir müssen also nur die Richtung „ \Leftarrow “ beweisen.

Wir betrachten zunächst die Summe

$$Z := \coprod_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A. \quad (2.6)$$

Für jedes $A \in \mathcal{A}$ sei i_A die kanonische Inklusion $A \rightarrow Z$, und sei j_A die Inklusion $A \rightarrow X$. Diese Inklusionen sind alle stetig.

Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$p: Z \rightarrow X$$

mit

$$p \circ i_A = j_A \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{A}. \quad (2.7)$$

Sie ist einfach definiert als j_A auf dem Summanden A der disjunkten Vereinigung in (2.6), und p ist surjektiv, weil \mathcal{A} eine Überdeckung von X ist.

Wir behaupten, dass p identifizierend ist, und müssen dazu nur noch zeigen, dass X die Finaltopologie bezüglich p trägt.

Sei $C \subseteq X$. Genau dann ist $p^{-1}(C)$ abgeschlossen in Z , wenn

$$p^{-1}(C) \cap A = C \cap A$$

abgeschlossen ist in A für jedes $A \in \mathcal{A}$. Weil die Mengen A selber abgeschlossen sind in X , ist $C \cap A$ abgeschlossen in A genau dann, wenn $C \cap A$ abgeschlossen ist in X , nach Lemma 2.22 g).

Also ist $p^{-1}(C)$ genau dann abgeschlossen in Z , wenn $C \cap A$ abgeschlossen ist in X für jedes $A \in \mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, dass das äquivalent dazu ist, dass C abgeschlossen ist in X . Genau wenn diese Äquivalenz gilt, trägt X die Finaltopologie von p .

Wenn C in X abgeschlossen ist, dann sind natürlich auch alle $C \cap A$ abgeschlossen. Wir müssen also nur die andere Richtung zeigen. Sie ist trivial, falls \mathcal{A} eine *endliche* Überdeckung ist, aber dass die Aussage auch allgemeiner gilt, liegt an der *lokalen* Endlichkeit der Überdeckung, also daran, dass man in der Nähe jedes Punktes von X nur endlich viele Mengen aus der Überdeckung sieht.

Wir betrachten neben C auch dessen Komplement $V := X \setminus C$.

Weil die Familie \mathcal{A} lokal endlich ist, gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Menge U_x um x und eine endliche Teilfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, so dass U_x nur die Mengen aus \mathcal{B} trifft, aber leeren Durchschnitt mit allen anderen Mengen aus \mathcal{A} hat. Die Mengen U_x für alle $x \in X$ bilden wegen der Beziehung $x \in U_x$ eine (offene) Überdeckung von X .

Wir setzen

$$D_x := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} C \cap B.$$

Dies ist eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen und somit abgeschlossen.

Weil U_x keine Mengen aus $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ trifft, aber \mathcal{A} ganz X überdeckt, ist

$$C \cap U_x = D_x \cap U_x$$

und somit abgeschlossen in U_x . Sein Komplement $U_x \setminus C$ ist offen in U_x , und weil U_x offen in X ist, auch offen in X .

Da die U_x eine Überdeckung von X bilden ist

$$V := X \setminus C = \bigcup_{x \in X} (U_x \setminus C)$$

eine Vereinigung von offenen Mengen von X und somit selber offen. Das zeigt, dass C abgeschlossen ist.

Damit haben wir laut Bemerkung 2.31 nachgewiesen, dass X die Finaltopologie von p trägt, und weil p surjektiv war, dass p identifizierend ist.

Sei nun $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so dass $f|_A = f \circ j_A$ stetig ist für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Dann ist $f \circ p \circ i_A$ stetig für jedes $A \in \mathcal{A}$ wegen Gleichung (2.7). Daraus folgt nach Definition der Summentopologie, dass $f \circ p$ stetig ist, aber weil p identifizierend ist, ist das genau dann der Fall, wenn f stetig ist, was wir eigentlich zeigen wollten.

Beachten Sie, dass der Begriff der Finaltopologie uns hier geholfen hat, den *eigentlichen* Kernpunkt des Beweises, die Beschaffenheit der Topologie von X in Bezug auf die Überdeckung, von der Stetigkeitsfrage zu trennen. Diese erscheint nur am Ende, weil sie unsere Hauptanwendung der Erkenntnisse über die Topologie darstellt.

Wie haben hier gesehen, dass ein Raum, der eine lokal endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ist, sich betrachten lässt als „zusammengeklebt“ aus diesen Unterräumen. ■

Korollar 2.40 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cup B = X$.

Seien $f: A \rightarrow Y$ und $g: B \rightarrow Y$ stetige Abbildungen mit

$$f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}. \quad (2.8)$$

Definiere eine Abbildung $h: X \rightarrow Y$ durch die Vorschrift

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A; \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Wegen der Bedingung (2.8) ist h wohldefiniert, und h ist stetig auf X .

Beweis. Es ist klar, dass h wohldefiniert ist. Die Familie $\mathcal{A} = \{A, B\}$ ist eine endliche, und somit lokal endliche, abgeschlossene Überdeckung von X (sie ist eine Überdeckung, weil $A \cup B = X$). Nach Voraussetzung sind

$$h|_A = f \quad \text{und} \quad h|_B = g$$

stetig. Aus Satz 2.39 folgt, dass h stetig ist. ■

Beispiel 2.41 Hier ist ein einfaches aber typisches Anwendungsbeispiel.

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und seien v und w stetige Abbildungen $[0, 1] \rightarrow X$, so dass $v(1) = w(0)$ (hier ist $[0, 1]$ als abgeschlossenes Intervall in \mathbf{R} zu verstehen).

Definiere eine neue Abbildung $v * w: [0, 1] \longrightarrow X$ durch die Vorschrift

$$(v * w)(t) := \begin{cases} v(2t), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ w(2t - 1), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist auch $v * w$ stetig.

Dazu prüft man sehr leicht direkt nach, dass die Abbildungen $t \mapsto 2t$ und $s \mapsto s - 1$ von \mathbf{R} nach \mathbf{R} stetig sind. Die Verknüpfung dieser Abbildungen ist $t \mapsto 2t - 1$ und ist auch stetig.

Wenn man diese Abbildungen mit v oder w verknüpft und auf die richtige Hälfte von $[0, 1]$ einschränkt, erhält man stetige Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} f: [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow X & & g: [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow X \\ t \longmapsto v(2t) & \text{und} & t \longmapsto w(2t - 1) \end{array}$$

die auf dem Durchschnitt der beiden Intervalle, also bei $t = \frac{1}{2}$, übereinstimmen, weil

$$f(\frac{1}{2}) = v(2 \cdot \frac{1}{2}) = v(1) = w(0) = w(2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = g(\frac{1}{2}).$$

Die Intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ sind abgeschlossen in \mathbf{R} und somit in $[0, 1]$, und ihre Vereinigung ist $[0, 1]$.

Aus Korollar 2.40 folgt, dass $v * w$ stetig ist.

Auch die Konstruktion der Summentopologie läßt sich dualisieren. Wieder ist eine Familie von topologischen Räumen $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ gegeben, aber jetzt suchen wir nicht mehr einen Raum, der alle X_λ als Unterräume enthält, sondern in der dualen Version einen Raum, der alle X_λ als Quotienten hat (und möglichst effizient gebaut ist für diesen Zweck).

Es gibt eine bekannte Konstruktion in der Mathematik, die diesen Zweck erfüllt, nämlich das **kartesische Produkt**, das sich auf jeden Faktor surjektiv projizieren lässt, wobei die Werte aller Projektionen unabhängig voneinander beliebig vorgeschrieben werden können (in den entsprechenden Faktormengen).

Das einzige Problem, diese Konstruktion topologisch durchzuführen, ist die Bestimmung der richtigen Topologie auf dem Produktraum, aber für uns ist das doch kein Problem, weil wir dafür eine leistungsfähige und der Aufgabe genau angepasste Standardmethode haben (wir nehmen einfach die Initialtopologie der Familie von Projektionen, „dual“ zur Konstruktion der Summentopologie, wo wir die Finaltopologie aller Inklusionen genommen haben).

Historisch war dieses Problem übrigens nicht so leicht zu lösen, und es hat in den Anfängen der Topologie einige Unsicherheit über die richtige Produkttopologie gegeben. Darüber werden wir später noch kurz sprechen.

Wir beginnen, für diejenigen Leser, die eine solche Konstruktion noch nie gesehen haben, mit einer Erinnerung über das *mengentheoretische* kartesische Produkt von unendlich vielen (oder gar überabzählbar vielen) Faktormengen.

Definition 2.42 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei X_λ eine Menge. Ein Λ -**Tupel** von Elementen der X_λ ist definiert als eine Funktion

$$\tau: \Lambda \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda,$$

so dass für jedes $\mu \in \Lambda$ gilt

$$\tau(\mu) \in X_\mu.$$

Für jedes $\mu \in \Lambda$ nennen wir $\tau(\mu)$ die μ -te **Koordinate des Λ -Tupels τ** , und wir schreiben dafür τ_μ statt $\tau(\mu)$.

Eine andere übliche bequeme Notation ist die Schreibweise

$$(\dots, \tau_\lambda, \dots)$$

für das Λ -Tupel τ , die an die übliche Schreibweise für endliche Produkte erinnert.

Das **kartesische Produkt** der X_λ ist definiert als die Menge *aller* Λ -Tupel aus den X_λ und es wird mit

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \quad (\text{oder wenn } \Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ endlich ist, mit } X_{\lambda_1} \times \dots \times X_{\lambda_n})$$

bezeichnet. Wir haben also

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \left\{ \tau: \Lambda \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid \tau(\mu) \in X_\mu \text{ für jedes } \mu \in \Lambda \right\}.$$

Für jedes $\mu \in \Lambda$ gibt es eine kanonische Abbildung

$$\pi_\mu: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu,$$

definiert durch die Vorschrift

$$\pi_\mu(\tau) := \tau(\mu),$$

die jedem Λ -Tupel τ seine μ -te Koordinate zuordnet.

Diese Abbildung π_μ heißt die **Projektion von $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ auf den μ -ten Faktor**.

Wenn $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$, dann sind alle π_μ *surjektiv*.

Denn sei τ ein beliebiges Element von $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, und sei a ein beliebiges Element von X_μ . Die Vorschrift

$$\sigma(\lambda) := \begin{cases} \tau(\lambda), & \text{wenn } \lambda \neq \mu; \\ a, & \text{wenn } \lambda = \mu. \end{cases}$$

definiert ein neues Element von $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, für das gilt $\pi_\mu(\sigma) = a$.

Bemerkung 2.43 In Definition 2.42 wurde gesagt, dass die Projektionen auf die Faktoren eines kartesischen Produktes surjektiv sind, *wenn das Produkt nichtleer ist*.

Das wirft natürlich die Frage auf, wann ist ein kartesisches Produkt von Mengen leer?

Falls die Indexmenge $\Lambda = \emptyset$ ist, *dann ist das Produkt einelementig und nicht leer!* Denn es gibt immer eine **leere Funktion** von der leeren Menge in jede andere Menge; sie hat keine Werte und muss auch keine Werte haben, aber sie existiert und erfüllt jede vernünftige Definition des Begriffs **Funktion**.

Wenn Λ aber nichtleer ist und es somit Faktoren X_λ gibt, und wenn einer dieser Faktoren X_μ leer ist, dann ist $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$, denn jedes Λ -Tupel τ muss so sein, dass $\tau(\mu) \in X_\mu$, und das ist unmöglich wenn X_μ leer ist.

Was ist die Situation, wenn $\Lambda \neq \emptyset$ und alle $X_\lambda \neq \emptyset$? Da möchte man meinen, dass dann das Produkt nichtleer ist, denn schließlich findet man für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein Element von X_λ , das man einem Λ -Tupel als Wert zuweisen kann.

So einfach ist die Situation aber nicht, denn das Problem besteht in der *gleichzeitigen* Auswahl von Werten für alle $\lambda \in \Lambda$, wenn Λ eine sehr große Menge ist. Die Aussage, dass $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$, wenn $\Lambda \neq \emptyset$ und alle $X_\lambda \neq \emptyset$, ist das berühmte **Auswahlaxiom** der Mengenlehre.

Das Auswahlaxiom ist problematisch, weil es einige sehr kontraintuitive Konsequenzen hat, aber es hat auch so viele wichtige *angenehme* Konsequenzen, auch in der Topologie, dass es kaum Mathematiker gibt, die bereit wären, auf dieses Axiom zu verzichten.

Zum Glück ist auch seit 1962 durch die Arbeit des (gerade am 23. März 2007 verstorbenen) Mathematikers Paul Cohen bekannt, dass das Auswahlaxiom **unabhängig** von den anderen Axiomen der Mengenlehre ist, d. h., dieses Axiom kann nicht bewiesen werden, aber die Annahme seiner Richtigkeit führt auch zu keinen Widersprüchen, die nicht auch sonst da wären.

Insofern werden wir das Auswahlaxiom frei benutzen und davon ausgehen, dass ein beliebiges Produkt von nichtleeren Mengen nichtleer ist.

Definition 2.42 erinnert an die Produktkonstruktion in der *Mengenlehre*. Es ist sehr leicht die Details für die Konstruktion von Produkten in der Topologie zu ergänzen.

Definition 2.44 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein *nichtleerer* topologischer Raum.

Die **Produkttopologie** oder **Tychonoff-Topologie** \mathcal{T} auf

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

ist die Initialtopologie der Familie von Projektionen

$$\pi_\mu: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow (X_\mu, \mathcal{T}_\mu) \quad (\mu \in \Lambda)$$

Die Produktmenge $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ versehen mit der Tychonoff-Topologie nennen wir den **Produktraum** der topologischen Räume $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$.

Bemerkung 2.45 Das Produkt von topologischen Räumen, von denen eins leer ist, ist die leere Menge, die nur eine Topologie zulässt.

Wir werden das leere Produkt nicht generell ausschließen, aber wir wollten es in der allgemeinen Definition der Produkttopologie nicht als Sonderfall erwähnen.

Obwohl wir auf einer ganz natürlichen Weise zu der Produkttopologie als Initialtopologie der Familie von Projektionen gelangt sind, ist dies nicht die einzige erdenkbare Topologie auf der Produktmenge, und historisch gesehen war sie auch nicht die erste Topologie, die für die Produktmenge vorgeschlagen wurde. Ihre Einführung durch Tychonoff 1926 (als Tychonoff noch Student war!) war sehr kontrovers, weil, wie wir gleich sehen werden, die Tychonoff-Topologie erstaunlich grob ist.

Trotzdem ist sie die „richtige“ Topologie, nicht nur weil sie nach einer Standardmethode, vergleichbar zu den Produkten in anderen Gebieten der Mathematik, konstruiert wurde, sondern auch weil sie viele sehr angenehme Eigenschaften hat, die für die selten benutzte feinere Topologie auf Produkten nicht gelten. Beide Topologien unterscheiden sich übrigens nur für *unendliche* Produkte; wenn die Anzahl der Faktoren endlich ist, sind beide Topologien gleich.

Wir wollen einige Grundeigenschaften der Produkttopologie angeben, und führen zuerst etwas Terminologie ein, die in der Formulierung hilfreich sein wird.

Definition 2.46 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein topologischer Raum. Sei $(X, \mathcal{T}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$.

Ein **Quader** oder eine **Box** in X ist eine Teilmenge Q der Gestalt

$$Q = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \quad (2.9)$$

wo jedes $A_\lambda \subseteq X_\lambda$. Wir nennen A_λ die λ -te *Seite* des Quaders Q .

Ein **offener Quader** ist ein Quader

$$U = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad (2.10)$$

dessen Seiten U_λ alle offen sind, d. h., wo für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$.

Wir nennen einen Quader

$$Q = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

groß, wenn für alle bis auf endlich viele $\lambda \in \Lambda$ gilt $A_\lambda = X_\lambda$, d. h., wenn nur endlich viele Seiten des Quaders echte Teilmengen des Faktors sind, in dem sie liegen.

Ein Quader heißt **klein**, wenn er nicht groß ist.

Wenn es nur endlich viele Faktoren gibt, dann sind alle Quader groß.

Der ganze Raum X ist immer ein großer offener Quader.

Lemma 2.47 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein nichtleerer topologischer Raum. Sei

$$(X, \mathcal{T}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda).$$

- a) Die Familie der großen offenen Quader ist eine Basis für die Tychonoff-Topologie \mathcal{T} auf $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.
- b) Sei (Z, \mathcal{S}) ein topologischer Raum. Eine Abbildung $g: Z \rightarrow X$ ist genau dann stetig in der Tychonoff-Topologie, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Abbildung

$$\pi_\lambda \circ g: Z \rightarrow X_\lambda$$

stetig ist.

In anderen Worten, da die Projektionen π_λ jedem Λ -Tupel seine λ -te Koordinate zuordnen, steht hier, dass eine Abbildung in einen Produktraum genau dann stetig ist, wenn jede Koordinate von der Abbildung stetig ist.

c) Jede Projektion π_λ von X ist offen und somit auch identifizierend. Deshalb ist jeder Faktor X_λ ein Quotient des Produkts $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

Beweis. Zu a): Zunächst bilden die großen offenen Quader die Basis \mathcal{B} einer Topologie nach Lemma 1.24, denn ganz X ist selber ein großer offener Quader und deshalb eine Vereinigung von großen offenen Quadern, und offensichtlich ist der Durchschnitt von zwei großen offenen Quadern

$$U = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad \text{und} \quad V = \prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

wieder ein offener Quader

$$U \cap V = \prod_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap V_\lambda),$$

der groß ist, weil $U_\lambda \cap V_\lambda \neq X_\lambda$ nur für die insgesamt endlich vielen λ , für die $U_\lambda \neq X_\lambda$ oder $V_\lambda \neq X_\lambda$. Das heißt, auch Bedingung 1.24 b) ist erfüllt.

Wir behaupten, dass die von \mathcal{B} erzeugte Topologie \mathcal{S} gleich der Tychonoff-Topologie \mathcal{T} ist.

Die Topologie \mathcal{T} ist die größte Topologie feiner als alle Initialtopologien $\pi_\mu^{-1}(\mathcal{T}_\mu)$ für $\mu \in \Lambda$, oder die größte Topologie, in der alle π_μ stetig sind. Für jedes einzelne μ und für jede offene Menge $U \in X_\mu$ ist

$$\pi_\mu^{-1}(U) = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

wo $U_\lambda = X_\lambda$, falls $\lambda \neq \mu$, und $U_\mu = U$.

Dies ist ein großer offener Quader, so dass alle π_μ stetig sind bezüglich \mathcal{S} , weshalb gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

Andererseits ist jeder große offene Quader

$$U = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcap_{\substack{\mu \text{ mit} \\ U_\mu \neq X_\mu}} \pi_\mu^{-1}(U_\mu),$$

wo der Durchschnitt auf der rechten Seite endlich ist, weil U ein großer Quader war.

Da die Mengen $\pi_\mu^{-1}(U_\mu)$ alle offen in \mathcal{T} sind, ist ihr endlicher Durchschnitt U auch offen in \mathcal{T} . In anderen Worten, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, woraus folgt $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Also sind beide Topologien gleich.

Teil b) folgt nach Lemma 2.18 a) aus der Tatsache, dass die Tychonoff-Topologie die Initialtopologie der π_λ ist.

Zu c): Für jeden offenen Quader $U = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ und jede Projektion π_μ ist $\pi_\mu(U) = U_\mu$ die μ -te Seite von U und ist offen in X_μ . (Das gilt übrigens auch für *kleine* offene Quader.)

Da die großen offenen Quader nach Teil a) eine Basis für die Produkttopologie bilden und ihre Bilder unter den Projektionen offen sind, folgt aus Bemerkung 2.33, dass jede Projektion π_μ offen ist.

Da die Projektionen außerdem surjektiv und stetig sind, sind sie identifizierend nach Lemma 2.34. Ihre Bilder, die Faktorräume X_μ , sind also alle Quotienten des Produktraums. ■

Überraschend an der Tychonoff-Topologie ist, dass kleine offene Quader nicht offen sind. Weil die großen offenen Quader eine Basis der Topologie bilden, nehmen auf jeder offenen Menge fast alle Koordinaten alle möglichen Werte an, und die Produkttopologie sieht sehr grob aus. Gerade deshalb wurde diese Topologie von führenden Topologen am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts nicht akzeptiert.

Aber in der Folge hat die Tychonoff-Topologie große Vorteile, denn gerade wegen dieser Grobheit sehen unendliche Tychonoff-Produkte fast wie endliche aus. Insbesondere gelten wichtige topologische Eigenschaften, die für endliche Produkte leicht zu beweisen sind, in der Regel auch für unendliche Produkte, auch wenn die Beweise dann nicht mehr einfach sind.

Aus diesem Grund ist die Tychonoff-Topologie jetzt die Standardtopologie für Produkträume. Es gibt aber auch eine andere gelegentlich verwendete Topologie.

Definition 2.48 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein topologischer Raum.

Die Familie \mathcal{C} aller offener Quader in $X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ist die Basis einer Topologie \mathcal{O} , die man die **Box-Topologie** oder die **starke** Produkttopologie nennt.

Sie ist immer mindestens so fein, wie die Tychonoff-Topologie, und ist echt feiner, wenn die Anzahl der Faktoren X_λ mit einer nicht-indiskreten Topologie unendlich ist, aber sie ist gleich der Tychonoff-Topologie auf einem endlichen Produkt.

Beweis. Der gleiche Beweis, wie für Lemma 2.47 a) zeigt, dass die Familie aller offener Quader eine Basis für eine Topologie \mathcal{O} bildet; ganz X ist ein offener Quader, und jeder Durchschnitt von zwei offenen Quadern ist wieder ein offener Quader, so dass Lemma 1.24 sich anwenden lässt.

Da jede Basismenge für die Tychonoff-Topologie auch eine Basismenge für die Box-Topologie ist, ist diese mindestens so fein wie die Tychonoff-Topologie.

Wenn es in unendlich vielen Faktoren X_λ nichtleere offene Mengen $U_\lambda \neq X_\lambda$ gibt (das heißt, wenn unendlich viele Faktoren eine andere als die indiskrete Topologie tragen), dann gibt es nichtleere kleine offene Quader, und weil ein nichtleerer kleiner offener Quader keinen großen offenen Quader enthalten kann (die eine Basis der Tychonoff-Topologie bilden), sind diese kleinen offenen Quader nicht offen in der Tychonoff-Topologie. In diesem Fall ist die Box-Topologie also echt feiner.

Wenn es nur endlich viele Faktorräume gibt, dann sind alle offenen Quader groß und die Box-Topologie und die Tychonoff-Topologie haben die gleiche Basis und sind somit gleich. ■

Wie auch die Summentopologie in Satz 2.25, wird die Tychonoff-Topologie auf einem Produkt durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert, die „dual“ zu der für die Summentopologie ist.

Satz 2.49 *Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein topologischer Raum. Sei*

$$(X, \mathcal{T}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$$

(mit der Tychonoff-Topologie \mathcal{T}).

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei π_λ die kanonische Projektion $X \rightarrow X_\lambda$.

Der Produktraum (X, \mathcal{T}) (zusammen mit den Projektionen π_λ) besitzt die „universelle Eigenschaft“, dass es zu jedem topologischen Raum (Z, \mathcal{S}) und zu jeder Familie von stetigen Abbildungen $g_\lambda: Z \rightarrow X_\lambda$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $G: Z \rightarrow X$ gibt mit

$$g_\lambda = \pi_\lambda \circ G \quad \text{für jedes } \lambda \in \Lambda. \quad (2.11)$$

Ferner bestimmt diese Eigenschaft das Produkt bis auf Homöomorphie, d. h., ist X' mit stetigen Abbildungen $\pi'_\lambda: X' \rightarrow X_\lambda$ ein anderer topologischer Raum und eine andere Familie von kanonischen Abbildungen (in der Rolle der Projektionen), die auch die genannte universelle Eigenschaft hat, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus $\varphi: X' \rightarrow X$, so dass

$$\pi'_\lambda = \pi_\lambda \circ \varphi \quad \text{für jedes } \lambda \in \Lambda$$

(woraus durch Verknüpfung mit φ^{-1} eine entsprechende Behauptung mit dem Homöomorphismus φ^{-1} folgt, bei der die Rollen von X und X' und von π_λ und π'_λ vertauscht sind).

Beweis. Sei ein Raum Z und stetige Abbildungen $g_\lambda: Z \rightarrow X_\lambda$ gegeben.

Wir definieren eine Abbildung $G: Z \rightarrow X$ durch die Vorschrift

$$G(z) := (\dots, g_\lambda(z), \dots),$$

oder etwas formaler:

$$G(z) := \tau \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \text{wo } \tau(\lambda) := g_\lambda(z) \quad \text{für jedes } \lambda \in \Lambda.$$

Die Abbildung G ist wohldefiniert, da wir für jedes $z \in Z$ alle Koordinaten des Λ -Tupels $G(z)$ eindeutig angegeben haben, und G ist offensichtlich so definiert, dass für jedes $z \in Z$ und jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\pi_\lambda(G(z)) = g_\lambda(z),$$

was der Gleichung (2.11) entspricht.

Ferner kann G nicht anders definiert werden, wenn diese Gleichung für alle λ gelten soll. G ist also eindeutig bestimmt.

G ist stetig nach Lemma 2.47 b), weil Bedingung (2.11) gilt und weil nach Voraussetzung alle g_λ stetig sind.

Das alles zeigt, dass die universelle Eigenschaft erfüllt ist.

Aus der universellen Eigenschaft selber folgt, dass sie den Produktraum eindeutig bestimmt.

Denn ist (X', \mathcal{T}') mit $\pi'_\lambda: X' \rightarrow X_\lambda$ ein anderer topologischer Raum und eine andere Schar von stetigen Abbildungen, die die genannte universelle Eigenschaft besitzt, so folgt aus der universellen Eigenschaft des Tychonoff-Produkts und des Systems X' mit den π'_λ , wenn man jeweils den anderen Raum mit seiner Abbildungsschar als den Raum Z mit den Abbildungen g_λ wählt, dass es eindeutig bestimmte stetige Abbildungen

$$\varphi: X' \rightarrow X \quad \text{und} \quad \psi: X \rightarrow X'$$

gibt mit

$$\pi'_\lambda = \pi_\lambda \circ \varphi \quad \text{und} \quad \pi_\lambda = \pi'_\lambda \circ \psi \quad \text{für jedes } \lambda \in \Lambda. \quad (2.12)$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass φ und ψ Homöomorphismen und Umkehrabbildungen zueinander sind. Dazu bilden wir die Verknüpfung beider Abbildungen in beiden Reihenfolgen und erhalten Abbildungen

$$\psi \circ \varphi: X \rightarrow X \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi: X' \rightarrow X'$$

mit

$$\begin{aligned}\pi'_\lambda &= \pi_\lambda \circ \varphi = \pi'_\lambda \circ \psi \circ \varphi && \text{und} \\ \pi_\lambda &= \pi'_\lambda \circ \psi = \pi_\lambda \circ \varphi \circ \psi && \text{für jedes } \lambda \in \Lambda,\end{aligned}\tag{2.13}$$

durch zweimaliges Anwenden der Gleichungen (2.12).

Aber auch die Identitätsabbildungen der Räume X' und X sind Abbildungen $X' \rightarrow X'$ bzw. $X \rightarrow X$, die anstelle der Verknüpfungen $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ die Gleichungen (2.13) (ohne den mittleren Term) erfüllen.

Weil die universelle Eigenschaft aber verlangt, dass es jeweils eine *eindeutige* Abbildung mit Eigenschaft (2.11) gibt, müssen die beiden Abbildungen, die jede der Gleichungen (2.13) erfüllen, tatsächlich die gleiche Abbildung sein, d. h., es gilt

$$\psi \circ \varphi = \text{id}'_X \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi = \text{id}_X.$$

Das zeigt, dass φ und ψ Umkehrabbildungen zueinander sind. Somit sind beide bijektiv, stetig und haben eine stetige Umkehrabbildung, in anderen Worten, sie sind Homöomorphismen. ■

Um diesen Abschnitt abzuschließen, zeigen wir noch, dass ein *endliches* Produkt von metrischen Räumen wieder eine metrische Topologie hat. Für überabzählbare Produkte mit der Tychonoff-Topologie kann das nicht gelten, es sei denn, alle bis auf abzählbar viele Faktoren haben höchstens einen Punkt (Korollar 3.9 in Kapitel 3, insbesondere die Bemerkung am Ende des Beweises).

Lemma 2.50 *Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ metrische Räume. Dann ist die Funktion d mit*

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) := \max\{d_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \tag{2.14}$$

wieder eine Metrik auf

$$X := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

und die metrische Topologie dieser Metrik ist gleich der Produkttopologie.

Beweis. Offensichtlich ist d positiv definit und symmetrisch, und die Dreiecksungleichung kann man wie für die Maximumsmetrik in Lemma und Definition 1.37 c) beweisen:

Seien $x := (x_1, \dots, x_n)$, $y := (y_1, \dots, y_n)$ und $z := (z_1, \dots, z_n)$ drei Punkte in X und sei

$$a := \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i) = d(x, y) \quad \text{und} \quad b := \max_{1 \leq i \leq n} d_i(y_i, z_i) = d(y, z).$$

Für jedes k zwischen 1 und n gilt nun

$$d_k(x_k, z_k) \leq d_k(x_k, y_k) + d_k(y_k, z_k) \leq a + b,$$

so dass auch

$$d(x, z) = \max_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, z_k) \leq a + b = d(x, y) + d(y, z).$$

Damit ist gezeigt, dass d eine Metrik ist.

Wir müssen zeigen, dass die metrische Topologie gleich der Produkttopologie ist (da wir hier ein endliches Produkt haben, ist in diesem Fall die Tychonoff-Topologie gleich der Boxtopologie).

Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ und für jeden Punkt $x_i \in X_i$ und jedes $r > 0$ bezeichnen wir mit $B_r^i(x_i)$ den d_i -Ball von Radius r um x_i in X_i .

Den Ball von Radius r bezüglich der Metrik d um einen Punkt x im Produktraum bezeichnen wir wie immer mit $B_r(x)$. Dann gilt auf Grund der Definition von d offensichtlich für jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, dass

$$B_r(x) = \prod_{i=1}^n B_r^i(x_i).$$

Jeder Ball in dieser Metrik auf dem Produktraum ist also ein offener Quader und deshalb offen in der Produkttopologie, und die metrische Topologie ist größer als die Produkttopologie.

Umgekehrt, wenn U offen in der Produkttopologie ist und wenn $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, dann gibt es für jedes i eine offene Menge U_i in X_i mit $x_i \in U_i$, so dass

$$x \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \subseteq U,$$

und weil die Topologie von jedem X_i die metrische Topologie von d_i ist, gibt es für jedes i eine Zahl $\varepsilon_i > 0$, so dass

$$B_{\varepsilon_i}^i(x_i) \subseteq U_i.$$

Wenn wir $\varepsilon := \min \{ \varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n \}$ setzen, ist offensichtlich

$$x \in B_\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^n B_\varepsilon^i(x_i) \subseteq \prod_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}^i(x_i) \subseteq \prod_{i=1}^n U_i \subseteq U.$$

Daraus sieht man, dass U eine Vereinigung von offenen Bällen bezüglich d ist und somit offen in der metrischen Topologie ist.

Die metrische Topologie ist also feiner als die Produkt-Topologie, aber wir haben vorhin gesehen, dass sie auch gröber ist. In anderen Worten, beide Topologien sind gleich. ■

Korollar 2.51 Seien n_1, n_2, \dots, n_k natürliche Zahlen und sei

$$m := n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Dann ist

$$\mathbf{R}^m \cong \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbf{R}^{n_k} \quad (2.15)$$

(wo jeder der hier erwähnten euklidischen Räume mit der Standardtopologie versehen ist).

Insbesondere ist \mathbf{R}^n mit der Standardtopologie das Produkt von n Kopien von \mathbf{R} mit der Standardtopologie.

Beweis. Die Standardtopologie auf einem euklidischen Raum \mathbf{R}^n ist, unter anderem, die metrische Topologie der Maximumsmetrik, nach Lemma und Definition 1.41.

Wenn wir mit d_i die Maximumsmetrik auf \mathbf{R}^{n_i} bezeichnen, dann ist klar, dass die durch (2.14) definierte Metrik auf $\mathbf{R}^{n_1 + \dots + n_k} = \mathbf{R}^m$ auch die Maximumsmetrik ist.

Deren Topologie ist einerseits die Standardtopologie auf \mathbf{R}^m , aber nach Lemma 2.50 ist sie auch die Produkttopologie von $\mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbf{R}^{n_k}$. Also sind diese Topologien gleich.

Die letzte Aussage des Korollars ist einfach der Spezialfall, in dem $k = n$ und alle $n_i = 1$. ■

Kapitel 3

Konvergenz, Häufung und Filter

Einer der wichtigsten topologischen Begriffe in der Analysis ist die Folgenkonvergenz, mit deren Hilfe nicht nur die Stetigkeit von Abbildungen zwischen euklidischen Räumen charakterisiert werden kann, sondern auch andere wichtige Konstruktionen der Analysis wie die Ableitung einer differenzierbaren Funktion definiert werden können.

Wir werden gleich sehen, dass diese bekannten Sätze der Analysis von speziellen Eigenschaften der euklidischen (und anderer metrischer) Räume abhängen, und dass die Folgenkonvergenz zur allgemeinen Beschreibung von topologischen Eigenschaften *nicht* geeignet ist, außer in „kleinen“ und schönen topologischen Räumen.

Von den vielen anderen Konvergenzbegriffen, die Topologen erfunden haben, um dieses Problem zu beheben, wollen wir nur auf einen eingehen, der zwar die abstrakteste Umsetzung der Konvergenzidee darstellt, dafür aber sehr leistungsfähig und angenehm in der Anwendung ist — es handelt sich um den Begriff eines *Filters*.

Diesen Begriff wollen wir bereit halten, um mit seiner Hilfe später einen überraschend kurzen Beweis eines schwierigen aber zentralen Satzes von Tychonoff zu geben.

Aber zuerst schauen wir uns die klassische Folgenkonvergenz an. Die bekannte Definition aus der Analysis lautet:

*Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ von Punkten aus \mathbf{R}^k **konvergiert** gegen einen Punkt $a \in \mathbf{R}^k$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt*

$$\|x_n - a\| < \varepsilon.$$

Diese Definition lässt sich sehr leicht „topologisieren“. Die Ungleichung

am Schluss kann man in der Sprache der metrischen Räume umschreiben als

$$x_n \in B_\varepsilon(a),$$

und wenn man dann bedenkt, dass die offenen Bälle um a eine Umgebungsbasis von a bilden, kann man die Bälle durch beliebige Umgebungen von a ersetzen und ist dann nicht mehr an metrische Räume gebunden.

Eine akzeptable topologische Definition der Folgenkonvergenz ist also

Definition 3.1 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Eine **Folge** in X ist eine Abbildung

$$\mathbf{x}: \mathbf{N} \longrightarrow X,$$

und die Werte dieser Funktion heißen die **Glieder** der Folge, aber wie üblich schreiben wir für die Glieder x_n statt $\mathbf{x}(n)$ und wir bezeichnen die ganze Folge als

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$$

und nicht mit dem Funktionsnamen \mathbf{x} .

Sei $a \in X$. Wir sagen, dass die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ **gegen a konvergiert**, und wir schreiben dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

wenn es für jede Umgebung A von a eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ gibt, so dass

$$x_n \in A \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ heißt **konvergent**, wenn es (mindestens ein) $a \in X$ gibt, gegen das sie konvergiert. Jedes a , gegen das sie konvergiert, nennen wir einen **Grenzwert** der Folge.

Bemerkung 3.2 a) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, sei $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in X und sei $a \in X$ und \mathcal{U} eine Umgebungsbasis bei a .

Schon wenn es für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$, dann konvergiert die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ gegen a .

Denn für jede Umgebung A von a existiert eine Basisumgebung $U \in \mathcal{U}$ mit

$$a \in U \subseteq A,$$

und wenn $x_n \in U$ für $n \geq N$, dann gilt auch $x_n \in A$ für $n \geq N$.

b) Der Grenzwert einer konvergenten Folge muss nicht eindeutig sein!

Zum Beispiel, wenn X die indiskrete Topologie trägt, dann ist X die einzige Umgebung jedes Punktes, und es ist klar, dass *jede* Folge gleichzeitig gegen *jeden* Punkt von X konvergiert.

Hier ist ein bekannter Satz aus der Analysis, der auch in beliebigen topologischen Räumen gilt.

Satz 3.3 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, die stetig ist an der Stelle $a \in X$.

Wenn $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in X ist mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Beweis. Sei A eine Umgebung von $f(a)$ in Y . Weil f stetig ist bei a , ist $f^{-1}(A)$ eine Umgebung von a in X , und weil $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es eine Zahl $N \in \mathbf{N}$, so dass für jedes $n \geq N$ gilt

$$x_n \in f^{-1}(A) \quad \text{oder gleichbedeutend} \quad f(x_n) \in A.$$

Die zweite Bedingung zeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

■

In den euklidischen Räumen gilt auch die Umkehrung dieses Satzes: wenn f jede gegen a konvergente Folge in eine gegen $f(a)$ konvergente Folge abbildet, dann ist f stetig bei a .

In allgemeinen topologischen Räumen kann das aber falsch sein!

Beispiel 3.4 Sei $X := \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie, sei Λ eine überabzählbare Indexmenge und sei

$$Y := \prod_{\lambda \in \Lambda} X.$$

Wir definieren eine Funktion $f: Y \rightarrow X$ durch die Vorschrift

$$f(y) := \begin{cases} 0, & \text{falls für unendlich viele } \lambda \in \Lambda \text{ gilt } \pi_\lambda(y) = 0; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\mathbf{0}$ das Λ -Tupel mit allen Koordinaten 0.

Es gilt $f(\mathbf{0}) = 0$, aber f ist nicht stetig bei $\mathbf{0}$, denn jede Umgebung von $\mathbf{0}$ in Y enthält eine Basisumgebung

$$U := \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \ni \mathbf{0},$$

wo die U_λ offen sind in X aber nur endlich viele $U_\lambda \neq X$.

Das Λ -Tupel x mit

$$x_\lambda := \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \in U_\lambda; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

liegt nach Definition in U (denn weil $\mathbf{0} \in U$ kann kein U_λ leer sein), aber nur endlich viele x_λ sind 0 und deshalb gilt $f(x) = 1$.

In anderen Worten, obwohl $\{0\}$ offen ist und deshalb eine Umgebung von 0 in X ist, ist $f^{-1}(\{0\})$ keine Umgebung von $\mathbf{0}$, weil f , wie wir gesehen haben, auf jeder Umgebung von $\mathbf{0}$ auch den Wert 1 annimmt. Deshalb ist f nicht stetig bei $\mathbf{0}$.

Trotzdem bildet f gegen $\mathbf{0}$ konvergente Folgen in Y immer in gegen 0 konvergente Folgen in X ab.

Man beachte dazu, dass wenn $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine in X gegen 0 konvergierende Folge ist, dann folgt aus der Tatsache, dass $\{0\}$ eine Umgebung von 0 in X ist, dass es ein $N \in \mathbf{N}$ gibt, so dass $x_n = 0$ für alle $n \geq N$; das will sagen, dass die gegen 0 konvergenten Folgen in X genau die Folgen sind, die schließlich konstant 0 werden.

Sei $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in Y , die dort gegen $\mathbf{0}$ konvergiert. Weil die Projektionen auf die Faktoren von Y stetig sind, folgt aus Satz 3.3, dass für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\lambda(y_n) = 0,$$

woraus wir schließen können, dass es zu jedem $\lambda \in \Lambda$ eine Zahl $N_\lambda \in \mathbf{N}$ gibt mit $\pi_\lambda(y_n) = 0$ für alle $n \geq N_\lambda$. Um eine eindeutige Wahl zu haben, nehmen wir als N_λ immer die kleinste Zahl mit der genannten Eigenschaft.

Es gibt überabzählbar viele $\lambda \in \Lambda$ aber nur abzählbar viele mögliche Werte von $N_\lambda \in \mathbf{N}$. Deshalb muss es eine Zahl $M \in \mathbf{N}$ geben, die für überabzählbar viele Werte von λ als N_λ auftritt. Daraus folgt, dass für jedes $n \geq M$ überabzählbar viele und somit auf jeden Fall unendlich viele Koordinaten von y_n gleich 0 sind, woraus folgt, dass $f(y_n) = 0$ für alle $n \geq M$.

Damit ist gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$$

für jede Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ in Y , die gegen $\mathbf{0}$ konvergiert. Und trotzdem ist f bei $\mathbf{0}$ nicht stetig!

Woran liegt es, dass die Erhaltung der Folgenkonvergenz in diesem Beispiel nicht ausreicht, um die Stetigkeit von f zu garantieren? Und warum reicht Folgenkonvergenz in den euklidischen Räumen aus, um Stetigkeit zu charakterisieren? Was ist hier anders als dort?

Der wesentliche Unterschied ist leicht zu finden; er liegt versteckt in einem Schlüsselwort, das im Beispiel sogar durch Hervorhebung betont wurde. Die Begründung des Beispiels klappt, weil der Raum Y *überabzählbar* viele Faktoren hat und weil wir auf Y die Tychonoff-Topologie genommen haben, deren Umgebungen nur *endlich* viele Faktoren einschränken und deshalb auch in abzählbaren Kombinationen, wie sie bei Folgen vorkommen, niemals alle Faktoren einschränken können. In der Boxtopologie klappt dieses Beispiel offensichtlich nicht, weil die Boxtopologie auf Y die diskrete ist.

Einer der wichtigen Gedanken in der Konstruktion von Beispiel 3.4 ist die Tatsache, dass der Punkt $\mathbf{0} \in Y$ „zu viele“ Umgebungen hat, nämlich so eine große Anzahl, dass abzählbare Folgen sich ihren Einfluss nicht entziehen können und von ihnen so stark eingeschränkt werden, dass die Konvergenz der Bildfolge auch unter einer nichtstetigen Funktion garantiert wird.

Aus diesem Grund sind folgende „Abzählbarkeitseigenschaften“ von Bedeutung in der Topologie.

Definition 3.5 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Wir sagen, dass (X, \mathcal{T}) oder \mathcal{T} das *erste Abzählbarkeitsaxiom* erfüllt, wenn an jedem Punkt $x \in X$ das Umgebungssystem von \mathcal{T} eine abzählbare Umgebungsbasis \mathcal{U}_x besitzt.

Wir sagen, dass (X, \mathcal{T}) oder \mathcal{T} das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* erfüllt, wenn die Topologie \mathcal{T} eine abzählbare Basis \mathcal{B} besitzt.

Bemerkung 3.6 a) Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste.

Denn wenn \mathcal{B} eine abzählbare Basis für die Topologie \mathcal{T} eines topologischen Raumes X ist, dann bilden nach Bemerkung 2.5 b) für jeden Punkt $x \in X$ die (abzählbar vielen) Basismengen aus \mathcal{B} , die x enthalten, eine abzählbare Umgebungsbasis bei x .

b) Ein diskreter topologischer Raum (X, \mathcal{T}) erfüllt immer das erste Abzählbarkeitsaxiom, aber er erfüllt das zweite genau dann, wenn X abzählbar ist.

Denn die Einpunktmengen $\{x\}$ bilden offensichtlich eine Basis für die diskrete Topologie, und jede Basis muss diese Mengen enthalten, weil sie minimale nichtleere offene Mengen sind. Die diskrete Topologie \mathcal{T} auf X hat also genau dann eine abzählbare Basis, wenn X abzählbar viele Punkte hat.

An jedem Punkt $x \in X$ bildet aber schon die einzelne Menge $\{x\}$ eine Umgebungsbasis bei x , so dass das *erste* Abzählbarkeitsaxiom immer erfüllt ist.

c) Jeder metrische Raum (X, d) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Denn nach Lemma und Definition 1.34 bilden die offenen Bälle $B_r(x)$ mit reellen Radien um x eine Umgebungsbasis bei x . Aber jeder offene Ball $B_r(x)$ enthält einen offenen Ball $B_q(x)$ mit *rationalem* Radius (dazu muss man nur $0 < q \leq r$ wählen). Deshalb bilden die offenen Bälle $B_q(x)$ mit $q > 0 \in \mathbf{Q}$ schon eine Umgebungsbasis bei x , die wegen der Abzählbarkeit von \mathbf{Q} sogar abzählbar ist.

Metrische Räume müssen *nicht* das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen! Zum Beispiel ist jeder diskrete Raum metrisch nach Beispiel 1.35 a), aber er erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom nur, wenn er selber abzählbar ist.

Für den Umgang mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom ist folgender Hilfssatz manchmal nützlich.

Hilfssatz 3.7 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, sei $x \in X$ und die Topologie \mathcal{T} besitze bei x eine abzählbare Umgebungsbasis \mathcal{U} .

Dann gibt es bei x sogar eine „monoton absteigende“ abzählbare Umgebungsbasis

$$\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

mit

$$V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots, \quad (3.1)$$

also mit $V_m \subseteq V_n$ wann immer $m \geq n$.

Beweis. Sei \mathcal{U} eine abzählbare Umgebungsbasis bei x . Wir zählen die Elemente von \mathcal{U} mit den natürlichen Zahlen ab, so dass wir schreiben können

$$\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Wir definieren dann

$$V_n := U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$$

für jedes n , und setzen

$$\mathcal{V} := \{V_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Aus der Definition der V_n ist klar, dass sie die Monotonizitätseigenschaft (3.1) erfüllen. Jedes V_n ist ein endlicher Durchschnitt von Umgebungen von x und somit selber eine Umgebung von x , und jede Umgebung A von x enthält eine der Basismengen U_k und deshalb auch die entsprechende Menge $V_k \subseteq U_k$.

Also bilden die V_n nach Definition 1.27 eine Umgebungsbasis bei x , mit der gewünschten Monotonizitätseigenschaft. ■

Das Problem mit der Umkehrung der Aussage von Satz 3.3, das in Beispiel 3.4 sichtbar wird, hat in der Tat mit den Abzählbarkeitsaxiomen und genauer mit dem *ersten* Abzählbarkeitsaxiom zu tun. In Räumen, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, beschreibt die klassische Folgenkonvergenz die Topologie genau. Zum Beispiel gilt dort immer:

Satz 3.8 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, in dem das erste Abzählbarkeitsaxiom gilt.

(Zum Beispiel, sei $X = \mathbf{R}^n$ mit der Standardtopologie oder sei X ein anderer metrischer Raum.)

Sei (Y, \mathcal{S}) ein zweiter topologischer Raum und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Sei $a \in X$. Für jede gegen a konvergente Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ in X gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Dann ist f stetig bei a .

Beweis. Weil \mathcal{T} das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gibt es nach Hilfsatz 3.7 eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ bei x mit

$$V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots \quad (3.2)$$

Wenn f nicht stetig ist bei a , dann gibt es eine Umgebung A von $f(a)$, so dass $f^{-1}(A)$ keine Umgebung von a ist und deshalb keine der Basismengen V_n enthält.

Also können wir für jedes $n \in \mathbf{N}$ ein Element $x_n \in V_n \setminus f^{-1}(A)$ wählen. Wegen der Bedingung (3.2) gilt für jedes $n \in \mathbf{N}$, dass $x_m \in V_n$ für alle $m \geq n$, und weil jede Umgebung U von a einer der Basisumgebungen V_n enthält, folgt daraus, dass $x_m \in U$ für alle $m \geq n$.

Das zeigt, dass die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ gegen a konvergiert.

Nach Voraussetzung muss die Folge $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ gegen $f(a)$ konvergieren, aber A ist eine Umgebung von $f(a)$, die nach Konstruktion keine der Werte $f(x_n)$ enthält (weil x_n nie zu $f^{-1}(A)$ gehört).

Das ist ein Widerspruch, und deshalb kann es doch nicht zutreffen, dass f nicht stetig bei a ist. Also ist f dort stetig, wie behauptet. ■

Korollar 3.9 Der Produktraum in Beispiel 3.4 (ein überabzählbares Produkt von zweielementigen diskreten Räumen) erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Aus diesem Grund ist er auch nicht metrisierbar, obwohl alle Faktoren als diskrete Räume eine metrische Topologie haben.

Beweis. Die Schlusssatz von Satz 3.8 gilt nicht in diesem Raum, also kann er nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Wegen Bemerkung 3.6 c) kann die Topologie dieses Raumes nicht metrisch sein.

Man kann sich übrigens sehr leicht (als Übung) direkt überlegen, dass kein Produktraum mit überabzählbar vielen nicht indiskreten Faktoren das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Deshalb ist kein solcher Raum metrisierbar. ■

Beispiel 3.4 zeigt, dass Folgenkonvergenz doch nicht geeignet ist, topologische Eigenschaften zu beschreiben, aber Satz 3.8 zeigt, dass sie dafür auch nicht *völlig* ungeeignet ist.

Es liegt deshalb nahe, die Folgenkonvergenz zu einem verwandten Begriff zu verallgemeinern, mit dem man topologische Eigenschaften dann doch genau erfassen kann. Wir wollen zunächst auf ein Merkmal aufmerksam machen, dass bei der Folgenkonvergenz eine entscheidende Rolle innehat und deshalb bei den Verallgemeinerungen auch ins Spiel kommen sollte.

Definition 3.10 Sei X eine Menge und sei $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in X . Ein **Endstück** oder ein **finales Stück** der Folge ist eine Teilmenge

$$E \subseteq \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\},$$

so dass es eine Zahl $N \in \mathbf{N}$ gibt mit $x_n \in E$ für alle $n \geq N$.

Offensichtlich ist der Durchschnitt von zwei Endstücken wieder ein Endstück.

Man beachte: wenn X ein topologischer Raum ist, dann konvergiert eine Folge in X gegen einen Punkt a genau dann, wenn jede Umgebung von a ein Endstück der Folge enthält. So ist Folgenkonvergenz definiert.

Wenn das oben beobachtete Problem mit der Folgenkonvergenz an Abzählbarkeitseigenschaften liegt, wie wir gesehen haben, dann könnte eine vernünftige Verallgemeinerung so aussehen, dass man die abzählbare Indexmenge \mathbf{N} durch etwas anderes ersetzt, dass dem vorhandenen topologischen Raum besser angepasst ist. Diese andere Struktur müsste aber etwas Ähnliches wie Endstücke zulassen.

Es gibt tatsächlich eine folgenähnliche Verallgemeinerung von dieser Art, die **Moore-Smith Folgen** oder **Netze**, die so aussehen, wie klassische Folgen aber von einer beliebigen so genannten **gerichteten Menge** indiziert werden. Gerichtete Mengen tragen eine Relation \leq , die fast eine partielle Ordnung ist (außer dass aus $a \leq b$ und $b \leq a$ nicht folgen muss $a = b$), und

in dieser Relation haben je zwei Elemente eine gemeinsame obere Schranke. Die letzte Eigenschaft macht es möglich, Endstücke so zu definieren, wie bei klassischen Folgen, wobei garantiert ist, dass der Durchschnitt von je zwei Endstücken wieder ein Endstück enthält.

Aus Zeitgründen wollen wir aber nicht weiter auf die Moore-Smith Folgen eingehen, denn inzwischen gibt es einen moderneren (das bedeutet wie meistens auch: etwas abstrakteren, dafür aber leichter zu handhabenden) Begriff, der die gleiche Arbeit leistet und noch etwas mehr. Dieser Begriff ist der Begriff eines **Filters**.

Für die Folgenkonvergenz (auch für Moore-Smith Folgen) definiert man zuerst, was Folgen und ihre Endstücke sind, und dann sagt man, dass eine Folge gegen einen Punkt konvergiert, wenn jede Umgebung des Punktes ein Endstück der Folge enthält. Die Richtung, in der die Gedanken laufen, beginnt also bei den Folgen und Endstücken, und daraus wird eine Bedingung für Konvergenz hergeleitet, die jede Umgebung erfüllen muss.

Der Weg zu den **Filtern** kehrt einfach diesen „Gedankenweg“ um. Wir definieren nicht Folgen, sondern „Mengen, die ein Endstück der Folge enthalten“, aber diese Mengen geben wir *direkt* an, ohne die Folge zu beschreiben oder überhaupt uns auf eine wirklich existente Folge zu beziehen. Dann definieren wir Konvergenz gegen einen Punkt a durch die Bedingung, dass das angegebene Mengensystem alle Umgebungen von a enthält.

Aus unserer bisherigen Diskussion von Endstücken einer Folge ist klar, dass die Familie der Mengen, die ein Endstück einer bestimmten Folge enthalten, die Eigenschaften in folgender Definition besitzt.

Definition 3.11 Sei X eine Menge. Ein **Filter** auf X ist eine nichtleere Familie \mathcal{F} von Teilmengen von X , so dass folgende Eigenschaften gelten:

- a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- b) Wenn $A \in \mathcal{F}$ und B eine Teilmenge von X ist mit $A \subseteq B$, dann ist $B \in \mathcal{F}$;
- c) Wenn $A \in \mathcal{F}$ und $B \in \mathcal{F}$, dann ist $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Diese Eigenschaften kommen einem sehr bekannt vor, und zwar aus unserer ersten Definition 1.1 a), der Definition eines lokalen Umgebungssystems. Ein lokales Umgebungssystem ist auch ein typisches Beispiel für einen Filter; hier eine kleine Sammlung weiterer Beispiele:

Beispiele 3.12 a) Sei X eine Menge und sei $x \in X$. Jedes lokale Umgebungssystem \mathcal{N}_x bei x ist ein Filter auf X .

Stammt dieses lokale Umgebungssystem von einer Topologie \mathcal{T} , so heißt es der **Umgebungsfilter von \mathcal{T} bei x** .

- b) Sei X eine Menge und sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Sei

$$\mathcal{F} := \{ A \subseteq X \mid \text{es gibt ein Endstück } E \text{ von } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } E \subseteq A \}.$$

Dies ist ein Filter. Da X alle Glieder der Folge enthält, enthält X ein Endstück und deshalb ist $X \in \mathcal{F}$. Also ist \mathcal{F} nicht leer.

Die leere Menge kann kein Endstück der Folge enthalten und gehört somit nicht zu \mathcal{F} .

Bedingung 3.11 b) ist trivial nachzuprüfen, und Bedingung 3.11 c) gilt, weil ein Durchschnitt von zwei Endstücken der Folge wieder ein Endstück ist; deshalb enthält der Durchschnitt von zwei Mengen, die jede ein Endstück enthalten, wieder ein Endstück, und gehört wieder zu \mathcal{F} .

- c) Sei X eine Menge und sei $\emptyset \neq C \subseteq X$. Setze

$$\mathcal{F}_C := \{ A \subseteq X \mid C \subseteq A \}. \quad (3.3)$$

Dies ist ein Filter, genannt der **Hauptfilter der Menge C** .

Da $C \in \mathcal{F}_C$ ist \mathcal{F}_C nicht leer, und weil $C \neq \emptyset$ enthält \mathcal{F}_C die leere Menge nicht. Bedingungen 3.11 b) und c) sind trivial nachzuprüfen.

- d) Sei X eine Menge und sei $x \in X$. Setze

$$\mathcal{F}_x := \{ A \subseteq X \mid x \in A \}. \quad (3.4)$$

\mathcal{F}_x ist ein Filter, genannt der **Hauptfilter von x** .

Dies ist nur ein Spezialfall von c) mit $C = \{x\}$.

- e) Sei X eine unendliche Menge. Die Familie \mathcal{D} aller koendlichen Teilmengen von X ist ein Filter.

Natürlich gibt es immer koendliche Teilmengen von X (zum Beispiel X selber), so dass $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Weil X unendlich ist, ist die leere Menge nicht koendlich und gehört nicht zu \mathcal{D} . Jede Obermenge einer koendlichen Menge ist wieder koendlich, und jeder Durchschnitt von zwei koendlichen Mengen ist koendlich, wie wir schon bei der Diskussion der koendlichen Topologie in Beispiel 1.15 c) gesehen haben.

Also sind Eigenschaften 3.11 a)–c) alle erfüllt und \mathcal{D} ist ein Filter.

Bemerkung 3.13 Sei X eine Menge. Jeder Filter \mathcal{F} auf X enthält die Menge X .

Denn \mathcal{F} ist nicht leer und enthält deshalb irgendeine Teilmenge $A \subseteq X$; wegen Bedingung 3.11 b) gilt auch $X \in \mathcal{F}$.

Hier weitere Begriffe in Verbindung mit Filtern.

Definition 3.14 a) Sei X eine Menge und sei \mathcal{F} ein Filter auf X . Eine Familie \mathcal{B} heißt eine **Filterbasis** für \mathcal{F} , wenn gilt

$$\mathcal{F} := \{ A \subseteq X \mid \text{es gibt } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subseteq A \}. \quad (3.5)$$

Man beachte, dass eine Filterbasis nicht leer sein kann (sonst gibt es keine Mengen, die die Bedingung in (3.5) erfüllen), und dass jede Filterbasis \mathcal{B} für \mathcal{F} eine Teilfamilie von \mathcal{F} ist, weil jede Menge $B \in \mathcal{B}$ die Bedingung aus (3.5) erfüllt.

Als Beispiel: die Familie $\{C\}$ ist eine Filterbasis für den Filter \mathcal{F}_C aus Beispiel 3.12 c).

b) Sei X eine Menge und seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Filter auf X . Wir nennen \mathcal{F} **feiner** als \mathcal{G} (und \mathcal{G} **gröber** als \mathcal{F}), wenn

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}.$$

c) Sei X eine Menge und sei \mathcal{F} ein Filter auf X .

Wir nennen \mathcal{F} einen **freien** Filter, wenn

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset.$$

Wenn dieser Durchschnitt nicht leer ist, nennen wir \mathcal{F} **fixiert**.

Der Filter \mathcal{F}_x aus Beispiel 3.12 d) ist natürlich fixiert; der Durchschnitt oben ist offensichtlich $\{x\} \neq \emptyset$.

Der Filter \mathcal{D} aus Beispiel 3.12 e) ist hingegen frei. Weil für jedes $x \in X$ die Menge $X \setminus \{x\}$ zu \mathcal{D} gehört, gehört kein Punkt $x \in X$ zu allen Mengen aus dem Filter, also zu dem Durchschnitt oben.

d) Ein **Ultrafilter** auf einer Menge X ist ein maximaler Filter (im Sinne der Relation \subseteq), also ein Filter \mathcal{U} auf X , der sich nicht echt verfeinern lässt.

Ultrafilter sind ein nützliches Werkzeug, um Argumente mit dem Auswahlaxiom oder dem dazu äquivalenten Zornschen Lemma bequem auf topologische Gegenstände anzuwenden. Diese Fähigkeit wird ihnen durch folgenden Satz verliehen.

Satz 3.15 Sei X eine Menge.

- a) Jeder Filter \mathcal{F} auf X lässt sich zu einem Ultrafilter \mathcal{U} verfeinern. (Dieser Ultrafilter ist aber nicht eindeutig bestimmt).
- b) Ein Filter \mathcal{F} auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt, dass entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ (beide Fälle können natürlich nie gleichzeitig vorkommen, weil sonst der leere Durchschnitt dieser beiden Menge zum Filter gehören würde).

Beweis. Zu a): Sei \mathcal{F} ein Filter auf X . Wir betrachten die Familie \mathfrak{F} aller Filter $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ auf X .

Die Familie \mathfrak{F} ist partiell geordnet durch die „feiner“ Relation, die ja nichts anderes als die Mengeninklusion \subseteq ist. Wenn $\mathfrak{T} \neq \emptyset$ eine bezüglich dieser Ordnung total geordnete Teilfamilie von \mathfrak{F} ist, so sieht man leicht, dass

$$\mathcal{H} := \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathfrak{T}} \mathcal{G}$$

wieder ein Filter ist.

Denn $\mathcal{H} \neq \emptyset$ (weil $\mathfrak{T} \neq \emptyset$). Die leere Menge gehört nicht zu \mathcal{H} , weil sie zu keinem $\mathcal{G} \in \mathfrak{T}$ gehört. Wenn $A \in \mathcal{H}$ und $B \supseteq A$, dann gibt es einen Filter $\mathcal{G} \in \mathfrak{T}$ mit $A \in \mathcal{G}$ und somit auch $B \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Wenn A und B zu \mathcal{H} gehören, dann gibt es Filter \mathcal{G}_1 und $\mathcal{G}_2 \in \mathfrak{T}$ mit $A \in \mathcal{G}_1$ und $B \in \mathcal{G}_2$, und weil \mathfrak{T} total geordnet ist, ist einer der Filter \mathcal{G}_1 oder \mathcal{G}_2 feiner als der andere und enthält A und B beide, und somit auch $A \cap B$; daraus folgt, dass $A \cap B \in \mathcal{H}$.

Also: \mathcal{H} ist ein Filter, offensichtlich gilt $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{F}$ (weil $\mathfrak{T} \neq \emptyset$ und für jedes $\mathcal{G} \in \mathfrak{T}$ gilt $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$), deshalb ist $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}$, und nach Konstruktion ist \mathcal{H} eine obere Schranke zu \mathfrak{T} in \mathfrak{F} .

Damit ist gezeigt, dass jede total geordnete Teilfamilie von \mathfrak{F} eine obere Schranke in \mathfrak{F} hat (auch die leere Familie hat eine, weil $\mathfrak{F} \neq \emptyset$). Aus dem Zornschen Lemma können wir schließen, dass \mathfrak{F} ein maximales Element \mathcal{U} besitzt.

Dieser Filter ist ein Ultrafilter, weil jede Verfeinerung davon automatisch auch \mathcal{F} verfeinert und deshalb zu \mathfrak{F} gehört. Dass \mathcal{U} maximal in \mathfrak{F} ist impliziert also, dass \mathcal{U} auch in der Familie aller Filter maximal ist.

Zu b): Wenn ein Filter \mathcal{F} für jede Teilmenge $A \subseteq X$ entweder A oder $X \setminus A$ enthält, muss er ein Ultrafilter sein, denn wäre $\mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}$ ein echt feinerer Filter, so gäbe es eine Menge $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$.

Weil $A \notin \mathcal{F}$, ist nach Voraussetzung $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Dann wäre aber auch $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{G}$, ein Widerspruch zu Bedingung 3.11 a) in der Definition eines Filters.

Es bleibt also nur noch die andere Richtung der Äquivalenz zu zeigen, nämlich dass wenn \mathcal{U} ein Ultrafilter ist, dann ist für jede Teilmenge $A \subseteq X$ entweder A oder $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Sei \mathcal{U} ein Ultrafilter auf X , und wir nehmen an, es gäbe eine Menge $A \subseteq X$, so dass weder A noch $X \setminus A$ zu \mathcal{U} gehören.

Sei

$$\mathcal{F} := \{ B \subseteq X \mid \text{es gibt } C \in \mathcal{U} \text{ mit } B \cap A = C \cap A \}.$$

Offensichtlich ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, und $A \in \mathcal{F}$ weil $A \cap A = A = X \cap A$, wobei $X \in \mathcal{U}$ nach Bemerkung 3.13.

Wir behaupten, dass \mathcal{F} ein Filter ist. Wir haben schon gesehen, dass \mathcal{F} nicht leer ist.

Die leere Menge gehört nicht zu \mathcal{F} , denn sonst gibt es eine Menge $C \in \mathcal{U}$, so dass $C \cap A = \emptyset$. Das würde bedeuten, dass $C \subseteq X \setminus A$, woraus folgen würde $X \setminus A \in \mathcal{U}$, entgegen unserer Annahme.

Sei $B \in \mathcal{F}$ und $D \supseteq B$. Es gibt eine Menge $C \in \mathcal{U}$ mit $B \cap A = C \cap A$, und für $C' := C \cup D$ (mit $C' \in \mathcal{U}$ weil $C' \supseteq C$) gilt

$$C' \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A) = (B \cap A) \cup (D \cap A) = D \cap A,$$

so dass auch $D \in \mathcal{F}$. Das zeigt, dass Bedingung 3.11 b) erfüllt ist.

Als letztes seien B_1 und $B_2 \in \mathcal{F}$. Es gibt C_1 und $C_2 \in \mathcal{U}$ mit

$$B_1 \cap A = C_1 \cap A \quad \text{und} \quad B_2 \cap A = C_2 \cap A.$$

Daraus folgt

$$(B_1 \cap B_2) \cap A = (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) = (C_1 \cap A) \cap (C_2 \cap A) = (C_1 \cap C_2) \cap A.$$

Also ist $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ (weil $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{U}$) und Bedingung 3.11 c) ist erfüllt.

Wir haben gezeigt, dass \mathcal{F} ein Filter ist, feiner als \mathcal{U} ist und sogar *echt* feiner als \mathcal{U} ist, weil $A \in \mathcal{F}$ aber $A \notin \mathcal{U}$.

Das widerspricht der Tatsache, dass \mathcal{U} ein Ultrafilter ist. Also gibt es doch keine Menge A , für die weder A noch $X \setminus A$ zu \mathcal{U} gehört. ■

Korollar 3.16 Sei X eine Menge.

Jeder fixierte Ultrafilter auf X hat die Gestalt

$$\mathcal{F}_x = \{ A \subseteq X \mid x \in A \}$$

für einen Punkt $x \in X$, ist also der Hauptfilter eines Punktes. Und jeder Hauptfilter \mathcal{F}_x ist ein Ultrafilter.

Jeder freie Ultrafilter \mathcal{U} enthält den Filter \mathcal{D} aus Beispiel 3.12 e).

Beweis. Jeder Filter \mathcal{F}_x ist ein Ultrafilter, denn für jede Menge $A \subseteq X$ gehört x zu genau einer der Mengen A oder $X \setminus A$, so dass genau eine dieser beiden Mengen zu \mathcal{F}_x gehört. Das ist nach Satz 3.15 b) ein Kriterium dafür, ein Ultrafilter zu sein.

Sei \mathcal{U} ein Ultrafilter auf X . Wenn

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A,$$

dann gehört insbesondere die Menge $X \setminus \{x\}$ nicht zu \mathcal{U} , weshalb wir nach Satz 3.15 b) haben, dass $\{x\} \in \mathcal{U}$. Aber wegen Bedingung 3.11 b) ist dann $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{U}$. Weil \mathcal{F}_x schon ein Ultrafilter ist, gilt in dieser Inklusion die Gleichheit.

Wenn auf der anderen Seite

$$\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A = \emptyset,$$

dann gibt es für jedes $x \in X$ eine Menge $A_x \in \mathcal{U}$ mit $x \notin A_x$.

Die Menge $X \setminus \{x\}$, die dann eine Obermenge von A_x ist, gehört somit für jedes $x \in X$ auch zu \mathcal{U} .

Daraus folgt, dass jede *koendliche* Menge A zu \mathcal{U} gehört, denn

$$A = \bigcap_{x \notin A} (X \setminus \{x\})$$

und dies ist ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{U} , wenn nur endlich viele Elemente von X nicht in A liegen. ■

Filter lassen sich mit Abbildungen von einer Menge zu einer anderen übertragen.

Definition 3.17 Seien X und Y Mengen, sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und sei \mathcal{F} ein Filter auf X .

Dann induziert die Abbildung f einen Filter $f(\mathcal{F})$ auf Y durch die Vorschrift

$$f(\mathcal{F}) := \{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \} \quad (3.6)$$

Der Filter $f(\mathcal{F})$ heißt der **Bildfilter** von \mathcal{F} unter f .

Die Bedingung (3.6) definiert tatsächlich einen Filter. Denn $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, da nach Bemerkung 3.13 $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{F}$ und somit $Y \in f(\mathcal{F})$. Die leere

Menge gehört nicht zu $f(\mathcal{F})$, weil $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ nicht zu \mathcal{F} gehört. Die Bedingungen 3.11 b) und c) gelten, weil Urbildnehmen mit Mengeninklusion verträglich ist und mit dem Durchschnittoperator kommutiert.

Hier ein paar einfache Eigenschaften von Bildfiltern:

Bemerkung 3.18 Seien X und Y Mengen und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- a) Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge auf X und sei \mathcal{F} der Filter aus Beispiel 3.12 b), bestehend aus allen Mengen, die ein Endstück der Folge enthalten. Dann ist $f(\mathcal{F})$ der entsprechende Filter für die Bildfolge $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$.
Denn genau dann gehört eine Menge A zu $f(\mathcal{F})$, wenn $x_n \in f^{-1}(A)$ für alle bis auf endlich viele n , und das ist genau dann der Fall, wenn $f(x_n) \in A$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbf{N}$.
- b) Der Bildfilter eines Hauptfilters ist wieder ein Hauptfilter. Genauer: für jede Teilmenge $C \subseteq X$ ist

$$f(\mathcal{F}_C) = \mathcal{F}_{f(C)}.$$

Denn für jede Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt

$$\begin{aligned} A \in f(\mathcal{F}_C) &\iff f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_C \\ &\iff C \subseteq f^{-1}(A) \\ &\iff f(C) \subseteq A \\ &\iff A \in \mathcal{F}_{f(C)}. \end{aligned}$$

- c) Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} Filter auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, dann ist $f(\mathcal{F}) \subseteq f(\mathcal{G})$.

Dies ist klar aus der Definition.

- d) Der Bildfilter eines fixierten Filters ist wieder fixiert.

Denn wenn der Punkt $x \in X$ zu jeder Menge des Filters \mathcal{F} auf X gehört, so ist $f(x)$ ein Element von jeder Menge in $f(\mathcal{F})$.

- e) Der Bildfilter eines Ultrafilters ist wieder ein Ultrafilter.

Denn sei \mathcal{U} ein Ultrafilter auf X . Für jede Teilmenge $A \subseteq Y$ gehört entweder $f^{-1}(A)$ oder $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ zu \mathcal{U} , woraus folgt, dass entweder A oder $Y \setminus A$ zu $f(\mathcal{U})$ gehört. Das zeigt, dass $f(\mathcal{U})$ ein Ultrafilter ist.

f) Sei Z eine weitere Menge und $g: Y \longrightarrow Z$ eine Abbildung. Sei \mathcal{F} ein Filter auf X .

Dann ist

$$\text{id}_X(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \quad \text{und} \quad g(f(\mathcal{F})) = (g \circ f)(\mathcal{F}).$$

Die erste Behauptung ist trivial. Die zweite ist klar aus der Feststellung, dass für eine Menge $A \subseteq Z$ gilt

$$\begin{aligned} A \in g(f(\mathcal{F})) &\iff g^{-1}(A) \in f(\mathcal{F}) \\ &\iff f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Nachdem wir jetzt etwas Grundwissen über Filter gesammelt haben, wollen wir sie nun topologisch anwenden.

Definition 3.19 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei \mathcal{F} ein Filter auf X .

Wir sagen, \mathcal{F} *konvergiert* gegen einen Punkt $a \in X$, und wir schreiben

$$\lim \mathcal{F} = a \quad \text{oder} \quad \mathcal{F} \rightarrow a,$$

wenn $\mathcal{N}_a \subseteq \mathcal{F}$, also wenn \mathcal{F} den Umgebungsfilter von a verfeinert.

Bemerkung 3.20 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen $a \in X$ genau dann, wenn der in Beispiel 3.12 b) konstruierte Filter \mathcal{F} aller Mengen, die ein Endstück der Folge enthalten, gegen a konvergiert.

Denn die Aussage $\mathcal{F} \rightarrow a$ ist äquivalent dazu, dass jede Umgebung von a zu \mathcal{F} gehört, in diesem Fall also äquivalent dazu, dass jede Umgebung von a ein Endstück der Folge enthält. Das ist aber die Definition davon, dass die Folge gegen a konvergiert.

Satz 3.21 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Sei $a \in X$.

Die Abbildung f ist stetig bei a genau dann, wenn für jeden Filter \mathcal{F} auf X gilt: wenn $\lim \mathcal{F} = a$, dann ist $\lim f(\mathcal{F}) = f(a)$.

Beweis. Richtung „ \Rightarrow “: Sei f stetig bei a , und sei \mathcal{F} ein Filter auf X mit $\lim \mathcal{F} = a$.

Sei $V \in \mathcal{N}_{f(a)}$ eine Umgebung von $f(a) \in Y$. Weil f stetig ist bei a , ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X , und $f^{-1}(V)$ gehört zu \mathcal{F} weil \mathcal{F} gegen a konvergiert. Also gehört V nach Definition zu $f(\mathcal{F})$.

Weil dies für jede Umgebung V von $f(a)$ der Fall ist, konvergiert $f(\mathcal{F})$ gegen $f(a)$, was zu zeigen war.

Richtung „ \Leftarrow “: Die genannte Bedingung über konvergente Filter gelte. Der Umgebungsfiler \mathcal{N}_a des Punktes a konvergiert immer gegen a (das ist trivial nach Definition 3.19), so dass nach der Voraussetzung auch gelten muss

$$\lim f(\mathcal{N}_a) = f(a).$$

Das bedeutet, dass jede Umgebung V von $f(a)$ zu $f(\mathcal{N}_a)$ gehört, oder in anderen Worten, dass für jede Umgebung V von $f(a)$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_a$. Also ist das Urbild jeder Umgebung von $f(a)$ eine Umgebung von a in X ; das besagt, dass f bei a stetig ist. ■

Wir wollen in diesem Kapitel noch einige wichtige topologische Begriffe einführen oder intensiver als bisher behandeln, die gewisserweise durch Konvergenzgedanken motiviert sind oder in ihrer Entstehung so motiviert wurden, auch wenn man sie heute in der Regel anders definiert.

Wir erinnern zuerst an zwei wichtige Operatoren, die uns in der Vorlesung und den Übungen schon begegnet sind, ohne dass wir damals ihre Bedeutung klar herausstellen konnten.

Der erste dieser Operatoren ist der Operator des Inneren, und der zweite ist eine Dualisierung davon.

Aus diesen beiden Operatoren gewinnt man noch eine dritte wichtige topologische Operation.

Lemma und Definition 3.22 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei A eine Teilmenge von X .

a) Das **Innere** A° von A ist die größte in A enthaltene offene Menge.

Es gilt die Darstellung

$$A^\circ := \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ offen}}} U. \quad (3.7)$$

b) Die **abgeschlossene Hülle** \bar{A} von A ist definiert als

$$\bar{A} := \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ abgeschlossen}}} C. \quad (3.8)$$

Diese Menge ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A .

c) Der **Rand** von A ist definiert als die Menge

$$\partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}. \quad (3.9)$$

Dies ist immer eine abgeschlossene Menge. Warum sie „Rand“ heißt wird in der anschließenden Bemerkung 3.23 erklärt.

Beweis. Zu a): Genau dann gehört ein Punkt x zu A° nach Definition 1.3, wenn A eine Umgebung von x ist, und das ist nach Lemma und Definition 1.11 genau dann der Fall, wenn es eine offene Menge U gibt mit $a \in U \subseteq A$.

Daraus sind zwei Dinge zu schließen: jeder innere Punkt von A liegt in einer in A enthaltenen offenen Menge und deshalb in der Vereinigung auf der rechten Seite von (3.7). Umgekehrt ist A eine Umgebung von jedem Punkt, der in einer in A enthaltenen offenen Menge liegt, und deshalb eine Umgebung von jedem Punkt in der rechten Seite von (3.7); alle Punkte in dieser Vereinigung sind also innere Punkte von A .

Das beweist zunächst die Gleichheit in (3.7).

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nach Konstruktion jede offene Teilmenge von A , aber als Vereinigung von offenen Teilmengen von A ist sie selber offen und eine Teilmenge von A , und ist deshalb die Größte unter den offenen Teilmengen von A .

Zu b): Die rechte Seite von (3.8) ist ein Durchschnitt von abgeschlossenen Obermengen von A und deshalb abgeschlossen und eine Obermenge von A . Nach Konstruktion ist sie in jeder abgeschlossenen Obermenge von A enthalten und deshalb die Kleinste unter den abgeschlossenen Obermengen von A .

Zu c): Der Rand von A ist der Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Mengen und deshalb abgeschlossen. Wir haben nämlich

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap (X \setminus \overset{\circ}{A}).$$

■

Bemerkung 3.23 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei A eine Teilmenge von X . Sei $x \in X$.

Für x trifft genau einer der folgenden Fälle zu:

- a) Es gibt eine offene Menge U um x mit $U \subseteq A$.
- b) Es gibt eine offene Menge U um x mit $U \subseteq X \setminus A$.
- c) Keine offene Menge U um x liegt ganz in A oder ganz in $X \setminus A$, d. h., jede offene Menge U um x trifft sowohl $X \setminus A$ wie auch A .

Statt „offene Menge“ kann man hier auch „Umgebung“ schreiben, ohne den Wahrheitsgehalt der drei Fälle zu verändern, da jede offene Menge um x eine Umgebung von x ist und da jede Umgebung von x eine offene Menge um x enthält.

Genau dann, wenn Fall a) zutrifft, ist $x \in A^\circ$.

Genau dann, wenn Fall b) zutrifft, gibt es (als Komplement von U) eine abgeschlossene Menge um A , die x nicht enthält, und genau dann ist $x \notin \bar{A}$.

Genau dann, wenn Fall c) zutrifft, gilt weder die Situation aus Fall a) noch die Situation aus Fall b), d. h., genau dann gilt weder $x \in A^\circ$ noch $x \notin \bar{A}$.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $x \in \bar{A} \setminus A^\circ = \partial A$.

Die *Randpunkte* von A sind also genau die Punkte, von denen jede Umgebung sowohl A wie auch $X \setminus A$ trifft, die Punkte, die also „zwischen“ A und seinem Komplement liegen und in diesem Sinne „am Rande“ von A liegen.

Man beachte, dass es nicht festgelegt ist, ob ein Randpunkt von A zu der Menge A gehört oder nicht; beide Fälle sind möglich.

Hier einige nützliche aber sehr einfache Fakten über diese Operatoren:

Lemma 3.24 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$.

a) A ist offen genau dann, wenn $A^\circ = A$.

A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\bar{A} = A$.

b) Es gilt

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \quad \text{und} \quad \overline{\bar{A}} = \bar{A}.$$

c) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ \quad \text{und} \quad (X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$

d) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = \partial(X \setminus A)$

Beweis. Zu a): Die Richtung „ \Rightarrow “ folgt aus der Tatsache, dass wenn A offen (oder abgeschlossen) ist, A selber die größte in A enthaltene offene Menge (oder die kleinste A umfassende abgeschlossene Menge) ist.

Die Richtung „ \Leftarrow “ folgt aus der Tatsache, dass A° offen und \bar{A} abgeschlossen ist.

b) folgt sofort aus a) und der Tatsache, dass A° offen und \bar{A} abgeschlossen ist.

Zu c): Genau dann ist U offen und eine Teilmenge von A , wenn $C = X \setminus U$ abgeschlossen ist und eine Obermenge von $X \setminus A$ ist. Deshalb haben wir, nach

den de Morganschen Regeln, dass

$$X \setminus A^\circ = X \setminus \left(\bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ offen}}} U \right) = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ offen}}} (X \setminus U) = \bigcap_{\substack{C \supseteq X \setminus A \\ C \text{ abgeschlossen}}} C = \overline{X \setminus A}$$

Die andere Gleichung folgt aus dieser, wenn wir A durch $X \setminus A$ ersetzen und die ganze Gleichung komplementieren (oder man kann sie auf die gleiche Weise wie diese direkt beweisen).

Zu d): Nach Definition ist $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ)$, und $X \setminus A^\circ$ können wir nach Teil c) durch $\overline{X \setminus A}$ ersetzen.

Wegen der Symmetrie des so entstehenden Ausdrucks für ∂A in A und $X \setminus A$, ist sein Wert auch gleich $\partial(X \setminus A)$. ■

Bisher haben wir beim Hantieren mit A° , \overline{A} und ∂A immer nur mit offenen und abgeschlossenen Mengen gearbeitet, aber die geometrische Vorstellung von diesen Operatoren hat auch viel mit Konvergenz und „Häufung“ zu tun. Wir wollen unter diesem Aspekt eine andere Beschreibung dieser Operatoren geben.

Definition 3.25 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei A eine Teilmenge von X .

Ein Punkt $x \in X$ heißt ein **Häufungspunkt** von A , wenn für jede Umgebung U von x gilt:

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Man beachte, dass jede Umgebung eines Häufungspunktes von A nicht nur A treffen muss, sondern sie muss A treffen in einem *anderen* Punkt von A als der Häufungspunkt selber; A muss also nicht nur in der Nähe des Häufungspunktes vertreten sein (das könnte der Häufungspunkt selber bewirken, falls er in A liegt), sondern A muss sich dort mit anderen Punkten *häufen*.

Die Menge der Häufungspunkte von A bezeichnen wir mit $\text{HP}(A)$.

Ein Punkt $a \in A$, der *kein* Häufungspunkt von A ist, heißt ein **isolierter Punkt** von A .

Ein isolierter Punkt von A liegt zwar selber in A , aber in seiner Nähe liegen keine anderen Punkte von A . Wenn a ein isolierter Punkt von A ist, dann ist $\{a\}$ offen in der Unterraumtopologie von A , da es eine Umgebung und somit eine offene Menge um a gibt, die A nur in diesem einen Punkt trifft.

Hier der Bezug zu den Operatoren $^\circ$, $\overline{}$ und ∂ :

Lemma 3.26 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei A eine Teilmenge von X .

$$a) \quad \bar{A} = A \cup \text{HP}(A) = A \cup \partial A.$$

$$b) \quad A^\circ = A \setminus \text{HP}(X \setminus A) = A \setminus \partial A.$$

$$c) \quad \begin{array}{l} A \text{ ist abgeschlossen} \iff \partial A \subseteq A \iff \text{HP}(A) \subseteq A \\ A \text{ ist offen} \iff A \cap \partial A = \emptyset \iff A \cap \text{HP}(X \setminus A) = \emptyset. \end{array}$$

Beweis. Wir beginnen mit b).

A° ist auf jeden Fall eine Teilmenge von A , und ein Punkt $a \in A$ ist genau dann *kein* innerer Punkt von A , wenn er keine Umgebung hat, die ganz in A liegt, also wenn jede Umgebung von a die Menge $X \setminus A = (X \setminus A) \setminus \{a\}$ trifft.

Das ist genau dann der Fall erstens, wenn $a \in \text{HP}(X \setminus A)$, und zweitens (da jede Umgebung von $a \in A$ die Menge A automatisch trifft), wenn jede Umgebung von a sowohl A wie auch $X \setminus A$ trifft, also wenn $a \in \partial A$, nach Bemerkung 3.23 c).

Diese Bedingungen charakterisierten die Punkte von A , die *nicht* zu A° gehören. Das Innere von A ist also jeweils die Mengendifferenz A ohne die nicht zu A° gehörenden Punkte:

$$A^\circ = A \setminus \text{HP}(X \setminus A) = A \setminus \partial A.$$

a) folgt aus b), wenn man überall A durch $X \setminus A$ ersetzt (der Rand ändert sich dadurch nicht, wie wir in Lemma 3.24 d) gesehen haben) und wenn man anschließend die entstehende Gleichung komplementiert (also aus der Gleichheit der dort stehenden Ausdrücke auf die Gleichheit ihrer Komplemente schließt) und Lemma 3.24 c) anwendet.

c) folgt sofort aus Lemma 3.24 a) und den Formeln 3.26 b) und a) für das Innere und die abgeschlossene Hülle von A . ■

Bemerkung 3.27 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei A eine Teilmenge von X .

Ein Häufungspunkt von A kann, aber muss nicht zu A gehören.

Ein isolierter Punkt von A muss ein Punkt von A sein, und ein Punkt $a \in A$ ist genau dann ein isolierter Punkt, wenn $\{a\}$ offen ist *in* A .

(Denn a ist isoliert in A genau dann, wenn es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt, die A *nur in dem Punkt* a schneidet.)

In Lemma 3.26 a) haben wir gesehen, dass \bar{A} aus den Häufungspunkten von A und aus weiteren Punkten *von* A besteht.

Die Differenz $\overline{A} \setminus \text{HP}(A) \subseteq A$ besteht also genau aus den Punkten von A , die keine Häufungspunkte sind, also aus den isolierten Punkten von A . Damit haben wir als „Verfeinerung“ von der linken Gleichheit in Lemma 3.26 a) die Gleichheit

$$\overline{A} = \{a \in A \mid a \text{ isoliert}\} \overset{\text{D}}{\cup} \text{HP}(A).$$

Beispiel 3.28 Um ein Gefühl für die Begriffe „Inneres“, „abgeschlossene Hülle“, „Rand“, „Häufungspunkt“ und „isolierter Punkt“ zu bekommen betrachten wir eine für die Illustration dieser Konzepte geeignete Teilmenge von \mathbf{R} .

Wir nehmen als den Raum X also die reelle Gerade \mathbf{R} mit der Standardtopologie, und als den Unterraum $A \subseteq X$ die Menge

$$A := \{r \in \mathbf{Q} \mid r < 0\} \cup [0, 1] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right] \cup \mathbf{N}.$$

Wir betrachten außerdem

$$B := \mathbf{R} \setminus A = \{r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \mid r < 0\} \cup \left(1, \frac{3}{2}\right] \cup \bigcup_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n \geq 2}} (n, n+1).$$

Die natürlichen Zahlen ≥ 3 sind isolierte Punkte von A .

Alle anderen Punkte von A sind Häufungspunkte von A , und zusätzlich sind die irrationalen negativen Zahlen sowie der nicht zu A gehörende Punkt $\frac{3}{2}$ Häufungspunkte von A , denn jede Umgebung von diesen Punkten enthält entweder negative rationale Punkte oder, im Falle von $\frac{3}{2}$, Punkte aus dem Intervall $\left(\frac{3}{2}, 2\right]$.

Somit ist

$$\text{HP}(A) = (-\infty, 1] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad \text{und} \quad \overline{A} = (-\infty, 1] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right] \cup \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\}.$$

Man sieht auch sehr leicht, dass die inneren Punkte von A genau die beiden Intervalle

$$\overset{\circ}{A} = (0, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

ausmachen.

Die Menge B hat keine isolierten Punkte. Also besteht

$$\overline{B} = \mathbf{R} \setminus \overset{\circ}{A} = (-\infty, 0] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right] \cup [2, \infty)$$

nur aus Häufungspunkten von B .

Das Innere von B erkennt man direkt oder durch Komplementierung der abgeschlossenen Hülle von A als

$$\overset{\circ}{B} = X \setminus \overline{A} = \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \bigcup_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n \geq 2}} (n, n+1).$$

Die Mengen A und B haben den gleichen Rand, bestehend aus dem Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hüllen.

$$\partial A = \partial B = \overline{A} \cap \overline{B} = (-\infty, 0] \cup \left\{ \frac{3}{2} \right\} \cup \mathbf{N}.$$

Die gerade eingeführten Operatoren und Begriffe können auch benutzt werden, um stetige Abbildungen zu charakterisieren, was manchmal nützlich und bequem sein kann.

Lemma 3.29 *Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.*

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a) f ist stetig.
- b) Für jede Menge $A \subseteq X$ ist $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
- c) Für jede Menge $B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.
- d) Für jede Menge $A \subseteq X$ ist $f(\text{HP}(A)) \subseteq \overline{f(A)}$.
- e) Für jede Menge $A \subseteq X$ ist $f(\partial A) \subseteq \overline{f(A)}$.

Beweis. a) \Rightarrow b): Wenn f stetig ist, dann gilt für die abgeschlossene Menge $\overline{f(A)}$, dass $f^{-1}(\overline{f(A)})$ wieder abgeschlossen ist. Und natürlich ist A in dieser Menge enthalten.

Weil \overline{A} die kleinste A enthaltende abgeschlossene Teilmenge von X ist, haben wir $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ oder

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

b) \Rightarrow c): Sei $B \subseteq Y$ und sei $A := X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$. Es gilt

$$\overline{A} = X \setminus (f^{-1}(B))^\circ \tag{3.10}$$

und es gilt $f(A) \subseteq Y \setminus B$, so dass

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus B} = Y \setminus B^\circ. \tag{3.11}$$

Wenn b) gilt, dann ist $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ und in Kombination mit (3.11) finden wir $f(\overline{A}) \subseteq Y \setminus B^\circ$. Nach Urbildnehmen wird mit (3.10) daraus

$$X \setminus (f^{-1}(B))^\circ = \overline{A} \subseteq f^{-1}(Y \setminus B^\circ) = X \setminus f^{-1}(B^\circ).$$

Komplementierung kehrt die Inklusionsrichtung um und liefert

$$f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ.$$

c) \Rightarrow a): Sei $U \subseteq Y$ eine offene Menge.

Wir nehmen U in der Rolle von B in c); dann ist $U^\circ = U$, weil U offen ist.

Die Aussage von c) besagt dann, dass

$$f^{-1}(U) \subseteq (f^{-1}(U))^\circ.$$

Weil natürlich auch gilt $(f^{-1}(U))^\circ \subseteq f^{-1}(U)$, haben wir die Gleichheit.

Also ist für jede offene Menge $U \subseteq Y$ die Menge $f^{-1}(U)$ gleich ihrem Inneren und deshalb offen. Das besagt, dass f stetig ist.

Die Äquivalenz von b), d) und e) ist leicht zu sehen und folgt sofort aus Lemma 3.26 a). Denn es gilt immer, dass $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, und somit ist das Bild unter f von der ganzen abgeschlossenen Hülle von A genau dann in $\overline{f(A)}$ enthalten, wenn das Bild des „Restteils“ $\text{HP}(A)$ oder ∂A darin enthalten ist. ■

Zum Schluss dieses Kapitels definieren wir noch zwei wichtige Begriffe, die über die Operatoren $\bar{}$ und $^\circ$ definiert werden.

Definition 3.30 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$.

- a) Wir sagen, A sei **dicht** in X , wenn gilt $\overline{A} = X$.
- b) Wir sagen, A sei **nirgends dicht** in X , wenn \overline{A} keine nichtleere offene Menge enthält, in anderen Worten, wenn $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.

Beispiele 3.31 a) \mathbf{Q} ist dicht in \mathbf{R} , da jede reelle Zahl ein Häufungspunkt von \mathbf{Q} ist.

b) Auch die irrationalen Zahlen $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sind dicht in \mathbf{R} .

c) Die Menge der ganzen Zahlen \mathbf{Z} ist nirgends dicht in \mathbf{R} .

d) Sogar die Menge

$$\left\{ m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n > 0 \in \mathbf{N} \right\}$$

ist nirgends dicht in \mathbf{R} .

Kapitel 4

Kompakte und lokalkompakte Räume

In der Topologie gibt es zwei besondere Eigenschaften, die neben ihren sonstigen angenehmen Konsequenzen für die sie tragenden Räume gerade deshalb eine herausragende Rolle spielen, weil sie unter stetigen Abbildungen erhalten bleiben.

Das macht diese Eigenschaften für die *Klassifizierung* von Räumen nützlich — zwei Räume können nicht homöomorph sein, wenn sie sich in Bezug auf diese Eigenschaften unterscheiden *oder wenn sie das nach leichten Manipulationen tun* (die sich unter stetigen Abbildungen vernünftig verhalten), zum Beispiel, nach dem Entfernen einer kleinen endlichen Anzahl von Punkten.

Die erste dieser Eigenschaften, die wir betrachten wollen, ist die **Kompaktheit**. Das Wort **kompakt** kennen Sie sicher aus der Anfängervorlesung, wo dieser Begriff aber meistens durch Konvergenzbedingungen oder durch Eigenschaften wie „beschränkt und abgeschlossen“ charakterisiert wird, die nur im \mathbf{R}^n und ähnlichen Räumen zur eigentlichen Kompaktheit äquivalent sind. Wir werden hier natürlich eine allgemeinere topologische Definition dafür präsentieren.

Der Name „kompakt“, den wir diesen Mengen geben, sagt schon aus, wie wir uns kompakte Mengen intuitiv vorstellen wollen, nämlich als in einem gewissen Sinne „klein und gedrungen“. Es bleibt nur festzulegen, in *welchem* Sinn kompakte Mengen sich wie „kleine Mengen“ verhalten sollen.

Was gewollt ist, ist dass kompakte Mengen sich in topologischer Hinsicht so verhalten wie *endliche* Mengen, auch wenn sie in Wirklichkeit unendlich und sogar überabzählbar sein können. Diese „topologische Endlichkeit“ erreichen wir mit folgender Definition.

Definition 4.1 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Wir nennen X **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung \mathcal{U} von X eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{E} hat, d. h., wenn es eine endliche Teilfamilie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$ gibt, die auch eine Überdeckung von X ist.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **kompakt**, wenn A in der Unterraumtopologie induziert von \mathcal{T} ein kompakter topologischer Raum ist. Das kann man wie folgt auch direkt in der Topologie \mathcal{T} ausdrücken:

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist **kompakt**, wenn es für jede Familie \mathcal{U} von offenen Mengen von \mathcal{T} , so dass

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U, \quad (4.1)$$

eine endliche Teilfamilie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$ gibt, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U.$$

Eine Familie von offenen Mengen des großen Raumes X , für die (4.1) gilt, wollen wir in Zukunft auch eine **offene Überdeckung von A** nennen; die Durchschnitte dieser offenen Mengen mit A sind offen in der Unterraumtopologie und bilden eine offene Überdeckung des topologischen Raumes A im Sinne von Definition 2.37.

Oft nützlich ist folgende duale Version dieser Definition:

Lemma 4.2 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Genau dann ist X kompakt, wenn für jede Familie \mathcal{C} von abgeschlossenen Teilmengen von X , so dass kein endlicher Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{C} leer ist, gilt, dass

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset. \quad (4.2)$$

Beweis. Sei \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen von X und sei

$$\mathcal{C} := \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Genau dann ist jede Menge aus \mathcal{U} offen, wenn jede Menge aus \mathcal{C} abgeschlossen ist.

Genau dann ist \mathcal{U} eine Überdeckung von X , wenn

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (X \setminus U) = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X \setminus X = \emptyset.$$

Auf diese Weise übersetzt sich die Bedingung „jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung“ in die äquivalente „duale“ Bedingung: jede Familie von abgeschlossenen Mengen mit leerem Durchschnitt hat eine endliche Teilfamilie, deren Durchschnitt leer ist, oder als (wiederum äquivalentes) Kontrapositiv:

„Jede Familie von abgeschlossenen Mengen, in der keine endliche Teilfamilie leeren Durchschnitt hat, hat insgesamt nichtleeren Durchschnitt.“ ■

Bei manchen Autoren gehört noch eine weitere Eigenschaft zur Definition von Kompaktheit, eine Eigenschaft, die nach dem jüdischen Mathematiker Felix Hausdorff benannt ist, der Begründer der modernen mengentheoretischen Topologie, der 1942 in Bonn Selbstmord beging, um der drohenden Deportation in ein Konzentrationslager zu entgehen.

Hausdorff hat in seinem 1914 erschienenen Buch *Grundzüge der Mengenlehre* zum ersten Mal eine Theorie von topologischen Räumen entwickelt, die er wie in unserer ersten Definition 1.2 mit Hilfe von Umgebungssystemen definierte, außer dass er noch folgende zusätzliche Eigenschaft verlangte:

Definition 4.3 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Wir nennen die Topologie \mathcal{T} **Hausdorffsch** und den Raum (X, \mathcal{T}) einen **Hausdorffraum**, wenn es für je zwei verschiedene Punkte $x \neq y \in X$ disjunkte offene Mengen U und $V \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in U$ und $y \in V$.

Wie gesagt, bei manchen Autoren ist die Kompaktheit das, was wir „kompakt und Hausdorffsch“ nennen würden, und die Kompaktheit in unserem Sinne wird „Quasikompaktheit“ genannt.

Auch wenn wir sie nicht standardmäßig verlangen, hat die Hausdorff-Eigenschaft schöne Konsequenzen in Verbindung mit Kompaktheit.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz, der die Hausdorffsche Eigenschaft in Bezug auf kompakte Mengen erweitert.

Hilfssatz 4.4 Sei (X, \mathcal{T}) ein Hausdorffscher topologischer Raum und sei A eine kompakte Teilmenge von X .

Für jeden Punkt x aus X mit $x \notin A$ existieren disjunkte offene Mengen U und $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ und $A \subseteq V$.

Beweis. Sei A eine kompakte Teilmenge von X und sei $x \in X \setminus A$.

Für jedes $y \in A$ ist $x \neq y$, da $x \notin A$. Weil \mathcal{T} Hausdorffsch ist, gibt es disjunkte offene Mengen $U_y \ni x$ und $V_y \ni y$. Die Familie der offenen Mengen V_y ist eine Überdeckung von A , weil jedes $y \in A$ zu einer dieser Mengen gehört.

Da A kompakt ist, hat diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir durch $V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_n}$.

Wir setzen

$$U := U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n} \quad \text{und} \quad V := V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

U ist eine *offene* Menge um x , weil diese Menge ein *endlicher* Durchschnitt von offenen Mengen ist, und V ist natürlich eine offene Menge um A .

Weil für jedes i gilt $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$, ist U disjunkt von V (denn ein Punkt, der zu *allen* U_{y_i} gehört, liegt in *keiner* V_{y_i}). ■

Der „Trick“ im Beweis von Hilfssatz 4.4, der die Kompaktheit von A ausnutzt, um Durchschnitte von offenen Mengen außerhalb A zu endlichen Durchschnitten zu reduzieren, die dann offen bleiben, wird so oder in ähnlicher Form sehr oft verwendet, und kann als ein wichtiges Werkzeug in Verbindung mit Kompaktheit gelten.

Lemma 4.5 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

- a) Wenn X kompakt ist, dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von X auch kompakt.
- b) Wenn X Hausdorffsch ist, dann ist jede kompakte Teilmenge von X abgeschlossen.

Beweis. Zu a): Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und sei \mathcal{C} eine Familie von Teilmengen $C \subseteq A$, die in der Unterraumtopologie von A abgeschlossen sind, und es sei kein endlicher Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{C} leer.

Da A selber abgeschlossen ist, sind die Mengen aus \mathcal{C} nach Lemma 2.22 g) auch in X abgeschlossen, und da X kompakt ist und kein endlicher Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{C} leer ist, ist auch $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$.

Das zeigt nach Lemma 4.2, dass A kompakt ist.

Zu b): Sei X Hausdorffsch und sei $A \subseteq X$ kompakt.

Nach Hilfssatz 4.4 gibt es für jedes $x \notin A$ ein Paar von disjunkten offenen Menge $U_x \ni x$ und $V_x \supseteq A$. Aus der Disjunktheit von U_x und V_x folgt auch

$$U_x \cap A = \emptyset.$$

Die Vereinigung aller U_x für $x \notin A$ ist also eine Teilmenge, aber auch eine Obermenge von $X \setminus A$, und ist somit gleich $X \setminus A$.

Das zeigt, dass $X \setminus A$ als Vereinigung von offenen Mengen offen ist, oder gleichbedeutend, dass A abgeschlossen ist. ■

Bevor wir den allgemeinen Eigenschaften der Kompaktheit weiter nachgehen, wollen wir ein paar Beispiele für die bisher in diesem Kapitel eingeführten Eigenschaften geben, und dabei auch einige Fälle behandeln, die für die spätere Untersuchung des Kompaktheitsbegriffs nützlich sein werden.

Beispiele 4.6 a) Jeder endliche topologische Raum X ist kompakt.

Denn aus einer beliebigen offenen Überdeckung von X muss man nur zu jedem der endlich vielen Punkten von X eine Menge heraussuchen, die diesen Punkt enthält, und die endlich vielen so herausgesuchten Mengen bilden schon eine Teilüberdeckung von X .

b) Jeder indiskrete topologische Raum X ist kompakt, da jede offene Überdeckung von X die Menge X und somit eine einelementige Teilüberdeckung enthalten muss — X ist die einzige nichtleere offene Menge.

Ein indiskreter Raum ist nur dann Hausdorffsch, wenn er nur aus einem Punkt besteht.

c) Jeder diskrete topologische Raum X ist Hausdorffsch.

Er ist kompakt genau dann, wenn er endlich ist. Denn die Einpunktmengen bilden eine offene Überdeckung von X , die keine echte Teilüberdeckung hat und somit auch keine endliche, wenn die Anzahl der Punkte in X nicht endlich ist.

d) Wenn X ein topologischer Raum ist und wenn A_1, A_2, \dots, A_n endlich viele kompakte Teilmengen von X sind, dann ist ihre Vereinigung

$$A := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

auch kompakt.

Denn jede offene Überdeckung \mathcal{U} von A ist auch eine offene Überdeckung jeder der Mengen A_i und enthält eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{U}_i von A_i , weil A_i kompakt ist.

Die Vereinigung

$$\mathcal{V} := \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$$

ist immer noch eine endliche Teilfamilie von \mathcal{U} und überdeckt ganz A .

Das zeigt, dass A kompakt ist.

e) Jeder metrische Raum (X, d) ist Hausdorffsch.

Denn seien $x \neq y \in X$. Dann ist $d(x, y) \neq 0$. Sei $r := \frac{1}{2}d(x, y)$.

Wegen der Dreiecksungleichung sind die offenen Bälle $B_r(x)$ und $B_r(y)$ disjunkt, und einer enthält x , der andere y . Das beweist die Hausdorffsche Eigenschaft.

Es ist etwas schwerer zu sagen, wann eine Teilmenge von einem metrischen Raum kompakt ist, aber zumindest kann man schnell zwei

notwendige Bedingungen dafür herauschälen, und wir werden später zeigen, dass im \mathbf{R}^n diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Weil jeder metrische Raum Hausdorffsch ist, muss jede kompakte Teilmenge abgeschlossen sein, nach Lemma 4.5 b).

Die zweite notwendige Eigenschaft ist nicht direkt eine topologische Eigenschaft, sondern eine Eigenschaft der Metrik d . Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **beschränkt** bezüglich d , wenn für jedes $x \in X$ die Zahlenmenge

$$\{ d(x, a) \mid a \in A \}$$

beschränkt ist, also wenn es eine Zahl M gibt, so dass

$$d(x, a) < M \quad \text{für alle } a \in A.$$

Die Schranke M hängt natürlich von der Wahl des Punktes x ab, aber auf Grund der Dreiecksungleichung ist es klar, dass wenn diese Bedingung für *ein* $x_0 \in X$ erfüllt ist, dann gilt sie auch (mit einem anderen M) für jeden anderen Punkt x . Deshalb reicht es auch, die Bedingung nur für einen Punkt x nachzuprüfen.

Kompakte Mengen sind immer beschränkt.

Denn man nehme irgendeinen Punkt $x \in X$ und man betrachte die offenen Mengen

$$U_n = B_n(x)$$

für $n \in \mathbf{N}$. Weil jeder Punkt eine endliche Entfernung zu x hat, bilden die U_n eine Überdeckung von X und somit von A .

Wenn A kompakt ist, hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung mit Mengen U_{n_i} für endlich viele n_i . Offensichtlich bilden die U_n eine monotone Folge von Mengen, so dass wenn m das größte der n_i ist, dann sind alle $U_{n_i} \subseteq U_m$ und schon U_m alleine überdeckt A .

Das bedeutet, dass $d(x, a) < m$ für jedes $a \in A$, und A ist somit beschränkt.

Das Interessante an dieser Bedingung ist, dass wir aus den Übungen wissen, dass jede metrische Topologie durch eine beschränkte Metrik erzeugt werden kann. In einer solchen Metrik ist jede Teilmenge von X beschränkt.

Das ist aber trotzdem keine Abschwächung der entdeckten notwendigen Bedingung für Kompaktheit, denn diese Bedingung verlangt, dass *jede* Metrik auf A beschränkt ist, und nicht nur die ohnehin beschränkten Metriken.

Notwendig für Kompaktheit in einem metrischen Raum sind also die Bedingungen, dass jede kompakte Menge beschränkt und abgeschlossen ist.

f) Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge mit der Ordnungstopologie \mathcal{O} .

Diese Topologie ist immer Hausdorffsch. Denn seien $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte von X , und wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $x < y$.

Wenn es ein Element z zwischen x und y gibt, also ein Element $z \in X$ mit

$$x < z < y,$$

dann sind $(-\infty, z)$ und (z, ∞) disjunkte offene Mengen und es gilt $x \in (-\infty, z)$ und $y \in (z, \infty)$.

Wenn es *kein* Element zwischen x und y gibt, dann sind die offenen Mengen $(-\infty, y)$ und (x, ∞) disjunkt, wobei die erste x enthält und die zweite y .

Auf jeden Fall ist die Hausdorffsche Bedingung erfüllt.

Weil (X, \mathcal{O}) Hausdorffsch ist, muss jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ abgeschlossen sein.

K muss auch **beschränkt** sein, in dem Sinne, dass es in X Elemente $a < b$ gibt mit

$$K \subseteq [a, b].$$

Es gilt sogar die noch stärkere Bedingung, dass K sowohl ein *größtes* wie auch ein *kleinstes* Element hat.

Denn wenn K kein größtes Element hat, dann gibt es zu jedem Element $b \in K$ ein Element $d > b$ mit $d \in K$.

Die Mengen $(-\infty, d)$ für $d \in K$ bilden aus diesem Grund eine offene Überdeckung von K . Diese Überdeckung hat keine endliche Teilüberdeckung, weil jede endliche Teilmenge von X ein maximales Element hat (da X total geordnet ist). Die Vereinigung einer endlichen Familie von offenen linken Strahlen mit rechtem Endpunkt in K ist deshalb wieder ein offener linker Strahl $(-\infty, b)$ mit $b \in K$, und weil b selber nicht zu diesem Strahl gehört, kann er K nicht enthalten.

Das widerspricht der Kompaktheit von K ; also hat K doch ein größtes Element b .

Entsprechend zeigt man, dass K ein kleinstes Element a hat. K ist dann auch enthalten in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$.

Das wirft jetzt die Frage auf, wann ein *abgeschlossenes Intervall* in \mathcal{O} kompakt ist. Diese Frage beantworten wir in Lemma 4.8.

Definition 4.7 Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq X$ **nach oben beschränkt**, wenn es ein Element $b \in X$ gibt, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A$. Jedes solche Element b heißt eine **obere Schranke** zu A .

A heißt **nach unten beschränkt**, wenn es ein Element $c \in X$ gibt mit $c \leq a$ für jedes $a \in A$. Jedes solche Element c heißt eine **untere Schranke** von A .

Wir sagen, dass X die **Supremumseigenschaft** hat, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von X eine *kleinste* obere Schranke hat. Diese kleinste obere Schranke nennt man auch das **Supremum** von A und schreibt dafür $\sup A$.

Lemma 4.8 Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge mit der Ordnungstopologie \mathcal{O} .

Genau dann ist jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ von X kompakt in der Topologie \mathcal{O} , wenn $(X, <)$ die Supremumseigenschaft hat.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei A eine nichtleere nach oben beschränkte Menge. Sei $a \in A$ und sei b eine obere Schranke von A ; dann ist $a \leq b$ und das Intervall $[a, b]$ ist nach Annahme kompakt.

Sei \mathcal{C} die Familie aller abgeschlossenen Intervalle $[c, d]$ mit $a \leq c \in A$ und $d \leq b$ eine obere Schranke zu A . Diese Intervalle sind alle abgeschlossen in X und somit in $[a, b]$, und jeder endliche Durchschnitt

$$[c_1, d_1] \cap [c_2, d_2] \cap \cdots \cap [c_n, d_n] = \left[\max_{1 \leq i \leq n} c_i, \min_{1 \leq i \leq n} d_i \right]$$

ist nichtleer, weil das linke Ende in A liegt und somit kleiner oder gleich dem rechten Ende ist, welches eine obere Schranke zu A ist.

Weil $[a, b]$ kompakt ist, ist der Durchschnitt D aller Intervalle aus \mathcal{C} nach Lemma 4.2 nichtleer.

Sei $x \in D$. Dann ist x nach Definition von D größer oder gleich jedem linken Ende der Intervalle aus \mathcal{C} , also jedem Element von A (natürlich auch größer oder gleich den Elementen, die kleiner sind als a). Das heißt, x ist eine obere Schranke von A .

Andererseits ist x kleiner oder gleich jedem rechten Ende der Intervalle aus \mathcal{C} , also kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von A (natürlich auch der oberen Schranken, die größer sind als b). Das heißt, x ist eine *kleinste* obere Schranke von A , und wir haben die Supremumseigenschaft bewiesen.

„ \Leftarrow “: X habe die Supremumseigenschaft. Sei $[a, b] \subseteq X$ ein abgeschlossenes Intervall und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Natürlich überdeckt \mathcal{U} auch jedes Teilintervall $[a, x]$ ($a \leq x \leq b$) von $[a, b]$.

Sei

$$A := \{x \in [a, b] \mid \mathcal{U} \text{ enthält eine } \textit{endliche} \text{ Teilüberdeckung von } [a, x]\}.$$

Diese Menge ist nichtleer, weil offensichtlich $a \in A$, und sie ist beschränkt, weil b eine obere Schranke ist.

Sei c die nach Annahme existierende kleinste obere Schranke von A . Natürlich gilt $a \leq c \leq b$ (weil $a \in A$ und b eine obere Schranke von A ist).

Es gibt eine offene Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $c \in U$, und weil \mathcal{O} die Ordnungstopologie ist, gibt es ein *offenes* Intervall $(p, q) \subseteq U$ mit $c \in (p, q) \subseteq U$.

Wenn $(p, c] \cap A = \emptyset$, dann wäre auch p eine obere Schranke zu A und c wäre nicht die *kleinste*. Also ist $(p, c] \cap A \neq \emptyset$.

Insbesondere gibt es ein Element x mit $p < x \leq c$, so dass $[a, x]$ durch endlich viele offene Mengen aus \mathcal{U} überdeckt wird. Fügt man noch U als weitere offene Menge hinzu, erhält man eine immer noch endliche Teilfamilie \mathcal{V} von \mathcal{U} , die $[a, x] \cup (p, q) \supseteq [a, q]$ überdeckt.

Wenn $q \leq b$, dann gäbe es eine offene Menge $V \in \mathcal{U}$ mit $q \in V$, und $\mathcal{V} \cup \{V\}$ wäre eine endliche Teilfamilie von \mathcal{U} , die $[a, q]$ überdeckt. Damit wäre $q \in A$ und c doch keine obere Schranke zu A , in Widerspruch zu seiner Wahl.

Also ist $q > b$, woraus folgt, dass die endliche Familie \mathcal{V} das ganze Intervall $[a, b]$ überdeckt. Das beweist die Kompaktheit von $[a, b]$. ■

Korollar 4.9 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbf{R}$ ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt¹ und abgeschlossen ist.

Beweis. Wir haben wahlweise in Beispiel 4.6 e) oder in Beispiel 4.6 f) gesehen, dass kompakte Teilmengen des metrischen oder Ordnungsraums \mathbf{R} beschränkt und abgeschlossen sein müssen.

Umgekehrt, wenn A eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbf{R} ist, dann gibt es, weil A beschränkt ist, ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, das A umfasst. Bekanntlich erfüllt \mathbf{R} die Supremumseigenschaft, so dass nach Lemma 4.8 das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ kompakt ist.

¹Weil die Standardtopologie von \mathbf{R} gleichzeitig eine Ordnungstopologie und eine metrische Topologie ist, haben wir zwei Definitionen von *beschränkt* auf \mathbf{R} : die metrische Definition aus Beispiel 4.6 e) und die Ordnungsdefinition aus Beispiel 4.6 f), dass A Teilmenge eines abgeschlossenen Intervalls ist. Aber weil auf \mathbf{R} alle drei Metriken $d(x, y)$ gleich der Länge des Intervalls $[x, y]$ sind, ist es klar oder sehr leicht nachzuweisen, dass beide Definitionen der Beschränktheit einer Teilmenge von \mathbf{R} äquivalent sind.

Aus Lemma 4.5 a) folgt, dass die (auch in der Unterraumtopologie) abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq [a, b]$ kompakt ist. ■

Die gleiche Behauptung, wie in Korollar 4.9, gilt auch in \mathbf{R}^n , aber wir müssen ein bisschen warten, bis wir das bequem beweisen können.

Hier ist noch eine Charakterisierung von Kompaktheit in der Sprache der Filter.

Lemma 4.10 *Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.*

X ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X gegen einen Punkt von X konvergiert.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei X kompakt. Angenommen, \mathcal{U} ist ein Ultrafilter auf X , der gegen keinen Punkt konvergiert.

Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung A_x von x , die nicht zu \mathcal{U} gehört. Die Umgebung A_x enthält eine offene Menge $U_x \ni x$, die auch nicht zu \mathcal{U} gehören kann, weil sonst A_x dazu gehören würde.

Weil \mathcal{U} ein Ultrafilter ist, gehört dann für jedes $x \in X$ die abgeschlossene Menge $C_x := X \setminus U_x$ zu \mathcal{U} , und $x \notin C_x$.

Die C_x bilden somit eine Familie von abgeschlossenen Mengen, deren Durchschnitt leer ist (weil die Familie zu jedem Punkt eine Menge enthält, in der dieser Punkt nicht liegt).

Aber jeder endliche Durchschnitt von Mengen C_x gehört wieder zu dem Filter \mathcal{U} und kann deshalb nicht leer sein. Das widerspricht der Bedingung für Kompaktheit aus Lemma 4.2, und da X kompakt ist, kann es doch keinen nichtkonvergenten Ultrafilter geben.

„ \Leftarrow “: Jeder Ultrafilter auf X konvergiere. Sei \mathcal{C} eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von X , so dass kein endlicher Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{C} leer ist. Nach Lemma 4.2 müssen wir zeigen, dass der Durchschnitt *aller* Mengen aus \mathcal{C} nichtleer ist.

Wenn \mathcal{C} die leere Familie ist, dann ist der Durchschnitt aller Mengen aus \mathcal{C} gleich X , und dies ist gleichzeitig ein *endlicher* Durchschnitt aus \mathcal{C} und deshalb nichtleer.

Wir können also jetzt annehmen, die Familie \mathcal{C} ist nichtleer. Sei \mathcal{F} die Familie aller Teilmengen von X , die einen endlichen Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{C} enthalten.

Weil \mathcal{C} nichtleer ist, ist auch \mathcal{F} nichtleer. Weil jeder endliche Durchschnitt aus \mathcal{C} nichtleer ist, ist $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Offensichtlich gehört jede Obermenge einer Menge aus \mathcal{F} wieder zu \mathcal{F} , und jeder endliche Durchschnitt D von Mengen aus \mathcal{F} enthält einen endlichen Durchschnitt von endlichen Durchschnitten aus \mathcal{C} , der ja selber wieder ein endlicher Durchschnitt aus \mathcal{C} ist, und somit gehört D wieder zu \mathcal{F} .

Damit ist gezeigt, dass \mathcal{F} ein Filter ist. Nach Satz 3.15 a) lässt sich \mathcal{F} zu einem Ultrafilter \mathcal{U} verfeinern.

Nach Annahme gibt es einen Punkt $a \in X$ mit $\mathcal{U} \rightarrow a$.

Sei $C \in \mathcal{C}$. Nach Konstruktion gehört C zu \mathcal{F} und somit zu \mathcal{U} . Also gehört die offene Menge $X \setminus C$ nicht zu \mathcal{U} . Weil $\mathcal{U} \rightarrow a$, kann $X \setminus C$ keine Umgebung von a sein, aber $X \setminus C$ ist offen und deshalb eine Umgebung jedes ihrer Punkte.

Es folgt also, dass $a \notin X \setminus C$, oder in anderen Worten, dass $a \in C$.

Das gilt für jedes $C \in \mathcal{C}$. Also ist $a \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ und $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$, was zu zeigen war. ■

Eine der wichtigsten Tatsachen über die Kompaktheit ist, dass sie unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

Satz 4.11 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung.

Wenn A eine kompakte Teilmenge von X ist, dann ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von Y .

Beweis. Sei \mathcal{V} eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V\right) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}(V),$$

so dass

$$\mathcal{U} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$$

eine Überdeckung von A ist.

Weil f stetig ist, besteht diese Überdeckung aus offenen Mengen.

Weil A kompakt ist, enthält \mathcal{U} eine endliche Teilüberdeckung von A bestehend aus Mengen $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2), \dots, f^{-1}(V_n)$. Die endlich vielen Mengen V_1, V_2, \dots, V_n bilden eine offene Überdeckung von $f(A)$, die eine Teilüberdeckung von \mathcal{V} ist.

Das zeigt, dass $f(A)$ kompakt ist. ■

Dieser sehr leicht zu beweisende Satz hat einige schöne Konsequenzen.

Korollar 4.12 (Maximumsatz für stetige reellwertige Funktionen)

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $f: X \longrightarrow \mathbf{R}$ eine stetige reellwertige Funktion.

Dann nimmt f auf jeder kompakten Teilmenge $A \subseteq X$ ein Maximum und ein Minimum an.

Beweis. Sei $A \subseteq X$ kompakt. Nach Satz 4.11 ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von \mathbf{R} . Nach Beispiel 4.6 f) enthält $f(A)$ ein größtes und ein kleinstes Element, und das sind die maximalen und minimalen Werte von f auf A . ■

Lemma 4.13 Sei (X, \mathcal{T}) ein kompakter topologischer Raum und sei (Y, \mathcal{S}) ein Hausdorffscher Raum.

Dann ist jede stetige bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ schon ein Homöomorphismus.

Beweis. Man muss nur zeigen, dass unter den genannten Voraussetzungen auch $f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist.

Sei $g := f^{-1}$. Sei C eine abgeschlossene Teilmenge von X .

Nach Lemma 4.5 a) ist C kompakt, da X kompakt ist. Nach Satz 4.11 ist $f(C)$ eine kompakte Teilmenge von Y , und weil Y Hausdorffsch ist bedeutet das nach Lemma 4.5 b), dass $f(C) = g^{-1}(C)$ abgeschlossen ist.

Das zeigt, dass $g = f^{-1}$ stetig ist. ■

Wir haben in Lemma 4.5 schon einen Satz bewiesen, der Auskunft gibt über kompakte *Unterräume* von kompakten Räumen, und Beispiel 4.6 d) klärt auf, wann eine *Summe* von kompakten Räumen kompakt ist: eine endliche Summe von kompakten Räumen ist immer kompakt, und eine unendliche Summe von kompakten (oder nichtkompakten) nichtleeren Räumen kann nicht kompakt sein, weil die Summanden eine offene Überdeckung bilden, die keine echte Verfeinerung (und somit keine endliche Verfeinerung) zulässt.

Wir wollen jetzt ermitteln, wie die anderen Konstruktionen aus Kapitel 2 sich in Bezug auf Kompaktheit verhalten.

Lemma 4.14 Jeder Quotient eines kompakten topologischen Raumes ist kompakt.

Beweis. Sei (X, \mathcal{T}) ein kompakter topologischer Raum, und sei (Y, \mathcal{S}) ein Quotient von (X, \mathcal{T}) . Dann gibt es eine identifizierende Abbildung $\pi: X \rightarrow Y$.

Weil π surjektiv ist, ist $\pi(X) = Y$, und weil π stetig ist, ist $Y = \pi(X)$ auch kompakt, nach Satz 4.11. ■

Der folgende von Tychonoff zuerst bewiesene Satz über Produkte liefert einen der überzeugendsten Argumente dafür, dass die Tychonofftopologie die „richtige“ Topologie auf Produkträumen ist (denn der Satz gilt *nicht* in der Boxtopologie).

Satz 4.15 (Tychonoff) Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein nichtleerer topologischer Raum. Sei

$$(X, \mathcal{T}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$$

(X, \mathcal{T}) ist genau dann kompakt, wenn alle $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ kompakt sind.

Beweis. Die Richtung „ \Rightarrow “ folgt aus Lemma 4.14, da nach Lemma 2.47 c) jedes X_λ ein Quotient von X ist.

„ \Leftarrow “: Es seien alle X_λ kompakt. Sei \mathcal{U} ein Ultrafilter auf X .

Nach Bemerkung 3.18 e) ist für jedes $\lambda \in \Lambda$ der Bildfilter $\pi_\lambda(\mathcal{U})$ wieder ein Ultrafilter auf X_λ , und weil X_λ kompakt ist, konvergiert dieser Ultrafilter gegen ein Element $a_\lambda \in X_\lambda$, nach Lemma 4.10.

Sei $a := (\dots, a_\lambda, \dots) \in X$. Wir behaupten, dass $\lim \mathcal{U} = a$.

Wir müssen dazu zeigen, dass jede Umgebung von a zu \mathcal{U} gehört, aber es reicht offenbar zu zeigen, dass \mathcal{U} eine Umgebungsbasis bei a umfasst, denn jede Umgebung ist eine Obermenge einer Basisumgebung und würde dann auch zu \mathcal{U} gehören.

In Lemma 2.47 a) wurde gezeigt, dass eine Basis der Tychonofftopologie gebildet wird durch die großen offenen Quader

$$U := \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

mit U_λ offen in X_λ und mit $U_\lambda = X_\lambda$ außer für endlich viele λ .

Die großen offenen Quader U mit $a \in U$ bilden nach Bemerkung 2.5 b) eine Umgebungsbasis bei a . Jede Basisumgebung kann man schreiben als

$$U = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcap_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ U_\lambda \neq X_\lambda}} \pi_\lambda^{-1}(U_\lambda).$$

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ mit $U_\lambda \neq X_\lambda$ ist $a_\lambda \in U_\lambda$ weil $a \in U$. Ferner, U_λ ist eine offene Umgebung von a_λ und gehört somit zu $\pi_\lambda(\mathcal{U})$, da $\pi_\lambda(\mathcal{U}) \rightarrow a_\lambda$.

Das bedeutet, dass $\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{U}$, und weil dies für jedes der endlich vielen λ gilt, für die $U_\lambda \neq X_\lambda$, gehört auch U , der endliche Durchschnitt dieser Mengen, zu \mathcal{U} .

Das zeigt, dass \mathcal{U} eine Umgebungsbasis bei a enthält und somit den Umgebungsfiler bei a verfeinert. In anderen Worten, $\mathcal{U} \rightarrow a$.

Weil \mathcal{U} ein beliebiger Ultrafilter auf X war, haben wir gezeigt, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Aus Lemma 4.10 folgt, dass X kompakt ist. ■

Der „klassische“ Beweis des Tychonoffsatzes ist wesentlich länger als dieser und involviert komplizierte Konstruktionen und einen Appell an das Zornsche Lemma. Es wäre aber nicht ganz fair zu behaupten, unser Beweis sei wesentlich kürzer (aber schon, dass er effizienter und eleganter ist); wir haben die gleichen komplizierten Schritte ausgeführt, aber haben sie sinnvoller untergebracht — nämlich, in den Beweisen der Ultrafiltersätze Satz 3.15 a) (jeder Filter lässt sich zu einem Ultrafilter verfeinern: dort kommt das Zornsche Lemma vor) und Lemma 4.10 „ \Leftarrow “ (ein Raum, in dem jeder Ultrafilter konvergiert, ist kompakt: dort kommt eine „komplizierte Konstruktion“ mit endlichen Durchschnitten einer Familie von abgeschlossenen Mengen vor).

Diese Einteilung liefert uns nützliche Sätze, die man auch an anderer Stelle einbringen kann, als nur im Beweis des Tychonoffsatzes.

Wie schon gesagt, gilt der Tychonoffsatz nicht in der Boxtopologie.

Beispiel 4.16 Sei Λ eine unendliche Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei X_λ eine endliche Menge mit mehr als einem Element, versehen mit der diskreten Topologie. Jedes X_λ ist kompakt, da endlich.

In der Boxtopologie hat $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ auch die diskrete Topologie und kann nicht kompakt sein, da es unter den genannten Voraussetzungen unendlich viele Punkte hat.

Mit Hilfe des Tychonoffsatzes können wir jetzt endlich einen der klassischen Sätze über Kompaktheit im \mathbf{R}^n beweisen.

Satz 4.17 (Heine-Borel) *Eine Teilmenge A von \mathbf{R}^n ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Die Richtung „ \Rightarrow “ wurde schon in Beispiel 4.6 e) bewiesen.

„ \Leftarrow “: Sei A beschränkt und abgeschlossen in \mathbf{R}^n . Hier ist „beschränkt“ im Sinne der Metrik zu verstehen, aber wegen der Relationen (1.12) ist klar, dass der Beschränktheitsbegriff in allen drei Standardmetriken d_e , d_t und d_m auf \mathbf{R}^n der Gleiche ist.

Wenn A also beschränkt ist, dann ist A insbesondere in der Maximumsmetrik beschränkt, woraus folgt, dass es eine Zahl $M < 0$ gibt, so dass

$$A \subseteq [-M, M]^n.$$

Weil \mathbf{R} die Supremumseigenschaft besitzt, ist das reelle Intervall $[-M, M]$ nach Lemma 4.8 kompakt. Aus dem Tychonoffsatz folgt, dass $[-M, M]^n$ kompakt ist, und als abgeschlossene Teilmenge von dieser kompakten Menge ist A selber kompakt nach Lemma 4.5 a). ■

Neben dem Satz von Heine-Borel wird die Kompaktheit im \mathbf{R}^n auch oft durch Konvergenzbedingungen beschrieben.

Eine Teilmenge A von einem topologischen Raum X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

In metrischen Räumen (und somit für Teilmengen von \mathbf{R}^n) sind Folgenkompaktheit und Kompaktheit äquivalent (aber der Beweis ist langwierig); in allgemeinen topologischen Räumen gilt das nicht. Da Folgenkonvergenz in vielen topologischen Räumen, wie wir gesehen haben, kein sehr nützlicher Begriff ist, wollen wir diese Fragen, auch aus Zeitgründen, hier nicht weiter untersuchen und verweisen auf die Literatur.

Wenn wir aber „Folgenkompaktheit“ durch „Filterkompaktheit“ ersetzen, dann gilt die Äquivalenz zur Kompaktheit in jedem Raum. Das haben wir sogar schon bewiesen! Wir erklären ganz kurz, wieso.

Den Filterbegriff haben wir aus der Vorstellung entwickelt, dass ein typischer Filter sich verhalten sollte wie die Familie aller Mengen, die ein Endstück einer gegebenen Folge enthalten. Wenn man dann diese Folge durch eine Teilfolge ersetzt, so wird der entsprechende Filter *feiner*; er behält die Mengen, die einen Endstück der ursprünglichen vollen Folge enthielten, und gewinnt neue Mengen hinzu.

In Filtersprache wird also aus der Bedingung „jede Folge enthält eine konvergente Teilfolge“ die neue Bedingung „jeder Filter hat eine konvergente Verfeinerung“.

Wenn ein Filter \mathcal{F} gegen einen Punkt a konvergiert, dann konvergiert auch jede Verfeinerung gegen a , denn schon \mathcal{F} , und mit ihm auch die Verfeinerung, enthält jede Umgebung von a .

Eine einmal erreichte Konvergenz geht also nicht kaputt, wenn man den konvergierenden Filter weiter verfeinert, und deshalb schadet es nicht, wenn man ihn *maximal* verfeinert, d. h., wenn man ihn zu einem Ultrafilter verfeinert.

Die Bedingung „jeder Filter hat eine konvergente Verfeinerung“ kann man deshalb vereinfachen zu der *äquivalenten* Bedingung: „jeder Ultrafilter konvergiert“. Dass dies zur Kompaktheit äquivalent ist war die Aussage von Lemma 4.10.

Beispiele 4.18 Sei n eine natürliche Zahl.

- a) Wenn $n \geq 1$, dann ist \mathbf{R}^n *nicht* kompakt (da nicht beschränkt).
- b) Die n -dimensionale abgeschlossene Einheitsscheibe

$$D^n := \{ x \in \mathbf{R}^n \mid |x| := d_e(x, \mathbf{0}) \leq 1 \}$$

ist kompakt.

Denn aus der Dreiecksungleichung folgt leicht, dass die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ stetig ist. Deshalb ist $D^n = |\cdot|^{-1}([0, 1])$ abgeschlossen, und nach Definition ist D^n beschränkt. Nach dem Satz von Heine-Borel ist D^n kompakt.

- c) Der n -dimensionale offene Einheitsball

$$B^n := \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| := d_e(x, \mathbf{0}) < 1\}$$

ist nicht kompakt, denn \mathbf{R}^n ist Hausdorffsch und B^n ist nicht abgeschlossen (man sieht leicht, dass $\overline{B^n} = \text{HP}(B^n) = D^n \supsetneq B^n$).

- d) Die n -dimensionale **Einheitssphäre**

$$S^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

ist kompakt, denn $\{1\}$ ist abgeschlossen in \mathbf{R} , und $S^n = |\cdot|^{-1}(\{1\})$ ist deshalb eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge D^{n+1} .

- e) Auf S^n definiere man eine Äquivalenzrelation \sim durch die Bedingung: $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$. Der Quotientenraum S^n/\sim nennt sich der **n -dimensionale projektive Raum P^n** .

Er ist kompakt als Quotient des kompakten Raumes S^n .

- f) Der **n -dimensionale Torus** ist definiert als das Produkt

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$$

von n Kreisen oder 1-Sphären S^1 . Nach dem Satz von Tychonoff ist T^n kompakt.

In metrischen Räumen ist die Feinheit einer offenen Überdeckung einer kompakten Menge „von 0 weg beschränkt“, wie das folgende berühmte **Lemma von Lebesgue** aussagt. Diese Tatsache ist oft von großem Nutzen beim Umgang mit kompakten Mengen in metrischen Räumen.

Lemma 4.19 (Lebesgue) Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei A eine kompakte Teilmenge von X .

Für jede offene Überdeckung \mathcal{U} von A existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ (genannt eine **Lebesgue-Zahl** der Überdeckung \mathcal{U}), so dass jeder ε -Ball um einen Punkt von A ganz in einer der Überdeckungsmengen enthalten ist.

In anderen Worten, für jedes $a \in A$ gibt es eine Menge $U \in \mathcal{U}$, so dass

$$B_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

Beweis. Sei $A \subseteq X$ kompakt und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von A .

Für jedes $x \in A$ existiert eine Menge $U_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_x$ (weil \mathcal{U} eine Überdeckung von A ist), und weil U_x offen ist gibt es eine Zahl $r_x > 0$ mit $B_{2r_x}(x) \subseteq U_x$ (beachten Sie die Verdoppelung im Radius dieser Bälle!).

Die *halb so großen* offenen Bälle $B_{r_x}(x)$ bilden eine Überdeckung von A , weil jeder Punkt von A als Mittelpunkt eines dieser Bälle auftritt. Weil A kompakt ist, hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, d. h., es gibt endlich viele Punkte x_1, x_2, \dots, x_n in A , so dass

$$A \subseteq B_{r_{x_1}}(x_1) \cup B_{r_{x_2}}(x_2) \cup \dots \cup B_{r_{x_n}}(x_n).$$

Sei $\varepsilon := \min(r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{x_n})$.

Für jedes $a \in A$ gibt es eine Zahl i zwischen 1 und n , so dass $a \in B_{r_{x_i}}(x_i)$ (weil diese Bälle A überdecken), und auf Grund der Dreiecksungleichung ist

$$B_\varepsilon(a) \subseteq B_{r_{x_i} + \varepsilon}(x_i) \subseteq B_{2r_{x_i}}(x_i) \subseteq U_{x_i} \in \mathcal{U}.$$

Wir haben also gezeigt, dass für jeden Punkt $a \in A$ eine Menge $U \in \mathcal{U}$ existiert, die den ε -Ball um a umfasst. ■

Es gibt auch eine „lokale“ Version der Kompaktheit.

Definition 4.20 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

Beispiel 4.21 a) Jeder kompakte topologische Raum ist lokalkompakt.

b) Die euklidischen Räume \mathbf{R}^n sind lokalkompakt.

Für jedes $x \in \mathbf{R}^n$ ist zum Beispiel

$$D^n(x) := \{ y \in \mathbf{R}^n \mid d_e(x, y) \leq 1 \}$$

eine kompakte Umgebung von x . Sie ist kompakt, weil sie offensichtlich durch eine Translation homöomorph zur kompakten Einheitskreis D^n ist.

Lemma 4.22 Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkompakter Hausdorffscher topologischer Raum. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder offenen Menge $U \ni x$ eine offene Menge V , so dass

$$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U \tag{4.3}$$

und so dass \bar{V} kompakt ist.

Beweis. Jeder Punkt x hat eine kompakte Umgebung K , und weil K eine Umgebung ist, ist $x \in K^\circ$.

Sei U eine offene Menge um x . Sei $W := U \cap K^\circ$. Dies ist eine offene Menge um x , und weil $x \in W^\circ = W$, gehört x nach der definierenden Formel (3.9) für den Rand nicht zu ∂W .

Weil X Hausdorffsch ist, ist K abgeschlossen nach Lemma 4.5 b). Weil $W \subseteq K$, ist auch $\partial W \subseteq \overline{W} \subseteq K$. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K ist ∂W nach Lemma 4.5 a) auch kompakt, und x gehört nicht zu dieser Menge.

Nach Hilfssatz 4.4 gibt es disjunkte offene Mengen E und F mit $x \in E$ und $\partial W \subseteq F$. Sei $V := W \cap E$.

Dies ist eine offene Menge um x und $\overline{V} \subseteq \overline{W} \subseteq K$. Aus diesem Grund ist \overline{V} kompakt.

Wir haben auch $V \subseteq E \subseteq X \setminus F$ und weil F offen ist gilt

$$\overline{V} \subseteq X \setminus F \subseteq X \setminus \partial W.$$

Also ist

$$\overline{V} \subseteq \overline{W} \setminus \partial W \subseteq W^\circ = W \subseteq U,$$

wie wir es haben wollten. ■

Für kompakte und lokalkompakte Hausdorffräume gelten Verallgemeinerungen der Hausdorffschen Trennungseigenschaft. Das haben wir schon in Hilfssatz 4.4 gesehen, aber dieses einfache Ergebnis kann man noch verstärken.

Definition 4.23 Sei (X, \mathcal{T}) ein Hausdorffscher topologischer Raum.

- a) X oder die Topologie \mathcal{T} heißt **regulär**, wenn es zu jedem Punkt x aus X und zu jeder x nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ disjunkte offene Mengen U und V gibt mit $x \in U$ und $A \subseteq V$.
- b) X oder die Topologie \mathcal{T} heißt **normal**, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A und $B \subseteq X$ disjunkte offene Mengen U und V gibt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.

Wichtig! Es reicht nicht, nur die Eigenschaften unter a) oder b) zu verlangen; diese Eigenschaften bestimmen die Regularität oder Normalität nur in Verbindung mit der hier allgemein vorausgesetzten Hausdorffschen Eigenschaft.

Die Hausdorff-Eigenschaft folgt nicht automatisch aus den anderen Eigenschaften, weil in einem nicht-Hausdorffschen Raum Einpunktmengen nicht abgeschlossen sein müssen.

Satz 4.24 a) Jeder lokalkompakte Hausdorffraum ist regulär.

b) Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal.

Beweis. Zu a): Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkompakter Hausdorffscher Raum und sei $x \in X$ und A eine abgeschlossene Menge, die x nicht enthält.

Sei $W := X \setminus A$. Dies ist eine offene Menge um x , und nach Lemma 4.22 existiert eine offene Menge U um x mit

$$x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq W = X \setminus A.$$

Daraus folgt, dass die offene Menge $V := X \setminus \bar{U}$ die Menge A umfasst und natürlich disjunkt ist zu U , das den Punkt x enthält.

Das beweist, dass X regulär ist.

Zu b): Wenn X kompakt ist, dann ist X auch lokalkompakt und somit regulär.

Seien A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X . Kein Punkt aus A gehört dann zu B . Weil X regulär ist, gibt es zu jedem $a \in A$ disjunkte offene Mengen $U_a \ni a$ und $V_a \supseteq B$.

Die Mengen U_a für $a \in A$ bilden eine offene Überdeckung von A . Weil A abgeschlossen ist in dem kompakten Raum X , ist auch A kompakt, und deshalb hat diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung durch Mengen $U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_n}$.

Sei U die Vereinigung dieser endlich vielen offenen Mengen und sei V der Durchschnitt der entsprechenden Mengen V_{a_i} . Als endlicher Durchschnitt von offenen Mengen ist auch V offen.

Da B in jeder Menge V_{a_i} enthalten ist, ist $B \subseteq V$, und nach Definition ist $A \subseteq U$. Weil die Paare U_{a_i} und V_{a_i} immer disjunkt sind, gilt auch $U \cap V = \emptyset$.

Dies beweist, dass X normal ist.

Man beachte, dass der Beweis die Idee des Beweises von Hilfssatz 4.4 genau nachmacht; wir hatten darauf hingewiesen, dass dieser Trick ein häufig verwendetes Werkzeug ist. ■

lokalkompakte Räume sind *fast* kompakte Räume. Durch Hinzufügung eines einzigen Punktes kann man sie kompakt machen.

Lemma und Definition 4.25 a) Sei (X, \mathcal{T}) ein kompakter Hausdorffscher topologischer Raum. Für jedes $x \in X$ ist $X \setminus \{x\}$ ein lokalkompakter Hausdorffscher Raum.

b) Sei (Y, \mathcal{S}) ein lokalkompakter Hausdorffscher topologischer Raum.

Wir fügen dem Raum Y einen Punkt hinzu, den wir ∞ nennen, und der nicht zu Y gehört, und wir versehen $X := Y \cup \{\infty\}$ mit folgender Topologie \mathcal{O} .

Eine Menge $U \subseteq X$ soll genau dann offen in \mathcal{O} sein, wenn $\infty \notin U$ und $U \in \mathcal{S}$, oder wenn $\infty \in U$ und $X \setminus U$ eine kompakte Teilmenge von Y ist.

Dies ist tatsächlich eine Topologie auf X , und X ist kompakt und Hausdorffsch in dieser Topologie.

Der topologische Raum (X, \mathcal{O}) heißt die **Einpunktkompaktifizierung** von (Y, \mathcal{S}) .

Beweis. Zu a): Sei $y \in X \setminus \{x\}$. Weil \mathcal{T} Hausdorffsch ist, gibt es disjunkte offene Mengen U und $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V$ und $y \in U$.

Die Menge $X \setminus V \subseteq X \setminus \{x\}$ ist abgeschlossen im kompakten Raum X und somit auch kompakt; natürlich ist diese Menge dann auch kompakt in der Unterraumtopologie auf $X \setminus \{x\}$. Und $y \in U \subseteq X \setminus V$.

Weil U offen ist, ist $X \setminus V$ eine Umgebung von y , und sie ist kompakt.

Das zeigt, dass $X \setminus \{x\}$ lokalkompakt ist. Als Unterraum von X ist dieser Raum auch Hausdorffsch.

Zu b): Wir müssen zeigen, dass \mathcal{O} eine Topologie auf X ist.

Eine nützliche Bemerkung vorweg: für jede Menge $U \in \mathcal{O}$ ist $U \cap Y$ offen in Y (gehört also zu \mathcal{S}). Wenn $\infty \notin U$ gilt das nach Definition von \mathcal{O} . Wenn $\infty \in U$, dann ist $K := X \setminus U$ eine kompakte Teilmenge von Y , und weil Y Hausdorffsch ist, ist K auch abgeschlossen nach Lemma 4.5 b). Also ist $U \cap Y = Y \setminus K$ offen in Y .

Jetzt wollen wir nachprüfen, dass \mathcal{O} eine Topologie ist.

Die leere Menge enthält ∞ nicht und ist offen in \mathcal{S} ; also gehört sie nach Definition zu \mathcal{O} .

Ganz X enthält ∞ und $X \setminus X = \emptyset$ ist kompakt in Y . Also ist X nach Definition offen in \mathcal{O} .

Sei \mathcal{U} eine Familie von Mengen aus \mathcal{O} und sei W ihre Vereinigung. Wenn $\infty \notin W$, dann gehört ∞ zu keiner Menge aus \mathcal{U} , und somit ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$. Als Vereinigung von Mengen aus \mathcal{S} ist auch $W \in \mathcal{S}$, woraus nach Definition folgt, dass $W \in \mathcal{O}$.

Wenn $\infty \in W$, dann gibt es eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U$. Dann ist

$$X \setminus W = (X \setminus U) \setminus \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{U} \\ V \neq U}} V, = (X \setminus U) \setminus \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{U} \\ V \neq U}} (V \cap Y),$$

und dies ist das Komplement einer offenen Menge (der Vereinigung) in der kompakten Menge $X \setminus U \subseteq Y$.

Das bedeutet, dass $X \setminus W$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $X \setminus U$ ist, und somit selber kompakt ist. Nach Definition von \mathcal{O} ist auch in diesem Fall $W \in \mathcal{O}$.

Seien U und $V \in \mathcal{O}$. Wenn $\infty \notin U \cap V$, dann ist

$$U \cap V = (U \cap Y) \cap (V \cap Y). \quad (4.4)$$

Wir haben schon gesehen, dass $U \cap Y$ und $V \cap Y$ offen in \mathcal{S} sind. Also ist ihr Durchschnitt offen in \mathcal{S} . Das zeigt in diesem Fall, dass $U \cap V$ zu \mathcal{O} gehört.

Wenn $\infty \in U \cap V$, dann gibt es kompakte Mengen K und $L \subseteq Y$ mit $U = X \setminus K$ und $V = X \setminus L$. Folglich ist

$$U \cap V = X \setminus (K \cup L),$$

und weil $K \cup L$ kompakt ist in Y , ist auch in diesem Fall $U \cap V \in \mathcal{O}$.

Wir haben für \mathcal{O} alle Abschlussregeln für eine Topologie nachgeprüft und bestätigt, dass \mathcal{O} eine Topologie auf X ist.

Wir zeigen, dass X kompakt ist in der Topologie \mathcal{O} .

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann gibt es mindestens eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U$. Die Menge $K = X \setminus U$ ist nach Definition der Topologie \mathcal{O} kompakt in Y und sie wird überdeckt von der offenen Familie $\mathcal{U} \setminus \{U\}$.

Weil K kompakt ist, gibt es endlich viele offene Mengen aus dieser Familie, die K schon überdecken, und wenn wir diesen endlich vielen offenen Mengen die Menge U noch hinzufügen, erhalten wir eine immer noch endliche Überdeckung des ganzen Raumes X durch eine Teilfamilie von \mathcal{U} .

Das zeigt, dass X tatsächlich kompakt ist.

Wir zeigen, dass \mathcal{O} Hausdorffsch ist. Seien $x \neq y \in X$. Wenn beide Punkte ungleich ∞ sind, dann gibt es um diese Punkte disjunkte offene Teilmengen von Y (weil Y Hausdorffsch war), und diese Mengen sind auch offen in X , weil sie ∞ nicht enthalten.

Wenn einer der Punkte gleich ∞ ist (sagen wir, $y = \infty$), dann besagt Lemma 4.22, dass es um x eine offene Menge $U \subseteq Y$ gibt (die auch offen in X ist, da sie ∞ nicht enthält) mit \overline{U} kompakt (denn Y war als lokalkompakt Hausdorffsch vorausgesetzt).

Die Menge $V := X \setminus \overline{U}$ enthält $y = \infty$ und ist offen in \mathcal{O} . Ferner ist sie disjunkt von U . Das beweist die Hausdorffsche Eigenschaft für dieses Paar von Punkten $x \neq y = \infty$. ■

Kapitel 5

Zusammenhängende und wegweise zusammenhängende Räume

Am Anfang des letzten Kapitels war die Rede von zwei besonderen topologischen Eigenschaften, die neben ihren anderen Vorzügen nützliche Werkzeuge für die Klassifizierung von topologischen Räumen sind, weil sie unter stetigen Abbildungen erhalten bleiben.

Die erste dieser Eigenschaften, die Kompaktheit, haben wir in Kapitel 4 ausführlich behandelt; die zweite betrachten wir jetzt.

Bei dieser Eigenschaft geht es im Wesentlichen um die Frage, ob ein Raum sich als eine *Summe* von zwei kleineren (und nichtleeren) Räumen zerlegen lässt. Die (leider nicht ganz erfüllte) Erwartung ist, dass allgemeine Räume sich als eine Summe von nicht weiter zerlegbaren Bestandteilen auftrennen lassen, und dass man topologische Fragen auf diese Bestandteile zurückführen kann, wo sie einfacher zu beantworten sind, weil die Räume eine einfachere und einheitlichere Struktur haben.

Auch wenn es *nicht* richtig ist, dass jeder Raum eine topologische Summe von „nicht als Summe zerlegbaren“ Bestandteilen ist, kann man die unzerlegbaren Bestandteile bestimmen, und ihre Betrachtung bringt tatsächlich Vereinfachungsvorteile, die sich auf den ganzen Raum übertragen lassen (aber nicht unbedingt durch *Summenbildung*).

Räume, die in dem genannten Sinne unzerlegbar sind, nennt man ***zusammenhängend***, eben weil sie nicht in zwei Teile zerfallen. In einem zusammenhängenden Raum verbindet die Topologie, also das System von offenen Mengen, alle Punkte miteinander, so dass der Raum nicht zerfällt.

Es gibt auch eine Verstärkung dieses Begriffs, bei dem nicht die offenen Mengen, sondern stetige Pfade in dem Raum Punkte miteinander verbinden.

Wenn je zwei Punkte eines Raumes durch einen stetigen Pfad miteinander verbunden werden können, dann nennt man den Raum *wegweise zusammenhängend*. Es stellt sich heraus, dass jeder wegweise zusammenhängende Raum auch im einfacheren Sinne zusammenhängend ist.

Beide Begriffe spielen in allen Zweigen der Topologie und auch in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle.

Die obige Beschreibung nennt eine mögliche Art, wie man den Begriff des Zusammenhangs verstehen kann, und zwar auf eine sehr einleuchtende Weise, die sofort verdeutlicht, warum dieser Begriff sinnvoll und interessant ist.

Aber den gleichen Gedanken kann man auf viele verschiedene Arten formulieren, von denen wir unten in Lemma 5.4 einige auflisten. Wir beginnen unsere Diskussion mit nur einer Formulierung, und zwar mit derjenigen, die am häufigsten als Definition des Begriffs benutzt wird:

Definition 5.1 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Der Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es *kein* Paar von *nicht-leeren* offenen Mengen U und $V \in \mathcal{T}$ gibt mit

$$U \cup V = X \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (5.1)$$

(Beachten Sie, dass es wichtig ist, dass U und V nichtleer sein sollen, denn eine Zerlegung der genannten Art mit $U = \emptyset$ und $V = X$, oder umgekehrt, gibt es immer.)

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie in der Unterraumtopologie $\mathcal{T}|_A$ zusammenhängend ist.

Beispiel 5.2 Jeder einelementige topologische Raum $\{x\}$ ist zusammenhängend (offensichtlich). Auch \emptyset ist zusammenhängend.

Bemerkung 5.3 Die Bedeutung von Definition 5.1 ändert sich nicht, wenn wir in der Definition das Wort „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzen, d. h., wenn die Mengen U und V als disjunkte *abgeschlossene* Mengen vorausgesetzt werden, deren Vereinigung X ist.

Denn zwei Mengen U und V , die (5.1) erfüllen, sind Komplemente zueinander, und aus diesem Grund sind beide offen genau dann, wenn beide abgeschlossen sind.

Wie schon erwähnt, lässt sich Definition 5.1 auf viele andere Weisen umformulieren.

Lemma 5.4 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Folgende Bedingungen sind äquivalent.

- a) X ist zusammenhängend.
 b) Es gibt keine Zerlegung von X in der Form

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

wo Λ eine Indexmenge ist und die U_λ offene disjunkte echte Teilmengen von X sind (also $U_\lambda \subsetneq X$).

- c) Es gibt keine Zerlegung von X in der Form

$$X = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

wo C_1, C_2, \dots, C_n endlich viele disjunkte abgeschlossene echte Teilmengen von X sind.

- d) Es gibt keine Zerlegung von X in der Form

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda,$$

wo Λ eine mindestens zweielementige Indexmenge ist und wo die X_λ nichtleere topologische Räume sind.

- e) \emptyset und X sind die einzigen Teilmengen von X , die sowohl offen wie auch abgeschlossen sind.
 f) Wenn $X = W \cup Z$ eine Zerlegung von X in zwei nichtleere aber disjunkte Teilmengen ist, dann gilt

$$\overline{W} \cap Z \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad W \cap \overline{Z} \neq \emptyset.$$

- g) Wenn $\emptyset \subsetneq W \subsetneq X$, dann ist $\partial W \neq \emptyset$.

Beweis. a) \iff b): Weil in Bedingung b) die Mengen U_λ echte Teilmengen von X sein sollen, kann es eine Zerlegung von X von der in b) genannten Art nur geben, wenn in Λ mindestens zwei Indizes λ existieren, für die $U_\lambda \neq \emptyset$.

Wenn es eine solche Zerlegung gibt, können wir also ein Element $\lambda_0 \in \Lambda$ wählen mit $U_{\lambda_0} \neq \emptyset$, und es wird nicht das einzige solche Element von Λ sein. Wir setzen dann

$$U := U_{\lambda_0} \quad \text{und} \quad V := \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} U_\lambda,$$

und für diese Mengen gilt $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ (weil alle der ursprünglichen Mengen U_λ disjunkt waren) und $U \cup V = X$.

Die Existenz einer Zerlegung von X wie in b) impliziert also, dass X nicht zusammenhängend sein kann.

Umgekehrt, wenn es disjunkte nichtleere offene Mengen U und V gibt mit $U \cup V = X$, so ist jede dieser Mengen eine echte Teilmenge von X (weil die jeweils andere Menge nichtleer ist), und U und V bilden eine Zerlegung von X wie in b) mit *zwei* Summanden (also mit einer zweielementigen Indexmenge Λ). Das heißt, wenn X nicht zusammenhängend ist, ist trivialerweise auch Bedingung b) verletzt.

a) \iff c): Weil in Bedingung c) die Mengen C_i *echte* Teilmengen von X sein sollen, müssen mindestens zwei von ihnen nichtleer sein. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit verlangen, dass in einer solchen Zerlegung $C_1 \neq \emptyset$.

Wenn wir

$$D := C_2 \cup \dots \cup C_n$$

setzen, so ist auch $D \neq \emptyset$. Als endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist D abgeschlossen. Ferner ist $C_1 \cap D = \emptyset$ (weil alle der ursprünglichen Mengen C_i disjunkt waren) und $C_1 \cup D = X$.

Die Existenz einer Zerlegung von X wie in c) impliziert also nach Bemerkung 5.3, dass X nicht zusammenhängend sein kann.

Umgekehrt, wenn sich X als Vereinigung von zwei disjunkten nichtleeren offenen Mengen schreiben lässt, sind diese Mengen auch abgeschlossen nach Bemerkung 5.3 und wir erhalten eine Zerlegung wie in Bedingung c), mit $n = 2$. Wenn X nicht zusammenhängend ist, ist also auch Bedingung c) verletzt.

b) \iff d): Jeder Summenraum ist die disjunkte Vereinigung der Summanden, so dass die nicht zu verletzenden Bedingungen sowohl in b) wie auch in d) beinhalten, dass X sich als eine disjunkte Vereinigung von Teilräumen U_λ oder X_λ schreiben lässt.

In b) müssen diese Teilräume echte Teilmengen von X sein und sie müssen offen sein. In d) müssen mindestens zwei Teilräume nichtleer sein und X muss die Summentopologie tragen. Wir zeigen, dass diese „Nebenbedingungen“ äquivalent sind.

In einer disjunkten Vereinigung ist genau dann ein Summand gleich X , wenn alle anderen Summanden leer sind. Die Existenz von zwei nichtleeren Summanden ist also äquivalent dazu, dass alle Summanden echte Teilräume sind.

Die Summanden eines Koproducts $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ sind nach Bemerkung 2.24 c) immer offen. Umgekehrt trägt ein Raum X , der eine disjunkte Vereinigung

von offenen Teilmengen U_λ ist, immer deren Summentopologie.

Denn nach Bemerkung 2.24 a) ist eine Teilmenge $V \subseteq X$ genau dann offen in der Summentopologie, wenn $V \cap U_\lambda$ offen ist in U_λ für jedes λ . Jede offene Teilmenge $V \in \mathcal{T}$ hat diese Eigenschaft, nach Definition der Unterraumtopologie. Jede Menge V mit dieser Eigenschaft ist auch offen in \mathcal{T} , denn wenn $V \cap U_\lambda$ offen in der offenen Menge U_λ ist, ist es auch offen in \mathcal{T} , und V ist die Vereinigung dieser offenen Durchschnitte und somit selber offen.

Also wenn X als die disjunkte Vereinigung von Teilmengen geschrieben wird, ist X genau dann die Summe dieser Unterräume, wenn die Unterräume alle offen in X sind.

Kombiniert man die beiden Nebenbedingungen, so sieht man, dass Bedingung b) genau dann verletzt wird, wenn Bedingung d) verletzt wird. Das beweist die behauptete Äquivalenz.

a) \iff e): Für jeden Unterraum $W \subseteq X$ gibt es eine eindeutige Darstellung $X = U \cup V$ mit $U = W$ und mit $U \cap V = \emptyset$; dazu muss $V = X \setminus W$ sein.

In dieser Darstellung sind beide Summanden U und V genau dann offen, wenn W und $X \setminus W$ offen sind, oder gleichbedeutend, wenn W offen und abgeschlossen ist.

Beide Summanden sind genau dann nichtleer, wenn W und $X \setminus W$ beide nichtleer sind, oder gleichbedeutend, wenn W weder \emptyset noch X ist.

Ein Vergleich dieser Eigenschaften mit den Bedingungen in Definition 5.1 zeigt sofort, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn \emptyset und X die einzigen offen-und-abgeschlossenen Teilmengen von X sind.

a) \iff f): Wenn $X = W \cup Z$ eine Zerlegung von X in zwei nichtleere aber disjunkte Teilmengen ist, dann sind W und Z Komplementär Mengen zueinander.

Der Summand W ist genau dann abgeschlossen, wenn $W = \overline{W}$, und ist genau dann *nicht* abgeschlossen, wenn $W \subsetneq \overline{W}$, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\overline{W} \cap (X \setminus W) = \overline{W} \cap Z \neq \emptyset$.

Entsprechendes gilt natürlich auch für Z .

X ist nach Bemerkung 5.3 genau dann zusammenhängend, wenn in jeder Zerlegung $X = W \cup Z$ mit W und Z nichtleer und disjunkt einer der Mengen W oder Z nicht abgeschlossen ist, d. h., wenn in jeder solchen Zerlegung die abgeschlossene Hülle einer der Mengen W oder Z die andere Menge schneidet.

e) \iff g): Sei W eine Teilmenge von X mit $\emptyset \subsetneq W \subsetneq X$.

Genau dann ist $\partial W = \emptyset$, wenn \overline{W} und $\overline{X \setminus W}$ disjunkt sind, nach Lemma 3.24 d). Aber diese abgeschlossenen Hüllen sind genau dann disjunkt, wenn sie nicht größer sind als ihre Grundmengen W und $X \setminus W$ (weil die

Grundmengen schon komplementär und deshalb „maximale disjunkte Mengen“ sind). Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn W und $X \setminus W$ beide abgeschlossen sind, oder gleichbedeutend, wenn W abgeschlossen und offen ist. ■

Eine der wichtigsten Begebenheiten in Bezug auf Zusammenhang ist die Tatsache, dass jeder Punkt eines topologischen Raumes in einem *eindeutig bestimmten maximalen* zusammenhängenden Unterraum liegt.

Folgender Hilfssatz wird für den Beweis dieser Aussage benötigt.

Hilfssatz 5.5 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei A_λ eine zusammenhängende Teilmenge von X .

Wenn

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset,$$

dann ist

$$A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

zusammenhängend.

Beweis. Sei $a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Angenommen U und V sind disjunkte in A offene Teilmengen von A mit $A = U \cup V$.

In einer dieser beiden Mengen muss a liegen; wir nehmen an, die a enthaltende Teilmenge ist diejenige, die wir U genannt haben.

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sind $U \cap A_\lambda$ und $V \cap A_\lambda$ offen in A_λ und disjunkt, und es gilt

$$A_\lambda = (U \cap A_\lambda) \cup (V \cap A_\lambda).$$

Weil A_λ zusammenhängend ist, muss einer der beiden genannten offenen Teilmengen von A_λ leer sein, und die andere ist gleich A_λ .

Aber der Punkt a liegt nach seiner Wahl in allen A_λ und er liegt in U . Deshalb ist für *jedes* λ der Durchschnitt $U \cap A_\lambda$ nichtleer, also gleich A_λ , und $V \cap A_\lambda$ ist immer leer.

Bildet man nun die Vereinigung über alle λ , so folgt daraus, dass

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U \cap A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = A \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V \cap A_\lambda) = \emptyset.$$

Es gibt also *keine* Zerlegung von A als Vereinigung von zwei *nichtleeren* disjunkten offenen Teilmengen. Das zeigt, dass A zusammenhängend ist. ■

Satz und Definition 5.6 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Für jeden Punkt $x \in X$ setze

$$Z_x := \bigcup_{\substack{x \in A \subseteq X \\ A \text{ zusammenhängend}}} A. \quad (5.2)$$

Diese Menge heißt die **Zusammenhangskomponente** von x in X . Oft kürzt man den Namen zu „**Komponente**“ ab.

Die Komponenten haben folgende Eigenschaften.

- a) Für jedes $x \in X$ ist $x \in Z_x$ und Z_x ist zusammenhängend und ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X , die x enthält, in dem Sinne, dass für jede zusammenhängende Teilmenge A mit $x \in A$ gilt $A \subseteq Z_x$.

Diese Eigenschaft bestimmt Z_x eindeutig (das heißt, es gibt keine andere „größte zusammenhängende Teilmenge“ um x).

- b) Wenn $x \neq y \in X$, dann gilt entweder

$$Z_x = Z_y \quad \text{oder} \quad Z_x \cap Z_y = \emptyset.$$

- c) Auf X definiere man eine Relation \sim durch die Bedingung, dass $x \sim y$ genau dann, wenn es eine zusammenhängende Teilmenge A von X gibt mit $\{x, y\} \subseteq A$.

- i) Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $y \in Z_x$, und genau dann, wenn $x \in Z_y$.
- ii) Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $Z_x = Z_y$.
- iii) Die Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation.
- iv) Die \sim -Äquivalenzklasse jedes Punktes x ist seine Zusammenhangskomponente Z_x .

- d) X ist genau dann zusammenhängend, wenn X nur eine Komponente hat. Diese Komponente muss X sein.

Beweis. Zu a): Für jedes $x \in X$ ist $x \in Z_x$, weil nach Beispiel 5.2 die Menge $\{x\}$ eine zusammenhängende Menge um x ist.

Z_x ist zusammenhängend nach der Aussage von Hilfssatz 5.5 und ist die größte zusammenhängende Teilmenge um x , weil jede zusammenhängende Teilmenge $A \ni x$ in der Vereinigung in Formel (5.2) vorkommt.

Die Eigenschaft, die größte zusammenhängende Menge um x zu sein, bestimmt Z_x eindeutig, denn wenn es zwei „größte zusammenhängende Teilmengen“ um x gäbe, so wäre jede (weil sie zusammenhängend ist) eine Teilmenge der anderen (weil diese die *größte* ist). Also wären die Mengen gleich.

Zu b): Sei $x \neq y \in X$.

Wenn $Z_x \cap Z_y \neq \emptyset$, dann folgt aus Hilfssatz 5.5, dass auch $Z_x \cup Z_y$ zusammenhängend ist. Weil Z_x und Z_y nach Teil a) maximal zusammenhängend sind, gilt

$$Z_x = Z_x \cup Z_y = Z_y,$$

das heißt, die Komponenten sind gleich.

Zu c): Wir beweisen i). Genau dann gibt es eine zusammenhängende Menge $A \supseteq \{x, y\}$, wenn in der Vereinigung in (5.2) eine Menge vorkommt, die y enthält, und das ist genau dann der Fall, wenn $y \in Z_x$.

Man kann die Rollen von x und y vertauschen; dann erhält man die andere Äquivalenz in i).

Jeder Punkt liegt in der eigenen Komponente. Daraus folgt, wenn $y \in Z_x$, dass $y \in Z_x \cap Z_y$, und dieser Durchschnitt ist nicht leer. Nach Teil b) ist $Z_x = Z_y$. Also, wenn $x \sim y$, dann haben x und y die gleiche Komponente.

Umgekehrt, wenn zwei Punkte x und y die gleiche Komponente haben, dann ist diese Komponente eine zusammenhängende Menge, die beide Punkte enthält, und nach Definition ist $x \sim y$. Damit ist ii) bewiesen.

Nun folgt iii) sofort aus der offensichtlichen Tatsache, dass Gleichheit der Zusammenhangskomponenten eine Äquivalenzrelation ist. Und iv) folgt sofort aus i).

Zu d): Wenn X nur eine Komponente hat, muss sie X sein, weil die Vereinigung aller Komponenten X ergibt. Umgekehrt, wenn X eine Komponente ist, ist sie die einzige, denn es gibt keinen Platz für weitere (dazu disjunkte) Komponenten.

Weil X eine maximale Teilmenge von sich ist, ist X genau dann zusammenhängend, wenn X eine maximale zusammenhängende Teilmenge von sich ist, also eine Komponente. Und wir haben gesehen, dass X genau dann eine Komponente ist, wenn es nur eine Komponente gibt. ■

Wenn man eine Komponente vergrößert, indem man einen einzigen zusätzlichen Punkt hinzufügt, dann bleibt sie nicht mehr zusammenhängend, und aus diesem Grund existieren dann die verschiedenen Zerlegungen, die in Lemma 5.4 aufgelistet sind. Das kann man ausnutzen, um Eigenschaften der Komponente zu untersuchen. Insbesondere gilt:

Lemma 5.7 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Jede Zusammenhangskomponente von X ist abgeschlossen.

Beweis. Sei Z eine Komponente von X . Für jedes $x \in X \setminus Z$ ist $Z \cup \{x\}$ nicht mehr zusammenhängend, denn Komponenten sind maximale zusammenhängende Teilmengen. Also gibt es in $Z \cup \{x\}$ disjunkte nichtleere offene Teilmengen U und V mit $Z \cup \{x\} = U \cup V$.

Eine von diesen beiden Mengen muss x enthalten; um die Bezeichnungen festzulegen nehmen wir an, $x \in V$. Dann ist $x \notin U$.

Die disjunkten Mengen $U \cap Z$ und $V \cap Z$ sind offen in Z und

$$Z = (U \cap Z) \cup (V \cap Z).$$

Weil Z zusammenhängend ist, muss eine der beiden Summanden in dieser Vereinigung leer sein. Aber weil $x \notin U$ ist $U \cap Z = U$ und ist deshalb nach Annahme nicht leer.

Also ist $V \cap Z = \emptyset$ und $V = \{x\}$. Weil dies offen ist in $Z \cup \{x\}$, gibt es eine in X offene Menge W_x , so dass $W_x \cap (Z \cup \{x\}) = \{x\}$ und insbesondere

$$x \in W_x \quad \text{und} \quad W_x \cap Z = \emptyset.$$

Eine solche Menge W_x gibt es für jeden Punkt $x \notin Z$. Also ist

$$X \setminus Z = \bigcup_{x \in X \setminus Z} W_x$$

offen (da sie sich als eine Vereinigung von offenen Mengen schreibt), und Z , als Komplement dieser offenen Menge, ist abgeschlossen. ■

Ein topologischer Raum heißt **unzusammenhängend**, einfach wenn er nicht zusammenhängend ist. Mit Hilfe von Komponenten können wir eine Verstärkung dieses Begriffs definieren.

Definition 5.8 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **total unzusammenhängend** oder **vollständig unzusammenhängend**, wenn jede Zusammenhangskomponente von X nur aus einem Punkt besteht.

Wir wollen wieder einen Katalog von Grundbeispielen aufbauen.

Beispiele 5.9 a) Sei X eine Menge und \mathcal{T} die diskrete Topologie auf X .

Ein diskreter Raum mit mehr als einem Punkt ist nie zusammenhängend, weil die einzelnen Punkte offen sind und somit, wenn ihre Anzahl größer als 1 ist, immer eine Zerlegung wie in Lemma 5.4 b) bilden. Ein einpunktiger Raum ist nach Beispiel 5.2 immer zusammenhängend.

Die Komponenten von X in der diskreten Topologie sind die einzelnen Punkte von X (präziser: die einelementigen Teilmengen von X).

- b) Sei X eine Menge und sei \mathcal{S} die indiskrete Topologie auf X .

In dieser Topologie sind \emptyset und X die einzigen offenen Mengen und somit auch die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen. Nach Lemma 5.4 e) ist X in der indiskreten Topologie immer zusammenhängend (und somit auch die einzige Zusammenhangskomponente).

- c) Sei X eine unendliche Menge versehen mit der koendlichen Topologie.

Da der Durchschnitt von zwei koendlichen Teilmengen wieder eine koendliche Teilmenge der unendlichen Menge X ist, und somit nicht-leer ist, kann es keine Darstellung von X als *disjunkte* Vereinigung von nichtleeren offenen, also koendlichen, Teilmengen geben.

Das heißt, dass X in der koendlichen Topologie zusammenhängend ist.

- d) Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge mit der Ordnungstopologie, und sei $A \subseteq X$ zusammenhängend.

Dann gilt für je zwei Elemente $a < b \in A$, dass ganz $[a, b] \subseteq A$.

Denn wenn das nicht der Fall ist, dann gibt es ein Element $r \in [a, b] \setminus A$. Weil aber die Endpunkte des Intervalls zu A gehören, ist $a < r < b$. Die Mengen

$$U := (-\infty, r) \cap A \quad \text{und} \quad V := (r, \infty) \cap A$$

sind disjunkt, offen in A , nichtleer (weil $a \in U$ und $b \in V$) und ihre Vereinigung ist ganz A , weil $r \notin A$. Also kann A nicht zusammenhängend gewesen sein.

- e) \mathbf{Q} ist total unzusammenhängend in der Standardtopologie (die Unterraumtopologie der Standardtopologie von \mathbf{R} . Diese Topologie ist gleich der Ordnungstopologie auf \mathbf{Q}).

Denn sei $A \subseteq \mathbf{Q}$ eine Teilmenge mit mehr als einem Element und seien $a < b \in A$. Wenn A als Teilmenge von \mathbf{Q} zusammenhängend ist, ist A auch als Teilmenge von \mathbf{R} zusammenhängend (denn diese Eigenschaft hängt nur von der Topologie auf A ab, und die Unterraumtopologie auf A ist in beiden Fällen die gleiche).

Nach Teil d) ist dazu erforderlich, dass das ganze *reelle* Intervall $[a, b]$ in A enthalten ist. Das ist nicht möglich, weil A eine Teilmenge von \mathbf{Q} ist und das reelle Intervall $[a, b]$ auch irrationale Punkte enthält. Also ist A *nicht* zusammenhängend.

Weil keine Teilmenge von \mathbf{Q} mit mehr als einem Element zusammenhängend ist, kann jede Komponente nur aus einem Punkt bestehen.

- f) Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge mit der Ordnungstopologie, und sei $A \subseteq X$ zusammenhängend.

Dann gilt für je zwei Elemente $a < b \in A$, dass $(a, b) \cap A$ nichtleer ist.

Denn wenn $(a, b) \cap A = \emptyset$, dann ist

$$((-\infty, b) \cap A) \cap ((a, \infty) \cap A) = (a, b) \cap A = \emptyset$$

und die Vereinigung dieser beiden Mengen ist A , weil schon in X gilt $(-\infty, b) \cup (a, \infty) = X$.

Weil $a \in (-\infty, b)$ und $b \in (a, \infty)$, sind die Durchschnitte der beiden offenen Strahlen mit A nichtleer, und natürlich auch offen in A .

Das zeigt, dass A unter der gemachten Annahme nicht zusammenhängend sein kann.

- g) \mathbf{Z} ist total unzusammenhängend in der Ordnungstopologie.

Denn sei $A \subseteq \mathbf{Z}$ eine Teilmenge mit mehr als einem Element und seien $a < b \in A$. Sei $c \leq b$ das *kleinste* Element von A , das größer als a ist; weil zwischen a und b nur endlich viele Elemente von \mathbf{Z} und somit von A liegen, gibt es ein Element $c \in A$ mit dieser Eigenschaft.

Nach Wahl von c ist $(a, c) \cap A = \emptyset$. Nach Teil f) kann A nicht zusammenhängend sein.

Weil keine Teilmenge von \mathbf{Z} mit mehr als einem Element zusammenhängend ist, besteht jede Komponente von \mathbf{Z} nur aus einem Punkt.

Wie im Falle der Kompaktheit konnten wir durch einfache Überlegungen hier einige *notwendige* Bedingungen dafür ausarbeiten, dass eine Menge in einer Ordnungstopologie zusammenhängend ist, aber hinreichende Bedingungen fehlen uns noch.

Allerdings suggerieren die Bedingungen aus Beispielen 5.9 d) und f), dass es für eine Menge in einer Ordnungstopologie zumindest „zusammenhangsfördernd“ sein könnte, ein „dicht gefülltes“ Intervall zu sein. Das wollen wir jetzt genauer untersuchen.

Hilfssatz 5.10 Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge.

Wenn diese Ordnung die Supremumseigenschaft besitzt, dann besitzt sie auch die **Infimumseigenschaft**: jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge $A \subseteq X$ hat eine größte untere Schranke c , die wir das **Infimum** von A nennen und mit $\inf A$ bezeichnen.

Beweis. Sei A eine nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von X , und sei B die (nach Annahme nichtleere) Menge aller unteren Schranken von A .

Jedes Element von A ist eine obere Schranke zu B , und weil A nichtleer ist, hat B also obere Schranken und ist nach oben beschränkt. Weil $(X, <)$ die Supremumseigenschaft hat, besitzt B eine kleinste obere Schranke c .

Weil jedes Element von A eine obere Schranke zu B ist und c die kleinste obere Schranke von B ist, ist $c \leq a$ für jedes $a \in A$, und c ist somit eine untere Schranke von A .

Weil aber c eine obere Schranke zu der Menge *aller* unteren Schranken von A ist, ist c die *größte* der unteren Schranken von A und somit das Infimum von A .

(Es ist übrigens klar, dass das Infimum von A , wenn es existiert, *eindeutig* sein muss.) ■

Definition 5.11 Eine total geordnete Menge $(X, <)$ heißt ein **lineares Kontinuum**, wenn folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind:

- a) $<$ hat die Supremumseigenschaft;
- b) für je zwei Elemente $x < y$ von X gibt es ein Element $z \in X$ mit $x < z < y$ (in anderen Worten: wenn $x < y$, dann ist (x, y) nicht leer).

Beispiele 5.12 a) \mathbf{R} ist ein lineares Kontinuum.

b) \mathbf{Q} ist kein lineares Kontinuum, weil Bedingung 5.11 a) verletzt ist.

c) \mathbf{Z} ist kein lineares Kontinuum, weil Bedingung 5.11 b) verletzt ist.

Wir haben in Beispielen 5.9 e) und g) schon gesehen, dass die Eigenschaften 5.11 a) und b) etwas damit zu tun haben können, dass Intervalle in einer Ordnungstopologie zusammenhängend sind oder nicht. Diese Erfahrung wollen wir jetzt durch einen Satz konkretisieren.

Satz 5.13 Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge mit der Ordnungstopologie und $<$ habe die Supremumseigenschaft.

- a) Wenn $A \subseteq X$ zusammenhängend ist, dann ist A ein (eigentliches oder uneigentliches, offenes, halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall.

Das heißt, es gibt Elemente $a \in X \cup \{-\infty\}$ und $b \in X \cup \{\infty\}$, so dass

$$A = (a, b) \quad \text{oder} \quad A = [a, b) \quad \text{oder} \quad A = (a, b] \quad \text{oder} \quad A = [a, b]$$

(wobei die Endpunkte an den abgeschlossenen Enden aus X stammen müssen und nicht unendlich sein dürfen).

b) Wenn $(X, <)$ ein lineares Kontinuum ist, dann gilt die Umkehrung: jedes Intervall von den genannten Sorten ist zusammenhängend.

Beweis. a): Die leere Menge ist immer zusammenhängend, aber sie ist auch ein Intervall, und zwar das Intervall $(-\infty, \infty)$, wenn X leer ist, oder das Intervall (a, a) , wenn X ein Element a besitzt.

Wir können also im Rest des Beweises dieses Teils davon ausgehen, dass A eine nichtleere zusammenhängende Teilmenge von X ist.

Weil $<$ die Supremumseigenschaft besitzt, hat A ein Infimum, wenn es nach unten beschränkt ist, und ein Supremum, wenn A nach oben beschränkt ist. Wir setzen $a := \inf A$, wenn A nach unten beschränkt ist, und $a := -\infty$ sonst (in diesem Fall schreiben wir auch wie üblich $\inf A = -\infty$). Wir setzen $b := \sup A$, wenn A nach oben beschränkt ist, und $b := \infty$ sonst (in diesem Fall schreiben wir auch wie üblich $\sup A = \infty$).

Wir behaupten, dass $(a, b) \subseteq A$.

Denn wenn $a < c < b$, so ist c keine untere Schranke zu A (sonst wäre A nach unten beschränkt und a wäre die größte untere Schranke zu A und somit $\geq c$) und auch keine obere Schranke zu A (aus ähnlichen Gründen). Also gibt es für jedes Element $c \in (a, b)$ Elemente a' und b' von A mit $a' < c < b'$. Nach Beispiel 5.9 d) ist $[a', b'] \subseteq A$ und insbesondere $c \in A$.

Wenn $a \in X$, dann ist a nach seiner Definition eine untere Schranke zu A und deshalb kann kein *kleineres* Element als a zu A gehören. Wenn $b \in X$ kann aus entsprechenden Gründen kein *größeres* Element als b zu A gehören.

In anderen Worten, es gilt

$$(a, b) \subseteq A \subseteq (a, b) \cup \{a, b\}.$$

Das heißt, A muss eines der oben genannten Intervalle sein.

b): Sei A ein Intervall von einer der genannten Gestalten und sei a sein linkes Ende und b sein rechtes Ende.

Wenn $A = \emptyset$, dann ist A zusammenhängend. Wir können also annehmen, dass A nichtleer ist. Sei $c \in A$.

Offensichtlich ist

$$A = \bigcup_{\substack{r \in A, s \in A \\ r \leq c \leq s}} [r, s].$$

Denn jedes Element x von A gehört entweder zu $[x, c]$, wenn $x \leq c$, oder zu $[c, x]$, wenn $x \geq c$, und somit auf jeden Fall zu der Vereinigung auf der rechten Seite. Das beweist die Inklusion „ \subseteq “.

Umgekehrt, für jedes Paar r und s von Elementen von A mit $r \leq c \leq s$ ist $a \leq r$ und $s \leq b$ (weil r und s zu einem Intervall mit Endpunkten a und b gehören) und somit ist $(r, s) \subseteq (a, b) \subseteq A$. Die Punkte r und s selber gehören

nach Wahl auch zu A . Also gilt für jedes solche Paar, das sogar $[r, s] \subseteq A$. Damit ist die Inklusion „ \subseteq “ gezeigt.

Die Intervalle $[r, s]$ in der Vereinigung haben alle den Punkt c gemeinsam. Um zu zeigen, dass ihre Vereinigung A zusammenhängend ist, reicht es nach Hilfssatz 5.5 zu zeigen, dass jedes *abgeschlossene* Intervall zusammenhängend ist.

Wir können also annehmen, dass A die Gestalt $[a, b]$ hat, und ferner, dass $a < b$ (denn einelementige Mengen sind immer zusammenhängend). Wenn A nicht zusammenhängend ist, dann gibt es in A offene, nichtleere und disjunkte Mengen U und V mit $[a, b] = U \cup V$.

In einer dieser Mengen muss a liegen; wir nehmen an, diese ist die Menge U und $a \notin V$.

Wir betrachten die Teilmenge

$$B := \{ x \in [a, b] \mid [a, x] \subseteq U \}.$$

Offensichtlich ist $B \subseteq U$ und somit $V \cap B = \emptyset$. Außerdem gehört a zu B und B ist nichtleer. Wenn $x \in B$ und $a \leq y \leq x$, dann ist natürlich auch $y \in B$. Hieraus folgt, dass jedes Element von $[a, b] \setminus B$ eine obere Schranke zu B ist; insbesondere gilt dies für jedes Element von $V \neq \emptyset$.

Also ist B nach oben beschränkt. Sei $d = \sup B$. Weil jedes Element von V eine obere Schranke von B ist und d die kleinste obere Schranke ist, ist d auch eine untere Schranke zu V . Insbesondere ist $[a, d] \subseteq U$.

Wir wissen nicht, ob d selber zu U oder zu V gehört.

Weil U und V offen sind, gibt es ein offenes Intervall (p, q) um d , dessen Durchschnitt mit $[a, b]$ in der gleichen Menge U oder V enthalten ist, in der d selber liegt.

Dieses Intervall können wir nach Wunsch kleiner machen, solange wir d nicht entfernen. Insbesondere, wenn $p < a$ und $d \neq a$ können wir p durch a ersetzen und so erreichen, dass $p \geq a$. Entsprechend, wenn $q > b$ und $d \neq b$ können wir q durch b ersetzen und so erreichen, dass $q \leq b$.

Wenn $d = a$, dann ist $d \in U$. Wenn $d = b$, dann muss $d \in V$ sein, denn in diesem Fall ist $[a, d] = [a, b] \subseteq U$ und $V \neq \emptyset$.

Jetzt sind folgende Fälle möglich.

Wenn $d \in U$, dann ist $d \neq b$ und nach einer eventuellen Anpassung des Intervalls (p, q) können wir davon ausgehen, dass $d < q \leq b$. Nach der Eigenschaft 5.11 b) des linearen Kontinuums X gibt es ein Element r mit $d < r < q \leq b$, und weil

$$[a, q] = [a, d] \cup [d, q] \subseteq [a, d] \cup ((p, q) \cap A) \subseteq U,$$

gilt auch $[a, r] \subseteq U$. Somit ist $r \in B$ und d doch keine obere Schranke zu B .

Also muss $d \in V$ sein, und dann ist $d \neq a$. Jetzt können wir das Intervall (p, q) so anpassen, dass $a \leq p < d$, und weil $d \in V$ haben wir

$$(p, d] \subseteq (p, q) \cap A \subseteq V.$$

Nach der Eigenschaft 5.11 b) des linearen Kontinuums X gibt es ein Element s mit $p < s < d$, und dieses Element s muss zu V gehören, in Widerspruch zu der Tatsache, dass d eine untere Schranke zu V ist.

Beide Möglichkeiten $d \in U$ und $d \in V$ führen also zu einem Widerspruch. Also muss die Annahme, dass A nicht zusammenhängend ist, falsch gewesen sein. Damit sind wir fertig. ■

Korollar 5.14 *Die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbf{R} in der Standardtopologie sind genau die Intervalle (einschließlich der Strahlen und ganz \mathbf{R}).*

Beweis. Die Standardtopologie auf \mathbf{R} ist die Ordnungstopologie der Ordnung von \mathbf{R} , und \mathbf{R} mit dieser Ordnung ist ein lineares Kontinuum, nach Beispiel 5.12 a). Nach Satz 5.13 sind die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbf{R} genau die (eigentlichen und uneigentlichen) Intervalle. ■

Wir wollen jetzt einige Situationen untersuchen, in denen man aus bekannten zusammenhängenden Mengen neue gewinnen kann.

Das wichtigste und folgenreichste Ergebnis dieser Art ist die Tatsache, dass Zusammenhang (wie Kompaktheit) unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

Satz 5.15 *Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.*

Wenn X zusammenhängend ist, dann ist $f(X)$ eine zusammenhängende Teilmenge von Y .

Beweis. Wie bei der Kompaktheit ist der Beweis sehr einfach. Wir setzen $Z := f(X)$ und betrachten f als eine *surjektive* stetige Abbildung $X \rightarrow Z$.

Wenn Z nicht zusammenhängend ist, dann gibt es disjunkte nichtleere in Z offene Teilmengen U und V von Z mit $Z = U \cup V$.

Die Urbildmengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ sind disjunkt, sie sind offen in X weil f stetig ist, und sie sind nichtleer weil f surjektiv ist (auf Z). Außerdem gilt

$$X = f^{-1}(Z) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Das widerspricht der Tatsache, dass X zusammenhängend ist.

Also ist Z doch zusammenhängend. ■

Eine Instanz dieses Satzes ist der berühmte *Zwischenwertsatz* aus der reellen Analysis.

Korollar 5.16 (Zwischenwertsatz) Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$$

eine stetige reellwertige Funktion.

Dann nimmt f auf $[a, b]$ alle reellen Werte an, die zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (einschließlich) liegen.

Beweis. Das Intervall $[a, b]$ ist zusammenhängend in \mathbf{R} . Also ist $f([a, b])$ auch zusammenhängend, und enthält die Werte $f(a)$ und $f(b)$.

Nach Beispiel 5.9 d) gehört das ganze abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $f(a)$ und $f(b)$ zu $f([a, b])$. Das heißt, alle Zwischenwerte werden angenommen. ■

Korollar 5.17 Sei (X, \mathcal{T}) ein zusammenhängender topologischer Raum.

Dann ist jeder Quotient von X zusammenhängend.

Beweis. Sei (Y, \mathcal{S}) ein Quotient von (X, \mathcal{T}) . Dann gibt es eine identifizierende Abbildung $f: X \longrightarrow Y$. Diese Abbildung ist stetig und surjektiv, und nach Satz 5.15 ist $Y = f(X)$ zusammenhängend. ■

Eine weitere nützliche Tatsache ist die, dass eine zusammenhängende Menge durch das Hinzufügen von Häufungspunkten nicht unzusammenhängend werden kann.

Lemma 5.18 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei A eine zusammenhängende Teilmenge von X .

Sei B eine Teilmenge von X , so dass

$$A \subseteq B \subseteq \bar{A}.$$

Dann ist B zusammenhängend.

Insbesondere ist \bar{A} zusammenhängend.

Beweis. Wenn die Behauptung für eine gewisse Menge B mit $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ nicht stimmt, dann gibt es eine nichtleere in B offene und abgeschlossene Teilmenge $W \subsetneq B$.

Weil W offen ist in B , gibt es eine in X offene Menge U mit

$$\emptyset \neq W = U \cap B \subseteq U \cap \bar{A}.$$

Eine offene Menge, die A nicht schneidet, schneidet auch \overline{A} nicht. Also ist $U \cap A = W \cap A \neq \emptyset$.

$W \cap A$ ist offen und abgeschlossen in A und ist nichtleer. Weil A zusammenhängend ist, muss $W \cap A = A$ sein und $A \subseteq W$.

Weil W in B abgeschlossen ist, gibt es eine in X abgeschlossene Menge C mit $W = C \cap B$. Daraus folgt insbesondere, dass $A \subseteq C$.

Aber \overline{A} ist die kleinste in X abgeschlossene Obermenge von A , und deshalb ist $B \subseteq \overline{A} \subseteq C$.

Folglich ist $W = C \cap B = B$ und doch keine echte Teilmenge von B , in Widerspruch zu unserer Annahme.

Das zeigt, dass B doch zusammenhängend ist. ■

Wie die Kompaktheit, bleibt Zusammenhang unter Produktbildung erhalten.

Satz 5.19 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein nicht-leerer topologischer Raum. Sei

$$(X, \mathcal{T}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$$

(X, \mathcal{T}) ist genau dann zusammenhängend, wenn alle $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ zusammenhängend sind.

Beweis. Wenn X zusammenhängend ist, dann ist jeder Faktor X_λ nach Satz 5.15 zusammenhängend, denn die Projektionen $\pi_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$ sind stetig und surjektiv und haben zusammenhängende Bilder.

Wir müssen noch die andere Richtung zeigen: wenn alle X_λ zusammenhängend sind, dann ist X zusammenhängend.

Dazu sei $a \in X$ und sei Z_a die Zusammenhangskomponente von a .

Für jedes $\mu \in \Lambda$ sei $i_\mu: X_\mu \rightarrow X$ die Abbildung gegeben durch die Vorschrift

$$(i_\mu(x))_\lambda = \pi_\lambda(i_\mu(x)) := \begin{cases} a_\lambda, & \text{wenn } \lambda \neq \mu; \\ x, & \text{wenn } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig, weil offensichtlich $\pi_\lambda \circ i_\mu$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ stetig ist (diese Verknüpfung ist entweder konstant oder die Identitätsabbildung von X_μ).

Weil X_μ immer zusammenhängend ist, ist auch

$$i_\mu(X_\mu) = \{ b \in X \mid b_\lambda = a_\lambda \text{ außer für } \lambda = \mu \}$$

zusammenhängend und deshalb in Z_a enthalten.

Damit ist gezeigt, dass zwei Punkte von X , die sich nur in einer Koordinate unterscheiden, in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen.

Anders gesagt: wenn wir einen Punkt in X betrachten und eine Koordinate dieses Punktes abändern, erhalten wir einen neuen Punkt in der gleichen Zusammenhangskomponente. Ändern wir eine weitere Koordinate ab, dann bleiben wir immer noch in der gleichen Komponente, und auch wenn wir endlich viele Koordinaten eine nach der anderen abändern, verlassen wir die ursprüngliche Zusammenhangskomponente nicht.

Wir haben also gezeigt, dass die Menge

$$Y := \{b \in X \mid b_\lambda = a_\lambda \text{ außer für endlich viele } \lambda\} \subseteq Z_a.$$

Sei U eine beliebige nichtleere offene Menge in X . Dann enthält U einen nichtleeren großen offenen Quader $Q := \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, in dem für alle bis auf endlich viele λ gilt $U_\lambda = X_\lambda$.

Für jedes der endlich vielen $\lambda \in \Lambda$ mit $U_\lambda \neq X_\lambda$ wählen wir einen Punkt $x_\lambda \in U_\lambda$. Wir definieren einen Punkt $b = (\dots, b_\lambda, \dots) \in X$ durch die Vorschrift

$$b_\lambda = \begin{cases} a_\lambda, & \text{wenn } U_\lambda = X_\lambda; \\ x_\lambda, & \text{wenn } U_\lambda \neq X_\lambda. \end{cases}$$

Dieser Punkt b liegt in Q und somit in U . Aber er unterscheidet sich nur in endlich vielen Koordinaten von a und liegt deshalb in $Y \subseteq Z_a$.

Wir haben damit gezeigt, dass *jede* nichtleere offene Menge in X die Komponente Z_a schneidet. Damit ist

$$(X \setminus Z_a)^\circ = \emptyset \quad \text{und somit} \quad \overline{Z_a} = X.$$

Weil Z_a abgeschlossen ist, folgt, dass $Z_a = X$ und X ist somit zusammenhängend. ■

Beispiel 5.20 Die Aussage von Satz 5.19 gilt nicht in der Boxtopologie. Hier ist ein Beispiel.

Sei

$$X := \prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}$$

in der Boxtopologie. Jeder Faktor dieses Produkts ist \mathbf{R} und ist zusammenhängend. Die Elemente von X sind \mathbf{N} -Tupel von reellen Zahlen oder anders betrachtet, Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ in \mathbf{R} .

Wir definieren eine Relation \sim auf X durch die Vorschrift, dass für zwei Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}} \sim \{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ genau dann, wenn die Folge $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Nullfolge ist, also gegen 0 konvergiert.

Es ist sehr leicht einzusehen, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. Ferner haben \sim -äquivalente Folgen das gleiche Divergenz- oder Konvergenzverhalten und den gleichen Grenzwert, wenn sie konvergieren. Daraus folgt, dass es überabzählbar viele Äquivalenzklassen gibt, und auf jeden Fall mehr als eine.

In der Boxtopologie ist jede \sim -Äquivalenzklasse offen, denn für jedes Element $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in X$ ist

$$\prod_{n \in \mathbf{N}} \left(a_n - \frac{1}{2^n}, a_n + \frac{1}{2^n} \right)$$

eine offene Menge um $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ in der Boxtopologie, die ganz in der Äquivalenzklasse von $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ enthalten ist. Die Elemente dieses Produkts von immer kleiner werdenden offenen Intervallen unterscheiden sich automatisch von $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ nur durch eine Nullfolge.

Die \sim -Äquivalenzklassen bilden also eine disjunkte offene Zerlegung von X , wie sie laut der Bedingung in Lemma 5.4 b) in einem zusammenhängenden Raum nicht vorkommen kann. Das zeigt, dass dieses Produkt von zusammenhängenden Räumen in der Boxtopologie nicht zusammenhängend ist.

Zusammenhang ist ein sehr leistungsfähiger Begriff, der aber den Nachteil hat, etwas abstrakt zu sein, so dass der Nachweis, dass ein gewisser Raum zusammenhängend ist, sich manchmal als schwierig erweist. Zum Glück gibt es eine konkretere und „bildlichere“ Variante des Zusammenhangbegriffs, die ein wenig stärker ist als der bishere untersuchte Begriff aber mit diesem eng verwandt ist.

Bei dieser Abwandlung untersuchen wir nicht direkt, ob die Topologie die Punkte eines Raumes so verklebt und verbindet, dass sie miteinander „zusammenhängen“, sondern wir „nähen“ die Punkte, bildlich gesehen, mit einem Faden zusammen, d. h., wir fragen, ob wir von jedem Punkt des Raumes zu jedem anderen einen verbindenden Faden legen könnten.

Um die Definition zu präzisieren, sind ein Paar Vorbereitungen nötig.

Definition 5.21 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung

$$w: [0, 1] \longrightarrow X$$

Hier ist $[0, 1]$ das so notierte abgeschlossene Intervall in \mathbf{R} , das wir das **Standardeinheitsintervall in \mathbf{R}** nennen, und das wir in Zukunft mit I notieren werden, um eine kürzere und bequemere Notation zu haben.

Der Punkt $w(0) \in X$ heißt der **Anfangspunkt** des Weges w und der Punkt $w(1)$ heißt sein **Schlusspunkt**. Diese beiden Punkte heißen kollektiv die **Endpunkte** des Weges.

Einen Weg w mit Anfangspunkt a und mit Endpunkt b nennen wir auch einen **Weg von a nach b** . Oder wir sagen: w **verbindet** a mit b .

Für den Umgang mit Wegen brauchen wir einige Grundkonstruktionen.

Lemma und Definition 5.22 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und seien x, y und $z \in X$. Sei I das Standardintervall in \mathbf{R} .

a) Die konstante Funktion

$$\begin{aligned} c_x: I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x \quad (\text{für jedes } t \in I) \end{aligned}$$

ist ein Weg in X von x zu x , der den Punkt x nie verlässt. Er ist automatisch stetig, weil er konstant ist.

Dieser Weg heißt der **konstante Weg bei x** .

b) Sei w ein Weg von x nach y . Die Formel

$$w^-(t) := w(1 - t) \quad \text{für } t \in I$$

definiert einen Weg in X von $w^-(0) = w(1 - 0) = w(1) = y$ nach $w^-(1) = w(1 - 1) = w(0) = x$. Er ist stetig, da er die Verknüpfung der stetigen Funktionen w und $t \mapsto 1 - t$ ist.

Dieser Weg heißt die **Umkehrung** des Weges w .

c) Sei v ein Weg in X von x nach y , und sei w ein Weg von y nach z . Wir definieren einen Weg $v * w$ durch die Vorschrift

$$(v * w)(t) := \begin{cases} v(2t), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ w(2t - 1), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

In Beispiel 2.41 wurde gezeigt, dass so tatsächlich eine wohldefinierte stetige Abbildung $I \longrightarrow X$ bestimmt wird. Die dort gemachte Voraussetzung, dass $v(1) = w(0)$, ist hier erfüllt, denn beide Werte ergeben y .

Der Weg $v * w$ verbindet x mit z , denn

$$(v * w)(0) = v(2 \cdot 0) = v(0) = x \quad \text{und} \quad (v * w)(1) = w(2 \cdot 1 - 1) = w(1) = z.$$

Wir nennen $v * w$ die **Verkettung** oder die **Hintereinanderreihung** von v mit w . Sie ist nur definiert, wenn der Schlusspunkt von v mit dem Anfangspunkt von w übereinstimmt.

- d) Sei w ein Weg in X , der bei x beginnt (also mit $w(0) = x$). Sei $s \in [0, 1]$. Die Abbildung $s \cdot w: I \rightarrow X$ definiert durch die Vorschrift

$$(s \cdot w)(t) := w(st)$$

ist stetig, da sie die Verknüpfung von w und der offensichtlich stetigen Abbildung $t \mapsto st$ ist.

Also ist $s \cdot w$ ein Weg in X von $w(s \cdot 0) = w(0) = x$ nach $w(s \cdot 1) = w(s)$.

- e) Sei (Y, \mathcal{S}) ein weiterer topologischer Raum und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

Sei $w: I \rightarrow X$ ein Weg in X von x nach y . Dann ist

$$f \circ w: I \rightarrow Y$$

stetig und somit ein Weg in Y von $f(w(0)) = f(x)$ nach $f(w(1)) = f(y)$.

Wir bezeichnen diesen Weg in Y mit $f_{\#}(w)$ und nennen ihn **das Bild des Weges w unter f** .

Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt unseren neuen Zusammenhangsbegriff definieren und seine Eigenschaften ermitteln.

Definition 5.23 Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **wegweise zusammenhängend** oder kürzer **wegzusammenhängend**, wenn je zwei Punkte x und $y \in X$ durch einen stetigen Weg in X verbunden werden können (also wenn es immer einen Weg von x nach y gibt).

Auch für diese Art von Zusammenhang gibt es eine Partition von X in disjunkte maximale wegzusammenhängende Teilmengen, die man **Wegkomponenten** nennt. Die Eigenschaften sind ganz ähnlich zu denen der normalen Zusammenhangskomponenten, und wir könnten sogar die Herleitung fast wörtlich aus der Herleitung für die normalen Zusammenhangskomponenten abschreiben. Trotzdem wählen wir diesmal eine andere „Einstiegstelle“, die hier etwas natürlicher und einfacher ist.

Definition 5.24 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Wir definieren auf X eine Relation \sim durch die Vorschrift: für zwei Punkte x und $y \in X$ ist $x \sim y$ genau dann, wenn es einen Weg w in X von x nach y gibt.

Man sieht sofort aus Lemma und Definition 5.22, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. Diese Relation ist reflexiv, weil für jeden Punkt x der Weg c_x ein Weg von x nach x ist. Sie ist symmetrisch, denn wenn w ein Weg von x

nach y ist, so ist w^- ein Weg von y nach x . Und \sim ist transitiv, denn wenn es einen Weg v von x nach y und einen Weg w von y nach z gibt, so ist $v * w$ ein Weg von x nach z .

Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation \sim heißen die **Wegkomponenten** von X .

Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir mit W_x die Wegkomponente, in der x liegt, also die \sim -Äquivalenzklasse von x .

Die Grundeigenschaften für „gewöhnlich zusammenhängende“ Mengen und für die „gewöhnlichen“ Zusammenhangskomponenten aus Hilfssatz 5.5 und aus Satz und Definition 5.6 lassen sich sehr leicht auch auf Wegkomponenten übertragen. Hier ist es aber einfacher, die Beweise anders zu führen, und aus diesem Grund übernehmen wir nur die Aussagen, die wir wirklich später anwenden wollen und die unter diesem Gesichtspunkt hier noch einen Sinn ergeben.

Lemma 5.25 *Die Wegkomponenten eines topologischen Raumes (X, \mathcal{T}) und wegzusammenhängende Mengen haben folgende Eigenschaften.*

- a) *Für jedes $x \in X$ ist $x \in W_x$ und W_x ist wegzusammenhängend und ist die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X , die x enthält, in dem Sinne, dass für jede wegzusammenhängende Teilmenge A mit $x \in A$ gilt $A \subseteq W_x$.*

Diese Eigenschaft bestimmt W_x eindeutig (das heißt, es gibt keine andere „größte wegzusammenhängende Teilmenge“ um x).

- b) *Wenn $x \neq y \in X$, dann gilt entweder*

$$W_x = W_y \quad \text{oder} \quad W_x \cap W_y = \emptyset.$$

- c) *X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn X nur eine Wegkomponente hat. Diese Wegkomponente muss X sein.*

- d) *Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei A_λ eine wegzusammenhängende Teilmenge von X .*

Wenn $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$, dann ist $A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ wegzusammenhängend.

Beweis. Zu a): Für $x \in X$ gilt $x \in W_x$ weil W_x definiert ist als die Wegkomponente, die x enthält.

Dass W_x zusammenhängend ist, ist nicht so trivial, wie es zunächst aussieht. Denn nach der Definition der Wegkomponenten ist x mit jedem Punkt in seiner Wegkomponente W_x durch einen Weg w in X verbindbar. Damit

die Teilmenge W_x selber wegzusammenhängend ist, müssen diese Wege aber in W_x verlaufen!

Zum Glück ist das aber der Fall, denn für jedes $s \in I$ ist der in Lemma und Definition 5.22 d) definierte Weg $s \cdot w$ ein Weg in X von x nach $w(s)$, woraus folgt, dass $x \sim w(s)$ und dass $w(s)$ immer in W_x liegt.

Die Wege, die bei x beginnen, verlaufen also automatisch in W_x , und deshalb ist W_x tatsächlich wegzusammenhängend.

Sei A eine wegzusammenhängende Menge mit $x \in A$. Für jedes $a \in A$ gilt $x \sim a$, denn weil A wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg (der sogar innerhalb A verläuft) von x nach a . Also ist $A \subseteq W_x$.

Das zeigt, dass W_x die größte wegzusammenhängende Menge um x ist.

Dass dies W_x eindeutig charakterisiert, folgt wie in Satz und Definition 5.6 a); jede von zwei „größten wegzusammenhängenden Mengen um x “ müsste in der anderen enthalten sein, weshalb sie gleich sein müssten.

b) folgt sofort aus der Tatsache, dass die Wegkomponenten W_x die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation sind. Für äquivalente Punkte x und y gilt $W_x = W_y$. Nichtäquivalente Punkte können auch nicht zu einem gemeinsamen dritten Punkt äquivalent sein, und ihre Äquivalenzklassen sind disjunkt.

Zu c): X hat genau dann nur eine Wegkomponente, wenn X selber eine Wegkomponente ist. Und X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können, also wenn die Wegkomponente jedes Punktes gleich ganz X ist.

Zu d): Es wird vorausgesetzt, dass $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$. Sei a ein Element dieses Durchschnitts. Dieser Punkt liegt in jedem A_λ .

Seien x und $y \in A$. Dann gibt es Indizes μ und $\nu \in \Lambda$ mit $x \in A_\mu$ und mit $y \in A_\nu$. Auch a liegt in diesen Mengen und weil A_μ und A_ν wegzusammenhängend sind, gibt es einen Weg v in $A_\mu \subseteq A$ von x nach a und einen Weg w in $A_\nu \subseteq A$ von a nach y .

Die Verkettung $v * w$ ist ein Weg in A von x nach y . Weil es einen solchen Weg für jedes Paar von Punkten x und $y \in A$ gibt, ist A wegzusammenhängend. ■

Auch die Eigenschaft, wegzusammenhängend zu sein, bleibt unter stetigen Abbildungen erhalten.

Satz 5.26 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

Wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist $f(X)$ eine wegzusammenhängende Teilmenge von Y .

Beweis. Seien y_1 und $y_2 \in f(X)$. Dann gibt es Punkte x_1 und $x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$.

Weil X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg w in X von x_1 nach x_2 . Der in Lemma und Definition 5.22 e) definierte Weg $f_{\#}(w)$ verläuft in $f(X)$ und verbindet $f(x_1) = y_1$ mit $f(x_2) = y_2$.

Also ist $f(X)$ wegzusammenhängend. ■

Korollar 5.27 Sei (X, \mathcal{T}) ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist jeder Quotient von X wegzusammenhängend.

Beweis. Sei (Y, \mathcal{S}) ein Quotient von (X, \mathcal{T}) . Dann gibt es eine identifizierende Abbildung $f: X \rightarrow Y$. Diese Abbildung ist stetig und surjektiv, und nach Satz 5.26 ist $Y = f(X)$ wegweise zusammenhängend. ■

Satz 5.28 Sei Λ eine Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ein nicht-leerer topologischer Raum. Sei

$$(X, \mathcal{T}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$$

(X, \mathcal{T}) ist genau dann wegweise zusammenhängend, wenn alle $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ wegweise zusammenhängend sind.

Beweis. Wenn X wegweise zusammenhängend ist, dann ist jeder der Faktoren X_λ nach Satz 5.26 wegweise zusammenhängend, denn die Projektionen $\pi_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$ sind stetig und surjektiv und haben wegzusammenhängende Bilder.

Wir müssen noch die andere Richtung zeigen: wenn alle X_λ wegzusammenhängend sind, dann ist X wegzusammenhängend.

Seien $x = (\dots, x_\lambda, \dots)$ und $y = (\dots, y_\lambda, \dots) \in X$.

Weil jedes X_λ wegzusammenhängend ist, gibt es für jedes $\lambda \in \Lambda$ einen Weg w_λ in X_λ von x_λ nach y_λ .

Die w_λ bilden eine Familie von stetigen Abbildungen $I \rightarrow X_\lambda$ und bestimmen nach der universellen Eigenschaft des Produktes (Satz 2.49) eine eindeutige stetige Abbildung $w: I \rightarrow X$ mit $\pi_\lambda \circ w = w_\lambda$ für jedes λ .

Insbesondere ist $w(0)$ der eindeutige Punkt in X mit $\pi_\lambda(w(0)) = w_\lambda(0) = x_\lambda$ für jedes λ , und dieser Punkt ist x . Auf die gleiche Weise sieht man, dass $w(1) = y$.

Man kann also einen Weg in X von x nach y „koordinatenweise“ definieren. Auf jeden Fall existiert ein solcher Weg und X ist wegzusammenhängend. ■

Wegzusammenhang und Zusammenhang sind nicht unabhängig voneinander (und das hilft manchmal, Fragen über einen dieser Begriffe mit Hilfe von bekannten Tatsachen über den anderen Begriff zu beantworten).

Satz 5.29 *Sie (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.*

- a) *Wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist X auch zusammenhängend.*
- b) *Jede Wegkomponente von X ist ganz in einer Zusammenhangskomponente enthalten. Jede Zusammenhangskomponente von X ist eine disjunkte Vereinigung von Wegkomponenten.*

Beweis. Für den leeren Raum ist nichts nachzuprüfen. Wir können also annehmen, dass $X \neq \emptyset$.

a): Sei $x \in X$. Für jedes $y \in X$ gibt es einen Weg in X von x nach y , weil X wegzusammenhängend ist.

Als Intervall in \mathbf{R} ist I zusammenhängend. Also ist nach Satz 5.15 das Bild $w(I)$ des Weges w zusammenhängend, und liegt aus diesem Grund ganz in Z_x .

Insbesondere ist $y = w(1) \in Z_x$. Das gilt für jeden Punkt y , und folglich ist $Z_x = X$ und X ist zusammenhängend.

b): Weil jede Wegkomponente von X nichtleer und zusammenhängend ist, liegt sie nach Satz und Definition 5.6 a) ganz in der Zusammenhangskomponente jedes ihrer Punkte.

Verschiedene Wegkomponenten sind nach Lemma 5.25 b) disjunkt, und weil jede Wegkomponente ganz in einer Komponente liegt, ist jede Komponente die disjunkte Vereinigung der Wegkomponenten, die sie schneiden.

■

Bisher wissen wir schon einiges über wegzusammenhängende Mengen, aber unser Wissen wirft auch viele Fragen auf (zum Beispiel, ob vielleicht die Umkehrung zu Satz 5.29 a) gilt oder nicht). Außerdem ist unser Wissen bisher nur allgemein und theoretisch — wir kennen noch keine Beispiele. Dem wollen wir jetzt Abhilfe verschaffen.

Beispiele 5.30 a) Ein diskreter topologischer Raum mit mehr als einem Punkt ist nie wegzusammenhängend, weil er nicht zusammenhängend ist.

b) Wenn (X, \mathcal{T}) ein indiskreter topologischer Raum ist, so ist jede Abbildung f von einem topologischen Raum Y nach X stetig, da die einzigen

offenen Mengen in X die leere Menge (mit Urbild \emptyset) und ganz X (mit Urbild Y) sind. Diese Urbilder sind immer offen in Y .

Also können auch je zwei Punkte x und $y \in X$ durch einen Weg w verbunden werden, zum Beispiel indem man definiert $w(0) := x$ und $w(t) := y$ für alle $t > 0 \in I$. Da jede Abbildung nach X stetig ist, ist auch diese Abbildung ein stetiger Weg.

Das zeigt, dass jeder indiskrete Raum wegzusammenhängend ist.

- c) In \mathbf{R} können nur eigentliche oder uneigentliche Intervalle wegweise zusammenhängend sein, da nur Intervalle zusammenhängend sind.

Tatsächlich ist auch jedes Intervall J wegzusammenhängend, denn wenn x und $y \in J$ sind, so ist $[x, y] \subseteq J$. Die Abbildung w mit $w(t) := (1-t)x + ty$ ist ein Weg in $[x, y]$ von x nach y , und dieser Weg verläuft natürlich auch in J . Das zeigt, dass J wegzusammenhängend ist.

Insbesondere ist ganz \mathbf{R} wegweise zusammenhängend.

- d) Aus Satz 5.28 folgt jetzt, dass \mathbf{R}^n wegzusammenhängend ist.
- e) Die Einheitsscheibe $D^n \subseteq \mathbf{R}^n$ ist wegweise zusammenhängend, denn für jedes $x \in D^n$ ist die Abbildung w mit $w(t) := tx$ ein Weg vom Ursprung $\mathbf{0}$ nach x . Jeder Punkt liegt also in der Wegkomponente von $\mathbf{0}$, und deshalb gibt es nur eine Wegkomponente und D^n ist wegzusammenhängend.
- f) Der gleiche Beweis wie in e) zeigt, dass jeder euklidische offene Ball $B_r(x)$ in \mathbf{R}^n wegzusammenhängend ist. Für jedes $y \in B_r(x)$ verbindet der Weg w , der definiert wird durch $w(t) := ty + (1-t)x = x + t(y-x)$, den Mittelpunkt x des Balls mit y .
- g) Die Abbildung $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist eine surjektive stetige Abbildung $\mathbf{R} \rightarrow S^1 \subseteq \mathbf{R}^2$. Weil \mathbf{R} wegweise zusammenhängend ist, folgt aus Satz 5.26, dass S^1 wegweise zusammenhängend (und deshalb auch zusammenhängend) ist.
- h) Sei $n \geq 1$ und seien x und y zwei Punkte der n -dimensionalen Sphäre $S^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$. Wenn $x \neq -y$ spannen diese Punkte, als Vektoren betrachtet, eine 2-dimensionale Ebene E durch den Ursprung in \mathbf{R}^{n+1} auf, und x und y liegen in dieser Ebene.

Der Durchschnitt $E \cap S^n$ ist ein Kreis in E , also homöomorph zu S^1 , und ist deshalb wegzusammenhängend. Also liegen x und y in der gleichen Wegkomponente von S^n , und das gilt für je zwei Punkte $x \neq \pm y \in S^n$.

Wenn $x = \pm y$, so findet man immer einen dritten Punkt $z \in S^n$, für den automatisch gilt $x \neq \pm z$ und $y \neq \pm z$, so dass alle in der gleichen Wegkomponente liegen. Also ist S^n wegzusammenhängend (für $n \geq 1$).

i) Für jedes $n \geq 1$ ist der n -dimensionale Torus T^n als Produkt von Kopien von S^1 wegzusammenhängend.

j) Der Raum

$$X := \prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}$$

ist wegzusammenhängend in der Tychonoff-Topologie, da er ein Produkt von Kopien von \mathbf{R} ist, aber er ist *nicht* wegzusammenhängend in der Boxtopologie, da er, wie wir in Beispiel 5.20 gesehen haben, in der Boxtopologie nicht zusammenhängend ist.

Die Eigenschaften **kompakt** und **zusammenhängend** können verwendet werden, um topologische Räume auf Homöomorphismus „abzuklopfen“. Die Leistungsfähigkeit dieser Idee wird gesteigert, wenn man nicht nur die interessierenden Räume direkt vergleicht, sondern vielleicht auch leichte Abwandlungen von ihnen.

Wir geben aus Zeitgründen nur ein einfaches aber typisches Beispiel an.

Lemma 5.31 *Der Einheitskreis S^1 ist zu keinem Teilraum von \mathbf{R} homöomorph (man sagt, er ist nicht in \mathbf{R} einbettbar).*

Beweis. Jeder zu S^1 homöomorphe Raum muss kompakt und zusammenhängend sein, und die kompakten zusammenhängenden Teilmengen von \mathbf{R} sind, neben der leeren Menge, genau die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$.

Wäre ein solches Intervall homöomorph zu S^1 , so müsste es mehr als einen Punkt haben, und deshalb müsste $a < b$ sein.

Wenn man aus S^1 einen Punkt x entfernt, ist der Rest, wie man leicht sieht, immer noch wegweise zusammenhängend und deshalb zusammenhängend. Aber wenn man aus $[a, b]$ einen inneren Punkt c mit $a < c < b$ entfernt, zerfällt der Rest in zwei Komponenten.

Da ein Homöomorphismus $\varphi: [a, b] \rightarrow S^1$ auch einen Homöomorphismus $[a, b] \setminus \{c\} \rightarrow S^1 \setminus \{\varphi(c)\}$ induzieren würde, kann es keinen solchen Homöomorphismus geben. ■

Neben der sehr natürlichen Beispiele 5.30 wollen wir noch ein exotischeres Beispiel präsentieren, mit dessen Hilfe wir einige offene Fragen beantworten können.

Beispiel 5.32 (Kammraum) In \mathbf{R}^2 sei

$$A := [0, 1] \times \{0\}$$

(das Standardeinheitsintervall auf der x -Achse), sei

$$B := \{0\} \times [0, 1]$$

(das Standardeinheitsintervall auf der y -Achse), und sei

$$C := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1]$$

(eine Vereinigung von senkrechten Stacheln oder „Zinken“, die sich in der Nähe von B verdichten).

Die in Abbildung 5.1 gezeigte Vereinigung $X := A \cup B \cup C$ dieser drei Bestandteile heißt der **Kammraum**.

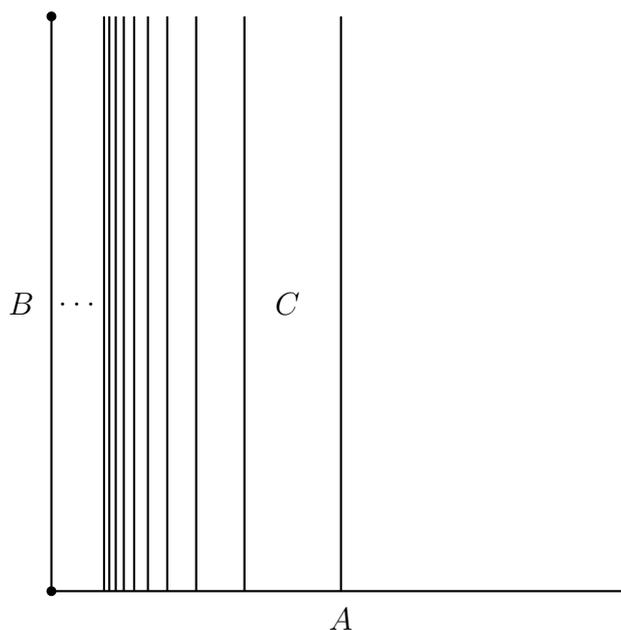


Abbildung 5.1: Der Kammraum X .

Man sieht leicht, dass X eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbf{R}^2 ist, denn wenn $(x, y) \notin X$, so ist $y \notin [0, 1]$ oder $x \notin [0, 1]$ oder $y \neq 0$ und x ist weder 0 noch ein Kehrwert einer natürlichen Zahl und liegt *zwischen* zwei aufeinanderfolgenden solchen Kehrwerten; in jedem dieser Fälle findet man leicht eine offene Umgebung von (x, y) , die X nicht schneidet.

A , der „Griff“ des Kamms, ist ein Intervall in $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$ und deshalb wegzusammenhängend. Sowohl B wie auch jede Zinke $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ von C ist homöomorph zu einem Intervall und deshalb wegzusammenhängend, und diese Mengen treffen alle A .

Die Wegkomponente eines Punktes von A beinhaltet A und jede wegzusammenhängende Menge, die A trifft, also unter anderem B und alle Zinken von C . Somit ist diese Wegkomponente der ganze Raum X .

Das zeigt, dass X wegzusammenhängend ist und somit auch zusammenhängend ist.

Sei

$$Y := X \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{und} \quad Z := X \setminus B.$$

Der Raum Z ist die Vereinigung des Intervalls $(0, 1] \times \{0\}$ (das wegzusammenhängend ist) mit den Zinken von C (die dieses Intervall treffen und alle wegzusammenhängend sind). Daraus folgt auf die gleiche Weise wie für X , dass auch Z wegzusammenhängend und somit zusammenhängend ist.

Für jeden Punkt $(0, y) \in B$ ist

$$\left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \right\}_{n \in \mathbf{N}}$$

eine Folge aus $C \subseteq Z$, die gegen $(0, y)$ konvergiert. Folglich enthält jede Umgebung von $(0, y)$ Punkte aus dieser Folge, also Punkte aus Z . Das heißt, dass jeder Punkt von B ein Häufungspunkt von Z ist.

Damit ist gezeigt, dass

$$X = Z \cup B \subseteq \bar{Z}.$$

Weil X abgeschlossen ist, gilt die Gleichheit. Das heißt, dass X die abgeschlossene Hülle von Z ist, und Y liegt dazwischen.

Aus Lemma 5.18 können wir schließen, dass Y zusammenhängend ist.

Aber Y ist nicht wegzusammenhängend. Den Raum Y erkennt man in Abbildung 5.1 leicht wieder — er enthält alle Punkte von X bis auf den etwas dicker gezeichneten Koordinatenursprung an der unteren linken Ecke. Jeder Weg w in X von $(1, 0) \in A$ nach $(0, 1) \in B$ muss durch diesen (in Y entfernten) Punkt gehen, wie man an der Zeichnung sofort erkennt, und aus diesem Grund sind $(1, 0)$ und $(0, 1)$ in Y nicht durch einen Weg verbindbar.

Natürlich sollen Sie das nicht nur anhand der Zeichnung glauben. Sei α eine irrationale Zahl zwischen 0 und 1. Weil die Projektion π_1 auf die erste Koordinate stetig ist, muss für jeden Weg w in X von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ die erste Koordinate $\pi_1 \circ w$ auf Grund des Zwischenwertsatzes alle reellen Werte zwischen 1 und 0 annehmen, insbesondere auch die Werte α/n für $n \geq 1 \in \mathbf{N}$.

Weil diese Werte irrational sind, entsprechen sie nicht der Lage irgendeines der Zinken des Kamms und somit ist $(\frac{\alpha}{n}, 0) \in A$ der einzige Punkt

aus X , der diese erste Koordinate hat. Diese Punkte aus A müssen also alle Werte von w sein.

Das Bild von w ist kompakt und deshalb abgeschlossen in \mathbf{R}^2 , und die genannten Werte häufen sich bei $(0, 0)$. Deshalb muss der Weg w auch durch $(0, 0)$ gehen; wie wir behauptet haben, kann er nicht ganz in Y verlaufen, und Y ist nicht wegweise zusammenhängend.

Wegweiser Zusammenhang ist also *nicht* gleichbedeutend mit Zusammenhang.

Die Wegkomponenten von Y sind leicht zu ermitteln, denn Y ist die disjunkte Vereinigung der wegweise zusammenhängenden Teilmenge Z mit der Menge $B \setminus \{(0, 0)\} = \{0\} \times (0, 1]$, die auch wegweise zusammenhängend ist.

Wären diese Bestandteile nicht maximal wegzusammenhängend, so würde jede Wegkomponente beide dieser Teilmengen treffen und somit beide umfassen; dann wäre ganz Y wegzusammenhängend, und wir wissen, das ist nicht der Fall.

Es folgt, dass Z und $B \setminus \{(0, 0)\}$ die Wegkomponenten von Y sind. Wir haben schon gesehen, dass $X = \overline{Z}$ in \mathbf{R}^2 , woraus folgt, dass $Y = \overline{Z}$ in Y .

Insbesondere ist die Wegkomponente Z nicht abgeschlossen in Y . Lemma 5.7 gilt also *nicht* entsprechend für Wegzusammenhang.

Von den Zusammenhangsbegriffen gibt es auch eine lokale Version, die allerdings ein bisschen vorsichtiger und umständlicher formuliert werden muss, als es bei der lokalen Kompaktheit der Fall war (weil, anders als bei der Kompaktheit in Hausdorffräumen, die Existenz einer großen zusammenhängenden Umgebung eines Punktes nicht automatisch impliziert, dass es auch beliebig kleine zusammenhängende Umgebungen gibt).

Definition 5.33 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Der Raum X heißt **lokal zusammenhängend**, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und für jede Umgebung U von x eine *zusammenhängende* Umgebung V von x gibt mit $x \in V \subseteq U$.

Der Raum X heißt **lokal wegweise zusammenhängend**, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und für jede Umgebung U von x eine *wegweise zusammenhängende* Umgebung V von x gibt mit $x \in V \subseteq U$.

Bemerkung 5.34 Jeder lokal wegzusammenhängende Raum ist auch lokal zusammenhängend.

Das folgt leicht aus Satz 5.29 a), denn jede wegweise zusammenhängende Umgebung ist auf Grund dieses Satzes auch zusammenhängend.

Beispiele 5.35 a) Jeder euklidische Raum \mathbf{R}^n ist lokal wegweise zusammenhängend und somit lokal zusammenhängend, denn jede Umgebung U eines Punktes x enthält einen offenen Ball um x , der nach Beispiel 5.30 f) wegzusammenhängend ist.

b) Der Raum $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenhängend und nicht wegweise zusammenhängend, da er kein Intervall ist, aber er ist lokal wegweise zusammenhängend und lokal zusammenhängend, da jede Umgebung eines Punktes x von $\mathbf{R} \setminus 0$ ein offenes Intervall um x enthält, und offene Intervalle sind wegweise zusammenhängend.

c) Der Kammraum X aus Beispiel 5.32 ist wegweise zusammenhängend und zusammenhängend, aber er ist nicht lokal wegweise zusammenhängend oder lokal zusammenhängend.

Keine Umgebung V von $(0, 1)$ (dem fett gezeichneten Punkt in der oberen linken Ecke von Abbildung 5.1), die in $X \setminus A = X \cap (\mathbf{R} \times (0, \infty))$ enthalten ist, kann zusammenhängend sein, denn jede solche Umgebung V trifft C und somit Punkte von X mit positiver erster Koordinate.

Die Projektion $\pi_1(V)$ von V unter der stetigen Abbildung π_1 enthält nur rationale Punkte von \mathbf{R} , aber enthält sowohl 0 wie auch positive Werte. Diese Bildmenge kann deshalb kein Intervall sein und kann somit nicht zusammenhängend sein; also kann V es auch nicht sein.

Die lokalen Zusammenhangseigenschaften mildern einige der möglichen „Pathologien“ der globalen Eigenschaften.

Lemma 5.36 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

Wenn X lokal zusammenhängend ist, dann ist jede Zusammenhangskomponente von X offen und abgeschlossen.

Wenn X lokal wegweise zusammenhängend ist, dann ist jede Wegkomponente von X offen und abgeschlossen.

Beweis. Wir beweisen die zweite Behauptung, für die wegweisen Zusammenhangsbegriffe.

Sei $x \in X$ und sei $y \in W_x$. Nach Voraussetzung enthält jede Umgebung von y , insbesondere auch die Umgebung X , eine wegweise zusammenhängende Umgebung A , die wiederum, weil sie eine Umgebung von y ist, eine offene Menge U_y um y enthält.

Weil A wegweise zusammenhängend ist, ist $A \subseteq W_y = W_x$. Folglich gilt auch

$$y \in U_y \subseteq A \subseteq W_x.$$

Weil wir eine solche offene Menge um jeden Punkt von W_x finden können, ist

$$W_x = \bigcup_{y \in W_x} U_y$$

und somit offen.

Das gilt für jedes $x \in X$. Insbesondere ist auch das Komplement jeder Wegkomponente

$$X \setminus W_x = \bigcup_{y \notin W_x} W_y$$

offen, und W_x somit auch abgeschlossen.

Der gleiche Beweis funktioniert auch für die erste Aussage und den normalen Zusammenhangsbegriff, wenn man die W_x und W_y überall durch Z_x und Z_y ersetzt, das Wort „wegweise“ weglässt, und „Wegkomponente“ durch „Komponente“ ersetzt. ■

Korollar 5.37 Sei (X, \mathcal{T}) ein zusammenhängender und lokal wegweise zusammenhängender topologischer Raum.

Dann ist X global wegweise zusammenhängend.

Beweis. Wenn nicht, dann ist X die disjunkte Vereinigung von seinen Wegkomponenten, und jede ist eine echte Teilmenge von X .

Weil X lokal wegzusammenhängend ist, ist nach Lemma 5.36 jede Wegkomponente offen. Die Zerlegung von X in die Wegkomponenten verstößt dann gegen Bedingung 5.4 b) und X kann, entgegen der Voraussetzung, nicht zusammenhängend sein. ■

Kapitel 6

Homotopie und die Fundamentalgruppe

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass man mit Hilfe der Eigenschaften der Kompaktheit, des Zusammenhangs und des wegweisen Zusammenhangs oft entscheiden kann, ob es zwischen zwei topologischen Räumen eine surjektive oder injektive stetige Abbildung geben kann oder spezieller, ob die Räume homöomorph sein können.

Leider gibt es auch viele Fälle, in denen diese Eigenschaften keine wesentliche Hilfe bieten und in denen man neue Methoden und Gedanken braucht. Die zündende Idee der *algebraischen Topologie* besteht in der Konstruktion von sich wohl verhaltenden Zuordnungen, die topologischen Objekten wie Räumen oder Räumen mit ausgezeichneten Punkten algebraische Objekte wie Gruppen und Ringe zuordnen. Diese algebraischen Objekte kann man berechnen, und mit ihnen kann man generell leichter rechnen, als mit topologischen Merkmalen. Unterscheiden sich die algebraischen Objekte, so unterscheiden sich auch die topologischen Objekte, denen sie zugeordnet sind.

Für die Vereinfachung, die die Algebraisierung der Topologie bietet, ist allerdings ein Preis zu zahlen, denn sie gewinnt man auf Kosten der Detailtreue; die Dinge sehen einfacher aus teilweise, weil man nicht mehr so scharf sehen kann.

Diese Unschärfe stammt daher, dass die algebraischen Konstruktionen es in ihrer Natur haben, dass sie invariant gegen *stetigen* Veränderungen der Strukturmerkmale eines Raumes oder einer Abbildung zwischen Räumen sind; solche Veränderungen ändern wohl die Topologie, aber nicht die zugeordneten Gruppen und Ringe.

Der genaue Begriff, die diese Art von Veränderung beschreibt, nennt sich *Homotopie*. Neben der prinzipiellen „Sehstörung“, die er in der gesamten algebraischen Topologie verursacht, ist er aber auch deshalb für uns im Moment

wichtig, weil er in die Definition der einfachsten algebraischen Zuordnung, die Konstruktion der **Homotopiegruppen**, direkt eingeht.

Die Grundeigenschaften des Homotopiebegriffs und die ihn verwendende Gruppenkonstruktion sind die Themen dieses Abschnitts.

Wir erinnern an etwas Standardnotation.

Notation 6.1 Mit I werden wir das Einheitsintervall $[0, 1] \subseteq \mathbf{R}$ bezeichnen, dass wir ständig benutzen werden.

Wir bezeichnen mit ∂I die Menge $\{0, 1\}$ der beiden Endpunkte oder Randpunkte des Intervalls.

Definition 6.2 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume. Eine **Homotopie** von X nach Y ist eine stetige Abbildung

$$H: X \times I \longrightarrow Y.$$

Für jedes $t \in I$ erhalten wir eine Abbildung $H_t: X \longrightarrow Y$ durch die Festlegung

$$H_t(x) := H(x, t) \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Wir nennen H_t den **Zustand von H zur Zeit t** . Die H_t können wir auffassen als Stadien einer mit der Zeit sich stetig verändernden Schar von stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$, und die Homotopie H selber können wir somit interpretieren als eine stetige Schar von Abbildungen, oder als einen stetigen Weg im Raum der stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.

Speziell bezeichnen wir H_0 als den **Anfangszustand** von H und H_1 als den **Endzustand** von H ; wir sagen dann, H ist eine Homotopie **von H_0 zu H_1** .

Sind f und g zwei stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$, so sagen wir, f ist **homotop** zu g , wenn es eine Homotopie H von X nach Y gibt, mit

$$H_0 = f \quad \text{und} \quad H_1 = g.$$

Wir schreiben als Notation dafür $f \simeq g$, oder wenn es auf die Nennung der Homotopie H ankommt, $f \simeq_H g$.

Homotopien haben sehr viel Ähnlichkeit mit Wegen, und sie verhalten sich in vielerlei Hinsicht wie Wege in dem Raum der stetigen Abbildungen von X nach Y . Oder man kann eine Homotopie von X nach Y als eine durch X parametrisierte Schar von Wegen in Y betrachten. Beide Betrachtungsweisen legen nahe, auch zur Untersuchung von Homotopien Grundkonstruktionen wie die aus Lemma und Definition 5.22 einzuführen, die bei der Untersuchung des Wegzusammenhangs und der Äquivalenzrelation, durch einen Weg verbindbar zu sein, eine große Hilfe waren.

Allerdings sind Homotopien struktureicher als einfache Wege, und es kann deshalb Sinn machen, ihnen auf Teilen ihres Definitionsbereiches X Einschränkungen aufzulegen; bei der Konstruktion der Homotopiegruppen *müssen* wir das sogar tun.

Wir wollen kurz zwei wichtige solche „Nebenbedingungen“ beschreiben und anschließend die erwähnten Grundkonstruktionen definieren und auch in Bezug auf die wichtigsten Nebenbedingungen charakterisieren.

Definition 6.3 a) Seien X und Y topologische Räume und sei $A \subseteq X$. Wir nennen eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ eine **Homotopie relativ zu A** , oder eine **Homotopie mit A fest**, wenn H auf A nichts verändert, d.h., wenn für jedes $a \in A$ gilt, dass $H(a, t)$ nicht von t abhängt.

Dann ist $H(a, t)$ in Bezug auf t konstant, wenn a in A liegt, aber dieser in t konstante Wert kann für verschiedene $a \in A$ natürlich verschieden sein.

Homotopie relativ zu A kann man auch so charakterisieren, dass die Einschränkungen $H_t|_A$ für alle $t \in I$ gleich sind.

Sind f und g stetige Abbildungen $X \rightarrow Y$, so nennen wir f und g **homotop relativ zu A** oder **homotop mit A fest**, wenn es eine Homotopie H relativ zu A gibt, mit $f \simeq_H g$. Wir schreiben dann

$$f \simeq g \text{ rel } A \quad \text{oder spezifischer} \quad f \simeq_H g \text{ rel } A.$$

Natürlich ist das nur möglich, wenn $f|_A = g|_A$.

b) Sehr oft werden wir Homotopien betrachten, wo I nicht nur die „Zeitachse“ der Homotopie darstellt, sondern auch die „räumliche Achse“, d. h., wo auch $X = I$.

Eine solche Homotopie $I \times I \rightarrow Y$ kann man als eine stetige Schar von Wegen in Y auffassen.

In diesem Sinne nennen wir eine Homotopie $I \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie **mit festen Endpunkten**, wenn sie eine Homotopie rel $\{0, 1\} \subseteq I$ ist.

Definition 6.4 Im Folgenden seien (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{S}) , und (Z, \mathcal{O}) topologische Räume.

a) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Wir definieren eine Abbildung $C_f: X \times I \rightarrow Y$ durch die Vorschrift

$$C_f(x, t) := f(x) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und jedes } x \in X.$$

$C_f = f \circ \pi_1$ ist stetig und ist eine Homotopie von f zu f ; wir nennen sie die **konstante Homotopie** bei f , da $(C_f)_t = f$ ist für jedes $t \in I$.

Sie ist offensichtlich eine Homotopie rel X (und deshalb auch eine Homotopie rel A für jedes $A \subseteq X$).

- b) Seien f und g stetige Abbildungen $X \rightarrow Y$. Sei $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f zu g . Definiere eine Homotopie H^- durch

$$H^-(x, t) := H(x, 1 - t) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } t \in I.$$

H^- ist stetig als Verknüpfung von H mit der offensichtlich stetigen Abbildung $(x, t) \mapsto (x, 1 - t)$. Offenbar ist H^- eine Homotopie von g zu f , denn

$$H_0^- = H_{1-0} = H_1 = g \quad \text{und} \quad H_1^- = H_{1-1} = H_0 = f.$$

Wir nennen H^- die **umgekehrte** oder **rückwärts verlaufende** Homotopie zu H .

Wenn H eine Homotopie rel $A \subseteq X$ ist, so ist offensichtlich auch H^- eine Homotopie rel A (da bei der Umformung von H zu H^- nur die „Zeitkoordinate“ t verändert wird).

- c) Seien f, g und h stetige Abbildungen $X \rightarrow Y$ und sei $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f zu g und $K: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von g zu h .

Wir definieren eine Abbildung $H * K: X \times I \rightarrow Y$ durch

$$(H * K)(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t), & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ K(x, 2t - 1), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

für $x \in X$ und $t \in I$.

Man beachte, dass für $(H * K)(x, \frac{1}{2})$ beide Fälle anwendbar sind, aber da

$$H_{2, \frac{1}{2}} = H_1 = g = K_0 = K_{2, \frac{1}{2}-1},$$

stimmen beide Werte überein, so dass $H * K$ auch für $t = \frac{1}{2}$ wohldefiniert ist.

Und $H * K$ ist offensichtlich stetig auf den abgeschlossenen Unterräumen $X \times [0, \frac{1}{2}]$ (wo der erste Fall in (6.1) anwendbar ist) und $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ (wo der zweite Fall in (6.1) anwendbar ist). Nach Satz 2.39 ist $H * K$ auf ganz $X \times I$ stetig und somit eine Homotopie.

Wir nennen $H * K$ die **Verkettung** von H und K .

Offenbar ist $H * K$ eine Homotopie von f zu h , denn

$$(H * K)_0 = H_{2,0} = H_0 = f \quad \text{und} \quad (H * K)_1 = K_{2,1-1} = K_1 = h.$$

Wenn $A \subseteq X$ und wenn H und K Homotopien rel A sind, so ist

$$f|_A = g|_A = h|_A$$

und man sieht sofort aus der Definition in Formel (6.1), dass auch $H * K$ eine Homotopie rel A ist.

Es ist denkbar bei dieser Operation $*$, dass auch X ein kartesisches Produkt sein kann, in dem der Faktor I auftaucht, und dann könnte es sinnvoll sein, die Operation $*$ bezüglich verschiedener Koordinatenrichtungen auszuführen. In diesem Fall erlauben wir uns, durch einen Index am Zeichen $*$ den richtigen Faktor I zu kennzeichnen, so dass wir zum Beispiel für Abbildungen auf I^2 zwei Verkettungsoperationen $*_1$ und $*_2$ haben, die auf die erste bzw. auf die zweite Richtung wirken.

- d) Seien f und g stetige Abbildungen $X \rightarrow Y$ und seien h und k stetige Abbildungen $Y \rightarrow Z$. Sei $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f zu g und sei $K: Y \times I \rightarrow Z$ eine Homotopie von h zu k .

Definiere eine Abbildung $K \circ H: X \times I \rightarrow Z$ durch die Vorschrift

$$(K \circ H)(x, t) := K(H(x, t), t) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } t \in I.$$

Offenbar ist $K \circ H$ stetig und somit eine Homotopie von X nach Z .

Wir nennen $K \circ H$ die **Verknüpfung der Homotopien** H und K . Obwohl $K \circ H$ nicht die Verknüpfung der Abbildungen H und K ist, ist dieser Name gerechtfertigt, denn es gilt für jedes $t \in I$, dass

$$(K \circ H)_t = K_t \circ H_t.$$

Insbesondere ist $K \circ H$ eine Homotopie von $K_0 \circ H_0 = h \circ f$ nach $K_1 \circ H_1 = k \circ g$.

Sei $A \subseteq X$. Wenn H eine Homotopie rel A ist, und wenn K eine Homotopie rel $f(A)$ ist, dann ist $K \circ H$ eine Homotopie rel A , denn

- für $a \in A$ hängt $H(a, t)$ nicht von t ab,
- $H(a, t)$ ist also für alle $t \in I$ gleich $f(a) \in f(A)$,
- also hängt $K(H(a, t), t) = K(f(a), t)$ nicht von t ab.

Lemma und Definition 6.5 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume. Sei $A \subseteq X$.

Wir bezeichnen mit $C(X, Y)$ die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y .

- a) Sowohl die Homotopie-Relation \simeq wie auch $\simeq \text{ rel } A$ sind Äquivalenzrelationen auf $C(X, Y)$.

Die \simeq -Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt die **Homotopieklasse von f** ; wir bezeichnen sie mit $[f]$. Die Äquivalenzklasse von f bezüglich Homotopie $\text{rel } A$ heißt die **Homotopieklasse von f relativ zu A** und wir bezeichnen sie mit $[f]_A$.

Die Menge aller Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ (also der Quotient $C(X, Y)/\simeq$) heißt die **Homotopiemenge von X nach Y** und wird mit $[X, Y]$ bezeichnet.

Entsprechend bezeichnen wir die **Homotopiemenge von X nach Y relativ zu A** , also die Menge aller Homotopieklassen relativ zu A von stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$, mit $[X, Y]_A$.

- b) Die Relation \simeq ist mit Verknüpfung von stetigen Abbildungen verträglich. Das heißt, wenn (Z, \mathcal{O}) ein dritter topologischer Raum ist, wenn $f \simeq g$ stetige Abbildungen aus $C(X, Y)$ sind und wenn $h \simeq k$ stetige Abbildungen aus $C(Y, Z)$ sind, so ist

$$h \circ f \simeq k \circ g \in C(X, Z). \quad (6.2)$$

Aus diesem Grund bestimmt die Verknüpfung von stetigen Abbildungen eine wohldefinierte **Verknüpfung von Homotopieklassen**

$$\begin{aligned} \circ: [Y, Z] \times [X, Y] &\longrightarrow [X, Z] \\ ([h], [f]) &\longmapsto [h] \circ [f] := [h \circ f]. \end{aligned}$$

Entsprechend, wenn $f \simeq g \text{ rel } A$ und wenn $h \simeq k \text{ rel } f(A)$, dann ist

$$h \circ f \simeq k \circ g \text{ rel } A. \quad (6.3)$$

Für die Relativklassen ist die Verknüpfung der Klassen allerdings nicht definiert, da der linke Faktor nicht als Element einer festen relativen Homotopiemenge gewählt werden könnte; für ihn spielt nicht die Homotopie $\text{rel } A$ eine Rolle, sondern Homotopie relativ zum variierenden Bild von A unter den Abbildungen der rechten Homotopieklasse.

Beweis. Zu a): Wir beweisen, dass \simeq eine Äquivalenzrelation auf $C(X, Y)$ ist.

Die Relation ist reflexiv, denn für jede stetige Abbildung $f \in C(X, Y)$ gilt $f \simeq_{C_f} f$ nach Konstruktion 6.4 a).

Die Relation \simeq ist symmetrisch, denn wenn $f \simeq_H g$, so ist $g \simeq_{H^{-1}} f$ nach Konstruktion 6.4 b).

Und schließlich ist die Relation transitiv. Wenn $f \simeq_H g$ und $g \simeq_K k$, dann ist $f \simeq_{H*K} k$ nach Konstruktion 6.4 c).

Auf Grund der Aussagen in Lemma und Definition 6.5 gelten diese Behauptungen auch für Homotopie relativ zu A .

Zu b): Wenn $f \simeq_H g$ und $h \simeq_K k$, dann ist $K \circ H$ nach Definition 6.4 d) eine Homotopie von $h \circ f$ nach $k \circ g$. Das beweist Gleichung (6.2).

Die Aussage über Homotopie rel A und Gleichung (6.3) folgen entsprechend aus der Bemerkung zu Homotopie rel A in Definition 6.4 d). ■

Wir präsentieren ein paar einfache aber oft benutzte Beispiele für Homotopien.

Beispiele 6.6 a) Sei X ein topologischer Raum und sei n eine natürliche Zahl. Jede Abbildung $f: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ ist homotop zur konstanten Abbildung 0, denn

$$H(x, t) := t \cdot f(x)$$

ist eine Homotopie von 0 nach f .

b) Allgemeiner, sei Y eine konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n (zur Erinnerung: das heißt, dass für je zwei Punkte y und z von Y die gerade Verbindungsstrecke $\{(1-t)y + tz \mid t \in I\}$ ganz in Y enthalten ist). Dann sind je zwei stetige Abbildungen f und $g: X \rightarrow Y$ zueinander homotop.

Für $x \in X$ und $t \in I$ setze man

$$H(x, t) := tg(x) + (1-t)f(x).$$

Dann ist H eine Homotopie von $H_0 = f$ zu $H_1 = g$.

Man beachte ferner: wenn $A \subseteq X$ eine Teilmenge ist, so dass $f|_A = g|_A$, dann ist H sogar eine Homotopie rel A .

c) Sei D^n die abgeschlossene Einheitskreis in \mathbf{R}^n und sei $X := D^n \setminus \{0\}$, die **gelochte Scheibe**.

Die Sphäre S^{n-1} ist ein Unterraum von X , und wir haben eine Art Projektion p von X auf S^{n-1} (genannt eine **Retraktion**), gegeben durch

$$p(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Die Identität von X , oder die Inklusion von X nach D^n (beide Abbildungen nehmen ja die gleichen Werte an) sind homotop zu p vermöge einer der Homotopien

$$H(x, t) := \left((1-t)\|x\| + t \right) \frac{x}{\|x\|} \quad \text{oder} \quad K(x, t) := \frac{x}{\|x\|^t}.$$

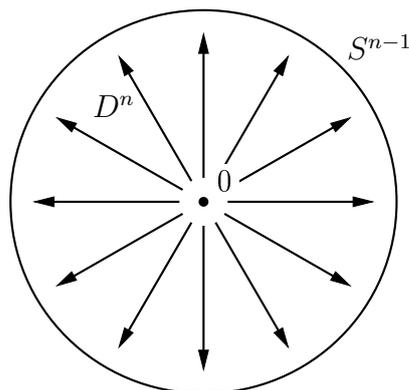


Abbildung 6.1: Eine Homotopie auf $D^n \setminus \{0\}$

Man beachte, dass diese Homotopien relativ zu S^{n-1} sind, d. h., die Punkte von S^{n-1} werden während der ganzen Homotopie nicht bewegt (und werden identisch abgebildet).

Auf ganz D^n gibt es *keine* stetigen Abbildungen nach S^{n-1} , die auf S^{n-1} die Identität sind. Und id_{D^n} ist rel S^{n-1} zu keiner Abbildung homotop, deren Bild nicht ganz D^n ist. Das zu beweisen ist aber (noch) nicht leicht; es wird erst möglich mit den Hilfsmitteln der algebraischen Topologie, die wir dabei sind, zu entwickeln.

- d) Sei $X = \{*\}$ ein Einpunktraum und sei Y ein beliebiger topologischer Raum. Eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ ist nichts anderes, als ein *Weg* w in Y (mit $w(t) = H(*, t)$).

Beispiel 6.6 d) macht uns darauf aufmerksam, dass Wege und Wegzusammenhang wichtige Rollen in der Homotopietheorie spielen.

Bemerkung 6.7 Seien X und Y topologische Räume und sei

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

eine Homotopie. Das Bild, während der Homotopie, eines Punktes $x \in X$ ist eine wegzusammenhängende Teilmenge $H(\{x\} \times I)$ von Y . Folglich kann

während der Homotopie kein Punkt die *Wegkomponente* von Y verlassen, in der er angefangen hat.

Homotopie ist eine Äquivalenzrelation unter stetigen Abbildungen zwischen zwei Räumen, aber mit ihrer Hilfe können wir auch topologische Objekte vergleichen (mit teils erstaunlichen Ergebnissen):

Definition 6.8 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

Wir nennen f eine **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt mit

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y. \quad (6.4)$$

Jede solche Abbildung g heißt ein **Homotopieinverses** zu f .

Wir sagen, dass zwei topologische Räume X und Y **den gleichen Homotopietyp haben**, wenn es eine Homotopieäquivalenz von X nach Y gibt. Dafür werden wir schreiben $X \simeq Y$ oder

$$[X] = [Y].$$

Homotopieäquivalenzen sind die „Isomorphismen“ der Homotopietheorie, und Räume des gleichen Homotopietyps sehen homotopietheoretisch gleich aus, auch wenn sie topologisch sehr verschieden sein können, wie wir an den späteren Beispielen sehen werden.

Hier ein paar einfache Eigenschaften von Homotopieäquivalenz.

Lemma 6.9 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) topologische Räume. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

a) Wenn es stetige Abbildungen g und $h: Y \rightarrow X$ gibt, so dass

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ h \simeq \text{id}_Y$$

(in anderen Worten, wenn g ein Homotopielinksinverses zu f ist und h ein Homotopierechtsinverses, aber sie sind nicht unbedingt gleich), dann ist f trotzdem eine Homotopieäquivalenz, es gilt $g \simeq h$ und beide sind tatsächlich „volle“ Homotopieinverse zu f .

b) Wenn f eine Homotopieäquivalenz ist und g ein Homotopieinverses zu f ist, dann ist auch $g: Y \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz und f ist ein Homotopieinverses zu g .

- c) Wenn f eine Homotopieäquivalenz ist und g ein Homotopieinverses zu f , dann ist jede zu f homotope Abbildung $f' \simeq f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz und jede zu g homotope Abbildung $g' \simeq g: Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f' .
- d) Wenn f eine Homotopieäquivalenz ist, und wenn (Z, \mathcal{O}) ein weiterer topologischer Raum ist und $h: Y \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz, dann ist $h \circ f$ eine Homotopieäquivalenz $X \rightarrow Z$. Ferner, wenn $g: Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f ist und $k: Z \rightarrow Y$ ein Homotopieinverses zu h ist, dann ist $g \circ k$ ein Homotopieinverses zu $h \circ f$.
- e) Jeder Homöomorphismus ist auch eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Zu a): Es gilt

$$g = g \circ \text{id}_Y \simeq g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h \simeq \text{id}_X \circ h = h,$$

und weil dann gilt

$$f \circ g \simeq f \circ h \simeq \text{id}_Y \quad \text{und} \quad h \circ f \simeq g \circ f \simeq \text{id}_X,$$

sind g und h Homotopieinverse zu f und f ist eine Homotopieäquivalenz.

b) ist klar nach der Definition von Homotopieäquivalenz und Homotopieinverse.

c) folgt sofort aus der Tatsache, dass die Homotopierelation \simeq mit Verknüpfung verträglich ist, wie in Lemma und Definition 6.5 b).

d) ist trivial, denn

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \simeq g \circ \text{id}_Y \circ f = g \circ f \simeq \text{id}_X,$$

und man zeigt auf die gleiche Weise, dass die Verknüpfung in der anderen Reihenfolge zu id_Z homotop ist.

e) ist offensichtlich; man kann sogar alle \simeq in den definierenden Gleichungen als Gleichheiten realisieren. ■

Beispiele 6.10 a) Sei $X = \mathbf{R}^n$ oder D^n oder allgemeiner, eine nichtleere konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n . Dann hat X den Homotopietyp eines Einpunktraumes. Ferner, für jeden Punkt $x \in X$ sind die Inklusion $i: \{x\} \rightarrow X$ und die konstante Abbildung $c: X \rightarrow \{x\}$ Homotopieäquivalenzen und Homotopieinverse zueinander.

Denn $c \circ i = \text{id}_{\{x\}}$ und $i \circ c \simeq \text{id}_X$, da wir in Beispiel 6.6 b) gesehen haben, dass je zwei stetige Abbildungen in eine konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n zueinander homotop sind. Die Homotopie zwischen $i \circ c$ und id_X ist sogar $\text{rel } \{x\}$, weil $(i \circ c)(x) = x$.

- b) Die Inklusion $j: D^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine Homotopieäquivalenz.

Dazu sei $r: \mathbf{R}^n \longrightarrow D^n$ die Abbildung

$$r(x) := \begin{cases} x, & \text{wenn } \|x\| \leq 1; \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{wenn } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Offenbar ist $r \circ j = \text{id}_{D^n}$, und $j \circ r \simeq \text{id}_{\mathbf{R}^n}$, wieder weil je zwei Abbildungen in die konvexe Menge \mathbf{R}^n homotop sind. Da aber $j \circ r$ auf D^n mit der Identität übereinstimmt, sind sie nach Beispiel 6.6 b) sogar homotop rel D^n .

- c) Für jedes $n \geq 1$ ist die Inklusion $i: S^{n-1} \longrightarrow D^n \setminus \{0\}$ eine Homotopieäquivalenz, und ein Homotopieinverses dazu ist gegeben durch die in Beispiel 6.6 c) definierte Abbildung $p: D^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ mit $p(x) := x/\|x\|$.

Denn offensichtlich ist $p \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ und in Beispiel 6.6 c) haben wir schon gesehen, dass $i \circ p \simeq \text{id}_{D^n \setminus \{0\}}$.

- d) In \mathbf{R}^2 sei X der Kreis von Radius 1 um den Punkt $(-1, 0)$, und sei $Y = I \times \{0\}$. Sei $Z := X \cup Y$ (siehe Abbildung 6.2). Dann ist die Inklusion

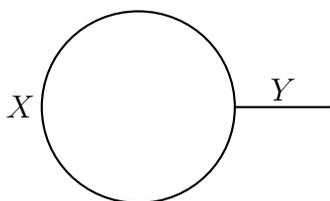


Abbildung 6.2: Ein Kreis mit angeheftetem Intervall

sion $j: X \longrightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz; die Abbildung r , die den Kreis identisch auf sich und das Intervall auf seinen linken Endpunkt abbildet ist ein Homotopieinverses zu j , denn durch stetiges Stauchen des „Stachels“ Y , unter Festhaltung des Kreises, erhält man offensichtlich eine Homotopie von id_Z zu $j \circ r$, und $r \circ j$ ist sogar gleich id_X .

- e) In \mathbf{R}^2 sei V die Vereinigung des Intervalls $I \times \{0\}$ mit dem Kreis von Radius 1 um $(-1, 0)$ und dem Kreis von Radius 1 um $(2, 0)$. Sei W die Vereinigung des Kreises von Radius 1 um $(-1, 0)$ mit dem Kreis von Radius 1 um $(1, 0)$ (diese beiden Kreise berühren sich am Koordinatenursprung). Diese Räume haben den gleichen Homotopietyp.

Das Beispiel sieht ähnlich aus wie der Kreis mit Stachel in Teil d), aber es ist wesentlich komplizierter, weil der zweite Kreis am rechten Ende des Intervalls verhindert, dass man das Intervall einfach zusammenstaucht; anders als in Teil d) kann sich das rechte Ende des Intervalls während der Homotopie nicht mehr frei bewegen, ohne dass man dem angehängten Kreis Rechnung trägt.

Um die Behauptung $V \simeq W$ zu beweisen, müssen wir zunächst Abbildungen zwischen V und W finden und dann hoffen, dass die Abbildungen, die wir gewählt haben, Homotopieäquivalenzen sind.

Eine Abbildung $p: V \rightarrow W$ ist leicht zu konstruieren: man bilde den linken Kreis identisch ab, bilde das ganze Intervall auf seinen linken Endpunkt ab und verschiebe den rechten Kreis von V um eine Einheit nach links, so dass er auf dem rechten Kreis von W zu stehen kommt.

Für die Abbildung q in die andere Richtung muss man sich ein bisschen mehr einfallen lassen: man bilde den linken Kreis wieder identisch ab, man projiziere die linke Hälfte des rechten Kreises senkrecht auf die x -Achse, oder genauer auf $I \times \{0\}$, und man dehne die rechte Hälfte des rechten Kreises in W auf den ganzen Kreis aus (durch die Abbildung, die für den Einheitskreis um 0 in \mathbf{C} die Gestalt $z \mapsto z^2$ hat), und verschiebe das Ergebnis um eine Einheit nach rechts auf den rechten Kreis von V .

Abbildung 6.3 auf der nächsten Seite zeigt in der mittleren „Spalte“ die Räume V und W und die Abbildungen p und q , wobei p zweimal dargestellt wird, damit man sich sowohl die Verknüpfung $q \circ p$ wie auch die Verknüpfung $p \circ q$ vorstellen kann. Mit Hilfe der Farbgebung kann man gut sehen, welche Teile der Räume wohin abgebildet werden, aber sie hat auch den Zweck, die Homotopien zwischen den dargestellten Verknüpfungen und den Identitätsabbildungen begreifbar zu machen.

Die gestrichelten Pfeilbögen auf der rechten und linken Seite der Abbildung stellen Homotopien H von id_V zu $q \circ p$ und K von id_W zu $p \circ q$ dar; die Bögen sind unterbrochen durch eine farbliche Zeichnung eines Zwischenstadiums der jeweiligen Homotopie.

Die Homotopie H staucht das Intervall vom rechten Ende her zusammen und zieht die linke Hälfte des rechten Kreises mit und lässt sie in das Intervall „nachfließen“ (wobei der obere und untere Halbkreis auf der x -Achse miteinander verschmelzen); gleichzeitig dehnt sich die rechte Hälfte des rechten Kreises aus, um den „weggeflossenen“ Teil des Kreises auszufüllen. Es ist noch nicht einmal schwer, eine Formel für

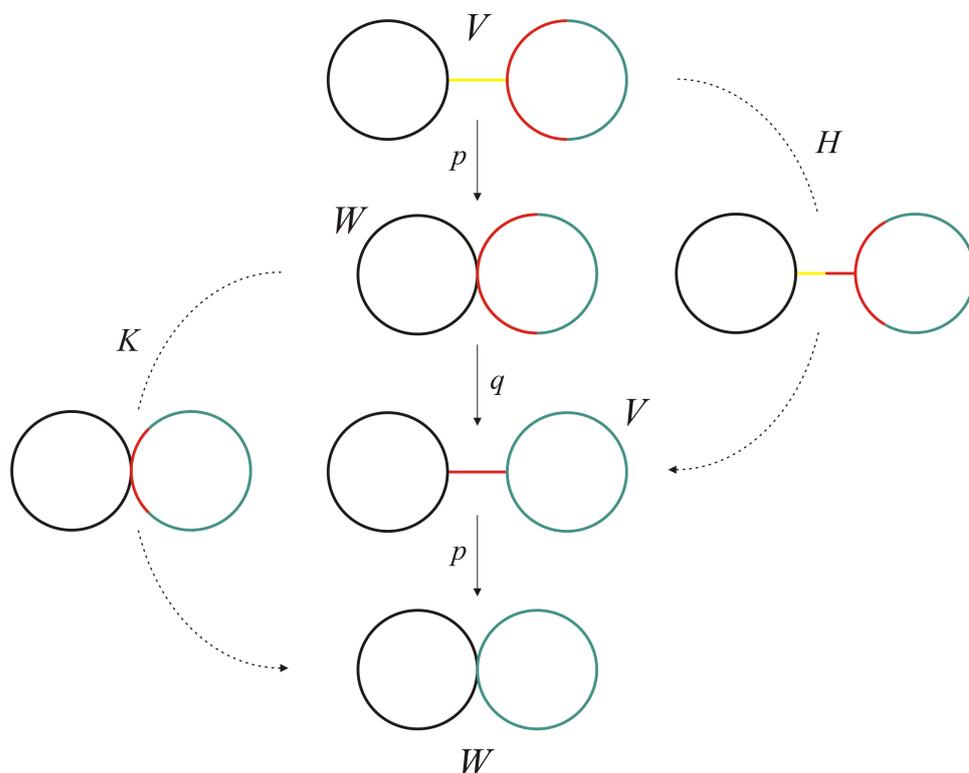


Abbildung 6.3: Das mittlere Intervall kann zusammengezogen werden.

diese Homotopie hinzuschreiben, aber ich glaube, man versteht auch anhand des Bildes sehr gut (oder sogar besser), was hier passiert.

Die Homotopie K auf der linken Seite der Zeichnung staucht die linke Hälfte des rechten Kreises von W einfach zum Schnittpunkt der beiden Kreise zusammen, während die rechte Hälfte des rechten Kreises mitfließt und sich ausdehnt, um den Kreis auszufüllen.

- f) Die Inklusion $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ ist für *kein* n eine Homotopieäquivalenz und das hängt mit der Tatsache zusammen, dass es *keine* stetige Abbildung $D^n \rightarrow S^{n-1}$ geben kann, die auf S^{n-1} die Identität ist.

Wo solche stetigen Abbildungen existieren, ist es auch nicht schwer, sie zu finden. Wo zwei Räume vom gleichen Homotopietyp sind, ist es meistens auch nicht schwer, eine Homotopieäquivalenz anzugeben und die geforderten Homotopien zu konstruieren. Wo diese Eigenschaften aber *nicht* gelten, ist es oft außerordentlich schwierig, ihre Unmöglichkeit zu beweisen. Auch in diesem Fall werden wir erst später mit Mitteln aus der algebraischen Topologie dazu in der Lage sein.

Wenn wir diese Beispiele betrachten, sehen wir, dass die einfachsten Zustände, die es bezüglich Homotopie und Homotopieäquivalenzen geben kann, die folgenden sind, die aus diesem Grund auch einen besonderen Namen verdienen:

Definition 6.11 a) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir nennen f **nullhomotop**, wenn f homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

b) Ein topologischer Raum X heißt **zusammenziehbar**, wenn X den gleichen Homotopietyp hat, wie ein Einpunktraum $\{x\}$.

Lemma 6.12 Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

a) X ist zusammenziehbar.

b) id_X ist nullhomotop.

c) Jede stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ mit Zielraum X ist nullhomotop.

d) Jede stetige Abbildung $g: X \rightarrow Z$ mit Quellraum X ist nullhomotop.

Der Beweis ist sehr einfach und wird als Übungsaufgabe dem Leser überlassen.

Beispiel 6.13 Jede stetige Abbildung nach \mathbf{R}^n oder in eine konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n hinein ist nullhomotop (Beispiele 6.6 a) und b)). Mit Lemma 6.12 folgt daraus, dass jede nichtleere konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n zusammenziehbar ist (das wurde aber auch schon in Beispiel 6.10 a) gezeigt).

Mit Hilfe der Homotopiebegriffe und der zugehörigen Konstruktionen sind wir jetzt in der Lage, mit wenig Arbeit für jeden topologischen Raum¹ eine Gruppe zu konstruieren, die ein algebraisches Abbild der Topologie darstellt und eine große Hilfe bei der Beantwortung topologischer Fragen sein kann.

Wir behandeln aus Zeitgründen nur die einfachste Variante dieser Gruppenzuordnung, die so genannte **erste Homotopiegruppe** oder **Fundamentalgruppe**, die sich aber leicht verallgemeinern lässt zu einer unendlichen Folge von ähnlich aufgebauten Gruppen, den **Homotopiegruppen** beliebiger Dimension (wobei die Fundamentalgruppe der Dimension 1 entspricht).

Die Fundamentalgruppe erhält man aus der Betrachtung von *Wegen* in einem topologischen Raum und der Untersuchung, welche Wege zueinander

¹richtiger gesagt, für jeden **punktierten** Raum, also für jeden Raum mit einem ausgezeichneten Punkt.

homotop sind, wenn man ihre Endpunkte festhält; nur der Pfad dazwischen darf bei der Homotopie bewegt werden.

Weil diese Einschränkung jetzt eine Standardsituation darstellen wird, erinnern wir kurz an die Definition, die ursprünglich in Definition 6.3 b) gegeben wurde, und führen eine Kurzschrift dafür ein.

Notation 6.14 Sei X ein topologischer Raum.

Wir nennen zwei Wege v und w in X **homotop mit festen Endpunkten**, wenn $v \simeq w \text{ rel } \partial I$, und in diesem Fall schreiben wir dazu auch

$$v \simeq w \text{ mfE},$$

so wie wir generell die Abkürzung mfE für „mit festen Endpunkten“ zulassen wollen. Natürlich können zwei Wege nur dann mit festen Endpunkten homotop sein, wenn sie den gleichen Anfangspunkt haben und den gleichen Schlusspunkt haben.

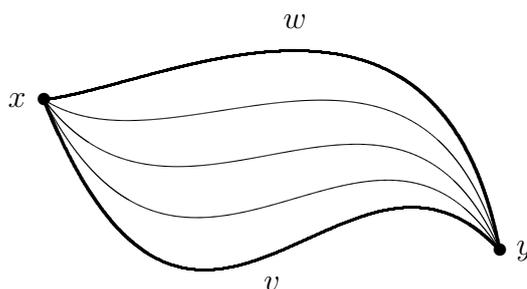


Abbildung 6.4: Homotopie mit festen Endpunkten

Die Homotopieklasse mit festen Endpunkten eines Weges w bezeichnen wir mit $[w]$; da es sich in diesem Kontext immer um Homotopie mit festen Endpunkten handeln wird, kennzeichnen wir das nicht extra in der Notation.

Seien x und y zwei fest gewählte Punkte in X . Die Menge aller Wege von x nach y in X bezeichnen wir mit $\Omega(x, y)$. Die Menge aller Homotopieklassen mit festen Endpunkten von Wegen von x nach y bezeichnen wir mit $\pi(x, y)$. Dies ist der Quotient von $\Omega(x, y)$ nach der Äquivalenzrelation $\simeq \text{ rel } \partial I$ (gleich $\simeq \text{ mfE}$).

Eine erhebliche Erleichterung beim Umgang mit Homotopie von Wegen mit festen Endpunkten wird gegeben durch die Tatsache, dass eine **Umparametrisierung** eines Weges dessen Homotopieklasse nicht verändert.

Lemma 6.15 Seien f und g stetige Abbildungen $I \rightarrow I$. Dann ist

$$f \simeq g \text{ rel } \partial I$$

genau dann, wenn f und g auf ∂I übereinstimmen.

Beweis. Die genannte Bedingung ist notwendig wegen der Bemerkung in Definition 6.3 a). Sie ist hinreichend nach Beispiel 6.6 b), da I konvex ist. ■

Definition 6.16 Sei X ein topologischer Raum und seien v und w Wege in X .

Wir nennen w eine **Umparametrisierung** von v , wenn es eine stetige Abbildung $\varphi: I \rightarrow I$ gibt, so dass $\varphi(\partial I) \subseteq \partial I$ und so dass

$$w = v \circ \varphi.$$

Um diese Situation etwas genauer zu beschreiben, sagen wir auch, w ist eine **Umparametrisierung von v vermöge φ** .

Korollar 6.17 Sei X ein topologischer Raum und sei $v: I \rightarrow X$ ein Weg in X und $w: I \rightarrow X$ eine Umparametrisierung von v vermöge einer Abbildung φ .

- a) Wenn $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, dann ist $w \simeq v$ mFE.
- b) Wenn $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(1) = 0$, dann ist $w \simeq v^-$ mFE.
- c) Wenn $\varphi(0) = \varphi(1)$, dann ist w nullhomotop mFE.

Beweis. Aus Lemma 6.15 folgt in Fall a), dass $\varphi \simeq \text{id}_I$ mFE, in Fall b) ist $\varphi \simeq (t \mapsto 1 - t) = \text{id}_{\bar{I}}$ mFE, und in Fall c) ist $\varphi \simeq c_{\varphi(0)}$ mFE.

Also ist

$$w = v \circ \varphi \simeq \begin{cases} v \circ \text{id}_I = v & \text{in Fall a),} \\ v \circ (t \mapsto 1 - t) = v^- & \text{in Fall b),} \\ v \circ c_{\varphi(0)} = c_{v(\varphi(0))} & \text{in Fall c)} \end{cases}$$

(denn nach Lemma und Definition 6.5 b) bleibt die Relation \simeq unter Verknüpfung erhalten). ■

Die Elemente der zu konstruierenden Fundamentalgruppe werden Homotopieklassen von Wegen mit festen Endpunkten sein. Die in Lemma und Definition 5.22 c) definierte *Verkettung* von Wegen wird die Gruppenmultiplikation darstellen und in ihre Definition eingehen, und zum Nachweis der Gruppenaxiome werden folgende Tatsachen über Verkettungen sehr nützlich sein.

Lemma 6.18 Sei X ein topologischer Raum und seien p, x, y und z Punkte von X . Sei u ein Weg in X von p nach x , sei v ein Weg von x nach y und sei w ein Weg von y nach z .

- a) $u * (v * w) \simeq (u * v) * w$ mfe.
- b) $c_x * v \simeq v \simeq v * c_y$ mfe.
- c) $v * v^- \simeq c_x$ mfe und $v^- * v \simeq c_y$ mfe.
- d) Wenn $v': I \rightarrow X$ ein anderer Weg von x nach y ist mit $v \simeq v'$ mfe, und wenn $w': I \rightarrow X$ ein anderer Weg von y nach z ist, so dass $w \simeq w'$ mfe, dann ist

$$v * w \simeq v' * w' \text{ mfe.}$$

- e) Wenn $v': I \rightarrow X$ ein anderer Weg von x nach y ist mit $v \simeq v'$ mfe, dann ist auch

$$v^- \simeq (v')^- \text{ mfe.}$$

Beweis. Zu a): Wie aus der Definition des Verkettungsoperators $*$ klar ist, durchlaufen beide geklammerten Verkettungen auf drei aufeinanderfolgenden Teilintervallen von I zunächst den Weg u , dann den Weg v und dann den Weg w . Die Verkettungen unterscheiden sich nicht in den insgesamt angenommenen Werten und ihrer Reihenfolge, sondern nur in der Größe der Teilintervalle und der linearen Geschwindigkeit, mit der sie durchschritten werden.

Daraus folgt sofort, dass man die rechte Klammerung als Umparametrisierung der linken gewinnen kann, vermöge der stetigen stückweise linearen Abbildung φ , die $[0, \frac{1}{4}]$ auf $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ auf $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ auf $[\frac{3}{4}, 1]$ abbildet.

Da φ die Randpunkte 0 nach 0 und 1 nach 1 abbildet, folgt aus Korollar 6.17 a), dass $u*(v*w)$ und $(u*v)*w$ homotop sind mit festen Endpunkten.

(Für diejenigen, die es ganz genau wissen wollen:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ t + \frac{1}{4}, & \text{wenn } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dass diese Abbildung $I \rightarrow I$ die Verkettung $u * (v * w)$ nach $(u * v) * w$ umparametrisiert, kann man anhand von der Definition von $*$ direkt nachrechnen.)

Zu b): Für $t \in I$ sei

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

und sei

$$\rho(t) = \begin{cases} 2t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $c_x * v = v \circ \lambda$ und $v * c_y = v \circ \rho$, und da λ und ρ stetige Abbildungen $I \rightarrow I$ sind, die die Endpunkte 0 und 1 festlassen, folgt wieder aus Korollar 6.17 a), dass $c_x * v \simeq v$ mfE und $v * c_y \simeq v$ mfE.

Zu c): Definiere $\psi: I \rightarrow I$ durch

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2t, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es gilt $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Man prüft sofort nach, dass $v * v^- = v \circ \psi$. Nach Korollar 6.17 c) ist $v * v^- \simeq c_{v(0)} = c_x$ mfE.

Die Aussage für die andere Reihenfolge der Verkettung beweist man genauso, oder man ersetzt in der schon bewiesenen Aussage v durch v^- . Da $(v^-)^- = v$ und da $v^-(0) = v(1) = y$ erhält man $v^- * v \simeq c_y$ mfE.

Zu d): Sei H eine Homotopie mit festen Endpunkten von v nach v' und sei K eine Homotopie mit festen Endpunkten von w nach w' . Es sind H und K Abbildungen $I \times I \rightarrow I$, und wir verketteten sie nun nicht als Homotopien, sondern (wie in Definition 6.4 c) mit berücksichtigt) bezüglich der *ersten* Koordinate, also mit der Verkettung $*_1$:

$$(H *_1 K)(s, t) = \begin{cases} H(2s, t), & \text{wenn } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ K(2s - 1, t), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $t \in I$, dass $(H *_1 K)_t = H_t * K_t$ und insbesondere ist $H *_1 K$ eine Homotopie von $(H *_1 K)_0 = v * w$ nach $(H *_1 K)_1 = v' * w'$. Da $(H *_1 K)(0, t) = H(0, t) = x$ für alle t und $(H *_1 K)(1, t) = K(1, t) = z$ für alle t , ist $H *_1 K$ eine Homotopie mit festen Endpunkten, wie behauptet.

Zu e): Sei H eine Homotopie mit festen Endpunkten von v nach w . Wir kehren diese Homotopie bezüglich der *ersten* Koordinate aus I um und definieren eine Homotopie $K: I \times I \rightarrow X$ durch

$$K(s, t) := H(1 - s, t).$$

Natürlich ist K stetig, und weil $1 - 0 = 1$ und $1 - 1 = 0$ ist auch K eine Homotopie mit festen Endpunkten. Offensichtlich ist $K_t = H_t^-$ für jedes $t \in I$, so dass K insbesondere eine Homotopie mFE von v^- nach $(v')^-$ ist. ■

Die ersten drei Aussagen des Lemmas erinnern ganz deutlich an die Gruppenaxiome, und wir werden das Lemma auch dazu benutzen, die Gruppenaxiome für die Fundamentalgruppe nachzuweisen. Die Aussagen von Teilen d) und e) zeigen, dass die Verkettung von Wegen und die Umkehrung von Wegen sich auf wohldefinierte Weise auf die Homotopieklassen mit festen Endpunkten „vererben“:

Definition 6.19 Sei X ein topologischer Raum und seien x und $y \in X$. Wir betrachten für je zwei Punkte x und $y \in X$ die Homotopiemenge

$$\pi(x, y) = \Omega(x, y) / (\simeq \text{ mFE}),$$

die Menge der Homotopieklassen mit festen Endpunkten von Wegen in X von x nach y .

- a) Da zwei Wege nur dann homotop sein können mit festen Endpunkten, wenn beide Wege den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Schlusspunkt haben, sind der Anfangspunkt und der Schlusspunkt auch eine wohldefinierte Eigenschaft einer Homotopieklasse mFE.

Wir erlauben uns deshalb, für eine Klasse $\alpha = [v] \in \pi(x, y)$ die Notation

$$\alpha(0) = [v](0) := v(0) \quad \text{und} \quad \alpha(1) = [v](1) := v(1) \quad (6.5)$$

einzuführen; diese Punkte hängen tatsächlich nur von der Klasse α ab und nicht von dem Weg v , den wir als Repräsentant der Klasse α wählen.

- b) Die Verkettung von Wegen induziert eine Verkettung von Homotopieklassen mit festen Endpunkten, indem wir für Klassen $\alpha = [v] \in \pi(x, y)$ und $\beta = [w] \in \pi(y, z)$ definieren:

$$\alpha * \beta = [v] * [w] := [v * w]. \quad (6.6)$$

Die Aussage von Lemma 6.18 d) ist, dass diese Verkettung von Homotopieklassen wohldefiniert ist und nur von den Homotopieklassen mit festen Endpunkten α und β abhängt, nicht von den Wegen v und w , die wir als Repräsentanten dieser Klassen gewählt haben und die in (6.6) erscheinen.

- c) Wir wollen die Konvention einführen, dass für einen Punkt aus X die Homotopieklasse des konstanten Weges bei diesem Punkt mit dem gleichen Namen bezeichnet wird, wie der Punkt, aber in Fettdruck. Zum Beispiel, für einen Punkt $x \in X$ setzen wir

$$\mathbf{x} := [c_x] \text{ mFE.} \quad (6.7)$$

- d) Die Umkehrung von Wegen induziert eine entsprechende „Umkehrung“ von Homotopieklassen mit festen Endpunkten, indem wir für eine Klasse $\alpha = [v] \in \pi(x, y)$ definieren:

$$\alpha^- = [v]^- := [v^-]. \quad (6.8)$$

Die Aussage von Lemma 6.18 e) ist, dass dies wohldefiniert ist und dass α^- nur von der Homotopieklassen mit festen Endpunkten α abhängt, nicht von dem Weg v , den wir als Repräsentant dieser Klasse gewählt haben und der in (6.8) erscheint.

- e) Sei Y ein zweiter topologischer Raum und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann induziert f eine Abbildung

$$f_*: \pi(x, y) \rightarrow \pi(f(x), f(y)),$$

die bei einer Klasse $\alpha = [v] \in \pi(x, y)$ den Wert

$$f_*(\alpha) := [f_*(v)] = [f \circ v] \quad (6.9)$$

annimmt. Die Abbildung f_* ist nach Lemma und Definition 6.5 b) und Gleichung (6.3) wohldefiniert und hängt nur von der Homotopieklasse von f rel $\{x, y\}$ ab.

Bemerkung 6.20 Sei X ein topologischer Raum und seien x, y und $z \in X$. Sei $v \in \Omega(x, y)$ und $w \in \Omega(y, z)$.

- a) Wir haben für $t \in I$, dass

$$\begin{aligned} (v * w)^-(t) &= (v * w)(1 - t) \\ &= \begin{cases} w(2(1 - t) - 1) = w(1 - 2t) = w^-(2t), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ v(2(1 - t)) = v(1 - (2t - 1)) = v^-(2t - 1), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Daran sieht man, dass $(v * w)^- = w^- * v^-$. Natürlich vererbt sich diese Beziehung auch auf Homotopieklassen. Wenn $\alpha \in \pi(x, y)$ und $\beta \in \pi(y, z)$, dann ist

$$(\alpha * \beta)^- = \beta^- * \alpha^-. \quad (6.10)$$

- b) Sei Y ein zweiter topologischer Raum und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Aus der Definition von $*$ prüft man sofort nach, dass

$$f \circ (v * w) = (f \circ v) * (f \circ w),$$

also

$$f_{\#}(v * w) = f_{\#}(v) * f_{\#}(w) \in \Omega(f(x), f(z)).$$

Auch diese Beziehung vererbt sich auf Homotopieklassen, d. h., wenn $\alpha \in \pi(x, y)$ und $\beta \in \pi(y, z)$, dann ist

$$f_*(\alpha * \beta) = f_*(\alpha) * f_*(\beta) \in \pi(f(x), f(z)). \quad (6.11)$$

- c) Sei Y ein zweiter topologischer Raum und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Offensichtlich ist

$$f \circ v^- = (f \circ v)^-, \quad \text{also} \quad f_{\#}(v^-) = (f_{\#}(v))^-.$$

Diese vererbt sich auf Homotopieklassen und wenn $\alpha \in \pi(x, y)$, dann ist

$$f_*(\alpha^-) = (f_*(\alpha))^- . \quad (6.12)$$

Die „Gruppenaxiomeigenschaften“ aus Lemma 6.18 lassen sich sofort auf die Verkettung von Homotopieklassen von Wegen übertragen.

Korollar 6.21 *Sei X ein topologischer Raum und seien p, x, y und z Punkte von X . Seien $\alpha \in \pi(p, x)$, $\beta \in \pi(x, y)$ und $\gamma \in \pi(y, z)$ Homotopieklassen mit festen Endpunkten von miteinander verkettbaren Wegen in X . Dann gilt:*

- a) *Die Verkettung von Homotopieklassen mit der Operation $*$ aus Definition 6.19 b) ist assoziativ, d. h., für die oben genannten Klassen gilt immer*

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma.$$

- b) *Die Verkettungsoperation hat ein linksneutrales und ein rechtsneutrales Element, jeweils gegeben durch die Klasse des konstanten Wegs am entsprechenden (wohldefinierten) Ende der Homotopieklasse von Wegen. Hier bedeutet das, dass*

$$\mathbf{x} * \beta = \beta = \beta * \mathbf{y}.$$

- c) In Bezug auf die in Teil b) genannten neutralen Elementen hat jede Homotopieklasse mfE von Wegen sowohl ein Rechts- wie auch ein Linksinverses. Es gilt nämlich für die oben genannten Klassen, dass

$$\mathbf{x} = \beta * \beta^- \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \beta^- * \beta.$$

Beweis. Diese Behauptungen folgen sofort aus den Definitionen 6.19 und aus Lemma 6.18 a)–c). ■

Es besteht noch ein kleines Hindernis auf dem Weg zur Konstruktion einer Gruppe, deren Multiplikation durch die Verkettung von Wegen dargestellt wird. Die Gruppenmultiplikation muss ja für *jedes* Paar von Elementen definiert sein, aber Wege sind nur verkettbar, wenn der Schlusspunkt des ersten Weges mit dem Anfangspunkt des zweiten Weges zusammenfällt.

Um dieses Problem zu umgehen, schreiben wir fest vor, an welchem Punkt unsere Wege beginnen müssen, und wir verlangen, dass sie auch dort enden, damit je zwei „zulässige“ Wege immer verkettbar sind.

Definition 6.22 Sei X ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Einen Weg w in X von x zurück zum *gleichen* Punkt x nennen wir eine **Schleife** bei x .

Die Menge aller Schleifen in X bei x bezeichnen wir mit $\Omega(X, x)$, und wir nennen dies den **Schleifenraum in X bei x** .

Wir setzen

$$\pi_1(X, x) := \pi(x, x),$$

die Menge aller Homotopieklassen mit festen Endpunkten von Schleifen bei x .

Da alle Schleifen bei x an diesem Punkt beginnen *und* enden, ist die Verkettung von zwei Schleifen bei x *immer* definiert, und somit ist auch auf $\pi_1(X, x)$ die Operation $*$ wie in Gleichung (6.6) für je zwei Elemente definiert.

Korollar 6.21 besagt, dass die Operation $*$ auf $\pi_1(X, x)$ die Gruppenaxiome erfüllt, mit \mathbf{x} als das neutrale Element der Gruppe und ω^- als das inverse Element zu $\omega \in \pi_1(X, x)$.

Wir erhalten so eine Gruppe, die aber leider nicht nur von dem topologischen Raum X abhängt, sondern auch von der Wahl eines so genannten **Basispunktes** $x \in X$, an dem die Schleifen beginnen und enden. Es sind also *zwei* Daten, die die Gruppe festlegen, und diese fassen wir als Paar zu *einem* Objekt zusammen, das wir mit (X, x) notieren und das wir einen **punktieren Raum** nennen: ein Paar bestehend aus einem topologischen Raum und einem besonderen, also „ausgezeichneten“ Punkt (wie man in diesem Sinne sagt) in dem Raum.

Die Gruppe $\pi_1(X, x)$ heißt die **Fundamentalgruppe** oder die **erste Homotopiegruppe** des punktierten Raumes (X, x) .

Natürlich wird jetzt die Frage interessant, inwiefern die Fundamentalgruppe von der Wahl des Basispunktes abhängt. Wir werden in Lemma 6.27 auf Seite 185 sehen, dass eine Änderung des Basispunktes innerhalb einer Wegkomponente des Raumes die Fundamentalgruppe nicht wesentlich ändert; innerhalb einer Wegkomponente sind alle Fundamentalgruppen isomorph.

Nur die Zuordnung einer Gruppe zu einem punktierten Raum bringt noch nicht viel und erlaubt auch noch keine richtigen Schlüsse über die Topologie des Raumes. Wichtig ist, dass jede stetige Abbildung einen Homomorphismus zwischen Fundamentalgruppen induziert; erst dadurch werden verschiedene Räume über ihre Fundamentalgruppen vergleichbar.

Definition 6.23 Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so dass $f(x) = y$.

Wir nennen eine solche den Basispunkt erhaltende stetige Abbildung von X nach Y eine **stetige Abbildung von punktierten Räumen** und führen für diese Situation die sinnvolle Kurznotation $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ein.

Für Abbildungen von punktierten Räumen sind meistens (aber nicht immer) Homotopien relativ zum Basispunkt wesentlich und sinnvoll; eine solche Homotopie nennen wir eine **Homotopie von Abbildungen von punktierten Räumen**.

Nach Definition 6.19 e) induziert f eine wohldefinierte Abbildung

$$f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y),$$

die nur von $[f]$ rel $\{x\}$ abhängt. (Zur Erinnerung: $f_*([w]) := [f_\#(w)] = [f \circ w]$ für jede Schleife w bei x).

Für f_* schreiben wir auch $\pi_1(f)$.

Lemma 6.24 Seien (X, x) und (Y, y) punktierte Räume.

Wenn $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ eine stetige Abbildung von punktierten Räumen ist, dann ist

$$\pi_1(f) = f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$$

ein Gruppenhomomorphismus, und er hängt nur von der Homotopieklasse $[f]$ von f als Abbildung von punktierten Räumen ab.

Beweis. Die Aussage von Bemerkung 6.20 b) und speziell Gleichung (6.11) besagt, dass f_* ein Gruppenhomomorphismus ist.

In Definition 6.23 wurde schon bemerkt, dass $\pi_1(f)$ nur von der Homotopieklasse von f rel $\{x\}$ abhängt. ■

Lemma 6.25 Die Zuordnung des Gruppenhomomorphismus $f_* = \pi_1(f)$ zu jeder stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ hat folgende nützliche Standardeigenschaften:

a) Für jeden punktierten Raum (X, x) ist

$$\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(X, x)}: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

(oder kurz gesagt: $\text{id}_* = \text{id}$).

b) Seien (X, x) , (Y, y) und (Z, z) punktierte Räume und seien

$$f: (X, x) \longrightarrow (Y, y) \quad \text{und} \quad g: (Y, y) \longrightarrow (Z, z)$$

stetige Abbildungen zwischen punktierten Räumen.

Dann ist

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Z, z),$$

das heißt, die $*$ -Zuordnung ist verträglich mit Verknüpfungen.

Beweis. Beide Behauptungen sind sofort klar aus der Definition von f_* .

Wenn $w \in \Omega(X, x)$ eine Schleife bei x ist, so ist

$$(\text{id}_X)_*([w]) = [\text{id}_X \circ w] = [w]$$

und

$$(g \circ f)_*([w]) = [g \circ f \circ w] = g_*([f \circ w]) = g_*\left(f_*([w])\right).$$

■

Lemma 6.26 Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume und sei $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ eine Homotopieäquivalenz von punktierten Räumen. Das heißt, dass es eine stetige Abbildung von punktierten Räumen $g: (Y, y) \rightarrow (X, x)$ geben muss, so dass

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \text{ rel } \{x\} \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y \text{ rel } \{y\}. \quad (6.13)$$

Dann ist

$$\pi_1(f) = f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

ein Gruppenisomorphismus, und für jede Abbildung g mit den oben genannten Eigenschaften ist $\pi_1(f)^{-1} = \pi_1(g)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus den Homotopiegleichungen (6.13), aus den Eigenschaften der π_1 -Zuordnung laut Lemma 6.25 und aus der Tatsache, dass $\pi_1(g \circ f)$ nur von $[g \circ f] \text{ rel } \{x\}$ und $\pi_1(f \circ g)$ nur von $[f \circ g] \text{ rel } \{y\}$ abhängt. ■

Lemma 6.26 besagt in einem gewissen aber nicht sehr befriedigenden Sinn, dass die Fundamentalgruppe eine **Homotopieinvariante** ist und nur vom Homotopietyp des punktierten Raumes abhängt. Das Lemma ist sehr einfach und folgt direkt aus der Definition der π_1 -Zuordnung, aber die Voraussetzung, dass f eine Homotopieäquivalenz von *punktierten* Räumen sein muss, ist unnatürlich, sehr einschränkend und wie wir bald sehen werden unnötig stark.

Überhaupt stört es bei der Zuordnung π_1 , dass sie nur für punktierte Räume und nicht für topologische Räume ohne Basispunkt erklärt ist, aber obwohl man auch „freie Homotopie“ von Schleifen betrachten kann, bei der die Wege während der Homotopie geschlossene Kurven sind, aber nicht durch einen festen Basispunkt gehen, ist es dann sehr umständlich, die Gruppenstruktur zu definieren, weil man verschiedene Schleifen nicht unmittelbar verketteten kann.

Deshalb nehmen wir es hin, dass die Fundamentalgruppe nur für punktierte Räume erklärt ist. Man ist aber trotzdem berechtigt zu fragen, inwieweit $\pi_1(X, x)$ von der Wahl des Basispunktes x abhängt. Antwort darauf gibt folgendes Lemma:

Lemma und Definition 6.27 Sei X ein topologischer Raum und seien x_0 und x_1 Punkte von X . Sei u ein Weg in X von x_0 nach x_1 . Wir definieren eine Abbildung

$$\hat{u}: \Omega(X, x_1) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$$

durch die Vorschrift $\hat{u}(w) := (u * w) * u^-$ für jede Schleife w bei x_1 .

Diese Abbildung klebt die Strecke u an Schleifen bei x_1 , um sie zu Schleifen bei x_0 zu machen.

Die Verkettung von Wegen und ihren Umkehrungen induziert die in Definition 6.19 erklärte wohldefinierte entsprechende Verkettung von Homotopieklassen mit festen Endpunkten.

Sei $\alpha := [u]$ die Homotopieklasse mit festen Endpunkten von u . Sie bestimmt eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}: \pi_1(X, x_1) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ \omega &\longmapsto (\alpha * \omega) * \alpha^- \end{aligned}$$

(wobei nach Korollar 6.21 a) die Klammerung hier eigentlich keine Rolle spielt).

Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften:

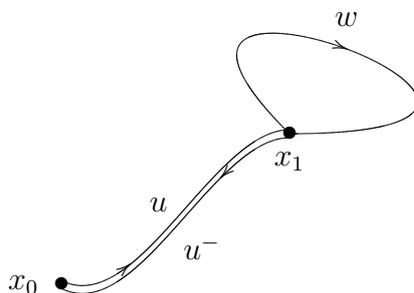


Abbildung 6.5: $\hat{u}(w)$, die Schleife w zurückholt von x_1 nach x_0 entlang u .

- a) $\hat{\alpha}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$;
- b) Wenn x_2 ein weiterer Punkt von X ist und $\beta \in \pi(x_1, x_2)$, dann ist

$$\widehat{\alpha * \beta} = (\hat{\alpha} \circ \hat{\beta}) : \pi_1(X, x_2) \longrightarrow \pi_1(X, x_0);$$

- c) $\widehat{\mathbf{x}_0}$ ist die Identität von $\pi_1(X, x_0)$;
- d) $\hat{\alpha}$ ist ein Gruppenisomorphismus;
- e) Wenn Y ein zweiter topologischer Raum ist und $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung ist mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x_1) = y_1 \in Y$, und wenn $\beta = f_*(\alpha) \in \pi(y_0, y_1)$, so **kommutiert** das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_1) \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \hat{\beta} \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

(das heißt, es gilt $\hat{\beta} \circ f_* = f_* \circ \hat{\alpha}$, in anderen Worten, die Verknüpfungen über beide Pfeilwege entlang den Seiten des Quadrats sind gleich).

Beweis. Zu a): Seien v und $\omega \in \pi_1(X, x_1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(v * \omega) &= \alpha * (v * \omega) * \alpha^- \\ &\stackrel{6.21 \text{ b)}}{=} \alpha * v * \mathbf{x}_1 * \omega * \alpha^- \\ &\stackrel{6.21 \text{ c)}}{=} \alpha * v * \alpha^- * \alpha * \omega * \alpha^- = (\alpha * v * \alpha^-) * (\alpha * \omega * \alpha^-) \\ &= \hat{\alpha}(v) * \hat{\alpha}(\omega) \end{aligned}$$

Zu b): Wenn $\omega \in \pi_1(X, x_2)$ so ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha * \beta}(\omega) &= (\alpha * \beta) * \omega * (\alpha * \beta)^- \\ &\stackrel{6.20 \text{ a)}}{=} (\alpha * \beta) * \omega * (\beta^- * \alpha^-) = \alpha * (\beta * \omega * \beta^-) * \alpha^- \\ &= \alpha * \hat{\beta}(\omega) * \alpha^- = \hat{\alpha}(\hat{\beta}(\omega)). \end{aligned}$$

Zu c): Für jede Homotopieklasse $\omega \in \pi_1(X, x_0)$ ist

$$\widehat{\mathbf{x}_0}(\omega) = \mathbf{x}_0 * \omega * (\mathbf{x}_0)^- = \mathbf{x}_0 * \omega * \mathbf{x}_0 = \omega$$

wegen Lemma 6.21 b) (offensichtlich ist $(\mathbf{x}_0)^- = \mathbf{x}_0$).

Zu d): Aus den vorangegangenen Teilen dieses Lemmas und aus Korollar 6.21 c) finden wir

$$\hat{\alpha} \circ \widehat{\alpha^-} \stackrel{\text{b)}}{=} \widehat{\alpha * \alpha^-} \stackrel{6.21 \text{ c)}}{=} \widehat{\mathbf{x}_0} \stackrel{\text{c)}}{=} \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}.$$

Wendet man diese Gleichung auf α^- an, so folgt auch $\widehat{\alpha^-} \circ \hat{\alpha} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$. Also hat der Gruppenhomomorphismus $\hat{\alpha}$ ein Inverses und ist daher ein Isomorphismus.

Zu e): Sei $\omega \in \pi_1(X, x_1)$. Dann ist $f_*(\omega) \in \pi_1(Y, y_1)$ und $f_*(\alpha) = \beta \in \pi(y_0, y_1)$. Unter Verwendung der Aussagen von Bemerkung 6.20 b) und c) und speziell von Gleichungen (6.11) und (6.12) finden wir wie behauptet, dass

$$f_*(\hat{\alpha}(\omega)) = f_*(\alpha * \omega * \alpha^-) = f_*(\alpha) * f_*(\omega) * f_*(\alpha^-) = \beta * f_*(\omega) * \beta^- = \hat{\beta}(f_*(\omega)).$$

■

Mit Hilfe von $\hat{\alpha}$ können wir, für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, die in Definition 6.23 erwähnte Homotopieinvarianz von f_* sinnvoll verallgemeinern zu einer Invarianzaussage bezüglich Homotopien von Abbildungen von *unpunktierten* topologischen Räumen:

Lemma 6.28 Sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum, sei Y ein topologischer Raum und seien f und g stetige Abbildungen $X \rightarrow Y$, die homotop sind als unpunktierte Abbildungen (also homotop vermöge einer Homotopie, die nicht $\text{rel } \{x\}$ sein muss). Sei $y_0 = f(x)$ und $y_1 = g(x)$ und sei $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g .

Definiere einen Weg $u: I \rightarrow Y$ von y_0 nach y_1 durch

$$u(t) := H(x, t),$$

und sei

$$\alpha := [u] \in \pi(y_0, y_1).$$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow g_* & \uparrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Das heißt, es gilt $\hat{\alpha} \circ g_* = f_*$.

Beweis. u ist tatsächlich ein Weg von $H(x, 0) = H_0(x) = f(x) = y_0$ nach $H(x, 1) = H_1(x) = g(x) = y_1$.

Für jedes $t \in I$ definieren wir einen Weg u_t in Y von y_0 nach $H(x, t)$ durch die Vorschrift

$$u_t(s) := H(x, st)$$

für alle $s \in I$. Wir haben $u_0 = c_{y_0}$ und $u_1 = u$. Für jedes t bezeichnen wir mit $\alpha_t \in \pi(y_0, H(x, t))$ die Homotopieklasse mit festen Endpunkten von u_t ; dann ist $\alpha_0 = \mathbf{y}_0$ und $\alpha_1 = \alpha$.

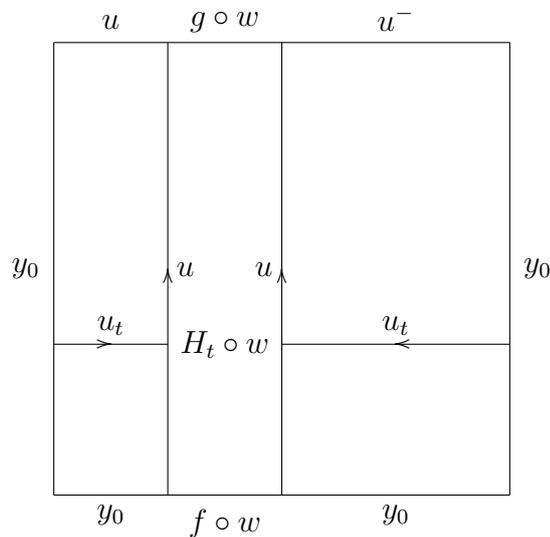


Abbildung 6.6: Die Homotopie K von Schleifen bei y_0 .

Sei $w \in \Omega(X, x)$. Die Schar von Wegen $\hat{u}_t(H_t \circ w)$ bildet eine Homotopie mit festen Endpunkten K von Schleifen bei y_0 in Y , wie man an der genauen

Definition von K sofort nachprüfen kann:

$$K(s, t) := \begin{cases} H(x, 4st), & \text{wenn } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}; \\ H(w(4s - 1), t), & \text{wenn } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H(x, (2 - 2s)t), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Bei $s = \frac{1}{4}$ ist $H(x, 4st) = H(x, t) = H(w(0), t) = H(w(4s - 1), t)$ und bei $s = \frac{1}{2}$ ist $H(w(4s - 1), t) = H(w(1), t) = H(x, t) = H(x, (2 - 2s)t)$, so dass die obige Fallunterscheidung eine wohldefinierte stetige Abbildung $I \times I \rightarrow Y$ bestimmt. Das bedeutet auch, dass $\hat{u}_t(H_t \circ w)$ tatsächlich definiert ist für jedes $t \in I$.

$K(0, t) = H(x, 0) = f(x) = y_0$ und auch $K(1, t) = H(x, 0) = y_0$, so dass K tatsächlich eine Homotopie mFE von Schleifen bei $y_0 \in Y$ ist.

Nach Konstruktion ist $K_0 = \widehat{u}_0(f \circ w) = \widehat{c}_{y_0}(f_{\#}(w))$ und $K_1 = \hat{u}(g \circ w) = \hat{u}(g_{\#}(w))$, also gilt auf der Ebene der Homotopieklassen, dass

$$f_* = \widehat{y_0} \circ f_* = \hat{\alpha} \circ g_*.$$

■

Hieraus folgt sofort folgende Verallgemeinerung von Lemma 6.26.

Korollar 6.29 *Seien X und Y topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz von unpunktieren topologischen Räumen. Sei $x \in X$ und sei $y = f(x) \in Y$. Dann ist*

$$f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g: Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f und sei $z = g(y) \in X$. Sei H eine Homotopie von id_X zu $g \circ f$, und definiere einen Weg u in X von x nach z durch die Vorschrift $u(t) := H(x, t)$ für alle $t \in I$. Sei $\alpha := [u] \in \pi(x, z)$.

Nach Lemma 6.28 gilt

$$\text{id}_{\pi_1(X, x)} = (\text{id}_X)_* = \hat{\alpha} \circ (g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (g_* \circ f_*).$$

Da $\hat{\alpha}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $g_* \circ f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, z)$ ein Isomorphismus und somit ist $f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ injektiv und $g_*: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, z)$ ist surjektiv.

Wenn wir die Rollen von f und g vertauschen, folgt auf gleiche Weise, dass g_* injektiv ist (und $f_*: \pi_1(X, z) \rightarrow \pi_1(Y, f(z))$ surjektiv — man beachte die geänderten Basispunkte, weshalb diese Information uns unmittelbar

nicht viel bringt!). Auf jeden Fall ist aber $g_*: \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, z)$ ein Isomorphismus, und da auch $g_* \circ f_*$ einer ist, können wir nun daraus schließen, dass $f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ ein Isomorphismus ist. ■

Der Unterschied zu Lemma 6.26 besteht darin, dass jetzt die Homotopieäquivalenz und die Homotopie zur Identität die Basispunkte nicht mehr respektieren müssen, und trotzdem gilt ein Schluss, bei dem *punktierte* Räume eine wesentliche Rolle spielen.

Korollar 6.30 Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum und sei $x \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x) = \{1\}$, die triviale Gruppe.

Beweis. Sei $Y = \{*\}$ ein Einpunktraum. Dann ist c_* die einzige Schleife bei $*$ und da $\Omega(Y, *)$ nur ein Element hat, kann auch $\pi_1(Y, *)$ nicht mehr als ein Element haben und ist trivial. Wenn X zusammenziehbar ist, so gibt es eine Homotopieäquivalenz f von X zu einem Einpunktraum Y und nach Korollar 6.29 ist f_* ein Isomorphismus und somit $\pi_1(X, x)$ auch trivial. ■

Beispiele 6.31 a) $\pi_1(\mathbf{R}^n, x) = \{1\}$ für jedes $x \in \mathbf{R}^n$;

b) $\pi_1(D^n, x) = \{1\}$ für jedes $x \in D^n$;

c) allgemeiner, $\pi_1(K, x) = \{1\}$ für jede konvexe Teilmenge K von \mathbf{R}^n .

Das folgt aus Korollar 6.30, denn die genannten Räume sind nach Beispiel 6.10 a) zusammenziehbar.

Wir hoffen, dass nicht jede Fundamentalgruppe trivial ist, aber diese einfache Situation ist trotzdem wichtig, da sich manche Sätze nur unter dieser Annahme (in Kombination mit Wegzusammenhang) beweisen lassen.

Definition 6.32 Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn X wegweise zusammenhängend ist und wenn für jedes $x \in X$ gilt

$$\pi_1(X, x) = \{1\}.$$

Wenn diese Bedingung an *einem* Punkt $x \in X$ erfüllt ist, dann ist sie an jedem Punkt erfüllt, weil in einem wegweise zusammenhängenden Raum die Fundamentalgruppen an allen Basispunkten isomorph sind.

Wir sind in diesem Kapitel nun ziemlich weit fortgeschritten und haben bisher nur einen sehr dürftigen Vorrat an Beispielen. Das liegt daran, dass die Berechnung auch von einfachen nichttrivialen Homotopiegruppen wie die von S^1 erstaunlich schwierig ist und wir im nächsten Kapitel erst Werkzeug dafür entwickeln müssen.

Kapitel 7

Überlagerungen

Obwohl die Berechnung von Homotopiegruppen im Allgemeinen sehr schwierig ist, gibt es einige gängige Hilfsmittel dafür, mit denen man für manche wichtige Räume die Homotopiegruppen oder zumindest die Fundamentalgruppe berechnen kann. In diesem Kapitel werden wir eines dieser Hilfsmittel entwickeln, das zwar einfach aber relativ leistungsfähig ist, und das Ideen verwendet, die sich als weit tragend herausstellen und auch an vielen anderen Stellen in der Mathematik benutzt werden können, um komplizierte geometrische Situationen zu untersuchen und etwas zu vereinfachen.

Der Grundgedanke dahinter lässt sich leicht erklären, wenn wir unsere Intuition ein bisschen bemühen. Ein Raum, von dem man sicher das Gefühl hat, dass er eine nichttriviale Fundamentalgruppe haben muss, ist der Kreis S^1 (oder die gelochte Ebene, die ja den gleichen Homotopietyp hat). Eine Schleife, die einmal den Kreis umläuft (oder die in der Ebene einmal das Loch umläuft), kann nicht durch eine Homotopie zusammengezogen werden zu einer konstanten Schleife, weil das Loch (oder das „Innere“ des Kreises) im Wege ist und man die Schleife, ohne sie zu zerreißen, nicht über diesen Leerraum hinwegziehen kann.

Entsprechendes gilt auch, wenn eine Schleife mehrmals um den Kreis oder um das Loch läuft; die Nettoanzahl der Umläufe lässt sich durch Homotopie nicht verändern, weil man sonst zumindest eine Schlaufe des Gesamtweges über das Loch ziehen müsste. Im Fall der gelochten Ebene, die man als die komplexe Zahlenebene \mathbf{C} auffassen kann, aus der ein Punkt z_0 entfernt wurde, können die komplexen Analytiker diese *Umlaufszahl* durch ein komplexes Integral berechnen, das nur ganzzahlige Werte annimmt und deshalb sich unter Homotopie auch nicht verändert. Daraus folgt, dass die Fundamentalgruppe der gelochten komplexen Zahlenebene mindestens so viele Elemente hat, wie es mögliche Umlaufszahlen gibt (also mindestens abzählbar unendlich viele).

Natürlich können wir komplexe Integrale in der Topologie nicht überall

anwenden, also müssen wir einen anderen Weg suchen, die „Umlaufszahl“ einer Schleife in einem allgemeinen topologischen Raum zu erfassen. Hier ist eine Idee dazu:

Man stelle sich etwa eine Schleife am Punkt $(1, 0)$ im Kreis S^1 vor, die sich um den Kreis hin- und herwindet aber netto den Kreis ein paarmal umwindet, und man stelle sich vor, dass man diese Schleife in Form eines Fadens auf den Kreis gelegt hat. An jeder Stelle des Kreises liegen einige Lagen des Fadens, aber diese verschmelzen miteinander in der Betrachtung, so dass man nicht erkennen kann, wie oft der Kreis umlaufen wird. Um das sehen und „mitzählen“ zu können, muss man den Faden an einer Stelle aufschneiden und irgendwie *abwickeln*, um die verschiedenen Durchgänge des Fadens voneinander zu trennen und sichtbar zu machen.

Es gibt eine ganz geniale Methode, um die „Fäden“ automatisch abzuwickeln und so zu präsentieren, dass man sofort sieht, wie viele Umläufe sie gemacht haben: man wickelt nicht die Schleifen ab, sondern den Raum, in dem sie liegen, in dem man ihn wie Blätterteig in mehrere Lagen aufschneidet und diese zu einer Art Wendeltreppe auseinanderzieht (wer einmal gesehen hat, wie in Bayern Rettiche zu einer Spirale aufgeschnitten werden, weiss genau, was hier gemeint ist).

Der Faden liegt jetzt nicht mehr in einer ebenen Lage, sondern auf dieser Wendeltreppe, und während er sich windet, läuft er auch auf und ab. Egal wie kompliziert seine Hin- und Herbewegungen sind, die Nettoanzahl der Umläufe ist sofort an dem Höhenunterschied zwischen den beiden Enden des Fadens zu erkennen. Eine Vorstellung davon, wie das aussehen könnte, erhält man aus Abbildung 7.1(b) auf Seite 194.

Die Überlagerungstheorie, die wir in diesem Kapitel behandeln, ist die mathematische Realisierung dieses Gedankens zur Berechnung von Fundamentalgruppen.

Definition 7.1 Seien \tilde{X} und X topologische Räume und sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

- a) Sei $U \subseteq X$ offen. Wir sagen, U wird *gleichmäßig überlagert* durch p , wenn

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad (7.1)$$

wo Λ eine Indexmenge ist und die U_λ für $\lambda \in \Lambda$ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, so dass für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt:

$$p_\lambda := p|_{U_\lambda}: U_\lambda \rightarrow U$$

ist ein Homöomorphismus.

- b) Die Abbildung p heißt eine **Überlagerung**, wenn p surjektiv ist und wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, die durch p gleichmäßig überlagert wird.

Wenn $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung ist, nennt man \tilde{X} den **Totalraum** oder den **Überlagerungsraum** der Überlagerung und X heißt ihr **Basisraum**. Man nennt p die **Projektion** oder die **Überlagerungsabbildung**.

Für einen Punkt $x \in X$ nennt man

$$p^{-1}(\{x\}) = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

die **Faser** über x .

Für eine gleichmäßig überlagerte offene Menge $U \subseteq X$ nennt man die Teilmengen $U_\lambda \subseteq \tilde{X}$ aus (7.1) die **Blätter** über U . Die Anzahl der Blätter, also die Mächtigkeit der Indexmenge Λ , heißt die **Blätterzahl** der Überlagerung über U ; diese Zahl kann endlich oder unendlich sein. Ist n die Blätterzahl der Überlagerung p über U , so sagen wir auch, p ist eine **n -fache Überlagerung** über U .

Die Blätterzahl einer Überlagerung kann an verschiedenen Stellen variieren, aber nur zwischen verschiedenen Zusammenhangskomponenten des Basisraums; ist der Basisraum zusammenhängend, so ist die Blätterzahl eindeutig bestimmt (siehe dazu Bemerkung 7.2 d) und e) unten).

Abbildung 7.1 auf der nächsten Seite zeigt zwei Überlagerungen (die wir in Beispiel 7.3 näher beschreiben werden); in Abbildung 7.1(a) ist auch eine gleichmäßig überlagerte Umgebung gekennzeichnet.

Bemerkung 7.2 a) Es ist üblich (aber natürlich nicht zwingend), den Totalraum einer Überlagerung mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen, mit dem der Basisraum benannt wird, aber mit Schlange ($\tilde{}$) versehen als Unterscheidungsmerkmal für den Totalraum; diese Konvention haben wir auch in Definition 7.1 befolgt.

- b) Jede Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein *lokaler Homöomorphismus*. Denn wenn $\tilde{x} \in \tilde{X}$, so hat $p(\tilde{x})$ eine offene Umgebung U in X , die gleichmäßig überlagert wird, und $\tilde{x} \in p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, wo die U_λ offen und disjunkt sind und jedes U_λ durch p homöomorph auf U abgebildet wird. Da \tilde{x} zu einem der Mengen U_{λ_0} gehört, ist U_{λ_0} eine offene Umgebung von \tilde{x} , auf der p ein Homöomorphismus auf eine offenes Bild ist.

- c) Wenn $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung ist, dann trägt jede Faser

$$F_x := p^{-1}(\{x\})$$

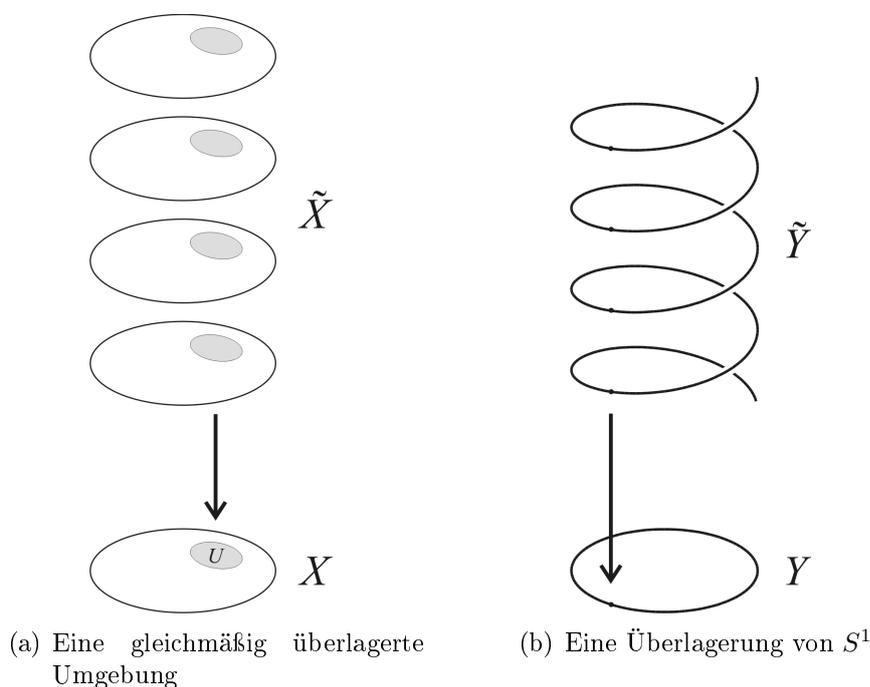


Abbildung 7.1: Überlagerungen.

von p als Unterraum von \tilde{X} die diskrete Topologie. Denn weil p ein lokaler Homöomorphismus ist, hat jeder Punkt $\tilde{x} \in F_x$ eine offene Umgebung U_λ , die keinen anderen Punkt der gleichen Faser enthält, so dass $\{\tilde{x}\} = U_\lambda \cap F_x$ offen in F_x ist.

- d) Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und U eine offene Umgebung in X , die gleichmäßig überlagert wird. Dann ist $p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, wo die U_λ offen und disjunkt sind und jedes U_λ durch p homöomorph auf U abgebildet wird. Das bedeutet, dass jedes $x \in U$ in jeder der Mengen U_λ *genau ein* Urbildpunkt unter p hat, so dass die Faser $p^{-1}(\{x\})$ die gleiche Mächtigkeit hat, wie Λ . In anderen Worten, die Faser von p über jeden Punkt von U hat so viele Punkte, wie die Blätterzahl über U . Insbesondere ist die Anzahl der Elemente der Fasern von p *lokal konstant*.
- e) Hieraus folgt, dass wenn der Basisraum X einer Überlagerung zusammenhängend ist, dann ist die Mächtigkeit der Fasern *global* konstant und alle Fasern haben gleich viele Elemente (denn wenn es Fasern verschiedener Mächtigkeit gäbe, wäre X die Vereinigung mehrerer disjunkter nichtleerer offener Teilmengen, nämlich der Teilmengen von X , wo

die Faser eine bestimmte der möglichen Mächtigkeiten hat).

Das impliziert mit d) auch, dass die Blätterzahl einer Überlagerung mit zusammenhängendem Basisraum konstant ist, und wir nennen diese wohldefinierte Zahl die **Blätterzahl der Überlagerung**. Ist diese Zahl n , so nennen wir die Überlagerung insgesamt eine **n -fache Überlagerung** oder sagen, X wird **n -fach überlagert** von \tilde{X} (oder von p).

Damit wir uns eine Vorstellung von Überlagerungen machen können, zunächst zwei einfache Beispiele:

Beispiele 7.3 a) Sei X ein topologischer Raum und Λ eine beliebige nichtleere Menge. Wir versehen Λ mit der diskreten Topologie und machen so daraus einen topologischen Raum, und wir setzen $\tilde{X} := X \times \Lambda$ und nehmen als $p: \tilde{X} \rightarrow X$ die Projektion auf den ersten Faktor, die ja stetig und surjektiv ist (da $\Lambda \neq \emptyset$).

Die Mengen

$$X_\lambda := X \times \{\lambda\}$$

für $\lambda \in \Lambda$ sind offen in \tilde{X} (da $\{\lambda\}$ offen in Λ ist) und sie sind disjunkt, und $p_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ ist offensichtlich ein Homöomorphismus für jedes $\lambda \in \Lambda$, so dass ganz X von p gleichmäßig überlagert wird und p eine $|\Lambda|$ -blättrige Überlagerung von X ist.

Eine solche Überlagerung ist in Abbildung 7.1(a) zu sehen. Sie ist nicht besonders interessant, weil sie eigentlich keine neue geometrische Information über X liefert.

b) Definiere $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ durch $p(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ für jedes $t \in \mathbf{R}$. Diese Abbildung ist stetig und surjektiv.

Auf jedem Intervall $W_k := (\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+2)\pi}{2}) \subseteq \mathbf{R}$ (für $k \in \mathbf{Z}$) ist entweder die Cosinusfunktion (wenn k gerade ist) oder die Sinusfunktion (wenn k ungerade ist) streng monoton und differenzierbar mit nicht-verschwindender Ableitung, und somit ein Diffeomorphismus auf das offene Intervall $(-1, 1)$, so dass eine differenzierbare Umkehrfunktion \arccos oder $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow W_k$ existiert. Die andere der beiden Funktionen \sin und \cos nimmt auf W_k nur positive oder nur negative Werte an.

Da eine Koordinate von p dort eine differenzierbare Umkehrfunktion hat, ist p auf jedem Intervall $V_k := \frac{1}{2\pi}W_k = (\frac{k}{4}, \frac{k+2}{4}) \subseteq \mathbf{R}$ ein Diffeomorphismus (also auch ein Homöomorphismus) auf eine offene Teilmenge

U von S^1 , die je nach der Restklasse von k mod 4 entweder der obere, der linke, der untere oder der rechte offene Halbkreis ist.

Die Abbildung p ist bekanntlich 1-periodisch, d.h., $p(s) = p(t)$ genau dann, wenn $s - t$ eine ganze Zahl ist. Somit ist

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{l \in \mathbf{Z}} V_{k+4l},$$

und die Mengen V_{k+4l} (für festes k) sind disjunkte offene Teilmengen von \mathbf{R} , die von p homöomorph auf U abgebildet werden. D.h., jede der genannten offenen Halbkreise wird gleichmäßig überlagert von p . Da jeder Punkt von S^1 in mindestens einem der genannten Halbkreise liegt, ist p eine Überlagerung.

Abbildung 7.1(b) zeigt diese Überlagerung, und man sieht auch in dem Bild, dass die genannten Halbkreise (oder eigentlich alle offene echte Teilmengen von S^1) gleichmäßig überlagert werden. Die Schraubenlinie \tilde{Y} in dem Bild ist offensichtlich homöomorph zu \mathbf{R} (die Projektion auf die senkrechte Achse ist ein Homöomorphismus, oder man denke sich die Schraubenlinie einfach gerade gezogen).

Diese Überlagerung ist im Gegensatz zu a) nicht trivial, denn \mathbf{R} ist zusammenhängend aber nicht kompakt, und ist somit auch kein Produkt von S^1 mit einem diskreten Raum (auch nicht mit einem einelementigen diskreten Raum, da dann das Produkt kompakt wäre).

Wir wollen jetzt damit beginnen, die Eigenschaften von Überlagerungen zu entwickeln, die sie für uns so nützlich machen werden. Diese Eigenschaften beziehen sich hauptsächlich auf das Problem, eine stetige Abbildung von einem anderen Raum in den Basisraum einer Überlagerung „hochzuheben“ in den Totalraum, in folgendem Sinne:

Definition 7.4 Seien E und B topologische Räume und sei $p: E \rightarrow B$ eine surjektive stetige Abbildung (z.B. eine Überlagerung).

Sei Y ein topologischer Raum und $f: Y \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Eine **Hochhebung** oder **Liftung** von f bezüglich p ist eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow E$, so dass $p \circ g = f$, in anderen Worten, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Wir werden bald solche Hochhebungen konstruieren lernen, aber viel einfacher ist es, Sätze zu gewinnen über die *Eindeutigkeit* solcher Liftungen:

Lemma 7.5 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei Y ein zusammenhängender topologischer Raum und sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Seien g_1 und $g_2: Y \rightarrow \tilde{X}$ zwei Hochhebungen von f .

Wenn es ein $y_0 \in Y$ gibt mit $g_1(y_0) = g_2(y_0)$, dann ist $g_1 = g_2$.

(In anderen Worten, eine Hochhebung einer stetigen Abbildung von einem zusammenhängenden Raum nach X ist durch die Festlegung eines seiner Werte schon eindeutig bestimmt.)

Beweis. Sei $y \in Y$ beliebig und sei $x = f(y) \in X$. Sei U eine gleichmäßig überlagerte offene Umgebung von x und schreibe

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

wo die U_λ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, die von $p_\lambda = p|_{U_\lambda}$ homöomorph auf U abgebildet werden.

Dann gibt es λ_1 und $\lambda_2 \in \Lambda$ mit $g_1(y) \in U_{\lambda_1}$ und $g_2(y) \in U_{\lambda_2}$. Da die g_i stetig sind, gibt es eine offene Umgebung V von y , so dass $g_i(V) \subseteq U_{\lambda_i}$ für $i = 1$ und 2 , und somit ist

$$g_i|_V = p_{\lambda_i}^{-1} \circ f. \quad (7.2)$$

Wenn $g_1(y) = g_2(y)$, so ist $\lambda_1 = \lambda_2$, da die U_λ disjunkt sind, und somit ist $g_1 = g_2$ auf ganz V nach (7.2). Wenn $g_1(y) \neq g_2(y)$, so ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und dann ist $g_1(z) \neq g_2(z)$ für jedes $z \in V$, da ganz U_{λ_1} und U_{λ_2} disjunkt sind.

Sowohl $\{y \in Y \mid g_1(y) = g_2(y)\}$ wie auch $\{y \in Y \mid g_1(y) \neq g_2(y)\}$ sind somit offen in Y (ein Punkt, der zu einer dieser Mengen gehört, hat eine offene Umgebung, die in der gleichen Menge enthalten ist). Da Y zusammenhängend ist, ist eine dieser offenen Mengen leer und die andere ist ganz Y .

Wenn g_1 und g_2 auch nur an einem Punkt übereinstimmen, ist die erste Menge oben nichtleer, also gleich ganz Y , und g_1 und g_2 sind überall gleich. ■

Korollar 7.6 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, sei Y ein zusammenhängender topologischer Raum und sei $c: Y \rightarrow X$ eine konstante Abbildung. Dann ist jede Hochhebung \tilde{c} von c auch konstant.

Beweis. Der Fall $Y = \emptyset$ ist trivial, so dass wir annehmen können, $Y \neq \emptyset$. Sei $y_0 \in Y$ und sei $x = c(y_0) \in X$. Sei $\tilde{x} = \tilde{c}(y_0) \in \tilde{X}$; weil \tilde{c} eine Hochhebung von c ist, gilt insbesondere $p(\tilde{x}) = c(y_0) = x$.

Offensichtlich ist die konstante Abbildung $c_{\tilde{x}}: Y \rightarrow \tilde{X}$, die überall den Wert \tilde{x} annimmt, eine Hochhebung der konstanten Abbildung $c: Y \rightarrow X$, die überall den Wert x annimmt. Aber auch \tilde{c} ist eine Hochhebung von c , und nach Konstruktion haben beide Hochhebungen den gleichen Wert bei y_0 . Aus Lemma 7.5 folgt, dass beide Hochhebungen gleich sind, und somit ist \tilde{c} konstant. ■

Um die Existenz von Hochhebungen unter geeigneten Voraussetzungen nachweisen zu können, brauchen wir einen Hilfssatz, der zunächst nur den Spezialfall von Abbildungen definiert auf I^2 behandelt. Warum reicht es, ausgerechnet diesen Raum zu betrachten? Weil I^2 der Definitionsbereich einer *Homotopie von Wegen* ist!

Lemma 7.7 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $f: I^2 \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

Sei $x_0 = f(0, 0)$ und sei $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung $g: I^2 \rightarrow \tilde{X}$ von f mit $g(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Beweis. Da p eine Überlagerung ist, gibt es eine Überdeckung \mathcal{U} von X durch offene Mengen U , die durch p gleichmäßig überlagert werden. Wegen der Stetigkeit von f ist

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{ f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U} \}$$

eine offene Überdeckung von I^2 .

$I^2 \subseteq \mathbf{R}^2$ ist ein metrischer Raum mit der Maximummetrik und ist kompakt. Also hat die offene Überdeckung $f^{-1}(\mathcal{U})$ eine Lebesgue-Zahl ε (Lemma 4.19) bezüglich der Maximummetrik.

Sei N eine natürliche Zahl so groß, dass $\frac{1}{2N} < \varepsilon$. Wir zerlegen I^2 in die N^2 kleinen Quadrate

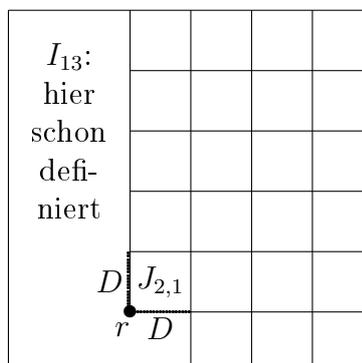
$$J_{i,j} := \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right] \times \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right] \quad \text{für } 0 \leq i < N, 0 \leq j < N,$$

von denen jedes Seitenlänge $\frac{1}{N}$ hat. In der Maximummetrik sind diese Quadrate Scheiben von Radius $< \varepsilon$ und deshalb liegt jedes dieser kleinen Quadrate ganz in einer Menge aus $f^{-1}(\mathcal{U})$. In Abbildung 7.2(a) ist eine solche Unterteilung mit $N = 6$ zu sehen.

Sei $I_0 := \{(0, 0)\}$ und für $1 \leq k \leq N^2$ sei I_k die Vereinigung der ersten k kleinen Quadrate $J_{i,j}$ in der Reihenfolge der lexikographischen Ordnung der Indexpaare (i, j) (bei der Abzählung beginnen wir links unten, zählen in jeder Spalte von unten nach oben, und am Ende der Spalte setzen wir die Zählung am unteren Ende der nächsten Spalte nach rechts fort).

$J_{0,5}$	$J_{1,5}$	$J_{2,5}$	$J_{3,5}$	$J_{4,5}$	$J_{5,5}$
$J_{0,4}$	$J_{1,4}$	$J_{2,4}$	$J_{3,4}$	$J_{4,4}$	$J_{5,4}$
$J_{0,3}$	$J_{1,3}$	$J_{2,3}$	$J_{3,3}$	$J_{4,3}$	$J_{5,3}$
$J_{0,2}$	$J_{1,2}$	$J_{2,2}$	$J_{3,2}$	$J_{4,2}$	$J_{5,2}$
$J_{0,1}$	$J_{1,1}$	$J_{2,1}$	$J_{3,1}$	$J_{4,1}$	$J_{5,1}$
$J_{0,0}$	$J_{1,0}$	$J_{2,0}$	$J_{3,0}$	$J_{4,0}$	$J_{5,0}$

(a) Die Zerlegung von I^2 in kleine Quadrate.



(b) Wie g von I_k nach I_{k+1} erweitert wird.

Abbildung 7.2: Schrittweise Konstruktion einer Hochhebung.

Wir konstruieren durch Induktion über k auf jedem I_k eine Hochhebung g_k von f mit $g_k(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Auf I_0 definieren wir $g_0(0, 0) := \tilde{x}_0$; das ist der Induktionsanfang. Wir haben g_0 so definiert, dass es den gewünschten Wert bei $(0, 0)$ annimmt.

Wenn $k < N^2$ und wenn g_k schon definiert ist, so sei $J_{i,j}$ das $k+1$ -te kleine Quadrat, und sei U eine Menge aus der Überdeckung \mathcal{U} mit $J_{i,j} \subseteq f^{-1}(U)$, oder in anderen Worten mit $f(J_{i,j}) \subseteq U$. Schreibe

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

wo die U_λ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, die von $p_\lambda = p|_{U_\lambda}$ homöomorph auf U abgebildet werden.

Sei $r = (\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$ der Punkt an der linken unteren Ecke von $J_{i,j}$. Der Durchschnitt

$$D := J_{i,j} \cap I_k$$

besteht aus dem Punkt $(0, 0)$, wenn $k = 0$, aus der unteren Seite von $J_{i,j}$, wenn $i = 0$ aber $j > 0$, aus der linken Seite von $J_{i,j}$, wenn $i > 0$ und $j = 0$, und aus der Vereinigung der linken und unteren Seite von $J_{i,j}$, wenn $i > 0$ und $j > 0$ (siehe Abbildung 7.2(b), wo der Fall $N = 6$, $k = 13$, $i = 2$ und $j = 1$ gezeigt wird).

Auf jeden Fall ist $r \in D$ und D ist eine wegzusammenhängende und somit zusammenhängende Menge.

Da $r \in I_k$, ist $g_k(r)$ definiert, und es gibt somit einen Index μ aus Λ mit

$g_k(r) \in U_\mu$. Auf $I_{k+1} = I_k \cup J_{i,j}$ definieren wir g_{k+1} durch

$$g_{k+1}(y) = \begin{cases} g_k(y), & \text{wenn } y \in I_k; \\ p_\mu^{-1}(f(y)), & \text{wenn } y \in J_{i,j} \end{cases} \quad (7.3)$$

(der Ausdruck im zweiten Fall ist tatsächlich definiert weil $f(J_{i,j}) \subseteq U$).

Beide Fälle liefern auf ihrem Definitionsbereich eine Hochhebung von f , im zweiten Fall offensichtlich nach Konstruktion, und im ersten Fall auf Grund der Induktionsannahme. Nach Definition ist D die Menge der Stellen in I_{k+1} , wo beide Fälle anwendbar sind, und damit g_{k+1} wohldefiniert ist müssen beide Fälle auf D die gleiche Abbildung liefern.

Der Index μ wurde so gewählt, dass beide Fälle in (7.3) an der Stelle r übereinstimmen. Auf D liefern beide Fälle also zwei Hochhebungen von f , die an der Stelle r den gleichen Wert annehmen. Nach dem Eindeutigkeitsatz Lemma 7.5 sind diese Hochhebungen überall auf D gleich und somit definiert (7.3) eine wohldefinierte Abbildung auf I_{k+1} , die stetig ist, weil jeder einzelne Fall eine stetige Abbildung bestimmt und weil I_k und $J_{i,j}$ als Vereinigungen von endlich vielen abgeschlossenen Quadraten abgeschlossen in I_{k+1} sind. Wir haben schon gesehen, dass g_{k+1} überall auf I_{k+1} eine Hochhebung von f ist. Und g_{k+1} nimmt bei $(0,0)$ den gewünschten Wert \tilde{x}_0 an, weil $(0,0)$ in I_k liegt und nach Induktionsannahme $g_k(0,0) = \tilde{x}_0$.

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen. Die Induktion ist fortsetzbar bis $k = N^2$ und dann erhalten wir eine Hochhebung $g = g_{N^2}$ von f auf $I_{N^2} = I^2$, mit dem gewünschten Wert bei $(0,0)$. Die Eindeutigkeit der Liftung folgt sofort aus Lemma 7.5, denn I^2 ist ja zusammenhängend. ■

Korollar 7.8 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $w: I \rightarrow X$ ein Weg in X , der bei x_0 beginnt (also $w(0) = x_0$).

Sei $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung

$$\tilde{w}: I \rightarrow \tilde{X}$$

von w mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$.

Beweis. Sei $C_w: I^2 = I \times I \rightarrow X$ die konstante Homotopie $C_w(s,t) := w(s)$ für alle $s, t \in I$. Nach Lemma 7.7 besitzt C_w bezüglich p eine eindeutige Hochhebung H mit $H(0,0) = \tilde{x}_0$. Definiere

$$\tilde{w}(s) := H(s,0).$$

Dies ist eine Hochhebung von $(C_w)_0 = w$ mit $\tilde{w}(0) = H(0,0) = \tilde{x}_0$. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 7.5. ■

Bemerkung 7.9 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei $H: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie mit festen Endpunkten, so dass $H(0, 0) = x_0$.

Nach Lemma 7.7 besitzt H eine eindeutige Hochhebung

$$\tilde{H}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$$

mit $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Auch \tilde{H} ist eine Homotopie mit festen Endpunkten.

Beweis. Die Wege $t \mapsto \tilde{H}(0, t)$ und $t \mapsto \tilde{H}(1, t)$ sind Hochhebungen der konstanten Wege $t \mapsto H(0, t)$ und $t \mapsto H(1, t)$, und sind deshalb nach Korollar 7.6 selber konstant. ■

Aus diesen einfachen Spezialfällen werden wir bald einen allgemeinen Satz über die Existenz von Hochhebungen herleiten.

Wir brauchen noch einen kleinen Hilfssatz.

Lemma 7.10 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X$, und sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei $w \in \Omega(X, x_0)$ eine Schleife in X bei x_0 . Nach Korollar 7.8 besitzt der Weg w eine eindeutige Hochhebung zu einem Weg \tilde{w} in \tilde{X} mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$.

Vorsicht! Im Allgemeinen ist \tilde{w} nur ein Weg in \tilde{X} , aber nicht unbedingt ein geschlossener Weg, also eine Schleife! Es gilt nämlich:

Genau dann ist $\tilde{w} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, wenn

$$[w] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0).$$

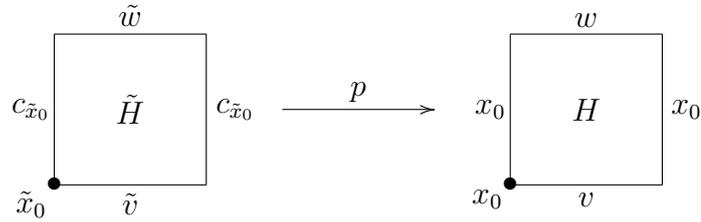
In anderen Worten, \tilde{w} ist genau dann eine Schleife, wenn die Homotopieklasse von w , die ein Element der Fundamentalgruppe von X bei x_0 ist, im Bild der Fundamentalgruppe von \tilde{X} bei \tilde{x}_0 unter dem Homomorphismus p_* liegt.

Beweis. Wir haben $w = p \circ \tilde{w}$. Wenn $\tilde{w} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, so ist

$$[w] = [p_*(\tilde{w})] = p_*([\tilde{w}]) \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0).$$

Umgekehrt, wenn $[w] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, so finden wir eine Schleife $\tilde{v} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $[w] = p_*([\tilde{v}]) = [p \circ \tilde{v}]$, also, so dass w homotop ist (aber nicht unbedingt gleich ist) zur Schleife $v := p \circ \tilde{v}$.

Sei $H: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie mit festen Endpunkten von $H_0 = v$ zu $H_1 = w$; dann ist insbesondere $H(0, 0) = x_0$. Nach Lemma 7.7 besitzt H eine eindeutige stetige Hochhebung $\tilde{H}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Abbildung 7.3: Warum \tilde{w} eine Schleife ist.

Bisher kennen wir nur diesen einen Wert von \tilde{H} , aber mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage aus Korollar 7.8 können wir nach und nach die Werte von \tilde{H} auf ∂I^2 bestimmen, um schließlich festzustellen, dass an allen Ecken des Quadrats der Wert \tilde{x}_0 angenommen wird, so dass \tilde{w} tatsächlich eine Schleife bei \tilde{x}_0 ist. Die einzelnen Schritte kann man leicht in Abbildung 7.3 verfolgen.

Sowohl \tilde{H}_0 wie auch \tilde{v} sind Hochhebungen von $H_0 = v$, die beim gleichen Punkt \tilde{x}_0 beginnen. Nach der Eindeutigkeitsaussage von Korollar 7.8 sind sie gleich, und insbesondere ist $\tilde{H}(1, 0) = \tilde{v}(1) = \tilde{x}_0$.

Da H eine Homotopie mit festen Endpunkten ist, ist nach Bemerkung 7.9 auch die Hochhebung \tilde{H} eine Homotopie mit festen Endpunkten, und daraus folgt, weil $\tilde{H}_0 = \tilde{v}$ eine Schleife bei \tilde{x}_0 ist, dass auch \tilde{H}_1 eine Schleife bei \tilde{x}_0 ist.

Aber \tilde{H}_1 ist eine Hochhebung von $H_1 = w$, und \tilde{w} ist eine andere. Beide beginnen bei \tilde{x}_0 , also sind sie gleich, wieder auf Grund der Eindeutigkeitsaussage in Korollar 7.8. Insbesondere ist \tilde{w} eine Schleife bei \tilde{x}_0 , was zu zeigen war. ■

Wir sind jetzt vorbereitet für die Formulierung und den Beweis des Hauptsatzes über Hochhebungen von Abbildungen bezüglich Überlagerungen.

Satz 7.11 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung.

Sei Y ein wegweise zusammenhängender und lokal wegweise zusammenhängender topologischer Raum und sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sei $y_0 \in Y$, sei $x_0 = f(y_0) \in X$, und sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Genau dann besitzt f eine stetige Hochhebung \tilde{f} mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, wenn

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)). \quad (7.4)$$

(Beide Gruppen in (7.4) sind natürlich Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.)

Wenn es eine solche Hochhebung gibt, dann ist sie eindeutig.

Beweis. Da Y wegweise zusammenhängend und somit zusammenhängend ist, folgt die Eindeutigkeit der Liftung sofort aus Lemma 7.5.

Die Bedingung (7.4) ist offensichtlich notwendig für die Existenz einer stetigen Hochhebung \tilde{f} , denn aus $p \circ \tilde{f} = f$ und dem Wert $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ folgt sofort $\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und somit

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \tilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*\left(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))\right) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass (7.4) *hinreichend* ist für die Existenz einer stetigen Hochhebung \tilde{f} von f mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

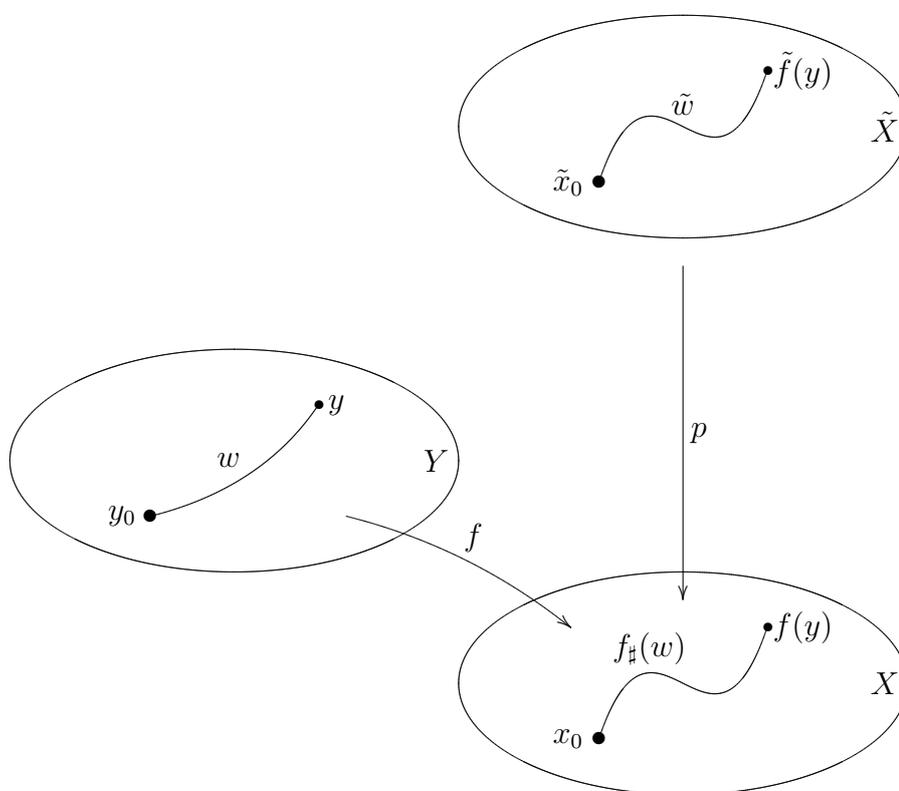
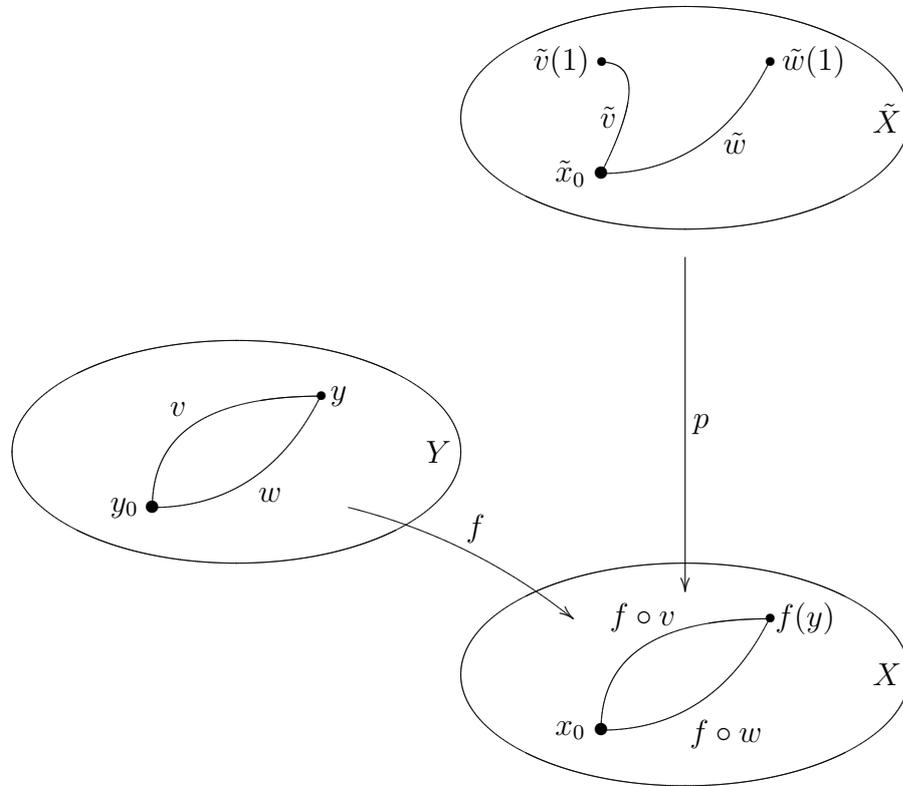


Abbildung 7.4: Die Konstruktion von \tilde{f} .

Wir konstruieren eine solche Hochhebung wie folgt. Sei $y \in Y$. Da Y wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $w : I \rightarrow Y$ von y_0 nach y , und $f_{\#}(w) = f \circ w$ ist ein Weg in X , der bei x_0 beginnt. Nach Korollar 7.8 hat $f_{\#}(w)$ eine eindeutige stetige Hochhebung zu einem Weg \tilde{w} in \tilde{X} , der bei \tilde{x}_0 beginnt. Wir setzen

$$\tilde{f}(y) := \tilde{w}(1)$$

Abbildung 7.5: Ist \tilde{f} wohldefiniert?

und stellen sofort fest, dass

$$p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{w}(1)) = (f_{\#}(w))(1) = f(w(1)) = f(y),$$

wie gewünscht für eine Hochhebung. Abbildung 7.4 zeigt diese Konstruktion.

Aber es gibt noch zwei Probleme: wir müssen zeigen, dass $\tilde{f}(y)$ wohldefiniert ist und nicht von der Wahl des Weges w von y_0 nach y abhängt, und wir müssen zeigen, dass \tilde{f} wirklich eine *stetige* Abbildung ist.

Zunächst zur Wohldefinietheit: Angenommen, v ist ein anderer Weg in Y von y_0 nach y , und sei \tilde{v} die eindeutige bei \tilde{x}_0 beginnende stetige Hochhebung des Weges $f \circ v$ in X . Da v und w beide bei y_0 beginnen und bei y enden, ist $u := v * w^{-}$ eine Schleife bei y_0 und $[u] \in \pi_1(Y, y_0)$. Die Wege $f \circ v$ und $f \circ w$ in X beginnen bei x_0 und enden beide bei $f(y)$, so dass

$$f \circ u = (f \circ v) * (f \circ w^{-}) = (f \circ v) * (f \circ w)^{-}$$

eine Schleife in X bei x_0 ist. Sei \tilde{u} die eindeutige Hochhebung von $f \circ u$ nach \tilde{X} , die bei \tilde{x}_0 beginnt.

Wir haben

$$[f \circ u] = f_*([u]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

und deshalb folgt aus Lemma 7.10, dass die Hochhebung \tilde{u} eine Schleife bei \tilde{x}_0 ist. Wir gewinnen aus \tilde{u} zwei Wege \bar{v} und \bar{w} in \tilde{X} mit $\tilde{u} = \bar{v} * (\bar{w})^-$ durch die Formel

$$\bar{v}(t) = \tilde{u}\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{und} \quad \bar{w}(t) = \tilde{u}\left(\frac{2-t}{2}\right) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Wie man sofort nachprüft ist $p \circ \bar{v} = f \circ v$ und $p \circ \bar{w} = f \circ w$. Da auch gilt

$$\bar{v}(0) = \tilde{u}(0) = \tilde{v}(0) = \tilde{w}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{u}(1) = \bar{w}(0),$$

ist $\bar{v} = \tilde{v}$ und $\bar{w} = \tilde{w}$, denn nach Lemma 7.5 sind zwei Hochhebungen einer stetigen Abbildungen auf einem zusammenhängenden Raum, die an irgendeiner Stelle den gleichen Wert annehmen, überall gleich. Insbesondere ist

$$\tilde{v}(1) = \bar{v}(1) = \tilde{u}\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{w}(1) = \tilde{w}(1),$$

so dass unsere Konstruktion für $\tilde{f}(y) = \tilde{w}(1) = \tilde{v}(1)$ doch nicht von der Wahl des Weges von y_0 nach y abhängt.

Jetzt, wo wir wissen, dass die beschriebene Konstruktion eine wohldefinierte Abbildung liefert, ist auch klar, dass $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Denn c_{y_0} ist ein Weg in Y von y_0 nach y_0 und $f \circ c_{y_0} = c_{f(y_0)} = c_{x_0}$. Nach Korollar 7.6 ist $c_{\tilde{x}_0}$ die bei \tilde{x}_0 beginnende Hochhebung von c_{x_0} , und somit ist nach Konstruktion

$$\tilde{f}(y_0) = c_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0,$$

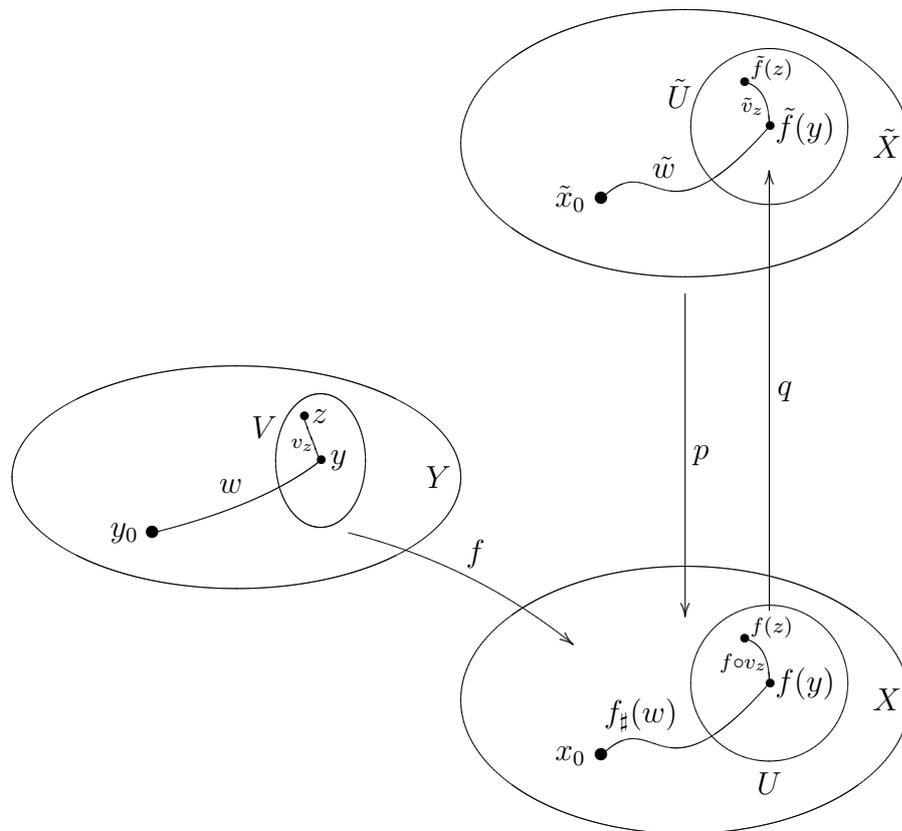
wie gewünscht.

Zum Schluss wollen wir noch zeigen, dass \tilde{f} stetig ist. Dazu sei $y \in Y$ und sei U eine offene Umgebung von $f(y) \in X$, die von p gleichmäßig überlagert wird. Da $p(\tilde{f}(y)) = f(y) \in U$, gibt es eine offene Menge \tilde{U} um $\tilde{f}(y) \in \tilde{X}$, die von p homöomorph auf U abgebildet wird. Sei $q: U \rightarrow \tilde{U}$ die Umkehrabbildung des Homöomorphismus $p|_{\tilde{U}}$.

Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen in Y , und weil Y lokal wegweise zusammenhängend ist, gibt es eine wegweise zusammenhängende Umgebung V von y in Y mit $V \subseteq f^{-1}U$, oder anders gesagt, mit $f(V) \subseteq U$.

Sei w ein Weg in Y von y_0 nach y und sei \tilde{w} die eindeutige Hochhebung des Weges $f \circ w$ in X , die bei \tilde{x}_0 beginnt. Nach Definition und Wohldefiniertheit von \tilde{f} ist $\tilde{w}(1) = \tilde{f}(y)$.

Für jeden Punkt $z \in V$ wähle einen Weg v_z in V von y nach z . Der Weg $f \circ v_z$ ist ein Weg von $f(y)$ nach $f(z) \in X$, der ganz in $f(V) \subseteq U$ verläuft,

Abbildung 7.6: Warum \tilde{f} stetig ist.

so dass wir darauf q anwenden können. Sei $\tilde{v}_z := q \circ f \circ v_z$; dies ist ein Weg in \tilde{U} . All diese Daten sehen Sie in Abbildung 7.6.

Weil q die Umkehrabbildung von $p|_{\tilde{U}}$ ist, ist $p \circ \tilde{v}_z = f \circ v_z$. Insbesondere ist

$$p(\tilde{v}_z(0)) = f(v_z(0)) = f(y) = p(\tilde{f}(y)),$$

und weil p auf \tilde{U} injektiv ist, gilt $\tilde{v}_z(0) = \tilde{f}(y)$, d.h., \tilde{v}_z ist ein Weg, der bei $\tilde{f}(y)$ beginnt, und deshalb ist $\tilde{w} * \tilde{v}_z$ definiert.

Die Verkettung $w * v_z$ ist ein Weg in Y von y_0 nach z und

$$f \circ (w * v_z) = (f \circ w) * (f \circ v_z) = (p \circ \tilde{w}) * (p \circ \tilde{v}_z) = p \circ (\tilde{w} * \tilde{v}_z).$$

Nach Definition von \tilde{f} ist also

$$\tilde{f}(z) = (\tilde{w} * \tilde{v}_z)(1) = \tilde{v}_z(1) = q(f(v_z(1))) = q(f(z)).$$

Dies gilt für ein beliebiges $z \in V$, so dass $\tilde{f}|_V = q \circ f$ und dies ist eine stetige Abbildung. Da \tilde{f} auf der Umgebung V von y stetig ist, ist \tilde{f} insbesondere auf einer offenen Menge um y stetig. Da y ein beliebiger Punkt von Y war, ist \tilde{f} auf ganz Y stetig, wie behauptet. ■

Korollar 7.12 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und Y ein einfach zusammenhängender und lokal wegwiese zusammenhängender topologischer Raum. Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sei $y_0 \in Y$, sei $x_0 = f(y_0) \in X$, und sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

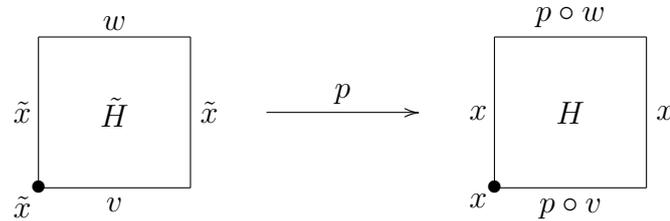
Dann besitzt f eine eindeutige Hochhebung $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

Beweis. Weil Y einfach zusammenhängend ist, ist es auch wegwiese zusammenhängend, und die Voraussetzung (7.4) in Satz 7.11 ist automatisch erfüllt, weil $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$. Somit ist auch $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = \{1\}$ und in jeder Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$, insbesondere auch in $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, enthalten. Also ist Satz 7.11 anwendbar und liefert sofort den gewünschten Schluss. ■

Korollar 7.13 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und sei $x := p(\tilde{x}) \in X$. Dann ist

$$p_* = \pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

injektiv.

Abbildung 7.7: Warum p_* injektiv ist.

Beweis. Seien v und $w \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x})$ Schleifen, so dass $p_*([v]) = p_*([w])$. Dann ist $p \circ v \simeq p \circ w$ mfE. Sei $H: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie mfE von $p \circ v$ nach $p \circ w$ (insbesondere gilt dann $H(0,0) = p(v(0)) = p(\tilde{x}) = x$) und sei \tilde{H} die eindeutige Hochhebung von H mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}$.

\tilde{H}_0 ist eine Hochhebung von $p \circ v$ und nimmt bei $0 \in I$ den gleichen Wert \tilde{x} an, wie v , welches ja auch eine Hochhebung von $p \circ v$ ist. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Korollar 7.8 folgt, dass $\tilde{H}_0 = v$ und somit insbesondere, dass \tilde{H}_0 eine Schleife bei \tilde{x} ist.

Nach Bemerkung 7.9 ist \tilde{H} eine Homotopie mit festen Endpunkten. Insbesondere nimmt \tilde{H} überall auf $\{0\} \times I$ und auf $\{1\} \times I$ den konstanten Wert \tilde{x} an, und somit ist auch \tilde{H}_1 , wie w , eine Schleife bei \tilde{x} und eine Hochhebung von $p \circ w = H_1$. Wegen des gemeinsamen Wertes bei 0 folgt wieder aus der Eindeutigkeit der Liftung von Wegen, dass $\tilde{H}_1 = w$.

Wir haben also gezeigt, dass \tilde{H} eine Homotopie mit festen Endpunkten von v nach w ist. Also ist $[v] = [w] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, wann immer $p_*([v]) = p_*([w])$. In anderen Worten, p_* ist injektiv. ■

Bemerkung 7.14 Man kann die Aussage von Korollar 7.13 auch so verstehen, dass für eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ die Fundamentalgruppe an jeder Stelle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eine *Untergruppe* der Fundamentalgruppe von X bei $p(\tilde{x})$ ist.

Das ist aber erstaunlicherweise keine große Hilfe bei der Berechnung von Fundamentalgruppen, und es wird nicht unser Ziel sein, Überlagerungen zu finden, die im Totalraum bekannte Fundamentalgruppen haben, um über die Fundamentalgruppe unten etwas zu erfahren (oder umgekehrt). Eher ist diese Tatsache eine Behinderung für die Berechnung und verkompliziert sie, wenn die obere Fundamentalgruppe nichttrivial ist.

Es würde auch nicht viel nützen, wenn p_* ein Isomorphismus und nicht nur injektiv wäre, weil die Überlagerung dann im Wesentlichen einblättrig und somit im Wesentlichen ein Homöomorphismus wäre (um es genauer zu

sagen, jede Wegkomponente des Totalraums wäre eine 1-blättrige Überlagerung, und Schleifen können eine Wegkomponente bekanntlich nicht verlassen). Solche Überlagerungen liefern überhaupt keine neue topologische Information und bieten somit auch keine Erleichterung bei der Berechnung der Fundamentalgruppe.

Wir werden, wie Sie gleich sehen werden, genau das Gegenteil zu erreichen versuchen und stattdessen Überlagerungen finden wollen, bei denen möglichst wenig von der Fundamentalgruppe des Basisraumes im Totalraum noch vorhanden ist, denn die Fundamentalgruppe oben ist ein Hindernis für die Existenz anderer geometrischer Merkmale, an denen wir die Fundamentalgruppe des Basisraumes sofort ablesen können. Diese Merkmale werden sichtbar, wenn die Hochhebungen von Schleifen im unteren Raum im oberen Raum *keine* Schleifen mehr sind; die *verschiedenen* Schlusspunkte, die wir dann erreichen können, unterscheiden Homotopieklassen von Schleifen im unteren Raum und helfen, sie zu zählen.

Folglich, desto kleiner die Fundamentalgruppe oben ist, desto größer der Anteil von der Fundamentalgruppe des Basisraumes, der in anderer und deutlicherer Form in der Geometrie des Totalraumes in Erscheinung tritt.

Definition 7.15 Eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt eine *universelle Überlagerung*, wenn der Totalraum \tilde{X} einfach zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend ist.

In diesem Fall ist auch der Basisraum X automatisch wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend (aber nicht unbedingt einfach zusammenhängend!).

Bemerkung 7.16 Warum heißen solche Überlagerungen „universell“? Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung, und sei $q: Y \rightarrow X$ eine andere Überlagerung von X . Sei $x \in X$ und seien $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $y \in Y$ Punkte mit $p(\tilde{x}) = q(y) = x$.

Korollar 7.12 besagt, dass p eine eindeutige „Hochhebung“ $r: \tilde{X} \rightarrow Y$ bezüglich q hat, so dass $r(\tilde{x}) = y$ und mit $p = q \circ r$.

Wenn Y zusammenhängend ist kann man zeigen, dass r selber eine Überlagerung ist, so dass *jede* zusammenhängende Überlagerung von X von der universellen Überlagerung überlagert wird und sozusagen auf einer „Zwischenstufe“ zwischen dem Totalraum der universellen Überlagerung und dem Basisraum positioniert ist. Deshalb der Name *universell*.

Auf die Details dieser Theorie wollen wir nicht näher eingehen.

Beispiel 7.17 Die Überlagerung

$$\begin{aligned} p: \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

aus Beispiel 7.3 b) ist eine universelle Überlagerung.

Hier sind nun die „geometrischen Merkmale“ einer Überlagerung, an denen wir die Fundamentalgruppe des Basisraums ablesen werden:

Definition 7.18 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** von p ist ein Homöomorphismus $\tau: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tau} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

kommutiert, d.h., so dass $p \circ \tau = p$.

Eine Decktransformation ist also eine Hohebung von p bezüglich p , die ein Homöomorphismus des Totalraums ist.

Die Decktransformationen der Überlagerung p bilden immer eine Gruppe unter Verknüpfung, denn offensichtlich ist die Verknüpfung $\sigma \circ \tau$ von zwei Decktransformationen τ und σ wieder eine Decktransformation, die Identität $\text{id}_{\tilde{X}}$ von \tilde{X} ist eine Decktransformation, und wenn τ eine Decktransformation ist, dann ist auch die Umkehrabbildung τ^{-1} eine, denn

$$p \circ \tau^{-1} = (p \circ \tau) \circ \tau^{-1} = p \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = p.$$

Diese Gruppe heißt die **Decktransformationsgruppe** der Überlagerung p , und wir bezeichnen sie mit $T(p)$.

Wie viele Decktransformationen hat denn eine Überlagerung?

Lemma 7.19 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung, wobei \tilde{X} wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend ist. Sei $x \in X$ und seien \tilde{x}_1 und $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x$.

Genau dann gibt es eine Decktransformation τ mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, wenn

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)), \quad (7.5)$$

und wenn es eine solche Decktransformation gibt, dann gibt es genau eine.

Beweis. Da \tilde{X} wegweise zusammenhängend ist, und da eine Decktransformation auch eine Hochhebung von p ist, kann es nach dem Eindeigkeitssatz für Hochhebungen Lemma 7.5 höchstens eine Decktransformation τ geben mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

\tilde{X} ist nach Voraussetzung wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend und Satz 7.11 besagt unter diesen Voraussetzungen, dass eine *Hochhebung* τ von p mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ genau dann existiert, wenn die linke Seite von Gleichung (7.5) in der rechten Seite enthalten ist.

Wenn es aber eine Decktransformation τ gibt mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, dann ist auch τ^{-1} eine Decktransformation und somit eine Hochhebung mit $\tau^{-1}(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$, und deshalb ist auch die rechte Seite von Gleichung (7.5) in der linken Seite enthalten, d.h., in (7.5) gilt die Gleichheit.

Umgekehrt, wenn Bedingung (7.5) gilt, so gibt es zumindest Hochhebungen τ und σ von p mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ und mit $\sigma(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. Es ist trivial nachzuprüfen, dass auch $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ Hochhebungen von p sind, und es gilt

$$(\sigma \circ \tau)(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1 \quad \text{und} \quad (\tau \circ \sigma)(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2. \quad (7.6)$$

Aber auch $\text{id}_{\tilde{X}}$ ist eine Hochhebung von p , die die Punkte \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 festlässt. Da es nach dem Eindeigkeitssatz höchstens eine Hochhebung gibt, die an einer bestimmten Stelle einen bestimmten Wert annimmt, sind beide Verknüpfungen in (7.6) die Identität und somit ist τ ein Homöomorphismus und σ ist seine Umkehrabbildung. Da τ außerdem eine Hochhebung von p ist, ist τ eine Decktransformation und wir haben die Existenz bewiesen. ■

Die Bedingung in Lemma 7.19 wirft für eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und einen Punkt $x \in X$ sofort die Frage auf, welche Beziehung zwischen den Fundamentalgruppen an verschiedenen Stellen in $p^{-1}(\{x\})$ besteht, wenn ihre Bilder in $\pi_1(X, x)$ nicht gleich sind, und wie viele solche Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ es gibt; diese Frage betrifft auch die qualitativen Eigenschaften der Wirkung der Decktransformationsgruppe auf den Totalraum. Es gibt eine ausgedehnte und sehr interessante Theorie, die darauf Antwort gibt, und die auch die Beziehung zwischen der Decktransformationsgruppe, der Fundamentalgruppe an verschiedenen Stellen in \tilde{X} , und der Fundamentalgruppe von X beschreibt. Schon aus Zeitgründen können wir diese Theorie nicht in Detail behandeln; in der allgemeinen Situation liefert sie auch nur unvollständige Information über die Fundamentalgruppe von X .

Wir werden nur den allereinfachsten Spezialfall dieser Theorie betrachten, nämlich den Fall einer *universellen Überlagerung*. Er hat den Vorteil, dass in diesem Fall alle Hindernisse zur Konstruktion von Decktransformationen verschwinden und dass die Decktransformationsgruppe die Fundamentalgruppe des Basisraums völlig beschreibt.

Korollar 7.20 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung und sei $x \in X$. Dann gibt es zu je zwei Punkten \tilde{x}_0 und $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(\{x\})$ genau eine Decktransformation τ von p , die \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 abbildet.

Insbesondere hat die Überlagerung p genau so viele Decktransformationen, wie ihre Blätterzahl.

Beweis. Die Behauptung über die Existenz von Decktransformationen trifft zu nach Lemma 7.19, weil \tilde{X} einfach zusammenhängend ist und die Gruppen in Bedingung (7.5) deshalb beide trivial und somit gleich sind.

Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ fest gewählt mit $p(\tilde{x}_0) = x$. Jede Decktransformation bildet \tilde{x}_0 in einen Punkt von $p^{-1}(\{x\})$ ab, und zu jedem Punkt $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(\{x\})$ gibt es tatsächlich genau eine Decktransformation, die \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 abbildet, also gibt es so viele Decktransformationen, wie Punkte in $p^{-1}(\{x\})$, und diese Anzahl ist die Blätterzahl. ■

Satz 7.21 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung und sei $x \in X$. Dann ist

$$\pi_1(X, x) \cong T(p).$$

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = x$. Ein Isomorphismus $\varphi: \pi_1(X, x) \rightarrow T(p)$ lässt sich wie folgt konstruieren: Sei $\zeta \in \pi_1(X, x)$ und sei $w \in \Omega_1(X, x)$ eine 1-Schleife mit $\zeta = [w]$. Sei $\tilde{w}: I \rightarrow \tilde{X}$ die eindeutige Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$, und sei $\tilde{y} = \tilde{w}(1)$; es gilt auch $p(\tilde{y}) = x$, da w eine Schleife ist. Wir definieren $\varphi(\zeta)$ als die eindeutige Decktransformation τ von p , die \tilde{x} nach \tilde{y} abbildet.

Diese Decktransformation hängt nur von ζ ab und nicht von der Wahl der Schleife $w \in \zeta$, so dass φ wohldefiniert ist. Ferner, φ ist ein Isomorphismus $\pi_1(X, x) \cong T(p)$.

Beweis. Als Erstes zeigen wir, dass φ wohldefiniert ist. Seien v und w zwei Schleifen in $\Omega_1(X, x)$ mit $[v] = [w] = \zeta$ und seien \tilde{v} und \tilde{w} ihre bei \tilde{x} beginnenden Hochhebungen.

Wir haben $v \simeq w$ mFE; sei H eine Homotopie mit festen Endpunkten von v nach w und sei \tilde{H} die Hochhebung von H mit $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}$. Nach Bemerkung 7.9 ist auch \tilde{H} eine Homotopie mit festen Endpunkten. Daraus folgt als Erstes, dass auch $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{x}$ und somit sind \tilde{H}_0 und \tilde{H}_1 bei \tilde{x} beginnende Hochhebungen von v bzw. w , d.h., $\tilde{H}_0 = \tilde{v}$ und $\tilde{H}_1 = \tilde{w}$. Weil \tilde{H} eine Homotopie mit festen Endpunkten ist, ist auch $\tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1)$, d.h., $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ und somit erhalten wir in der Konstruktion von φ mit der Schleife v den gleichen Punkt \tilde{y} , wie mit w , also auch die gleiche Decktransformation τ in beiden Fällen. Das zeigt, dass φ wohldefiniert ist.

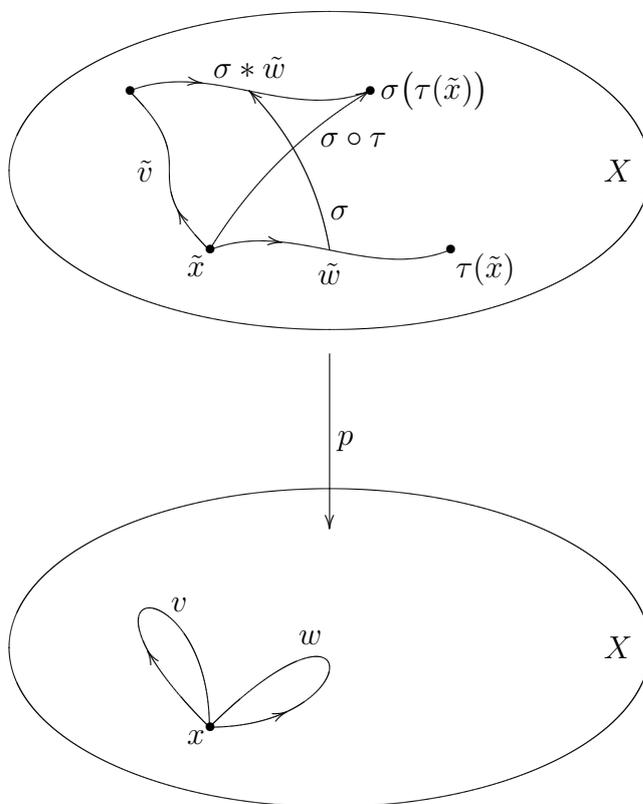


Abbildung 7.8: φ ist ein Homomorphismus.

φ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn seien v und w zwei beliebige Schleifen in $\Omega_1(X, x)$. Seien \tilde{v} und \tilde{w} ihre bei \tilde{x} beginnenden Hochhebungen und $\sigma = \varphi([v])$ und $\tau = \varphi([w])$ die Decktransformationen mit $\sigma(\tilde{x}) = \tilde{v}(1)$ und $\tau(\tilde{x}) = \tilde{w}(1)$.

Da σ eine Decktransformation ist, ist auch $\sigma \circ \tilde{w}$ eine Hochhebung von w , aber eine, die bei $\sigma(\tilde{w}(0)) = \sigma(\tilde{x}) = \tilde{v}(1)$ beginnt. Aus diesem Grund ist in \tilde{X} die Verkettung $\tilde{v} * (\sigma \circ \tilde{w})$ definiert, und sie ist offensichtlich eine Hochhebung von $v * w$, die bei $\tilde{v}(0) = \tilde{x}$ beginnt und bei $\tilde{z} := (\sigma \circ \tilde{w})(1) = \sigma(\tilde{w}(1)) = \sigma(\tau(\tilde{x}))$ endet.

Nach Definition ist $\varphi([v] * [w]) = \varphi([v * w])$ die eindeutig bestimmte Decktransformation, die \tilde{x} nach \tilde{z} abbildet; $\sigma \circ \tau$ ist eine Decktransformation, die dies tut, also ist $\varphi([v] * [w]) = \sigma \circ \tau$ und φ ist ein Homomorphismus.

Um zu zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist, konstruieren wir die Umkehrabbildung $\psi: T(p) \rightarrow \pi_1(X, x)$. Sei $\tau \in T(p)$ und sei $\tilde{y} := \tau(\tilde{x}) \in \tilde{X}$. Nach Voraussetzung ist \tilde{X} wegweise zusammenhängend. Sei \tilde{w} ein beliebi-

ger Weg in \tilde{X} von \tilde{x} nach \tilde{y} . Weil τ eine Decktransformation ist, ist $p(\tilde{y}) = p(\tau(\tilde{x})) = p(\tilde{x}) = x$, so dass der Weg $w := p \circ \tilde{w}$ eine Schleife bei $x \in X$ ist. Wir setzen $\psi(\tau) := [w] \in \pi_1(X, x)$.

Wir müssen zeigen, dass dies eine Wohldefinition ist. Sei \tilde{v} eine anderer Weg in \tilde{X} von \tilde{x} nach \tilde{y} . Weil \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, ist $[\tilde{w} * \tilde{v}^-] = 1 = [c_{\tilde{x}}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ und nach Lemma 6.18 gilt in $\pi(\tilde{x}, \tilde{y})$ die Homotopierelation mit festen Endpunkten

$$\tilde{v} \simeq c_{\tilde{x}} * \tilde{v} \simeq (\tilde{w} * \tilde{v}^-) * \tilde{v} \simeq \tilde{w} * (\tilde{v}^- * \tilde{v}) \simeq \tilde{w} * c_{\tilde{y}} \simeq \tilde{w}.$$

Also gilt auch $p \circ \tilde{v} \simeq p \circ \tilde{w}$ mfE und $\psi(\tau)$ hängt nicht von der Wahl des Weges w ab.

Aus den Konstruktionen ist sofort klar, dass φ und ψ Umkehrabbildungen zueinander sind, so dass φ bijektiv und somit ein Gruppenisomorphismus ist (wie auch die Umkehrabbildung ψ). ■

Korollar 7.22 Sei $x \in S^1$. Dann ist

$$\pi_1(S^1, x) \cong \mathbf{Z}.$$

Genauer, für jedes $n \in \mathbf{Z}$ sei $w_n \in \Omega_1(S^1, x)$ die Schleife

$$w_n(t) := e^{2\pi int} x \in S^1 \subseteq \mathbf{C}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: \mathbf{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, x) \\ n &\longmapsto [w_n] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Insbesondere ist $[w]$ mit $w(t) := e^{2\pi it} x$ ein Erzeugendes der zyklischen Gruppe $\pi_1(S^1, x)$.

Beweis. Sei $p: \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ die universelle Überlagerung von S^1 durch \mathbf{R} aus Beispiel 7.17; wir haben $p(t) = e^{2\pi it}$ für jedes $t \in \mathbf{R}$.

Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ ist die Translation durch n , also die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_n: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ t &\longmapsto t + n \end{aligned}$$

offensichtlich eine Decktransformation von p . Da $p^{-1}(\{0\}) = \mathbf{Z}$ und da für jedes $n \in \mathbf{Z}$ gilt $\tau_n(0) = n$, sind dies alle Decktransformationen, die p besitzt,

denn nach Lemma 7.19 oder Korollar 7.20 kann es für jedes $n \in \mathbf{Z}$ nur eine Decktransformation geben, die 0 nach n abbildet.

Folglich ist

$$\pi_1(S^1, x) \cong T(p) = \{ \tau_n \mid n \in \mathbf{Z} \}$$

und da $\tau_n \circ \tau_m = \tau_{n+m}$, ist diese Gruppe offenbar isomorph zu \mathbf{Z} .

Sei $a \in \mathbf{R}$ ein Element mit $p(a) = e^{2\pi ia} = x$. Unter dem Isomorphismus aus Satz 7.21 entspricht die Decktransformation τ_n der Homotopieklasse einer Schleife bei x , deren bei a beginnende Hochhebung bei $\tau_n(a) = a + n$ endet. Eine solche Schleife erhalten wir, wenn wir einen beliebigen Weg in \mathbf{R} von a nach $a + n$ mit p in den Kreis herunterprojizieren. Das einfachste Beispiel eines solchen Weges ist der Weg \tilde{w}_n gegeben durch $\tilde{w}_n(t) := a + nt$ für $t \in I$. Wenn man diesen Weg nach S^1 projiziert, erhält man die Schleife w_n mit

$$w_n(t) = p(\tilde{w}_n(t)) = e^{2\pi i(a+nt)} = e^{2\pi ia} \cdot e^{2\pi int} = xe^{2\pi int}.$$

Wir haben also einen Isomorphismus $\mathbf{Z} \rightarrow T(p)$, der n auf τ_n abbildet, und aus Satz 7.21 einen Isomorphismus $T(p) \rightarrow \pi_1(S^1, x)$, der τ_n auf $[w_n]$ abbildet. Die Verknüpfung ist ein Isomorphismus $\psi: \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, x)$ mit $\psi(n) = [w_n]$, wie behauptet.

Und weil dies ein Isomorphismus ist, wird $\pi_1(S^1, x)$ erzeugt von $\psi(1) = [w_1] = [w]$. ■

Bemerkung 7.23 Wir haben nur Rudimente der Überlagerungstheorie besprochen, die auch ausreichen, um einige interessante Spezialfälle von Homotopiegruppen zu berechnen. Diese Theorie lässt sich erheblich weiter entwickeln, und es gibt eine Vielzahl natürlicher und wichtiger Fragen, auf die wir leider nicht eingehen konnten.

Zum Beispiel haben wir gesehen, dass universelle Überlagerungen sehr nützlich sind, um Homotopiegruppen zu berechnen, so dass die Frage aufkommt, wann sie überhaupt existieren. In Beispielen in der Vorlesung und in den Übungen können wir eine universelle Überlagerung immer direkt angeben, so dass es kein großes Problem ist, dass wir die Frage ihrer allgemeinen Existenz nicht behandelt haben, aber für andere Anwendungen ist dies doch eine wichtige Frage, wie auch die breitere Frage nach der Klassifikation aller Überlagerungen eines gegebenen topologischen Raumes.

Mit wenigen Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Basisraumes X kann man diese Frage vollständig beantworten — dazu müssen wir nur verlangen, dass X wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend ist, und noch eine weitere Eigenschaft besitzt, die fast alle uns interessierenden Räume erfüllen, eine Eigenschaft mit dem exotischen Namen

semi-lokal einfach zusammenhängend. Das bedeutet nur, dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die zwar selber nicht einfach zusammenhängend sein muss (deshalb nur „semi-lokal“), aber so dass jede Schleife in der Umgebung *im großen Raum* X nullhomotop ist.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so besitzt X nicht nur eine universelle Überlagerung, sondern es gibt sogar für jedes $x \in X$ und für *jede* Untergruppe $G \subseteq \pi_1(X, x)$ eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und ein $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = x$, so dass $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = G$.

Man kann auch fragen, wie viele wesentlich verschiedene Überlagerungen von X es bis auf Isomorphie gibt. Die Antwort ist: zu jeder Konjugationsklasse von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine Überlagerung \tilde{X} , so dass das Bild der Fundamentalgruppe von \tilde{X} als Untergruppe von $\pi_1(X, x)$ zu dieser Konjugationsklasse gehört. Da es nur eine triviale Untergruppe von $\pi_1(X, x)$ gibt und somit auch nur eine Konjugationsklasse von trivialen Untergruppen, ist die universelle Überlagerung sogar eindeutig bestimmt.

Auch die Aussage von Satz 7.21, dass die Fundamentalgruppe von X gleich der Decktransformationsgruppe einer universellen Überlagerung ist, lässt sich verallgemeinern zu einer Aussage für beliebige Überlagerungen, aber wenn $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \neq \{1\}$, und wenn $p(\tilde{x}) = x$, dann beschreibt die Decktransformationsgruppe nicht genau $\pi_1(X, x)$, sondern nur einen Quotienten einer Untergruppe von $\pi_1(X, x)$ nach dem Bild von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ unter p_* .

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass es elegante Anwendungen der Homotopietheorie in der Gruppentheorie und speziell in der algebraisch sehr komplizierten Theorie der freien Gruppen gibt, ausnahmsweise eine Situation, in der die Topologie der Algebra eine Erleichterung verschafft und nicht umgekehrt. So kann man, z.B., sehr einfach mit Hilfe der Überlagerungstheorie für Bouquets¹ von Kreisen beweisen, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe auch frei ist, ein Satz, der zuerst algebraisch bewiesen wurde, aber auf sehr viel umständlichere Weise.

Leider wird es uns zumindest in der Vorlesung nicht möglich sein, auf irgendeine dieser Fragen näher einzugehen.

Wir schließen dieses Kapitel noch mit einem sehr nützlichen Satz ab, der zwar nichts mit Überlagerungen zu tun hat, aber ähnlich nützlich sein kann bei der Berechnung von Fundamentalgruppen:

¹Ein Bouquet von Kreisen besteht aus einer beliebigen Anzahl von Kreisen, die an *einem* Punkt miteinander befestigt sind. Man erhält einen solchen Raum formal als der Quotient einer disjunkten Vereinigung von Kopien von S^1 nach der Menge der 1-Elemente in allen Kopien.

Satz 7.24 (Seifert-van Kampen) Sei X ein topologischer Raum und seien U und V offene Teilmengen von X , so dass $U \cap V$ nichtleer und wegzusammenhängend ist. Seien $i: U \rightarrow X$ und $j: V \rightarrow X$ die Inklusionen.

Sei $x \in U \cap V$. Dann wird $\pi_1(X, x)$ von den Untergruppen $i_*(\pi_1(U, x))$ und $j_*(\pi_1(V, x))$ erzeugt.

Insbesondere, wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist j_* surjektiv. Wenn U und V einfach zusammenhängend sind, dann ist auch X einfach zusammenhängend.

Beweis. Sei $w: I \rightarrow X$ eine 1-Schleife bei x . Diese Schleife schlängelt sich durch X und wechselt dabei, im Allgemeinen, mehrmals von U nach V und zurück. Die Idee des Beweises besteht darin, w zu zerlegen als eine Verkettung von Teilwegen, die abwechselnd ganz in U und ganz in V verlaufen. Diese Teilwege sind zwar keine Schleifen, aber der Übergangspunkt zwischen einem Teilweg und dem nächsten liegt immer in $U \cap V$ (da er zu beiden aufeinander folgenden Teilwegen gehört) und man kann ihn durch einen Weg in $U \cap V$ mit x verbinden (siehe Abbildung 7.9). Diese Verbindungen mit x ergänzen die Teilwege zu Schleifen bei x und erlauben somit, w bis auf Homotopie zu schreiben als eine Verkettung von Schleifen ganz in U oder ganz in V .

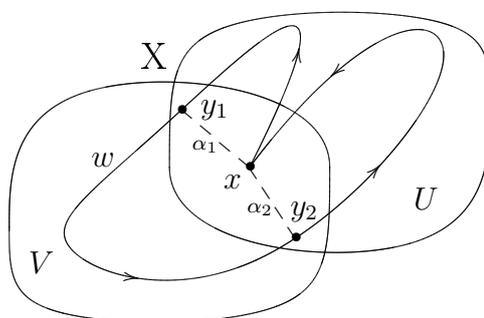


Abbildung 7.9: Der Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen.

Die in der Beweisskizze angedeuteten Schritte führen wir jetzt aus. Das Intervall I ist ein kompakter metrischer Raum, und da U und V eine offene Überdeckung von X bilden und w stetig ist, bilden $w^{-1}(U)$ und $w^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung von I . Sei ε eine Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung und sei $N \in \mathbf{N}$ so groß, dass $\frac{1}{2N} < \varepsilon$. Für $0 \leq j \leq N$ sei $t_j := \frac{j}{N}$ und für $j \geq 1$ sei I_j das Intervall $[t_{j-1}, t_j] \subseteq I$. Da der Radius von I_j gleich $\frac{1}{2N} < \varepsilon$ ist, gilt für jedes j entweder $w(I_j) \subseteq U$ oder $w(I_j) \subseteq V$ oder beides.

Für manche j ist $I_{j-1} \cup I_j$ ganz in einer der beiden Mengen $w^{-1}(U)$ oder $w^{-1}(V)$ enthalten. Seien j_1, \dots, j_{n-1} in aufsteigender Reihenfolge diejenigen

j zwischen 1 und $N - 1$, für die das *nicht* der Fall ist, und sei $s_k := t_{j_k}$ für $k = 0, \dots, n - 1$. Sei $s_0 = t_0 = 0$ und $s_n = t_N = 1$. Für jedes k sei $y_k := w(s_k) \in X$. Es gilt $y_0 = y_n = x$.

Für $1 \leq k \leq n$ sei J_k das Intervall $[s_{k-1}, s_k] \subseteq I$. Nach Wahl der s_k ist jede Menge $w(J_k)$ ganz in U oder ganz in V enthalten, aber keine zwei aufeinander folgenden $w(J_k)$ sind in der gleichen Menge U oder V enthalten. Aus diesem Grund ist

$$y_k := w(s_k) \in w(J_k) \cap w(J_{k+1}) \subseteq U \cap V$$

für jedes k mit $1 \leq k \leq n - 1$.

Da $U \cap V$ nach Voraussetzung wegweise zusammenhängend ist, finden wir für jedes k mit $1 \leq k \leq n - 1$ einen Weg α_k in $U \cap V$ von x nach y_k wie in Abbildung 7.9. Sei φ_k eine streng monoton steigende stetige Abbildung von I auf J_k (da I und J_k Intervalle sind, gibt es sogar eine eindeutig bestimmte affine Abbildung mit diesen Eigenschaften) und sei w_k der Weg $w \circ \varphi_k$, der ganz in U oder ganz in V liegt und von y_{k-1} nach y_k verläuft.

Offensichtlich ist w eine Umparametrisierung von $w_1 * w_2 * \dots * w_n$ (beliebig geklammert) und somit sind beide Wege homotop mit festen Endpunkten. Da aber $\alpha_k^- * \alpha_k \simeq c_{s_k}$ für jedes k mit $1 \leq k \leq n - 1$, können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} [w] &= [w_1 * w_2 * \dots * w_n] \\ &= [w_1 * \alpha_1^- * \alpha_1 * w_2 * \alpha_2^- * \dots * \alpha_{n-1}^- * w_n] \\ &= [w_1 * \alpha_1^-] * [\alpha_1 * w_2 * \alpha_2^-] * \dots * [\alpha_{n-1}^- * w_n] \end{aligned} \quad (7.7)$$

und dies ist ein Produkt von Homotopieklassen von *Schleifen bei x* . Ferner, da jedes w_k ganz in U oder V verläuft, und da jedes α_k ganz in U und ganz in V verläuft, verläuft jede dieser Schleifen ganz in U oder ganz in V , d.h., die Homotopieklassen im Produkt in der letzten Zeile von (7.7) gehören entweder zu $i_*(\pi_1(U, x))$ oder zu $j_*(\pi_1(V, x))$. Das beweist die Hauptaussage des Satzes.

Wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist

$$i_*(\pi_1(U, x)) = i_*(\{1\}) = \{1\} \subseteq j_*(\pi_1(V, x)),$$

so dass schon die Untergruppe $j_*(\pi_1(V, x))$ alleine die Gruppe $\pi_1(X, x)$ erzeugt, d.h., sie sind gleich.

Und wenn auch V einfach zusammenhängend ist, dann wird $\pi_1(X, x)$ von $\{1\}$ erzeugt, ist also gleich $\{1\}$, und X ist die Vereinigung von zwei wegweise zusammenhängenden Unterräumen mit nichtleerem Durchschnitt (da $x \in U \cap V$) und somit selber wegweise zusammenhängend. Beides zusammen bedeutet, X ist einfach zusammenhängend. ■

Bemerkung 7.25 Die Aussage von Satz 7.24 ist eigentlich eine deutlich abgeschwächte Version des richtigen Satzes von Seifert-van Kampen, der genau angibt, wie $\pi_1(X, x)$ von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$ erzeugt wird. Sowohl der Beweis wie auch die genaue Aussage des Satzes sind relativ kompliziert, so dass wir hier nicht weiter darauf eingehen wollen.

Die einfache Version des Satzes von Seifert-van Kampen reicht aber aus für die Berechnung der Fundamentalgruppen der Sphären:

Korollar 7.26 Für jedes $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.

Beweis. Sei zunächst $n \geq 1$ und sei $N := (0, \dots, 0, 1)$ der „Nordpol“ und $S := (0, \dots, 0, -1)$ der „Südpol“ von S^n . Die bekannte stereographische Projektion zeigt, dass $U := S^n \setminus \{S\}$ und $V := S^n \setminus \{N\}$ homöomorph zu \mathbf{R}^n und somit einfach zusammenhängend und insbesondere wegweise zusammenhängend sind. Diese Mengen sind auch offen in S^n . Ferner ist $U \cap V \neq \emptyset$, so dass auch $S^n = U \cup V$ wegweise zusammenhängend ist, sogar, wie gesagt, für jedes $n \geq 1$.

Daraus folgt, dass wenn $n \geq 2$ auch $U \cap V \cong S^{n-1} \times (-1, 1)$ wegweise zusammenhängend ist, als Produkt von zwei wegweise zusammenhängenden Räumen.

Zusammenfassend, S^n ist die Vereinigung von zwei offenen einfach zusammenhängenden Mengen mit wegweise zusammenhängendem Durchschnitt. Nach Satz 7.24 ist S^n einfach zusammenhängend. ■

Kapitel 8

Anwendungen der Fundamentalgruppe

Um das Thema Homotopie zu einem angenehmen Abschluss zu bringen, wollen wir in diesem sehr kurzen Kapitel ein paar schöne Anwendungen der Fundamentalgruppe (und speziell der Nichttrivialität der Fundamentalgruppe des Kreises) präsentieren.

Die erste Anwendung befasst sich mit der auf Seite 168 gemachten Bemerkung, dass es keine stetigen Abbildungen $D^n \rightarrow S^{n-1}$ gibt, die auf S^{n-1} die Identität sind. Für Abbildungen dieser Art gibt es einen gebräuchlichen Namen:

Definition 8.1 Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ ein Unterraum von X und $i: A \rightarrow X$ die Inklusion.

Eine **Retraktion** von X auf A ist eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$, so dass $r|_A = \text{id}_A$, oder anders gesagt, so dass

$$r \circ i = \text{id}_A$$

(daraus folgt automatisch, dass r surjektiv ist).

Man nennt den Unterraum A einen **Retrakt** von X , wenn es eine Retraktion $r: X \rightarrow A$ gibt.

Lemma 8.2 Sei X ein nichtleerer topologischer Raum, sei $A \subseteq X$ ein Retrakt von X und sei $r: X \rightarrow A$ eine Retraktion. Sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion. Sei $a \in A$. Dann gilt:

$$r_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a) \quad \text{ist surjektiv}$$

und

$$i_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a) \quad \text{ist injektiv.}$$

Beweis. Nach der Definition einer Retraktion ist $r \circ i = \text{id}_A$, also ist

$$r_* \circ i_* = (\text{id}_A)_* = \text{id}_{\pi_1(A,a)}.$$

Die Verknüpfung ist injektiv und surjektiv, also muss r_* surjektiv und i_* injektiv sein. ■

Korollar 8.3 *Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ ein Retrakt von X . Wenn X einfach zusammenhängend ist, dann ist auch A einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion und $r: X \rightarrow A$ eine Retraktion. Weil X wegweise zusammenhängend ist und r stetig und surjektiv ist, muss sein Bild, also A , auch wegweise zusammenhängend sein.

Weil $r_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$ surjektiv ist für jedes $a \in A$ und weil $\pi_1(X, a) = \{1\}$ ist für jedes $a \in X$, ist auch $\pi_1(A, a) = \{1\}$ für jedes $a \in A$. ■

Korollar 8.4 *S^1 ist kein Retrakt von D^2 .*

Beweis. D^2 ist einfach zusammenhängend nach Beispiel 6.31 b) (und weil D^2 wegzusammenhängend ist), aber S^1 ist nicht einfach zusammenhängend, da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$ nach Korollar 7.22. ■

Diese Tatsache kann man anwenden, um einige sehr interessante Aussagen zu beweisen.

Satz 8.5 (Brouwerscher Fixpunktsatz) *Jede stetige Abbildung*

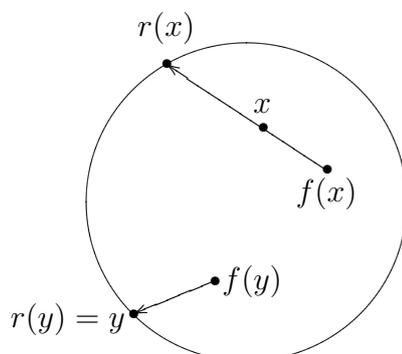
$$f: D^2 \rightarrow D^2$$

hat einen Fixpunkt. (Das heißt, es gibt einen Punkt $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.)

Beweis. Angenommen, es gibt eine stetige Abbildung $f: D^2 \rightarrow D^2$ ohne Fixpunkte. Wir können dann wie folgt eine Retraktion $r: D^2 \rightarrow S^1$ konstruieren.

Sei $x \in D^2$. Da nach Annahme $f(x) \neq x$, gibt es eine eindeutig bestimmte gerichtete Gerade in \mathbf{R}^2 von $f(x)$ nach x , und wenn wir diese Gerade in der gleichen Richtung fortsetzen, schneidet sie S^1 in einem eindeutig bestimmten Punkt $r(x)$ (siehe Abbildung 8.1 auf der nächsten Seite).

Falls $x \in S^1$, so braucht man die Gerade von $f(x)$ durch x gar nicht weiter fortzusetzen, um in S^1 zu landen, also ist in diesem Fall $r(x) = x$.

Abbildung 8.1: Eine Retraktion von D^2 auf S^1 .

Man „sieht“ an dem Bild, dass diese Abbildung stetig ist (wenn man x wenig verändert, verändert sich auch $f(x)$ wenig, weil f stetig ist, und somit ändern sich die Verbindungsgerade und damit ihr Schnittpunkt mit dem Kreis nur wenig).

Aber man kann auch leicht einen richtigen Beweis für die Stetigkeit von r geben. Für jedes $x \in D^2$ ist

$$r(x) = f(x) + t(x - f(x)), \quad (8.1)$$

wo $t \geq 1$ die größere (und eindeutige positive) Lösung der quadratischen Gleichung

$$\|f(x) + t(x - f(x))\|^2 = 1 \quad (8.2)$$

ist. (Hier verwenden wir die normale euklidische Norm auf \mathbf{R}^2 .)

Die übliche p - q -Formel für die Lösung quadratischer Gleichungen zeigt, dass die größere der beiden Lösungen (in t) von der Gleichung (8.2) stetig von x und $f(x)$ abhängt. Deshalb, und weil f stetig ist, hängt r nach Gleichung (8.1) stetig von x ab.

Da ferner $r(x) = x$ für $x \in S^1$, ist r eine Retraktion von D^2 auf S^1 , in Widerspruch zu Korollar 8.4. Also hat f einen Fixpunkt. ■

Einer der berühmtesten und historisch wichtigsten Sätze aus der Algebra (das Thema von Gaußens Dissertation) lässt sich, neben unzähligen anderen Beweisen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik, auch mit Hilfe der Homotopietheorie leicht beweisen:

Definition 8.6 Wir wollen jeder stetigen Abbildung $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine ganze Zahl zuordnen, die im Wesentlichen beschreibt, wie oft die Abbildung die

„Quell“- S^1 um die „Ziel“- S^1 wickelt. Um die Definition formulieren zu können, führen wir erst eine bequeme Notation ein.

Für $x \in S^1$ bezeichnen wir mit Γ_x die Schleife $t \mapsto e^{2\pi it}x$ an der Stelle x und mit γ_x die Homotopieklasse dieser Schleife in $\pi_1(S^1, x)$. Laut Korollar 7.22 ist γ_x ein Erzeugendes von $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbf{Z}$. Weil $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbf{Z}$, werden wir $\pi_1(S^1, x)$ fortan *additiv* schreiben.

Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Dann induziert f einen Gruppenhomomorphismus

$$f_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, f(1)),$$

und weil beide Gruppen \mathbf{Z} sind mit einem (oben angegebenen) wohldefinierten erzeugenden Element, ist dieser Homomorphismus die Multiplikation mit einer wohldefinierten ganzen Zahl n , bestimmt durch die Gleichung

$$f_*(\gamma_1) = n\gamma_{f(1)}. \quad (8.3)$$

Diese wohldefinierte Zahl n heißt der **Grad** oder der **Abbildungsgrad** Grad f von der stetigen Abbildung f .

Hilfssatz 8.7 a) Sei $z \in S^1$, sei $w \in \Omega(S^1, z)$ und sei \tilde{w} eine Hochhebung von w bezüglich p .

Dann ist $n := \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) \in \mathbf{Z}$ und

$$[w] = n\gamma_z \in \pi_1(S^1, z). \quad (8.4)$$

b) Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung und sei

$$w := f_{\#}(\Gamma_1) \in \Omega(S^1, f(1)).$$

Sei \tilde{w} eine Hochhebung von w bezüglich p .

Dann ist $\text{Grad } f = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) \in \mathbf{Z}$.

Beweis. Zu a): Weil $\pi_1(S^1, z) \cong \mathbf{Z}$ gibt es eine eindeutige Zahl $n \in \mathbf{Z}$ mit $[w] = n\gamma_z \in \pi_1(S^1, z)$.

Die Decktransformation von p , die $\tilde{w}(0)$ nach $\tilde{w}(1)$ abbildet, ist die Translation um n , oder in anderen Worten die Abbildung $s \mapsto s + n$.

Folglich ist

$$n = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0). \quad (8.5)$$

Das zeigt insbesondere, dass die Differenz auf der rechten Seite eine ganze Zahl ist. Die Herleitung zeigt, dass diese ganze Zahl die Eigenschaft (8.4) hat.

Teil b) folgt aus Teil a), weil die Zahl n mit $f_*(\gamma_1) = n\gamma_{f(1)}$ nach Definition der Grad von f ist. ■

Lemma 8.8 *Homotope Abbildungen $S^1 \rightarrow S^1$ haben den gleichen Grad.*

Beweis. Seien $f \simeq g$ homotope Abbildungen $S^1 \rightarrow S^1$. Sei $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ eine Homotopie von f nach g . Definiere $K: I \times I \rightarrow S^1$ durch

$$K(s, t) := H(e^{2\pi is}, t). \tag{8.6}$$

Dann ist

$$K_0 = f_{\#}(\Gamma_1) \in \Omega(S^1, f(1)) \quad \text{und} \quad K_1 = g_{\#}(\Gamma_1) \in \Omega(S^1, g(1)).$$

Sei \tilde{K} eine beliebige Hochhebung von K bezüglich der universellen Überlagerung $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ aus Beispiel 7.17; sie existiert nach Lemma 7.7. Dann ist \tilde{K}_0 eine Hochhebung von $f_{\#}(\Gamma_1)$ und \tilde{K}_1 ist eine Hochhebung von $g_{\#}(\Gamma_1)$.

Nach der Definition (8.6) von K ist K_t für jedes $t \in I$ eine Schleife in S^1 an der Stelle $H(1, t)$, und somit ist \tilde{K}_t die Hochhebung einer Schleife.

Aus Hilfssatz 8.7 a) folgt, dass $m_t := \tilde{K}_t(1) - \tilde{K}_t(0)$ für jedes $t \in I$ eine ganze Zahl ist. Andererseits hängt m_t stetig von t ab. Weil I zusammenhängend ist, ist das nur möglich, wenn m_t konstant und für alle t gleich ist.

Insbesondere ist

$$\text{Grad } f = m_0 = m_1 = \text{Grad } g.$$

■

Beispiele 8.9 a) Die Abbildung $f(z) := z^n$ von $S^1 \subseteq \mathbf{C}$ nach S^1 hat Grad n .

Denn $f(1) = 1$ und für jedes $t \in I$ ist

$$(f_{\#}(\Gamma_1))(t) = (e^{2\pi it})^n = e^{2\pi int}.$$

Nach Korollar 7.22 ist die Homotopieklasse der Schleife $t \mapsto e^{2\pi int}$ gerade $n\gamma_1$.

b) Jede nullhomotope stetige Abbildung $g: S^1 \rightarrow S^1$ hat Grad 0, denn g ist homotop zur konstanten Abbildung f mit $f(z) = 1 = z^0$ für alle $z \in S^1$, und f hat Grad 0 nach Teil a).

Satz 8.10 (Der so genannte „Hauptsatz der Algebra“) *Jedes Polynom*

$$p(X) := a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbf{C}$, wo $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$, besitzt eine Nullstelle in \mathbf{C} .

Beweis. Wir können annehmen, dass $a_n = 1$, denn sonst ersetzen wir p durch das Polynom p/a_n , das genau dann eine Nullstelle besitzt, wenn p eine hat, und das normiert ist, also führenden Koeffizienten 1 hat. (Wir dürfen durch a_n dividieren, weil $a_n \neq 0$.)

Angenommen, p hat keine Nullstelle. Dann können wir p als eine stetige Abbildung $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$ auffassen.

Wir skizzieren zunächst die Beweisidee. Sei M eine reelle Zahl mit

$$M \geq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right).$$

Dann ist M so groß gewählt, dass auf dem Kreis von Radius M um 0 der X^n Term von p größer ist als der Gesamtbeitrag aller anderen Terme, so dass sich p dort „im Wesentlichen“ verhält wie die Abbildung $z \mapsto z^n$, die nicht nullhomotop ist. Aber andererseits ist der Kreis von Radius M nullhomotop in \mathbf{C} , und das führt zu einem Widerspruch.

Hier nun die Details, die diese Beweisskizze zu einem Beweis ergänzen:

Sei $r: \mathbf{C} \setminus 0 \rightarrow S^1$ die Retraktion $r(z) := z/|z|$ aus Beispiel 6.10 c). Sei $j: S^1 \rightarrow \mathbf{C}$ die stetige Abbildung $j(z) := Mz$, und sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ die Verknüpfung $f := r \circ p \circ j$.

Weil \mathbf{C} zusammenziehbar ist, ist j nullhomotop und f somit auch.

Wir definieren eine Homotopie $P: \mathbf{C} \times I \rightarrow \mathbf{C}$ durch

$$P(z, t) := z^n + t \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i.$$

$P_1 = p$ und P_0 ist die Abbildung $z \mapsto z^n$. Wenn $|z| = M$, so ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i z^i| = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| M^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| M^{n-1} && \text{(weil } M > 1) \\ &= M^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| < M^{n-1} \cdot M && \text{(weil } M > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|) \\ &= M^n = |z^n| \end{aligned}$$

und aus diesem Grund ist $P_t(z)$ für $|z| = M$ nie 0. In anderen Worten, die Verknüpfung $P \circ (j \times \text{id}_I)$ ist eine Homotopie $S^1 \times I \rightarrow \mathbf{C} \setminus 0$.

Sei $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ die Homotopie $r \circ P \circ (j \times \text{id}_I)$. Wir haben

$$H_0 = r \circ P_0 \circ j$$

und dies ist offensichtlich die Selbstabbildung des Kreises

$$g(z) := r(M^n z^n) = z^n$$

mit Grad n nach Beispiel 8.9 a).

Aber $H_1 = f$ und ist nullhomotop und hat Grad 0. Dies widerspricht Lemma 8.8.

Also war die Annahme falsch, dass p keine Nullstelle in \mathbf{C} hat. ■

Es gibt weitere schöne Anwendungen des Abbildungsgrades von Selbstabbildungen des Kreises.

Lemma 8.11 Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung, so dass

$$f(-z) = -f(z)$$

für jedes $z \in S^1$. Dann ist Grad f ungerade (und insbesondere $\neq 0$).

Beweis. Sei $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ die universelle Überlagerung aus Beispiel 7.17, mit $p(t) = e^{2\pi it}$.

Sei $w = f_{\#}(\Gamma_1) \in \Omega(S^1, f(1))$ und sei \tilde{w} eine Hochhebung von w bezüglich p . Nach Hilfssatz 8.7 b) ist $\text{Grad } f = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0)$.

Die Bedingung $f(-z) = -f(z)$ impliziert, wenn man sich die Definition von p ansieht und die Beziehung $p \circ \tilde{w} = w$ berücksichtigt, dass für jedes $t \in [0, \frac{1}{2}]$ die Differenz $\tilde{w}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{w}(t)$ ein ungerades Vielfaches $\frac{m}{2}$ von $\frac{1}{2}$ ist. Weil diese Differenz aber stetig von t abhängt, ist sie konstant auf dem zusammenhängenden Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

Jetzt folgt, dass

$$\text{Grad } f = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(\frac{1}{2}) + \tilde{w}(\frac{1}{2}) - \tilde{w}(0) = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m,$$

eine ungerade Zahl. ■

Korollar 8.12 Es gibt keine stetige Abbildung $f: S^2 \rightarrow S^1$, so dass

$$f(-x) = -f(x)$$

für jedes $x \in S^2$.

Beweis. Wenn es eine solche Abbildung f gibt, sei $g := f|_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$. Offensichtlich erfüllt g die Voraussetzung $g(-z) = -g(z)$ von Lemma 8.11 und hat somit ungeraden Grad und ist nicht nullhomotop.

Die obere Halbsphäre

$$D_+^2 := \{ (x_0, x_1, x_2) \in S^2 \mid x_2 \geq 0 \}$$

ist homöomorph zu D^2 . Genauer, die Projektion auf die (x_0, x_1) -Ebene ist ein Homöomorphismus $D_+^2 \rightarrow D^2$, der S^1 sogar punktweise festlässt. Folglich liefert $f|_{D_+^2}$ eine Erweiterung von g nach D^2 , und weil D^2 zusammenziehbar ist, ist $f|_{D_+^2}$ nullhomotop nach Lemma 6.12 d) und somit ihre Einschränkung g auch.

Das ist ein Widerspruch und es gibt somit keine stetige Abbildung f mit der genannten Eigenschaft. ■

Satz 8.13 (Satz von Borsuk-Ulam) Sei $f: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es eine Stelle $x \in S^2$ so dass $f(-x) = f(x)$.

In anderen Worten, es gibt mindestens ein Antipodenpaar $\{x, -x\}$ auf der Sphäre, auf dem f gleiche Werte annimmt.

Beweis. Wenn nicht, dann gilt für jedes $x \in S^2$, dass $f(x) - f(-x) \neq 0$. Wir erhalten dann eine wohldefinierte stetige Abbildung $g: S^2 \rightarrow S^1$ durch die Vorschrift

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|},$$

denn der Nenner ist ja nach Annahme nie 0.

Aus der Definition ist klar, dass $g(-x) = -g(x)$ für jedes $x \in S^2$. Nach Korollar 8.12 kann es keine solche stetige Abbildung $S^2 \rightarrow S^1$ geben. Also gilt doch an mindestens einer Stelle $f(-x) = f(x)$. ■

Der Satz von Borsuk-Ulam sieht etwas interessanter aus, wenn man sich klar macht, was die Aussage für die wirkliche Welt bedeutet. Zum Beispiel besagt dieser Satz, dass es zu jeder Zeit zwei diametral entgegengesetzte Punkte auf der Erdoberfläche geben muss, die genau die gleiche Temperatur und den gleichen Luftdruck haben.

Korollar 8.14 Es gibt keine injektive stetige Abbildung $S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ und insbesondere keine Einbettung von S^2 in \mathbf{R}^2 .

Der nächste Satz betrifft die kulinarische Gerechtigkeit. Stellen Sie sich vor, Sie haben ein Schinkenbrot bestehend aus einer Scheibe Weißbrot, etwas Schinken und einer Scheibe Graubrot, und sie wollen dieses Brot gerecht mit Ihrem Freund oder Ihrer Freundin teilen, so dass jeder genau die Hälfte des Weißbrots, genau die Hälfte des Schinkens und genau die Hälfte des Graubrots bekommt. Der folgende Satz besagt, dass sie mit einem Schnitt mit

einem flachen und in einer Ebene sich bewegenden Messer alle drei Bestandteile des Sandwichs genau halbieren können (auch wenn Sie sich vorher um das Brot gestritten haben und alle Zutaten zerfleddert im ganzen Raum verteilt sind oder sogar zertreten und zusammengepresst wurden und teilweise den gleichen Ort einnehmen — sie müssen nur noch jeweils eine messbare Menge bilden).

Satz 8.15 (Der Schinkenbrotsatz) *Seien A , B und C drei beschränkte Lebesgue-messbare Teilmengen vom \mathbf{R}^3 . (Sie müssen nicht so ganz genau wissen, was „Lebesgue-messbar“ bedeutet — es impliziert nur, dass die Teilmengen einen wohldefinierten Inhalt oder Volumen haben.)*

Es gibt eine Ebene $E \subseteq \mathbf{R}^3$, so dass genau die Hälfte jeder der drei Teilmengen auf jeder Seite der Ebene liegt.

Beweis. Da alle drei Mengen beschränkt sind, können wir Maßeinheiten so wählen, dass A , B und C in der Kugel von Radius 1 um den Ursprung enthalten sind. Für eine Lebesgue-messbare Teilmenge $X \subseteq \mathbf{R}^3$ sei $\mu(X)$ ihr Volumen. Natürlich sind $\mu(A)$, $\mu(B)$ und $\mu(C)$ alle endlich.

Für $x \in S^2 \subseteq \mathbf{R}^3$ und $t \in \mathbf{R}$ sei

$$E_{x,t} := tx + x^\perp$$

die Ebene durch den Punkt tx , die orthogonal zum Vektor x ist (oder in anderen Worten, senkrecht zur Geraden durch den Ursprung und dem Punkt $x \in S^2$).

Diese Ebene teilt den Raum in zwei Halbräume, und ein Punkt y liegt im positiven oder negativen Halbraum $E_{x,t}^+$ bzw. $E_{x,t}^-$, je nachdem, ob das innere Produkt $\langle y - tx, x \rangle > 0$ oder < 0 ist. Als Teilmenge von \mathbf{R}^3 sind die Ebenen $E_{x,t}$ und $E_{-x,-t}$ gleich, aber es ist klar, dass Negation von x und t die Halbräume vertauscht, also

$$E_{x,t}^+ = E_{-x,-t}^-$$

und umgekehrt.

Sei

$$\nu_A(x, t) := \mu(E_{x,t}^+ \cap A)$$

das Volumen des Teils von A , das auf der positiven Seite von $E_{x,t}$ liegt, und entsprechend definiere man $\nu_B(x, t)$ und $\nu_C(x, t)$. Man überlegt sich, dass eine kleine Parallelverschiebung oder eine kleine Drehung der Ebene $E_{x,t}$ das Volumen vom positiven Anteil von A , B und C nur wenig verändert, so dass diese drei Funktionen stetig sind.

Wenn man x durch $-x$ und t durch $-t$ ersetzt, vertauschen sich wie gesagt die positiven und negativen Halbräume der Ebene $E_{x,t}$, ohne dass die Ebene selber sich verändert, und deshalb ist der positive Anteil von A bezüglich $E_{-x,-t}$ einfach der negative Anteil von A bezüglich $E_{x,t}$, also der Rest, der nach Abzug des positiven Anteils (und des Anteils *in* der Ebene) von der ganzen Menge übrig bleibt. Da der Anteil von A , der in der Ebene $E_{x,t}$ liegt, immer Volumen 0 hat, können wir also schreiben

$$\nu_A(-x, -t) = \mu(A) - \nu_A(x, t), \quad (8.7)$$

und eine entsprechende Beziehung gilt auch für die Mengen B und C .

Wir gucken uns aber zunächst nur die Menge A an. Da A innerhalb des Einheitsballs liegt, ist klar, dass $\nu_A(x, -1) = \mu(A)$ und $\nu_A(x, 1) = 0$ und dazwischen ist $\nu_A(x, t)$ für festes x eine stetige und monoton fallende Funktion von t (aber nicht unbedingt streng monoton fallend). Nach dem Zwischenwertsatz gibt es Werte $t \in [-1, 1]$, für die

$$\nu_A(x, t) = \frac{1}{2}\mu(A). \quad (8.8)$$

Es gibt einen kleinsten solchen Wert t_- und einen größten solchen Wert t_+ , und wegen der Monotonizität haben auch alle Werte $t \in [t_-, t_+]$ die gleiche Eigenschaft (8.8). Wir setzen $\tau(x)$ gleich dem Mittelwert $\frac{1}{2}(t_- + t_+)$ von t_- und t_+ .

Wenn man x ein wenig verändert in S^2 , so bewegen sich die Punkte tx für $t \in [-1, 1]$ ein wenig und die Ebenen $E_{x,t}$ drehen sich alle ein wenig, so dass auch die Anteile von A , die auf der positiven Seite und auf der negativen Seite liegen, sich verändern, aber nur ein wenig. Das heißt, eine kleine Veränderung in x ändert alle Werte der Funktion ν_A für t im kompakten Intervall $[-1, 1]$ nur wenig, so dass auch die Werte t_- und t_+ und somit auch ihr Mittelwert sich nur geringfügig verändern, wenn man x nicht zu stark verändert. In anderen Worten, τ ist eine stetige Funktion von $x \in S^2$.

Wenn $\nu_A(x, t) = \frac{1}{2}\mu(A)$, dann ist auch $\nu_A(-x, -t) = \frac{1}{2}\mu(A)$ (und umgekehrt), wegen der Beziehung (8.7). Also wenn man x durch $-x$ ersetzt, dann negiert sich das ganze Intervall der Werte von $t \in [-1, 1]$, für die (8.8) gilt, und somit negiert sich auch der Mittelpunkt dieses Intervalls, d.h., es gilt $\tau(-x) = -\tau(x)$ für alle $x \in S^2$.

Betrachten wir nun die Abbildung $f: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) := \left(\nu_B(x, \tau(x)), \nu_C(x, \tau(x)) \right).$$

Weil τ , ν_B und ν_C stetig sind, ist auch f stetig, und nach dem Satz von Borsuk-Ulam muss es einen Punkt $z \in S^2$ geben mit $f(-z) = f(z)$. Aber

weil $\tau(-z) = -\tau(z)$ und wegen der Eigenschaft (8.7) der Funktionen ν_B und ν_C folgt dann

$$\nu_B(z, \tau(z)) = \nu_B(-z, \tau(-z)) = \nu_B(-z, -\tau(z)) = \mu(B) - \nu_B(z, \tau(z))$$

oder $\nu_B(z, \tau(z)) = \frac{1}{2}\mu(B)$, und entsprechend auch für C . Die gleiche Beziehung gilt ohnehin für A weil $\tau(z)$ nach Definition so gewählt wurde.

Wir haben gezeigt, dass ein Schnitt mit der Ebene $E_{z, \tau(z)}$ alle drei Mengen A , B und C halbiert. ■

Geniessen Sie also Ihr halbes Schinkenbrot!

Es wird Ihnen aufgefallen sein, dass in fast allen Anwendungen in diesem Kapitel nur Kreise, zweidimensionale Scheiben und Ebenen und zweidimensionale Sphären vorkamen; nur im Schinkenbrotsatz erschienen noch dreidimensionale Mengen, obwohl der Beweis im Wesentlichen von den Eigenschaften der 2-Sphäre ausgeht.

Dass hier nur kleine Dimensionen vorkamen, liegt daran, dass unser Werkzeugschrank praktisch nur aus der Fundamentalgruppe von S^1 und einigen zusammenziehbaren Räumen besteht. Vor allem kennen wir die höherdimensionalen Homotopiegruppen nicht und können deshalb auch nicht die hier vorgestellten Methoden in höherdimensionalen Beispielen anwenden.

Es gibt noch viele weitere schöne und interessante Anwendungen der Fundamentalgruppe, aber wir heben sie für später auf; die Homologiegruppen, die in der Vorlesung *Algebraische Topologie* des kommenden Wintersemesters behandelt werden, sind auch in höheren Dimensionen oft leicht zu berechnen und haben ähnliche und ähnlich schöne Anwendungen, wie die hier vorgestellten.

Also freuen Sie sich schon auf Ihren gerechten Anteil eines sechsdimensionalen Bacon, Lettuce and Tomato Sandwiches mit Mayonnaise und zwei Sorten Brot!