

Skriptum zur Vorlesung  
**Algebraische Topologie**

Prof. Dr. Gordon Wassermann

Wintersemester 2008-09



# Inhaltsverzeichnis

Was ist Algebraische Topologie?	v
1 Kategorien und Funktoren	1
2 Singuläre Homologie	39
3 Die Eilenberg-Steenrod Axiome	77
4 Berechnungen und Anwendungen	139
5 Zelluläre Homologie	159
6 Kohomologie und Homologie mit beliebigen Koeffizienten	213
7 Homologische Algebra und der Universelle Koeffizientensatz	261
A Klassische Sätze über additive abelsche Gruppen	319
B Das Tensorprodukt	333



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Die ersten vier Standardsimplizes. . . . .	44
2.2	Die Seiten der Standardsimplizes. . . . .	52
3.1	Die Simplizes im Standardprisma $P_1$ . . . . .	101
3.2	Die drei Summanden im Prisma $P_2$ . . . . .	101
3.3	Die baryzentrische Unterteilung des Standardsimplexes. . . . .	113
4.1	Eine Retraktion von $D^n$ auf $S^{n-1}$ . . . . .	148
4.2	Räume, die man aus einem Kreiszylinder kleben kann. . . . .	152
5.1	Der zweidimensionale reelle projektive Raum $\mathbf{R}P^2$ . . . . .	168



# Was ist Algebraische Topologie?

Bis auf elementare Grundkenntnisse und Grunddefinitionen aus der Anfängervorlesung *Analysis* machen Studenten meistens den ersten näheren Kontakt mit der Topologie in einer einführenden Vorlesung *Topologie* wie die, die im Sommersemester 2008 von Prof. Laures gelesen wurde. Dort lernt man die Blickweise der Topologie kennen und die Gegenstände, mit denen sie sich beschäftigt, nämlich topologische Räume und stetige Abbildungen zwischen ihnen, und man erhält im ersten Teil der Vorlesung eine Einführung in die so genannte ***mengentheoretische Topologie***, wo es um Grundkonstruktionen mit topologischen Räumen geht und um wichtige Grundeigenschaften, wie Kompaktheit und Zusammenhang, die sich alleine mit topologischen Mitteln und mit Bezugnahme auf die Familie der offenen (oder gleichwertig, der abgeschlossenen) Mengen der topologischen Struktur definieren lassen.

Man erfährt aber auch sehr schnell, dass Beweise innerhalb dieser Struktur sehr schwierig und knifflig werden können. Auch grundlegende Fragen wie die Existenz von stetigen Abbildungen zwischen bestimmten Räumen oder mit gegebenen Eigenschaften, oder die Frage, ob zwei topologische Räume die gleiche Struktur haben (also ***homöomorph*** sind), lassen sich kaum mit „hauseigenen“ Mitteln behandeln, auch wenn „topologische“ Begriffe wie Kompaktheit und Zusammenhang einen gewissen Beitrag dazu leisten können. Man sehnt sich nach besseren und leistungsfähigeren Werkzeugen, als die, die die „reine“ Topologie selber bieten kann.

Die Homotopie ist ein solches Werkzeug, und ihre Definition ist nicht zu abstrakt und lässt sich auf sehr einleuchtende und natürliche Weise aus dem Begriff eines Weges entwickeln, der sich ohnehin bei der Untersuchung von Zusammenhangseigenschaften aufdrängt. Deshalb wird die Homotopie meist schon in der einführenden Vorlesung kurz behandelt (wie es in der Vorlesung *Topologie* auch der Fall war), und auch wenn das nicht geschieht, ist sie im Allgemeinen der erste Begriff aus der algebraischen Topologie, dem der angehende Topologe begegnet.

Als Werkzeug für die Klassifikation von topologischen Räumen erweist sich die Homotopie sofort als nützlich, denn die sehr naheliegende Betrachtung

tung von Homotopien von Wegen (oder genauer, von Schleifen, also von „Rundwegen“ mit einem festen Start- und Endpunkt) charakterisiert geometrische Eigenschaften eines topologischen Raumes („Löcher“ und ähnliche Gebilde), die sonst sehr schwer sind, geometrisch genau zu beschreiben.

Die Operation der „Verkettung“ oder Hintereinanderreihung von Wegen definiert sogar mit wenig zusätzlichem Aufwand eine Gruppenstruktur auf der Menge der Homotopieklassen von Schleifen und man erhält so die **Fundamentalgruppe**. Auch diese Konstruktion ist einfach genug, dass man sie in einer ersten Vorlesung über Topologie gut behandeln kann.

Mit Hilfe der Fundamentalgruppe kann man Klassifikationsfragen und Fragen nach der Existenz von stetigen Abbildungen *algebraisch* angehen, denn homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen und stetige Abbildungen bestimmen Homomorphismen der Fundamentalgruppen, die sich (bezüglich Verknüpfung, Identität usw.) ähnlich verhalten, wie die ursprünglichen topologischen Abbildungen. Auch einige andere interessante, aber mit Mitteln aus der mengentheoretischen Topologie praktisch unerreichbare Sätze wie der Brouwersche Fixpunktsatz (für die zweidimensionale Scheibe) oder der so genannten **Fundamentalsatz der Algebra** über die Existenz von komplexen Wurzeln eines beliebigen nichtkonstanten komplexen Polynoms, um nur zwei Beispiele zu nennen, lassen sich schon mit der Fundamentalgruppe beweisen. So kann man schnell erfahren, wie nützlich eine solche Übersetzung von Topologie in Algebra sein kann.

Die Fundamentalgruppe kann man als ein erstes „Testmuster“ für die Grundideen der algebraischen Topologie betrachten. Darauf aufbauend gibt es auch *höhere* Homotopiegruppen (die Fundamentalgruppe wird deshalb oft die **erste Homotopiegruppe** genannt) und Homotopiegruppen für *Paare* aus einem Raum und einem Unterraum, die eine feinere Unterscheidung ermöglichen und die in gewissen nützlichen Beziehungen zueinander stehen. Leider können diese Homotopiegruppen aber oft sehr schwer zu berechnen sein.

Zum Glück haben Topologen auch andere Konstruktionen erfunden, die Ähnliches leisten, wie die Homotopiegruppen, aber meistens viel leichter zu berechnen sind. Inzwischen gibt es ein riesiges Arsenal solcher Hilfsmittel und Konstruktionen und sehr geeignete (allerdings auch sehr abstrakte) mathematische Werkzeuge, um diese Konstruktionen zu beschreiben, zu vereinfachen, und zu verallgemeinern.

Der Ausgangspunkt dieser Entwicklung ist die allgemeine Idee, Topologie handhabbarer zu machen, indem man sie durch Algebra ersetzt; dies ist ein *klassischer* Gedanke, für die schon die Zuordnung der Jacobimatrix zu einer differenzierbaren Abbildung Pate gestanden haben könnte.

Auch die anderen Konstruktionen der algebraischen Topologie liefern *al-*



*gebraische* Objekte (Gruppen und Ringe), die aus der topologischen Struktur gewonnen werden können und sie (mit ein wenig Detailverlust) beschreiben und charakterisieren. Zu stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen gehören entsprechende Homomorphismen dieser algebraischen Objekte, zu Homöomorphismen gehören algebraische Isomorphismen. Wenn man die algebraischen Objekte einmal berechnet hat (und das ist der schwierigste Teil der Anwendung, wenngleich es dafür gute Methoden und Hilfsmittel gibt), ist es ein Kinderspiel, durch einen algebraischen und somit oft sehr einfachen Vergleich zum Beispiel zu zeigen, dass zwei Räume nicht homöomorph sein können oder dass es zwischen ihnen stetige Abbildungen mit gewissen Eigenschaften nicht geben kann.

Der vordergründige Inhalt und die Intention der algebraischen Topologie sind also, dass sie topologische Fragen auf einfache und einheitliche Weise löst, indem sie sie in algebraische Fragen verwandelt, die viel einfacher sind, als die ursprünglichen topologischen (wie diese Verwandlung vorgenommen wird, werde ich gleich kurz skizzieren).

Dies ist aber nur eine oberflächliche Beschreibung der algebraischen Topologie und trifft noch nicht den Kern, denn sie unterstreicht nicht die sonstige große Bedeutung der algebraischen Topologie für die Mathematik, ihre Faszination und ihre Schönheit.

Neben der Tatsache, dass sie für viele wichtige topologische Grundfragen das einzig vorhandene effektive Werkzeug bildet, lassen sich ihre Methoden und Grundgedanken auch in anderen Gebieten der Mathematik sehr produktiv anwenden. So sind die anderen Spezialgebiete der Topologie gar nicht erforschbar ohne algebraisch topologische Methoden, und dort, wo die Topologie in anderen Gebieten der Mathematik in Erscheinung tritt, trägt dieses Erscheinungsbild fast immer algebraisch topologische Züge oder man benutzt in diesen Gebieten Strukturen, die von denen der algebraischen Topologie inspiriert wurden, mit ihnen nahe verwandt sind, ähnliche Eigenschaften haben und nach ähnlichen Ideen aufgebaut sind.

Grundkenntnisse über allgemeine Topologie braucht zwar jeder Mathematiker, aber Grundkenntnisse zumindest über Teile der algebraischen Topologie sind noch wichtiger, wenn man in irgendein Gebiet der Mathematik tiefer eindringen will, denn an vielen Stellen erscheinen Argumente, die Mittel aus der algebraischen Topologie verwenden oder zumindest nachmachen.

Darüber hinaus besteht die algebraische Topologie auch aus sehr schöner Mathematik, deren Faszination gerade darin liegt, dass in ihr Strukturen und Methoden aus verschiedenen in ihren Grundzügen einander völlig fremden Gebieten der Mathematik ein elegantes Zusammenspiel eingehen, das nicht nur sehr fruchtbar ist, sondern auch die erstaunliche und immer wieder an den unerwartetsten Stellen zu Tage tretende Einheit der Mathematik

unterstreicht.

Die moderne algebraische Topologie (außerhalb des Rahmens dieser Vorlesung) geht noch weiter, indem sie es ermöglicht, fast jede mathematische Theorie mit algebraisch-topologischen Methoden und Ideen auszustatten. Unsere vordergründige Unterteilung der Mathematik in vielfältige scheinbar kaum verwandte Einzelgebiete wie Algebra, Geometrie, Analysis, Kombinatorik ist eigentlich eine Fiktion und die Mathematik führt uns das immer wieder vor Augen — insbesondere auch in der algebraischen Topologie in ihrer modernen Ausprägung.

Die jetzige Vorlesung ist eine einsemestrige *Einführungsvorlesung* in die algebraische Topologie und kann deshalb leider nicht alle Aspekte berühren, die oben erwähnt wurden. Es geht vielmehr darum, die verständlichsten Grundideen und Konstruktionen kennen zu lernen, auf die die heutige algebraische Topologie aufbaut. Das ist schon wichtig, denn moderne algebraische Topologie ist äußerst abstrakt geworden (gerade daraus bezieht sie ihre Leistungsfähigkeit). Aus diesem Grund kann sie kaum verstanden werden, wenn man nicht die konkreten klassischen Konstruktionen kennt, von denen sie ausgegangen ist und auf die man die Vorstellung stützen kann, wenn man die abstrakteren Ausprägungen später lernt.

Wie sehen die klassischen Strukturen und Konstruktionen der algebraischen Topologie aus? Wie funktionieren sie? Sie bestehen, wie gesagt, aus einer Übersetzung von Geometrie in Algebra, aber wie spiegelt sich die topologische Struktur in ihnen wieder?

Sehr vereinfachend formuliert versucht die algebraische Topologie „Löcher“ in topologischen Räumen sichtbar zu machen und sie versucht durch „Invarianten“ zu charakterisieren, wann und wo in einem Raum ein Loch vorhanden ist (zum Beispiel im Raum, der zurückbleibt, wenn man aus  $\mathbf{R}^n$  einige Punkte entfernt, festzustellen, dass Punkte „fehlen“, und wo diese Punkte vorher waren — weil diese Stellen nicht mehr zu dem betrachteten Raum gehören, sind sie nicht unmittelbar erkennbar), oder allgemeiner wann der Raum gewissermaßen ein außer sich liegendes Gebiet irgendwie umschließt, wie das beim Kreis oder der Sphäre, aber auch beim Torus (Reifenschlauch) der Fall ist. Ursprünglich, im 19. Jahrhundert, waren diese Invarianten einfach Zahlen, die aus einer Betrachtung der Geometrie gewonnen wurden, aber die geometrischen Konstruktionen, die diese Zahlen lieferten, ließen sich leicht zur Definition von Gruppen verwenden und diese geben wegen ihrer komplizierteren Struktur eine detailliertere und genauere Charakterisierung der Geometrie.

Die „einfachste“ dieser Konstruktionen ist die der Homotopiegruppen, über die wir ja einleitend schon gesprochen haben. Wegen der allgemeinen großen Schwierigkeit, die Homotopiegruppen zu berechnen, wollen wir

in dieser Vorlesung die Kenntnisse darüber aus der *Topologie* nicht weiter ausbauen, sondern die begrenzte Zeit für andere Themen verwenden.

Wer sich aber für algebraische Topologie über das hinaus interessiert, was in einer einsemestrigen Einführungsvorlesung untergebracht werden kann, muss sein Wissen über Homotopietheorie erweitern. Der Homotopiebegriff ist sicher der wichtigste Begriff in der algebraischen Topologie überhaupt, aus mehreren Gründen.

Auch die nicht direkt durch Homotopie definierten Gruppen- und Ringzuordnungen der algebraischen Topologie sind nicht ganz losgelöst vom Homotopiebegriff. Diese Zuordnungen bringen eine wesentliche Erleichterung bei der Behandlung von topologischen Fragen, aber dafür muss man etwas bezahlen. Man erreicht sie letztendlich dadurch, dass feine geometrische Details verwischt werden, dass man also die topologische Struktur verschwommen sieht, was sie viel einfacher aussehen lässt. Und diese Verwischung geschieht durch Homotopie — alle Konstruktionen der algebraischen Topologie sind Homotopieinvarianten, und können weder homotope Abbildungen noch Räume vom gleichen Homotopietyp voneinander unterscheiden.

Deshalb wird der Homotopiebegriff und Überlegungen, in denen er eine Rolle spielt, uns weiterhin beschäftigen — nur die Homotopiegruppen wollen wir nicht weiter verfolgen.

Ein nicht ganz so offensichtlicher zweiter Grund, warum die Homotopie und speziell Homotopiemengen von Abbildungen zwischen Räumen (und somit auch die Homotopiegruppen) doch eine zentrale Rolle in der algebraischen Topologie spielen, ist die Tatsache, dass auch die anderen Konstruktionen der algebraischen Topologie sich doch, auch wenn sie so nicht entstanden sind, mit Konstruktionen der Homotopietheorie erzeugen lassen. Die Konstruktionen, von denen hier die Rede ist, lassen sich sehr allgemein gestalten, so dass man viele Fragestellungen und Theorien, die beim ersten Blick mit algebraischer Topologie nichts zu tun haben scheinen, auf einheitliche Weise algebraisch topologisch beschreiben und behandeln kann.

Mit Homotopiegruppen erfasst man Löcher, in dem man versucht, sie in einer sich zusammenziehenden Schlinge zu „fangen“. Eine anderer Konstruktionsart für algebraische Zuordnungen, die sich **Homologietheorie** nennt, ist viel abstrakter, als die der Homotopiegruppen.

Hier geht es darum, den Raum auszufüllen mit einfachen Bausteinen. Beim Wort „Baustein“ denkt man zuerst an einen Quader, oder in zwei Dimensionen entsprechend an ein Rechteck, und in höheren Dimensionen an ähnliche Gebilde, aber die mathematische Beschreibung wird wesentlich einfacher, wenn wir wirklich *möglichst simple* Bausteine verwenden, also Dreiecke statt Vierecke, als einfachste dreidimensionale Bausteine Tetraeder statt Quader, und so weiter. Bausteine dieser einfachen Form heißen sinn-

vollerweise **Simplizes** (und einer davon wird ein **Simplex** genannt). Ein  $n$ -dimensionaler Simplex ist einfach die komplexe Hülle von  $n + 1$  affin unabhängigen Punkten im euklidischen Raum, und er hat eine Oberfläche oder einen Rand, der aus den konvexen Hüllen von jeweils  $n$  dieser  $n + 1$  Eckpunkte besteht, also einen Rand, der aus gewissen  $n - 1$ -dimensionalen Simplizes zusammengesetzt ist. Dieser Rand sieht insgesamt aus wie eine Sphäre und ist selber „randlos“.

Wie werden Löcher in der Homologietheorie erkannt? Dort wo *kein* Loch ist, kann man einen Simplex hinstellen, und der Rand dieses Simplexes ist ein Konglomerat von Simplizes, das selber keinen Rand hat (so etwas nennt man einen **Zykel**). Wenn ein Loch vorhanden ist, so kann man sich einen Simplex denken, der mit seinem Innern das Loch überdeckt, und der selber (wegen des Lochs, das er berührt) nicht ganz im Raum enthalten ist, dessen Rand aber im Raum liegt, da nur das Innere des gedachten Simplexes das Loch abdeckt.

In dem Raum gibt es diesen Simplex natürlich nicht, aber er hinterlässt trotzdem eine Spur, die man in dem Raum sehen kann, nämlich seinen Rand, der wie jeder andere Rand ein Zykel ist. Dieser Zykel unterscheidet sich aber von anderen Zykeln im Raum dadurch, dass man *innerhalb* des Raumes nichts finden kann, dessen Rand er ist; er ist mehr oder weniger Rand des *Lochs*.

Auf dieses Skelett einer Konstruktion packen wir nun ein bisschen Fleisch, um daraus einen gut funktionierenden Mechanismus zu machen. Da der Rand eines Simplexes aus mehreren Simplizes besteht, reicht die Betrachtung einzelner Simplizes ohnehin nicht aus, und wir betrachten deshalb allgemein Kombinationen aus Simplizes. Irgendwie müssen wir beschreiben, wie diese zueinander liegen und wie sie miteinander verklebt sind, aber statt dies auf geometrische Art umständlich zu beschreiben, lassen wir uns von unserer Faulheit zu einem faulen aber sehr wirkungsvollen Trick verleiten: wir addieren sie rein formal miteinander, betrachten also *formale Summen* oder *formale Linearkombinationen* von Simplizes (diese nennen wir **Ketten**). Auf diese Weise erhalten wir automatisch eine algebraische Struktur geschenkt; die Ketten bilden per Definition eine additive abelsche Gruppe. Die Vorzeichen in den Summen beschreiben, mit welchem Drehsinn die einzelnen Simplizes miteinander verklebt sind, und der Rand eines Simplexes lässt sich schreiben als eine alternierende Summe der in ihm enthaltenen niederdimensionalen Simplizes, die die Seiten des ursprünglichen Simplexes sind. Diese Zuordnung erweitert sich linear zu einem Gruppenhomomorphismus, dem Randoperator, der jeder Kette ihren Rand zuordnet. Randlose Ketten, d.h., Ketten, deren Rand 0 ist, heißen Zykeln und jeder Rand ist insbesondere ein Zykel, aber nicht jeder Zykel ist ein Rand.

Die Zykeln einer gewissen Dimension  $n$ , als Kern des Randoperators, und

die Ränder der Dimension  $n$ , als Bild des Randoperators, bilden jeweils eine Untergruppe der  $n$ -dimensionalen Kettengruppe, wobei die Randgruppe selber eine Untergruppe der Zykelgruppe ist, weil jeder Rand automatisch ein Zykel ist. Der Quotient der Zykelgruppe nach der Randgruppe heißt die  $n$ -te **Homologiegruppe** des Raumes, und ihre nichttrivialen Elemente entsprechen nicht berandenden Zykeln und somit „nicht auffüllbaren Löchern“ im topologischen Raum.

Es gibt verschiedene Varianten dieser Konstruktion, je nachdem ob man den Raum vorher auf starre Weise in Simplizes zerlegt hat, die auf eine feste Art miteinander verklebt sind (**simpliziale Homologie**), oder ob man ohne weitere Einschränkungen nur stetige aber womöglich ausgeartete Bilder von Simplizes in dem Raum betrachtet (**singuläre Homologie**), oder ob man andere spezielle Zerlegungen der Räume vornimmt (z.B., die **zellulären** Kettengruppen, die eine vereinfachte Berechnung der Homologie für eine spezielle aber sehr weit verbreitete Klasse von Räumen erlauben, die man **CW-Komplexe** nennt). Je nachdem erhält man andere Kettengruppen, Zykelgruppen und Randgruppen, aber die Homologiegruppen als Quotienten der Zykelgruppen nach den Randgruppen sind immer gleich. Sie hängen nicht von diesen Details ab und beschreiben wirklich die Topologie des Raumes und nicht nur Eigenheiten der Konstruktion.

In der Vorlesung werden wir übrigens der singulären Homologie den Vorzug geben. Zwar hat die simpliziale Homologie den Vorteil, intuitiv zugänglicher und auf eine greifbarere und direktere Art berechenbar zu sein, aber sie ist nicht für alle Räume definiert und sie erfordert zur Anwendung eine Vorarbeit, nämlich die Anbringung eines simplizialen Gitters in dem Raum, aus dem die Gruppen gewonnen werden. Der Nachweis, dass die Gruppen nicht von der Wahl dieses Gitters abhängen, ist sehr technisch, deshalb auch nicht sonderlich interessant, und kostet unnötig Zeit. Alle Varianten der Homologie haben einen gewissen Katalog von gemeinsamen Grundeigenschaften, die wir auf jeden Fall behandeln müssen, und diese können als Werkzeuge eingesetzt werden, um die singulären Homologiegruppen mit kaum mehr Aufwand zu berechnen, als im simplizialen Fall. Und die singuläre Homologie ist für alle topologischen Räume unmittelbar erklärt und erfordert keine später behindernde Hilfsstruktur, die aus der fertigen Konstruktion durch einen Invarianzbeweis mühsam wieder „herausgespült“ werden muss.

So viel zu dieser Art von Gruppenkonstruktion in der algebraischen Topologie. Die wichtigen Merkmale der Homologiegruppen sind: Erfassung von Löchern durch das Scheitern eines Versuchs, sie mit Simplizes auszufüllen; eine relativ komplizierte und umständliche Konstruktion der Homologiegruppen aber dafür relativ einfache Gruppen, die nach Konstruktion automatisch abelsch sind; Existenz einer Reihe von leistungsfähigen Standardmethoden

für die Berechnung und deshalb relativ problemlose Berechenbarkeit der Homologiegruppen.

Obwohl sich die singuläre Homologie mit Hilfe der „Axiome“ der Homologietheorie, also einiger allgemeiner Beziehungen zwischen den Homologiegruppen verwandter Räume, mit etwas Übung gut berechnen lässt, sind die Kettengruppen, aus denen sie gewonnen wird, für alle bis auf die einfachsten Räume *riesig* und der Umgang mit ihnen deshalb manchmal unangenehm. Für eine große und sehr häufig anzutreffende Klasse von Räumen, die fast alle im Alltagsleben vorkommende topologische Räume umschließt, lässt sich die Homologie auf eine vereinfachte Art mit kleinen, bei kompakten Räumen sogar endlich erzeugten Kettengruppen gewinnen. Diese Räume werden aus euklidischen Scheiben oder Bällen  $D^n$  verschiedener Dimensionen zusammengeklebt und heißen **CW-Komplexe**. Die Scheiben, aus denen sie zusammengebaut sind, werden **Zellen** genannt und erzeugen formal die **zellulären Kettengruppen**, aus denen man die (ganz normalen) Homologiegruppen berechnen kann. Hier handelt es sich *nicht* um eine neue Art von Homologie, sondern nur um eine neue Art, die singuläre Homologie zu berechnen!

Die CW-Komplexe spielen auch wegen ihrer homotopietheoretischen Eigenschaften eine wichtige Rolle in der algebraischen Topologie. Sie und die aus ihnen gewonnene zelluläre Homologie behandeln wir gegen Ende des Semesters.

Weitere Themen werden sich anschließen, wenn die Zeit es zulässt. Dazu gehören die Homologie mit nichtganzzahligen Koeffizienten, bei der, grob gesagt, die singulären Kettengruppen nicht aus  $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen von Simplizes bestehen, sondern aus Linearkombinationen mit Koeffizienten in einer anderen abelschen Gruppe  $G$ . Die eleganteste und einfachste Konstruktion dieser Kettengruppen besteht darin, das Tensorprodukt der „normalen“ Kettengruppen mit  $G$  zu bilden. Die Homologie mit anderen Koeffizienten liefert manchmal Information in Fällen, wo die  $\mathbf{Z}$ -Homologie verschwindet.

Zu dem genannten Thema gehören auch **universelle Koeffizientensätze**, die eine einfache Beziehung zwischen den normalen Homologiegruppen und den Homologiegruppen mit Koeffizienten in einer Gruppe  $G$  aufstellen. Zu deren Formulierung ist aber eine umfangreiche Vorbereitung mit Grundkenntnissen aus der so genannten **homologischen Algebra** erforderlich.

Einen weiteren wichtigen Themenkomplex bildet die duale Version der Homologietheorie, d. h., die **Kohomologie**. Ein Raum hat in jeder nichtnegativen Dimension eine Homologiegruppe, und das Gleiche gilt für die Kohomologie. Die Kohomologiegruppen lassen sich auch einfach (wieder mit einem „universellen Koeffizientensatz“) aus den Homologiegruppen berechnen. Sie liefern aber trotzdem eine wesentlich neue Struktur, denn anders als bei der Homologie bildet die Gesamtheit der Kohomologiegruppen eines Raumes

(über alle Dimensionen) einen *Ring*, d. h., die Kohomologie hat auch eine multiplikative Struktur und ist deshalb leistungsfähiger als die Homologie alleine.

Schon in der Vorlesung *Topologie* haben Sie die Grundzüge einer abstrakten mathematischen „Sprache“ kennengelernt, die speziell dafür geschaffen wurde, über mathematische Strukturen und über Zuordnungen zwischen ihnen präzise und *mathematisch* zu sprechen — es handelt sich um die Sprache der **Kategorientheorie**, die für Mathematik, die die Grenzen zwischen Fachgebieten sprengt, einen ähnlichen Nutzen bringt wie die Sprache der Mengenlehre für die Mathematik insgesamt.

Da die algebraische Topologie zwei Gebiete der Mathematik berührt (Topologie und Algebra) und als ihren wesentlichen Inhalt eine Zuordnung von algebraischen Objekten zu topologischen Objekten beinhaltet, ist die Kategoriensprache ihre natürliche Ausdrucksweise und wird überall in dieser Vorlesung wesentlich verwendet.

Für die algebraische Topologie ist diese Sprache mehr als nur ein Hilfsmittel; auch die oben umrissenen sehr geometrischen Konstruktionen der „klassischen“ algebraischen Topologie werden heute oft mit kategorientheoretischen Konstruktionen beschrieben, weil sie sich dann sofort für alle möglichen mathematischen Strukturen verallgemeinern lassen. Die Kategorientheorie hat sich praktisch zur Muttersprache algebraischer Topologen entwickelt — ohne sie ist moderne algebraische Topologie nicht machbar.

Die Grundkenntnisse darüber aus der Topologievorlesung des Sommersemesters 2008 werden für die meisten Zwecke sicher ausreichend sein, aber weil einige Spezialfälle und Strukturen, die wir oft brauchen werden, dort vielleicht nicht vorkamen, wollen wir zu einem geeigneten gemeinsamen Ausgangspunkt kommen (auch für Quereinsteiger), indem wir die für uns wichtigen Begriffe und Beispiele aus dieser Theorie kurz wiederholen; das werden wir im ersten thematischen Abschnitt dieses Skriptums tun. Danach folgt die Konstruktion der singulären Homologiegruppen, die Beschreibung ihrer Eigenschaften und die Erläuterung der ersten und einfachsten Berechnungsmethoden für sie. Anschließend besprechen wir kurz einige einfache Anwendungen (damit Sie sehen, dass es tatsächlich welche gibt). Das Semester schließt, wie schon erwähnt, mit CW-Komplexen und zellulärer Homologie, und mit weiterführenden Themen wie Kohomologie, soweit die Zeit es erlaubt.

Zum Schluss führe ich noch eine kurze Literaturliste auf; für das Verständnis der Vorlesung und der Übungen reicht aber die Vorlesungsmitschrift völlig aus!

## Literatur

- [1] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1994.
- [2] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 119. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1988, korrigierter 4. Druckausgabe, 1998.
- [3] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics series. The University of Chicago Press, Chicago-London, 1999. Die klassische algebraische Topologie (einschließlich der Homotopietheorie), so präsentiert und ergänzt, dass der Übergang zur modernen Sichtweise in der algebraischen Topologie gut vorbereitet und erleichtert wird.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Port Melbourne-Madrid-Cape Town, 2002. Kann kostenlos von <http://www.math.cornell.edu/~hatcher> heruntergeladen werden.
- [5] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, Nachdruck der 2. Auflage (1980), 1995.
- [6] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966, Nachdruck als Taschenbuch bei Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1. Auflage 1981, korrigierter 3. Druck, 1995. Ein Klassiker, der den Stoff der Vorlesung vollständig und ausführlich abdeckt.
- [7] James W. Vick. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2. Auflage, 1994.



# Kapitel 1

## Kategorien und Funktoren

In der algebraischen Topologie geht es darum, topologische Fragen zu beantworten, in dem man sie in algebraische Fragen verwandelt, die wesentlich leichter durch Berechnungen zu entscheiden sind, als die ursprünglichen geometrischen Fragen. Diese Erleichterung erhält man nicht ganz kostenlos, denn bei dieser Umwandlung geht ein Teil der geometrischen Information verloren — die Algebra erfasst nur die sehr groben Merkmale, die durch Homotopien nicht verändert werden. Aber es lohnt sich auf jeden Fall, diesen Preis zu zahlen, denn die Fragen, um die es geht, sind mit rein topologischen Methoden oft überhaupt nicht lösbar.

Dies bedeutet, dass wir in dieser Vorlesung ständig dabei sein werden, topologischen Dingen (Räumen, stetigen Abbildungen) entsprechende algebraische Dinge (Gruppen oder Ringe, Homomorphismen) zuzuordnen und aus dieser Zuordnung Rückschlüsse zu ziehen; das geht aber nur, wenn die Zuordnung nicht ganz willkürlich ist und das Wort *entsprechend* auch mit einem gewissen Inhalt gefüllt ist, dahingehend, dass topologische Eigenschaften oder Besonderheiten sich in ähnlichen algebraischen Eigenschaften oder Besonderheiten widerspiegeln.

Wir werden nicht nur *eine* solche Übersetzung Topologie  $\longrightarrow$  Algebra anwenden, sondern mehrere verschiedene und mehrere Varianten von jeder Sorte. Auch anderswo in der Mathematik kann es nützlich sein, eine Struktur in eine andere und eventuell ganz andersartige Struktur zu verwandeln, um damit Fragen leichter beantworten zu können oder um eine bekannte Konstruktion auf neue Gebiete zu verallgemeinern (etwas, was gerade mit den Ideen und Begriffen der algebraischen Topologie sehr oft gemacht wird!), und auch da sollen Rückschlüsse aus dieser Übersetzung möglich sein, so dass die Art der Übersetzung gewisse allgemeine Regeln erfüllen sollte und erfüllen wird.

Weil wir diese Methode nicht nur einmal für einen bestimmten Zweck,

sondern intensiv und ständig und in allen möglichen Varianten anwenden werden, wobei immer die gleichen Grundeigenschaften gelten, die es erst ermöglichen, aus der Übersetzung Rückschlüsse für die ursprüngliche Situation zu ziehen, bedeutet es eine wesentliche Hilfe, wenn wir dafür eine eigene geeignete Sprache anwenden (in die diese immer gleichen Grundeigenschaften gewissermaßen schon eingebaut sind).

Diese Sprache kennen die meisten Hörer dieser Vorlesung schon — es handelt sich um die Sprache der **Kategorien** und **Funktoren**, oder zusammengefasst, um die **Kategorientheorie**, deren Grundbegriffe schon in der Vorlesung *Topologie* des Sommersemesters 2008 eingeführt und benutzt wurden. Das war auch ganz folgerichtig, denn obwohl man definitionsgemäß mit dieser Sprache über jedes beliebige Gebiet der Mathematik gut reden kann, ist ihre Heimat, auch historisch, die algebraische Topologie.

In dieser Vorlesung werden wir sie noch intensiver brauchen als das im Sommersemester der Fall war. Um dieses sehr wichtige Wissen aufzufrischen (oder für Hörer zugänglich zu machen, die die Vorlesung des vorigen Semesters nicht gehört haben), und um es durch einige neue und für uns relevante Beispiele zu ergänzen, wollen wir in diesem Kapitel diese Grundkenntnisse kurz und schnell wiederholen und ein wenig präzisieren und ausbauen.

Eine **Kategorie** ist ein mathematischer Begriff, der eine mathematische Struktur modellieren soll. Damit ist gemeint eine bestimmte *Art* mathematischer Struktur mitsamt den Struktur erhaltenden Abbildungen (wie etwa Gruppen oder abelsche Gruppen und Homomorphismen, oder topologische Räume und stetige Abbildungen, usw.) und nicht eine bestimmte Instanz dieser Art. Allerdings ist diese Intention zwar die Motivation für folgende Definition, was sich leicht nachvollziehen lässt, aber sie wird in der Definition nicht offen genannt; die Definition ist bewusst so formuliert, dass auch „exotische“ und sehr abstrakte Anwendungen möglich sind und durchaus ihren Nutzen haben.

**Definition 1.1 (Kategorie)** Eine **Kategorie**  $\mathcal{K}$  besteht aus folgenden Bestandteilen:

- a) Eine Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , deren Elemente die **Objekte** von  $\mathcal{K}$  heißen;
- b) für je zwei Elemente von  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , also für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{K}$  eine (eventuell auch leere) Menge  $\text{Mor}(A, B)$ , deren Elemente die **Morphismen von  $A$  nach  $B$**  heißen.  $A$  heißt das **Quellobjekt** und  $B$  das **Zielobjekt** eines solchen Morphismus.

Es soll ferner gelten, dass die Morphismenmengen  $\text{Mor}(A, B)$  für verschiedene Objektpaare  $(A, B)$  zueinander disjunkt sind, d. h., dass das Quell- und das Zielobjekt eines Morphismus eindeutig bestimmt sind;

c) für je drei Objekte  $A, B$  und  $C$  von  $\mathcal{K}$  eine Abbildung

$$\circ: \text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, C),$$

genannt die **Verknüpfungsabbildung** oder die **Verknüpfung**, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind (hier schreiben wir die Verknüpfung in Infix-Notation, wie man es üblicherweise tut, also statt  $\circ(g, f)$  schreiben wir  $g \circ f$ ):

- i)  $\circ$  ist assoziativ, d. h., wenn  $A, B, C$  und  $D \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und wenn  $f \in \text{Mor}(A, B)$ ,  $g \in \text{Mor}(B, C)$  und  $h \in \text{Mor}(C, D)$ , dann ist  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ;
- ii) für jedes Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  existiert ein Morphismus  $\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ , genannt der **Identitätsmorphismus von  $A$**  oder die **Identität von  $A$** , so dass für jedes Objekt  $B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und für jeden Morphismus  $g \in \text{Mor}(A, B)$  gilt  $g \circ \text{id}_A = g$ , und für jedes Objekt  $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und für jeden Morphismus  $h \in \text{Mor}(C, A)$  gilt  $\text{id}_A \circ h = h$ .

**Bemerkung 1.2** Der Identitätsmorphismus eines Objektes  $A$  ist offenbar eindeutig bestimmt, denn wenn  $i$  und  $i'$  zwei Morphismen in  $\text{Mor}(A, A)$  sind, die die Eigenschaft 1.1 c ii) der Identität haben, so gilt  $i = i \circ i'$  (weil  $i'$  eine Identität ist) und  $i \circ i' = i'$  (weil  $i$  eine Identität ist), also  $i = i'$ .

**Bemerkung 1.3** a) Dieser Begriff wurde erfunden, um eine mathematische Theorie oder eine mathematische Struktur zu modellieren und somit selber für mathematische Untersuchungen zugänglich zu machen, und es ist nicht sehr schwer zu verstehen, welche Bestandteile des Kategorienbegriffs welchen Merkmalen einer mathematischen Struktur entsprechen, hier einmal am Beispiel der Gruppentheorie erläutert: die *Objekte* der Kategorie sind normalerweise die Struktur tragenden Mengen, die in der Theorie vorkommen (in der Gruppentheorie also die Gruppen) und wenn  $A$  und  $B$  zwei Objekte der Kategorie sind, dann sind die *Morphismen* von  $A$  nach  $B$  normalerweise die Struktur erhaltenden Abbildungen zwischen diesen Mengen, also im Falle der Gruppentheorie die Gruppenhomomorphismen von der Gruppe  $A$  in die Gruppe  $B$ . Die Verknüpfung der Kategorie ist normalerweise auch nichts anderes als die übliche Verknüpfung von Abbildungen und erfüllt deshalb automatisch die Eigenschaften aus Definition 1.1 Teil c).

- b) Wichtig ist es, das Wort *normalerweise* in Teil a) nicht zu übersehen. Nirgendwo in der Definition von *Kategorie* wird verlangt, dass Objekte wirklich Mengen sein müssen und dass Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen sein müssen. Die Objekte können irgendwelche mathematischen Gegenstände sein und müssen nicht unbedingt Mengen, geschweige denn Mengen mit Struktur sein (außer in dem Sinne, dass alle mathematischen Gegenstände sich als Mengen definieren lassen). Die Morphismen müssen, sogar wenn die Objekte Mengen sind, nicht Abbildungen zwischen diesen Mengen oder überhaupt Abbildungen sein. Und die Verknüpfungsabbildung muss nicht identisch mit der Verknüpfung von Abbildungen sein. Nicht nur sind solche „exotische“ Kategorien durchaus erlaubt, sie haben sogar nützliche Anwendungen und kommen gar nicht so selten vor. Beispiele werden wir gleich präsentieren.
- c) Die „normale“ Situation aus Teil a) ist dennoch die häufigste, und da jede Struktur auf Mengen sich als isomorphes Abbild auf jede andere Menge der gleichen Mächtigkeit übertragen lässt, gibt es in solchen Kategorien mindest so viele verschiedene Objekte, wie es Mengen einer gegebenen Mächtigkeit gibt. Ausser im Falle der leeren Menge ist diese Anzahl so groß, dass ohne Widersprüche in der Mengenlehre heraufzubeschwören die Gesamtheit der Objekte einer solchen Kategorie gar nicht selber eine Menge sein darf, sondern nur eine **Klasse** (also eine Ansammlung von Mengen, die aber nicht selber als Element einer anderen Menge in Erscheinung treten darf). Deshalb wird in Definition 1.1 a)  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  auch explizit als Klasse und nicht als Menge vorausgesetzt. Die *Morphismen* zwischen zwei Objekten bilden aber tatsächlich immer eine *Menge*, und nicht nur eine Klasse.
- d) Es kann aber durchaus vorkommen, dass die Objekte einer Kategorie wirklich eine Menge bilden. Solche Kategorien nennt man **kleine Kategorien**.
- e) Es mag ein bisschen pedantisch klingen, in 1.1 b) zu verlangen, dass die Morphismenmengen alle disjunkt sein müssen, aber es wird in unseren Anwendungen in der Tat so sein, dass die Eigenschaften von stetigen Abbildungen (wichtige Morphismen für uns) in Bezug auf die algebraische Topologie sehr stark davon abhängen, welchen Quellraum und insbesondere auch welchen Zielraum sie haben.

Wir werden aber in den Beispielen, die wir unten bringen, nicht immer streng auf Erfüllung dieser Bedingung achten, weil sonst die Defini-

tionen einiger Beispiele durch technische und nicht wesentlich inhaltliche Einzelheiten sehr unverständlich werden. Da wo die Bedingung aber scheinbar verletzt ist, muss man nur die angegebenen Morphismenmengen  $\text{Mor}(A, B)$  ersetzen durch  $\text{Mor}(A, B) \times \{A\} \times \{B\}$ , um sie disjunkt zu machen (und natürlich muss man die Definition der Verknüpfung entsprechend anpassen, was aber die anderen verlangten Eigenschaften nicht zerstört).

**Notation 1.4** a) Weil die Situation in Bemerkung 1.3 a) so häufig vorkommt, benutzt man oft einen gewöhnlicheren Namen für die Morphismenmengen, nämlich  $\text{Hom}(A, B)$  statt  $\text{Mor}(A, B)$ .

b) Statt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  schreibt man oft einfach  $A \in \mathcal{K}$ .

c) Statt  $f \in \text{Mor}(A, B)$  schreibt man oft  $f: A \longrightarrow B$ . Wichtig ist es, in Erinnerung zu halten, dass  $f$  trotzdem nicht eine Abbildung sein muss!

d) Wir werden es sehr oft mit mehreren Kategorien gleichzeitig zu tun haben, manchmal auch in Situationen, wo gewisse Objekte sowohl zu der einen als auch zu einer anderen Kategorie gehören können. In diesen Fällen schreiben wir  $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  statt einfach  $\text{Mor}(A, B)$ , um genau zu kennzeichnen, in welcher Kategorie wir die Morphismen betrachten.

e) Eine manchmal verwendete noch einfachere Notation für die Morphismenmengen, die automatisch den Namen der Kategorie in sich trägt, besteht darin,  $\mathcal{K}(A, B)$  für  $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  zu schreiben.

Um ein Gefühl für den Begriff der Kategorie zu bekommen und auch die (nützlichen und weniger nützlichen) exotischen Varianten kennen zu lernen, betrachten wir folgende

**Beispiele 1.5** a) Die Kategorie **Meng** der Mengen und Mengenabbildungen.  $\text{Ob}(\mathbf{Meng})$  ist die Klasse aller Mengen, und für je zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{Meng}}(A, B)$  die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen  $A \longrightarrow B$ .

b) Die Kategorie **Gp** der Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Die Objekte von **Gp** sind alle Gruppen und für je zwei Gruppen  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{Gp}}(A, B)$  die Menge aller Gruppenhomomorphismen  $A \longrightarrow B$ .

c) Die Kategorie **AbGp** der *abelschen* Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Die Objekte von **AbGp** sind alle abelschen Gruppen und für je zwei abelsche Gruppen  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{AbGp}}(A, B)$  die Menge aller

Gruppenhomomorphismen  $A \longrightarrow B$ . Man beachte, dass  $A$  und  $B$  auch Objekte der Kategorie **Gp** sind, und  $\text{Mor}(A, B)$  ist in beiden Kategorien die gleiche Menge; nur die Klassen der Objekte unterscheiden sich.

- d) Die Kategorie **Top** der topologischen Räume und stetigen Abbildungen. Die Objekte von **Top** sind alle topologischen Räume und für je zwei Räume  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\text{Top}}(A, B)$  die Menge aller stetigen Abbildungen  $A \longrightarrow B$ .
- e) Wer die vorangegangenen Beispiele verstanden hat, braucht keine explizite Definition mehr der ähnlich aufgebauten Kategorie **Ring** aller Ringe, der Kategorie **KR1** aller kommutativen Ringe mit 1, der Kategorie **Körp** aller Körper, der Kategorie  $K\text{-VR}$  aller Vektorräume über einen gegebenen Körper  $K$ , der Kategorie **DMf** aller differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, usw.
- f) Wir definieren eine nicht ganz so klassische Kategorie  $\Delta$ , die einige Anwendungen in der algebraischen Topologie hat (allerdings führen diese Anwendungen aus dem Themenbereich dieser Vorlesung heraus). Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$  hat diese Kategorie ein Objekt

$$\mathbf{n} := \{0, 1, \dots, n\},$$

die Menge der natürlichen Zahlen  $\leq n$ , die wir als eine geordnete Menge mit der üblichen Ordnung von  $\mathbf{N}$  betrachten.

Für je zwei Objekte  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{n} \in \text{Ob}(\Delta)$  setzen wir  $\text{Mor}_{\Delta}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  gleich der Menge aller ordnungserhaltenden, also (nicht unbedingt streng) monoton steigenden Abbildungen  $\mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{n}$ .

Die Verknüpfung von Morphismen ist die normale Verknüpfung von Abbildungen, wobei die Eigenschaft monoton steigend zu sein offensichtlich erhalten bleibt (so dass diese Verknüpfung tatsächlich Morphismen der Kategorie  $\Delta$  liefert). Als Identitätsmorphismen können wir die Identitätsabbildungen der Mengen  $\mathbf{n}$  nehmen, die ja ordnungserhaltend sind.

Bisher haben wir nur ganz normale Beispiele genannt, der Sorte wie in Bemerkung 1.3 a) (Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen), auch wenn das letzte Beispiel ein bisschen ungewöhnlich war. Hier nun einige andersartige:

- g) Wir definieren wie folgt eine Kategorie **Teil**, die das Teilverhältnis zwischen den natürlichen Zahlen gewissermaßen modelliert. Wir setzen  $\text{Ob}(\mathbf{Teil})$  als die Menge  $\mathbf{N}_+$  der positiven natürlichen Zahlen, und für je zwei Elemente  $a$  und  $b$  von  $\text{Ob}(\mathbf{Teil})$  setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathbf{Teil}}(a, b) := \{p \in \mathbf{N}_+ \mid ap \text{ teilt } b\}.$$

(Diese Morphismenmenge ist natürlich nichtleer genau dann, wenn  $a$  ein Teiler von  $b$  ist.) Die Verknüpfungsabbildung definieren wir einfach als das Produkt, d. h., wenn  $a, b$  und  $c$  Objekte von **Teil** sind und wenn  $p \in \text{Mor}(a, b)$  (d. h.,  $ap$  teilt  $b$ ) und  $q \in \text{Mor}(b, c)$  (d. h.,  $bq$  teilt  $c$ ), so setzen wir  $q \circ p := pq \in \text{Mor}(a, c)$  und stellen sofort fest, dass dies tatsächlich ein Morphismus von  $a$  nach  $c$  ist, denn  $ap \mid b$  und deshalb gilt  $apq \mid bq \mid c$ , also  $a(pq) \mid c$  (wir benutzen hier die übliche Notation „ $x \mid y$ “ für „ $x$  teilt  $y$ “).

Die Eigenschaften i) und ii) aus Teil c) von Definition 1.1 sind offensichtlich erfüllt: i) gilt, weil die Multiplikation von Zahlen assoziativ ist, und ii) gilt offenbar mit  $\text{id}_a := 1 \in \text{Mor}(a, a)$  für jedes Objekt  $a$  von **Teil**.

Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass die hier definierten Morphismenmengen entgegen Bedingung 1.1 b) nicht disjunkt sind, aber das ist kein wesentliches Problem, denn sie lassen sich wie in Bemerkung 1.3 e) erläutern leicht disjunkt machen, ohne die anderen wichtigen Eigenschaften zu zerstören (aber dennoch zum Schaden der Klarheit der Definition, weshalb wir auf die Ausführung verzichtet haben).

- h) Sei  $G$  eine fest gewählte Gruppe. Wir definieren eine Kategorie  $\mathcal{G}$  mit genau einem Objekt  $*$ , so dass  $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$  ist und die Verknüpfung die Gruppenmultiplikation ist; sie ist assoziativ und das neutrale Element  $e \in G$  ist der Identitätsmorphimus.
- i) Sei  $K$  eine beliebige Klasse. Wir definieren eine Kategorie  $\mathcal{K}$ , indem wir  $\text{Ob}(\mathcal{K}) = K$  setzen und für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{K}$  die Morphismenmenge  $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  als eine einelementige Menge wählen, dessen Element wir mit  $f_{AB}$  bezeichnen; diese Elemente wählen wir alle verschieden, damit die Morphismenmengen disjunkt werden. Die Verknüpfung lässt sich nur auf eine Weise definieren, nämlich  $f_{BC} \circ f_{AB} = f_{AC}$ . Dies erfüllt offensichtlich die Bedingungen aus Definition 1.1 c).

Hier noch einige zumindest zu einem gewissen Grad „exotische“ Kategorien, die für uns in dieser Vorlesung sehr wichtig sein werden. Es handelt sich um kleine Abwandlungen der topologischen Kategorie,

die auf die Konstruktion und die Eigenschaften der Homotopiegruppen und der Homologiegruppen angepasst sind. In allen Fällen muss Bemerkung 1.3 e) angewendet werden, um die Disjunktheit der Morphismenmengen einzurichten; wir gehen bei den einzelnen Beispielen nicht mehr explizit darauf ein.

- j) Die Kategorie  $\mathbf{Top}_*$  der *punktierten topologischen Räume*. Die Objekte von  $\mathbf{Top}_*$  sind Paare  $(X, p)$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $p$  ein Punkt von  $X$  (man nennt ihn den *ausgezeichneten Punkt* oder den *Basispunkt* des punktierten Raumes  $(X, p)$ ). Die Morphismen  $(X, p) \longrightarrow (Y, q)$  sind die stetigen Abbildungen  $f: X \longrightarrow Y$ , so dass  $f(p) = q$ . Die Verknüpfung ist die normale Verknüpfung von Abbildungen und respektiert automatisch die ausgezeichneten Punkte. Der Identitätsmorphismus von  $(X, p)$  ist die normale Identität von  $X$  (die  $p$  ja nach  $p$  abbildet). Offensichtlich erfüllt diese Struktur alle Eigenschaften von Definition 1.1. Da der ausgezeichnete Punkt in die Struktur eingebaut ist, ist diese Kategorie geeignet für Konstruktionen, die von einem vorher ausgewählten Punkt ausgehen, wie es für die Fundamentalgruppe und die anderen Homotopiegruppen der Fall ist. Eine feste Wahl eines Grundpunktes wird in  $\mathbf{Top}_*$  automatisch mitgeliefert.

Weil in Anwendungen dieser Kategorie der ausgezeichnete Punkt tatsächlich eine besondere Rolle spielt, ist es üblich, ihn mit  $*$  zu bezeichnen, und man kann die ausgezeichneten Punkte verschiedener Objekte der Kategorie durch einen Index unterscheiden, der den topologischen Raum nennt, oder auf eine sonstige Art die Zeichen unterscheiden:  $(X, *_{\mathcal{X}})$  und  $(Y, *_{\mathcal{Y}})$ , oder  $(X, *)$  und  $(X', *)$ , zum Beispiel.

- k) Die Kategorie  $\mathbf{Top}^2$  der *topologischen Raumpaare*. Die Objekte von  $\mathbf{Top}^2$  sind Paare  $(X, A)$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $A \subseteq X$  ein Unterraum von  $X$  ist. Die Morphismen  $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$  sind die stetigen Abbildungen  $f: X \longrightarrow Y$ , so dass  $f(A) \subseteq B$ , die Verknüpfung ist wieder die normale Verknüpfung von Abbildungen und der Identitätsmorphismus von  $(X, A)$  ist wieder die normale Identität von  $X$ , die automatisch  $A$  in sich abbildet. Die Eigenschaften von Definition 1.1 sind wieder trivialerweise erfüllt.

Auch für die Objekte dieser Kategorie lassen sich Homologie- und Kohomologiegruppen definieren, und es gibt eine nützliche Beziehung zwischen diesen Gruppen und den Homologiegruppen oder Kohomologiegruppen der einzelnen Räume  $X$  und  $A$  im Paar  $(X, A)$ , die für die Berechnung dieser Gruppen eingesetzt werden kann.



- l) Beispiel k) lässt sich verallgemeinern zu einer Kategorie  $\mathbf{Top}^n$  für beliebiges  $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ . Die Objekte von  $\mathbf{Top}^n$  sind  $n$ -Tupel  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  von topologischen Räumen, so dass  $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n$ , und ein Morphismus  $f: (X_1, X_2, \dots, X_n) \longrightarrow (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  ist einfach eine stetige Abbildung  $f: X_1 \longrightarrow Y_1$ , so dass für jedes  $k$  mit  $1 \leq k \leq n$  gilt  $f(X_k) \subseteq Y_k$ . Tatsächlich benutzen werden wir diese Verallgemeinerung nur ganz selten und nur noch für den Fall  $n = 3$ ; die entsprechende Kategorie  $\mathbf{Top}^3$  nennt sich die Kategorie der topologischen *Raumtripel*.
- m) Beispiel l) hat eine Variante  $\mathbf{Top}^{[n]}$ , die sich auch für jedes  $n$  definieren lässt aber praktisch nur für den Fall  $n = 3$  tatsächlich benutzt wird. Hier sind die Objekte zwar auch  $n$ -Tupel  $(X, A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$  von topologischen Räumen, wo die  $A_i$  alle Unterräume von  $X$  sind, aber diesmal müssen die  $A_i$  nicht ineinander verschachtelt sein, sondern es wird stattdessen verlangt, dass sie  $X$  überdecken, d. h., die  $A_i$  sind beliebige Unterräume von  $X$ , so dass  $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ . Die Morphismen  $(X, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) \longrightarrow (Y, B_1, B_2, \dots, B_{n-1})$  sind wieder stetige Abbildungen  $f: (X, A_1, \dots, A_n) \longrightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ , so dass  $f(A_i) \subseteq B_i$  für alle  $i$ .

Im einzig wichtigen Fall  $n = 3$  nennt man die Objekte dieser Kategorie *Triaden*, und um in der Notation gleich zu kennzeichnen, dass es sich um eine Triade handelt, ersetzt man das erste Komma in der Auflistung durch ein Semikolon, d. h., man notiert Triaden als  $(X; A_1, A_2)$  oder  $(X; A, B)$ . Auch die Triaden kommen eigentlich nur an einer bestimmten Stelle in der Homologietheorie vor.

Durch ähnliche Konstruktionen kann man noch ganz viele andere Varianten der Kategorie  $\mathbf{Top}$  konstruieren, zum Beispiel die Kategorie  $\mathbf{Top}_*^2$  der punktierten Raumpaare, die in der Homotopietheorie benutzt wird und bei der Konstruktion der Homotopiegruppen von Raumpaaren verwendet wird. Wir wollen nicht näher darauf eingehen, denn die oben genannten Beispiele reichen schon für die Zwecke dieser Vorlesung. Aber auch die hier nur flüchtig erwähnten und nicht ausführlich behandelten Fälle sind keine Spielereien und werden tatsächlich intensiv verwendet in der algebraischen Topologie.

Wegen ihrer Wichtigkeit für unsere Zwecke werden wir uns oft auf die oben genannten Varianten der Kategorie  $\mathbf{Top}$  berufen, und besonders in diesem Abschnitt werden wir uns manchmal auf *alle* genannten Varianten von  $\mathbf{Top}$  auf einmal beziehen wollen. Dazu werden wir sie dann einfach die *topologischen Kategorien*<sup>1</sup> nennen.

---

<sup>1</sup>Dieser Name bietet sich an, aber es sollte erwähnt werden, dass „topologische Ka-

In den Beispielen 1.5 j)–m) haben wir gesehen, dass man aus bekannten Kategorien durch Abwandlungen leicht neue nützliche Kategorien gewinnen kann. Hier sind noch weitere und nicht so spezielle, sondern ganz allgemein anwendbare Konstruktionen.

**Definition 1.6** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie.

- a) Wir konstruieren eine neue Kategorie  $\mathcal{K}^{\text{op}}$ , genannt die **duale Kategorie** zu  $\mathcal{K}$ , wie folgt: Wir setzen  $\text{Ob}(\mathcal{K}^{\text{op}}) := \text{Ob}(\mathcal{K})$ , aber für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  setzen wir

$$\mathcal{K}^{\text{op}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{K}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A) = \mathcal{K}(B, A)$$

und wir kehren entsprechend die Reihenfolge der Verknüpfung um. Das heißt, für  $f \in \mathcal{K}^{\text{op}}(A, B) = \mathcal{K}(B, A)$  und für  $g \in \mathcal{K}^{\text{op}}(B, C) = \mathcal{K}(C, B)$  definieren wir

$$g \circ_{\mathcal{K}^{\text{op}}} f := f \circ_{\mathcal{K}} g.$$

Die Verknüpfung auf der rechten Seite ist in  $\mathcal{K}$  tatsächlich definiert und alle gewünschten Eigenschaften der Verknüpfung in  $\mathcal{K}^{\text{op}}$  folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften in  $\mathcal{K}$ .

Für jedes Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{K})$  ist  $\text{Mor}(A, A)$  die gleiche Menge in  $\mathcal{K}^{\text{op}}$  wie in  $\mathcal{K}$ , und  $\text{id}_A$  ist der gleiche Morphismus in beiden Kategorien.

Diese Konstruktion behält das Grundgerüst der alten Kategorie bei und macht im Wesentlichen nichts anderes, als die „Pfeilrichtung“ der Morphismen umzukehren. Das **op** im Namen steht für das englische Wort „opposite“.

Für  $\mathcal{K}^{\text{op}}$  wird manchmal  $\mathcal{K}^*$  geschrieben.

- b) Eine **Kongruenz** auf  $\mathcal{K}$  ist eine Klasse  $\sim$  von Äquivalenzrelationen, die für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{K}$  genau eine Äquivalenzrelation auf  $\text{Mor}(A, B)$  enthält (die wir auch mit  $\sim$  bezeichnen), so dass wenn

---

tergie“ eigentlich eine feste mathematische Bedeutung hat, die wir mit dem von uns vorgeschlagenen Sprachgebrauch übergehen: eine **topologische Kategorie** ist (in der einfachsten der gebräuchlichen Versionen) eine Kategorie, deren Morphismenmengen eine Topologie tragen, so dass die Verknüpfung von Morphismen eine stetige Operation ist. Wir wollen trotzdem uns erlauben, die mit **Top** verwandten und aus ihr konstruierten Kategorien, also **Top**<sup>2</sup> usw., „umgangssprachlich“ *topologische Kategorien* zu nennen, weil mir kein anderer unumständlicher Name einfällt.

$A, B$ , und  $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und wenn  $f \sim f' \in \text{Mor}(A, B)$  und  $g \sim g' \in \text{Mor}(B, C)$ , dann gilt auch

$$g \circ f \sim g' \circ f' \in \text{Mor}(A, C). \quad (1.1)$$

Die  $\sim$ -Äquivalenzklasse eines Morphismus  $f$  bezeichnen wir mit  $[f]$  und wir nennen sie die **Kongruenzklasse** von  $f$ . Wenn  $\sim$  eine Kongruenz ist, dann können wir eine wohldefinierte Verknüpfung  $\circ$  für Kongruenzklassen von Morphismen definieren durch die Vorschrift

$$[g] \circ [f] := [g \circ f]. \quad (1.2)$$

Dies erlaubt die Konstruktion einer neuen Kategorie  $\mathcal{K}' := \mathcal{K}/\sim$  durch folgende Festlegungen. Wir setzen  $\text{Ob}(\mathcal{K}') := \text{Ob}(\mathcal{K})$ . Für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  dieser Kategorien setzen wir  $\text{Mor}_{\mathcal{K}'}(A, B)$  gleich der Menge  $\text{Mor}(A, B)/\sim$  der  $\sim$ -Äquivalenzklassen auf  $\text{Mor}(A, B)$ . Die Verknüpfung von solchen Äquivalenzklassen definieren wir wie in Gleichung (1.2) und man prüft sofort nach, dass diese Verknüpfung assoziativ ist und dass für jedes Objekt  $A$  die Klasse  $[\text{id}_A]$  ein Identitätsmorphimus für die Kategorie  $\mathcal{K}'$  ist.

Diese neue Kategorie  $\mathcal{K}' := \mathcal{K}/\sim$  heißt die **Quotientenkategorie** von  $\mathcal{K}$  nach der Kongruenz  $\sim$ . Die Morphismenmengen von einer Quotientenkategorie notiert man oft mit  $[A, B]$  statt  $\text{Mor}(A, B)$ .

Eine schöne und sehr wichtige Instanz dieser Konstruktion besprechen wir gleich in Definition 1.8 unten.

- c) Sei  $\mathcal{L}$  eine weitere Kategorie. Wir können die **Produktkategorie**  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  von  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  wie folgt definieren. Die Objekte von  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  sind Paare  $(A, B)$ , wo  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und  $B \in \text{Ob}(\mathcal{L})$ . Sind  $(A, B)$  und  $(C, D)$  Objekte von  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ , so setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}((A, B), (C, D)) := \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{L}}(B, D),$$

d. h., die Morphismen der Produktkategorie sind Paare von Morphismen der einzelnen Kategorien. Die Verknüpfung wird „koordinatenweise“ erklärt:

$$(h, k) \circ_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} (f, g) := (h \circ_{\mathcal{K}} f, k \circ_{\mathcal{L}} g).$$

Man prüft sehr leicht nach, dass alle erforderlichen Eigenschaften erfüllt sind.

- d) Die verschiedenen Abwandlungen der Kategorie **Top**, die wir in Beispiele 1.5 eingeführt haben, kann man auf entsprechende Weise auf jede Kategorie  $\mathcal{K}$  anwenden, deren Objekte Mengen sind und deren Morphismen Abbildungen sind. Da für uns aber nur die auf **Top** basierenden Varianten von Bedeutung sind, wollen wir nicht näher darauf eingehen.

**Beispiel 1.7** Sei  $K$  ein Körper und sei  $\mathcal{V} := \mathbf{VR}_0$  die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über  $K$  und der  $K$ -linearen Abbildungen.

Die duale Kategorie  $\mathcal{V}^{\text{op}}$  hat die gleichen Vektorräume als Objekte, aber im Wesentlichen die Morphismen der *dualen* Vektorräume, denn es gibt wegen der Voraussetzung der endlichen Dimension eine bijektive Beziehung zwischen linearen Abbildungen und den zu ihnen dualen linearen Abbildungen der Dualräume. (Natürlich verstecken die Wörter „im Wesentlichen“ die Details dieser Bijektion.)

Für die Bildung von Quotienten nach einer Kongruenz gibt es ein sehr passendes Beispiel. Wie wir in der Einleitung gesagt haben, und wie wir es am Beispiel der Fundamentalgruppe schon kennen, hängen die meisten Konstruktionen der algebraischen Topologie eigentlich nicht von den Objekten und Morphismen der oben genannten Varianten von **Top** ab, sondern nur von ihren Homotopieklassen. Das können wir mit Kongruenz und der kategorientheoretischen Konstruktion des Quotienten nach einer Kongruenz sehr schön festhalten.

**Definition 1.8** Wir erinnern kurz an die Definition einer **Homotopie** in der Kategorie **Top**.

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und seien  $f$  und  $g: X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen. Eine **Homotopie** von  $f$  nach  $g$  ist eine stetige Abbildung

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

(wo  $I = [0, 1]$  das Einheitsintervall in  $\mathbf{R}$  ist), so dass für jedes  $x \in X$  gilt

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(x, 1) = g(x). \quad (1.3)$$

Wenn es eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  gibt, so schreiben wir  $f \simeq g$ . Diese Relation ist bekanntlich eine Äquivalenzrelation und erfüllt die in Gleichung (1.1) ausgedrückte Eigenschaft, wie wir aus der einführenden Vorlesung *Topologie* wissen.

In anderen Worten, die Homotopierelation  $\simeq$  ist eine **Kongruenz**.

Es ist nicht schwer, den Begriff einer Homotopie zu den anderen in Beispiel 1.5 definierten topologischen Kategorien  $\mathcal{K}$  zu erweitern, deren Objekte

in allen Fällen im Prinzip topologische Räume mit einer Folge von ausgezeichneten Unterräumen oder Punkten sind. Homotopien auf solchen Objekten werden definiert als Homotopien auf den topologischen (Ober)räumen, die für alle Werte  $t \in I$  die ausgezeichneten Unterräume oder Punkte im Quellobjekt in die entsprechenden ausgezeichneten Unterräume oder Punkte des Zielobjekts abbilden.

Zum Beispiel, in  $\mathbf{Top}^2$  ist eine Homotopie von einem Objekt  $(X, A)$  zu einem Objekt  $(Y, B)$  eine stetige Abbildung

$$H: X \times I \longrightarrow Y,$$

so dass  $H(A \times I) \subseteq B$ . Wir notieren diese Situation mit

$$H: (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B).$$

Für jedes  $t \in I$  erhalten wir einen  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismus  $H_t: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  durch die Festlegung

$$H_t(x) := H(x, t).$$

Wir nennen zwei  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismen  $f$  und  $g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  *homotop* und schreiben  $f \simeq g$ , wenn es eine Homotopie  $H: (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$  gibt mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = g$ .

In den anderen topologischen Kategorien ist die Definition einer Homotopie und der Relation  $\simeq$  ähnlich.

Mit den gleichen Beweisen wie in  $\mathbf{Top}$  ist es leicht zu zeigen, dass auch in den anderen oben genannten topologischen Kategorien  $\mathcal{K}$  die Relation  $\simeq$  eine Äquivalenzrelation auf jeder Morphismenmenge und sogar eine Kongruenz ist.

Deshalb können wir in all diesen Kategorien wie in Definition 1.6 b) die Quotientenkategorie bilden.

Die Quotientenkategorie  $\mathcal{K}/\simeq$  heißt die *Homotopiekategorie* zu  $\mathcal{K}$  und wird mit  $\mathbf{HK}$  bezeichnet.

Die  $\simeq$ -Äquivalenzklasse eines Morphismus  $f$  in  $\mathcal{K}$  nennen wir ihre *Homotopieklasse* und wir bezeichnen sie, wie in Definition 1.6 b), mit  $[f]$ .

Die Menge aller Homotopieklassen von  $\mathcal{K}$ -Morphismen  $P \longrightarrow Q$  (wo  $P$  und  $Q$  Objekte von  $\mathcal{K}$  sind, d. h., topologische Räume oder Raumpaare oder punktierte Räume, je nachdem welche Kategorie  $\mathcal{K}$  ist) bezeichnen wir mit  $[P, Q]$  (in  $\mathbf{Top}^2$  zum Beispiel mit  $[(X, A), (Y, B)]$ ), und entsprechend für die anderen Kategorien).

Wir haben jetzt insbesondere drei neue Kategorien  $\mathbf{HTop}$ ,  $\mathbf{HTop}^2$  und  $\mathbf{HTop}_*$ , und es wird sich später herausstellen, dass diese die eigentlichen

Quellkategorien der algebraischen Topologie sind und nicht die topologischen Kategorien selber.

Kategorien können viele Gestalten haben, aber manche sind eng miteinander verwandt. Folgende mögliche Beziehung ist dabei von Bedeutung:

**Definition 1.9** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien. Wir nennen  $\mathcal{L}$  eine **Unterkategorie** von  $\mathcal{K}$ , wenn gilt:

- a)  $\text{Ob}(\mathcal{L}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{K})$ .
- b) Für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  der „kleineren“ Kategorie  $\mathcal{L}$  ist

$$\text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B).$$

- c) Für je drei Objekte  $A, B$  und  $C$  von  $\mathcal{L}$  und für je zwei Morphismen  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B)$  und  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(B, C)$  ist  $g \circ f$  der gleiche Morphismus  $A \rightarrow C$  in  $\mathcal{L}$ , wie in  $\mathcal{K}$ .
- d) Für jedes Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{L})$  ist  $\text{id}_A$  der gleiche Morphismus in  $\mathcal{L}$ , wie in  $\mathcal{K}$ .

Wenn für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{L}$  es in b) sogar der Fall ist, dass  $\text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ , so nennen wir  $\mathcal{L}$  eine **volle Unterkategorie** von  $\mathcal{K}$ .

Eine volle Unterkategorie unterscheidet sich von ihrer Oberkategorie nur durch die Objekte, nicht durch die Morphismenmengen der Objektpaare.

**Beispiele 1.10** a) Die Kategorie **AbGp** ist eine volle Unterkategorie der Kategorie **Gp**.

- b) **Top<sub>\*</sub>** ist eine volle Unterkategorie von **Top**<sup>2</sup>, wenn man den ausgezeichneten Punkt  $*$  eines punktierten topologischen Raumes mit dem topologischen Unterraum  $\{*\}$  identifiziert.
- c) **Top** ist eine volle Unterkategorie der Kategorie **Top**<sup>2</sup>, wenn man einen topologischen Raum  $X$  mit dem Raumpaars  $(X, \emptyset)$  identifiziert (was wir später auch generell tun werden und als Konvention einführen wollen).
- d) **Top**<sup>2</sup> wird zu einer Unterkategorie von **Top**  $\times$  **Top**, wenn man jeden Morphismus  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von **Top**<sup>2</sup> mit dem Morphismus  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  der Kategorie **Top**  $\times$  **Top** identifiziert.

Für die Objekte  $(X, A)$  von  $\mathbf{Top}^2$  muss gelten  $A \subseteq X$ , so dass

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^2) \subsetneq \mathrm{Ob}(\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}),$$

und wenn  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  Objekte von  $\mathbf{Top}^2$  sind, so gilt auch

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}^2}((X, A), (Y, B)) \subsetneq \mathrm{Mor}_{\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}}((X, A), (Y, B)),$$

(im Allgemeinen) denn ein  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ -Morphismus  $(f, g): (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  ist nur dann auch ein  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismus, wenn  $g = f|_A$ . Deshalb ist insbesondere  $\mathbf{Top}^2$  keine *volle* Unterkategorie von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ .

- e) Auf die gleiche Weise kann man  $\mathbf{Top}_*$  als eine Unterkategorie von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$  auffassen (schließlich ist  $\mathbf{Top}_*$  nach b) eine Unterkategorie von  $\mathbf{Top}^2$ ).
- f) Sei  $\mathbf{Inj}$  die Kategorie, die beliebige Mengen als ihre Objekte hat, aber deren Morphismen nur die *injektiven* mengentheoretischen Abbildungen zwischen zwei Mengen sind (da Identitätsabbildungen und Verknüpfungen von injektiven Abbildungen injektiv sind, ist dies tatsächlich eine Kategorie). Dann ist  $\mathbf{Inj}$  eine Unterkategorie von  $\mathbf{Meng}$ , aber keine volle Unterkategorie.
- g)  $\mathbf{Körp}$  ist eine volle Unterkategorie von  $\mathbf{KR1}$ , und  $\mathbf{KR1}$  ist eine Unterkategorie von  $\mathbf{Ring}$ , aber keine volle Unterkategorie, weil die Morphismen von  $\mathbf{KR1}$  Einselemente in Einselemente abbilden müssen; allgemeine Ringhomomorphismen, auch zwischen Ringen mit 1, müssen das nicht.

Bei der Diskussion bisher ging es immer nur um *einzelne* Kategorien, wovon wir sehr viele, aber in der Regel jede für sich, besprochen haben. Doch in der algebraischen Topologie wollen wir ja gerade mit verschiedenen Strukturen *gleichzeitig* arbeiten und somit mehrere Kategorien miteinander in Verbindung bringen. Das ist der eigentliche Grund, warum wir so intensiv über Kategorientheorie sprechen, und uns geht es ganz besonders um „Struktur erhaltende“ Abbildungen zwischen verschiedenen Kategorien.

Solche Abbildungen heißen **Funktoren**, und es gibt sie in zwei Ausprägungen, je nachdem ob sie die Pfeilrichtung von Morphismen *erhalten* oder *umkehren*:

**Definition 1.11 (Funktor)** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien.

- I. Ein **kovarianter Funktor**  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  ist eine Zuordnung, die

- a) jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  ein Objekt  $F(A)$  von  $\mathcal{L}$  zuordnet, und
- b) für jedes Paar von Objekten  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  jedem Morphismus  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  einen Morphismus  $F(g) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A), F(B))$  zuordnet, so dass
  - i)  $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$ , wenn  $A, B, C \in \mathcal{K}$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  und  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$ ;
  - ii)  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  für jedes  $A \in \mathcal{K}$ .

II. Ein **kontravarianter Funktor**  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  ist eine Zuordnung, die

- a) jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  ein Objekt  $F(A)$  von  $\mathcal{L}$  zuordnet, und
- b) für jedes Paar von Objekten  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  jedem Morphismus  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  einen Morphismus  $F(g) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(B), F(A))$  zuordnet, so dass
  - i)  $F(h \circ g) = F(g) \circ F(h)$ , wenn  $A, B, C \in \mathcal{K}$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  und  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$ ;
  - ii)  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  für jedes  $A \in \mathcal{K}$ .

Ko- und kontravariante Funktoren haben die gleichen Eigenschaften, bis auf die Tatsache, dass ein kontravarianter Funktor, angewendet auf Morphismen, die Reihenfolge von Quell- und Zielraum vertauscht und entsprechend auch die Reihenfolge der Faktoren in einer Verknüpfung vertauscht. Bei kovarianten Funktoren bleibt diese Reihenfolge in der Bildkategorie  $\mathcal{L}$  so, wie sie in der Quellkategorie war.

Der Sammelbegriff für kovariante und kontravariante Funktoren ist einfach **Funktor**, und wir sprechen schlicht von einem *Funktor* in Situationen, wo wir uns nicht festlegen wollen oder wo es momentan irrelevant ist, ob der Funktor ko- oder kontravariant ist; er muss aber trotzdem eine dieser beiden Eigenschaften haben (aber siehe die Einschränkung in Bemerkung 1.12 c) unten).

**Bemerkung 1.12** a) Sind  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien und sind  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  und  $G: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$  Funktoren, so können wir die *Verknüpfung*  $G \circ F$  von  $F$  und  $G$  auf die naheliegende Art bilden, und  $G \circ F$  ist ein Funktor  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$ ; hierbei verhält sich die Unterscheidung kovariant-kontravariant wie ein Vorzeichen (wo Kontravarianz dem negativen Vorzeichen entspricht), d. h.,  $G \circ F$  ist genau dann kontravariant, wenn genau einer von  $F$  und  $G$  ein kontravarianter Funktor ist. Das prüft man sehr leicht nach.



Diese Regel erweitert sich entsprechend auf Verknüpfungen von mehr als zwei Funktoren — eine solche Verknüpfung ist kovariant genau dann, wenn die Anzahl der kontravarianten Faktoren gerade ist.

- b) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie. Wenn man die Definition 1.6 a) der dualen Kategorie  $\mathcal{K}^{\text{op}}$  betrachtet, sieht man, dass die identische Zuordnung ein *kontravarianter* Funktor  $D_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^{\text{op}}$  (oder  $D_{\mathcal{K}}^{\text{op}}: \mathcal{K}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{K}$ ) ist, und  $D_{\mathcal{K}}$  und  $D_{\mathcal{K}}^{\text{op}}$  sind Umkehrungen zueinander. Diese Funktoren sind in gewissem Sinne universelle oder atomare kontravariante Funktoren, wegen folgender Betrachtungen.

Wenn  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  ein beliebiger Funktor zwischen zwei Kategorien ist, so sind

$${}_{\text{op}}F := F \circ D_{\mathcal{K}}^{\text{op}}: \mathcal{K}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{L}$$

und

$$F_{\text{op}} := D_{\mathcal{L}} \circ F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}^{\text{op}}$$

Funktoren der umgekehrten Varianz zu  $F$ . Auf diese Weise kann man jeden kovarianten Funktor mit Hilfe der Funktoren  $D$  oder  $D^{\text{op}}$  ganz einfach zu einem kontravarianten Funktor umwandeln und umgekehrt.

Ferner

$$F = {}_{\text{op}}F \circ D_{\mathcal{K}} = D_{\mathcal{L}}^{\text{op}} \circ F_{\text{op}},$$

so dass man *jeden* kontravarianten Funktor zerlegen kann als eine Verknüpfung von einem *kovarianten* Funktor mit einem dieser kontravarianten Grundfunktoren  $D$  oder  $D^{\text{op}}$ . Deshalb würde es an manchen Stellen in der Theorie der Funktoren eigentlich reichen, als Vereinfachung nur kovariante Funktoren zu betrachten. Eine Anwendung dieser Idee sehen wir in:

- c) Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien. In Definition 1.6 c) wurde die Produktkategorie  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  definiert. Einen Funktor  $F: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$  nennen wir einen **Funktor von zwei Variablen**, und solche Funktoren können wie jeder andere Funktor ko- oder kontravariant sein.

Hier wollen wir aber auch die Möglichkeit zulassen, dass ein Funktor von zwei Variablen nur bezüglich *einer* dieser Variablen kovariant und bezüglich der anderen kontravariant ist. In Definition 1.11 ist diese Möglichkeit gar nicht vorgesehen, denn ein Funktor  $F$  gemischter Varianz in zwei Variablen müsste einen Morphismus  $f: (A, B) \longrightarrow (C, D)$

überführen in einen Morphismus  $F(f): F(A, D) \longrightarrow F(C, B)$  oder  $F(C, B) \longrightarrow F(A, D)$ , und nicht in einen Morphismus zwischen den eigentlichen Bildobjekten  $F(A, B)$  und  $F(C, D)$ , in welcher Richtung auch immer. Natürlich versteht jeder sofort, was gewollt ist, wenn man von einem Funktor gemischter Varianz spricht, aber die bisherige Definition von Funktor passt für diesen Fall nicht genau.

Der einfachste und eleganteste Ausweg aus diesem Dilemma besteht in der Anwendung der Idee aus Teil b), und das klappt auch für Funktoren von beliebig vielen, also eventuell mehr als zwei, Variablen:

Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl und seien  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien. Einen Funktor  $F$  von  $n$  Variablen von  $\mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_n$  nach  $\mathcal{L}$ , der in den Variablen  $i_1, \dots, i_k$  kontravariant und in den anderen Variablen kovariant ist, definieren wir als die Verknüpfung eines *kovarianten* Funktors

$$\tilde{F}: \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \dots \times \tilde{\mathcal{K}}_n \longrightarrow \mathcal{L}, \quad \text{wo } \tilde{\mathcal{K}}_i = \begin{cases} \mathcal{K}_i^{\text{op}}, & \text{wenn } i \in \{i_1, \dots, i_k\}; \\ \mathcal{K}_i & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der Abbildung

$$\tilde{D}_1 \times \dots \times \tilde{D}_n: \mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_n \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \dots \times \tilde{\mathcal{K}}_n,$$

wo

$$\tilde{D}_i = \begin{cases} D_{\mathcal{K}_i}, & \text{wenn } i \in \{i_1, \dots, i_k\}; \\ \text{id}_{\mathcal{K}_i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies beschreibt korrekt genau die Wirkung von  $F$ , und ansonsten verstehen wir ja sehr wohl, wie  $F$  wirken soll, so dass wir uns nie auf die grausamen Details dieser Definition berufen werden müssen.

**Beispiele 1.13** a) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie. Dann ist  $\text{id}_{\mathcal{K}}$ , die Identität von  $\mathcal{K}$ , ein kovarianter Funktor  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ .

b) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und  $\mathcal{L}$  eine Unterkategorie von  $\mathcal{K}$ . Aus Definition 1.9 c) und d) folgt, dass die Inklusion  $i: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$  ein kovarianter Funktor ist.

c) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $\sim$  eine Kongruenz auf  $\mathcal{K}$ . Wir haben eine Projektion  $P: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\sim$ , die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  das gleiche Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}/\sim$  zuordnet, und jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  seine Kongruenzklasse  $[f] \in [A, B]$ . Aus den Eigenschaften 1.6 b) einer Kongruenz folgt leicht, dass diese Projektion ein kovarianter Funktor ist.

- d) Für uns sehr naheliegend ist folgende Instanz von Beispiel 1.13 c). Sei  $\mathcal{K} = \mathbf{Top}$  oder eine andere unserer topologischen Kategorien. Wir erhalten dann mit der Projektion einen kovarianten **Homotopiefunktor**  $[\ ]: \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{HK}$ , der jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  das gleiche Objekt  $A$  von  $\mathbf{HK}$  zuordnet, und jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  seine Homotopieklasse  $[f] \in [A, B]$  zuordnet.
- e) Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei Kategorien. Sowohl die Objekte wie auch die Morphismen der Produktkategorie  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  sind Paare von Objekten bzw. von Morphismen der Kategorien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$ , und wenn wir jedem solchen Paar sein erstes Element zuordnen (oder jedem Paar sein zweites Element) so erhalten wir Projektionen  $P_1: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$  bzw.  $P_2: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ . Offensichtlich sind diese Projektionen kovariante Funktoren.
- f) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie wie  $\mathbf{Gp}$  oder  $\mathbf{Top}$ , deren Objekte Mengen sind und deren Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen sind. Dann können wir einen kovarianten Funktor  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{Meng}$  definieren, der jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  die Menge  $A$  zuordnet, und jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  die Abbildung  $f$  als *mengentheoretische Abbildung*  $A \longrightarrow B$  zuordnet.
- Dieser Funktor „vergisst“ einfach die zusätzliche Struktur der Objekte von  $\mathcal{K}$ ; man nennt ihn deshalb den **vergesslichen Funktor**.
- g) Es gibt viele andere Paare  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  von Kategorien, die sich dadurch unterscheiden, dass alle Objekte von  $\mathcal{K}$  auch Objekte von  $\mathcal{L}$  sind, aber zusätzliche Struktur tragen, und auch in diesen Fällen gibt es einen kovarianten **vergesslichen Funktor**  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ . Zum Beispiel gibt es einen vergesslichen Funktor  $F: \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Top}$ , der jedem punktierten Raum  $(X, x)$  den zugehörigen topologischen Raum  $X$  zuordnet, und jeder basispunkttreuen stetigen Abbildung  $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$  die Abbildung  $f$  als Abbildung  $X \longrightarrow Y$ .

Entsprechend gibt es einen vergesslichen Funktor  $G: \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{Top}$ , der den Unterraum vergisst und jedem topologischen Raumpaare  $(X, A)$  den „großen“ Raum  $X$  zuordnet, und so dass für jede stetige Abbildung  $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  gilt:  $G(f) = f$  als Abbildung  $X \longrightarrow Y$ .

Man erinnere sich daran, dass nach den Beispielen 1.10 d) und e) die Kategorien  $\mathbf{Top}^2$  und  $\mathbf{Top}_*$  Unterkategorien von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$  sind. Die hier erwähnten vergesslichen Funktoren sind nichts anderes, als die Verknüpfung der Inklusionen dieser Unterkategorien in  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$  mit der Projektion  $P_1: \mathbf{Top} \times \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$  (in anderen Worten, sie sind die Einschränkung von  $P_1$  auf die Unterkategorien  $\mathbf{Top}^2$  und  $\mathbf{Top}_*$ ).

- h) Sei  $K$  ein fest gewählter Körper und  $\mathbf{VR}$  die Kategorie der Vektorräume über  $K$  (um die Notation zu vereinfachen erwähnen wir  $K$  nicht mehr explizit im Namen der Kategorie). Ähnlich wie in Beispiel 1.5 k) können wir die Kategorie  $\mathbf{VR}^2$  der Paare  $(V, W)$  von  $K$ -Vektorräumen und Unterräumen definieren (also bei einem Objekt  $(V, W)$  von  $\mathbf{VR}^2$  ist  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $W$  ein Untervektorraum von  $V$ ).

Wir können dann einen Funktor  $Q: \mathbf{VR}^2 \rightarrow \mathbf{VR}$  definieren durch die Zuordnungen  $Q(V, W) := V/W$  (der Quotientenvektorraum), und wenn  $f: (V, W) \rightarrow (U, T)$  eine lineare Abbildung von Vektorraum-paaren ist (d. h.,  $f$  ist eine lineare Abbildung  $V \rightarrow U$  mit  $f(W) \subseteq T$ ), dann ist  $Q(f)$  die von  $f$  induzierte lineare Abbildung  $\bar{f}: V/W \rightarrow U/T$ . Dies ist ein kovarianter Funktor.

- i) Sei  $K$  ein fest gewählter Körper und  $\mathbf{VR}$  die Kategorie der Vektorräume über  $K$ . Die Zuordnung  $*$ , die jedem  $K$ -Vektorraum  $V$  den Dualraum  $V^* := \text{Hom}(V, K)$  zuordnet, und jeder linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  die von  $f$  induzierte duale Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  mit  $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$  zuordnet, ist ein *kontravarianter* Funktor  $\mathbf{VR} \rightarrow \mathbf{VR}$ , wie man aus den Eigenschaften der Dualräume und dualen linearen Abbildungen  $f^*$  leicht sieht.
- j) Wenn  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  sind, so ist auch  $\text{Hom}(V, W)$ , die Menge der  $K$ -linearen Abbildungen  $V \rightarrow W$ , ein Vektorraum über  $K$ . Wenn  $T$  und  $U$  zwei weitere Vektorräume sind und  $f: T \rightarrow V$  und  $g: W \rightarrow U$  lineare Abbildungen sind, so ist für  $\alpha \in \text{Hom}(V, W)$  die Verknüpfung  $g \circ \alpha \circ f$  eine lineare Abbildung  $T \rightarrow U$ , und sie hängt  $K$ -linear von  $\alpha$  ab, d. h., die Zuordnung  $\alpha \mapsto g \circ \alpha \circ f$  ist eine lineare Abbildung  $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(T, U)$ .

Wenn wir diese Zuordnung mit  $\text{Hom}(f, g)$  bezeichnen, so wird

$$\text{Hom}: \mathbf{VR} \times \mathbf{VR} \rightarrow \mathbf{VR}$$

zu einem Funktor in zwei Variablen, der kontravariant ist in der ersten Variablen und kovariant in der zweiten. Die erforderlichen Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.

- k) Eigentlich interessieren wir uns für „topologisch nützliche“ Funktoren von Topologie zu Algebra. Eine der Standardkonstruktionen kennen wir schon aus der einführenden Vorlesung *Topologie*.

Die Fundamentalgruppe bildet einen kovarianten Funktor

$$\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Gp}.$$

Dieser Funktor ordnet jedem punktierten Raum  $(X, x)$  die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  von  $X$  bei  $x$  zu, und einer stetigen Abbildung

$$f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

von punktierten Räumen ordnet er den induzierten Homomorphismus

$$\pi_1(f) := f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

der Fundamentalgruppen zu.

Da für eine stetige Abbildung  $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$  von punktierten Räumen der induzierte Homomorphismus  $f_*$  der Fundamentalgruppen nur von der Homotopieklasse von  $f$  rel  $\{x\}$  abhängt, und da Homotopie rel  $\{x\}$  das gleiche wie Homotopie von Abbildungen von punktierten Räumen ist, induziert  $\pi_1$  auch einen wohldefinierten Funktor (den wir auch  $\pi_1$  nennen können) auf der Homotopiekategorie, also einen wohldefinierten kovarianten Funktor

$$\pi_1: \mathbf{HTop}_* \longrightarrow \mathbf{Gp}.$$

In dieser Vorlesung werden wir noch viele weitere und wesentlich kompliziertere Funktoren kennen lernen, insbesondere Funktoren von den Kategorien **Top** und **Top**<sup>2</sup> in algebraische Kategorien: in **AbGp**, in eine Abwandlung **GAG** von **AbGp** (die Kategorie der *graduerten abelschen Gruppen*) und in **Ring**.

Bevor wir unseren kurzen Überblick über die Grundlagen der Kategorientheorie fortsetzen (und bald zu Ende bringen), wollen wir an dieser Stelle noch eine Struktur einführen, die in der algebraischen Topologie als ein sehr beliebtes technisches Hilfsmittel dient — es handelt sich um ***Diagramme***. Diagramme sind nichts anderes als eine „räumliche Anordnung“ von Objekten und Morphismen einer Kategorie.

Die Funktoren der algebraischen Topologie sind oft nur mit einigem Aufwand zu berechnen, und diese Berechnung lässt sich fast nie direkt ausführen, sondern erfordert eine ganze Menge Detektivarbeit und eine Art „Spurensuche“ in vielen anderen Objekten, als den gerade zu berechnenden. Man bettet ein zu untersuchendes Objekt ein in ein kompliziertes Netz von bekannten Objekten und Morphismen und schließt aus den Beziehungen der vielen Bildobjekte und Bildmorphismen zueinander und zum Bild des untersuchten Objekts, wie der Funktor darauf wirkt. Diagramme dienen dazu, diese Beziehungsnetze bildlich darzustellen und auf diese Weise übersichtlich zu machen, und wir werden sie in dieser Vorlesung ständig benutzen und ganze Tafeln damit füllen.

Die Idee eines Diagramms ist sehr einleuchtend und ein naiver, intuitiver Umgang mit ihnen reicht eigentlich aus, um richtig mit ihnen umgehen zu können. Trotzdem wollen wir hier eine genaue mathematische Definition von ihnen geben, damit wir kategorientheoretisch über sie sprechen können, weil wir auf diese Weise gewisse Eigenschaften genau beschreiben können, die in der algebraischen Topologie an vielen Stellen eine tragende Rolle spielen.

Ein Diagramm trägt zwei Informationsschichten, die sich von einander trennen lassen. Eine dieser Schichten besteht aus den Angaben der genauen Objekte und Morphismen, die am Diagramm beteiligt sind und deren Beziehung zueinander sie aufzeigt.

Die zweite Schicht, die die eigentliche Diagrammstruktur in sich trägt, besteht nur aus der Angabe der räumlichen Anordnung, in der diese Objekte und Morphismen zueinander stehen, ganz unabhängig davon, um welche speziellen Objekte und Morphismen es sich handelt. Diese zweite Schicht nennen wir die *Gestalt* oder das *Muster* des Diagramms und man kann sie hinzeichnen oder modellieren, in dem man im Diagramm alle Objekte durch Punkte und alle Morphismen durch Pfeile oder gerichtete Strecken vom Punkt am Quellort zum Punkt am Zielort ersetzt; diese Punkte und Pfeile kann man sich als Platzhalter für die eigentlichen Objekte und Morphismen denken und beschreiben deren logische Anordnung zueinander.

Die Trennung dieser beiden Schichten wird es später erlauben, mehrere Diagramme mit dem gleichen Muster zu vergleichen und Abbildungen zwischen ihnen zu definieren. Dadurch werden wir zu jeder festen Gestalt eine entsprechende Kategorie der Diagramme dieser Gestalt erhalten.

Das mathematische Modell für ein solches System von Punkten und Pfeilen, das die Gestalt eines Diagramms beschreibt, ist ein *gerichteter Graph*. Wir wählen eine geringfügig eingeschränkte Definition des gerichteten Graphen, bei der es nicht erlaubt ist, dass mehrere Pfeile ein Punktpaar verbinden. Diese Definition ist einfacher zu formulieren, vermeidet technischen Ballast, und ist völlig ausreichend für unsere Zwecke:

**Definition 1.14** Ein *gerichteter Graph*  $\mathcal{G}$  ist ein Paar  $(E, K)$ , wo  $E$  eine Menge ist und  $K \subseteq E \times E$ . Die Elemente von  $E$  heißen **Knoten** oder **Eckpunkte** des Graphen  $\mathcal{G}$ , und die Elemente von  $K$  heißen seine (gerichteten) **Kanten**. Speziell nennen wir ein Element  $(x, y) \in K$  (wo  $x, y \in E$ ) eine **Kante von  $x$  nach  $y$** , und wir nennen  $x$  den **Anfangspunkt** oder **Ausgangspunkt** der Kante und  $y$  ihr **Endpunkt** oder **Zielpunkt**.

Bildlich kann man sich die Knoten als Punkte in der Ebene oder im Raum vorstellen, und eine Kante  $(x, y)$  als einen Pfeil vom Punkte  $x$  zum Punkte  $y$ , und man zeichnet Graphen auch genau so hin.

**Definition 1.15** Sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Ein **Pfad** in  $\mathcal{G}$  ist eine endliche Folge  $\kappa_1 := (x_0, x_1), \kappa_2 := (x_1, x_2), \dots, \kappa_n := (x_{n-1}, x_n)$  von Kanten von  $\mathcal{G}$ , so dass, wie hier angegeben, der Endpunkt jeder Kante  $\kappa_i$  in der Folge, bis auf die letzte, gleich dem Anfangspunkt der darauffolgenden Kante  $\kappa_{i+1}$  ist. (Wir sagen dazu, die Kanten *stoßen aneinander an*.) Wir nennen den Anfangspunkt  $x_0$  der ersten Kante  $\kappa_1$  im Pfad den **Anfangspunkt** oder **Ausgangspunkt des Pfades** und wir nennen den Endpunkt  $x_n$  der letzten Kante  $\kappa_n$  im Pfad den **Endpunkt** oder **Zielpunkt des Pfades**.

Graphen interessieren uns in dieser Vorlesung in erster Linie als *Muster für Systeme aus Objekten und Morphismen einer Kategorie*:

**Definition 1.16** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Ein **auf  $\mathcal{G}$  modelliertes Diagramm** oder ein **Diagramm von Gestalt  $\mathcal{G}$**  (oder kurz: ein  **$\mathcal{G}$ -Diagramm**) in  $\mathcal{K}$  besteht aus einer Abbildung  $P: E \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{K})$  und einer weiteren Abbildung

$$p: K \rightarrow \bigcup_{\substack{(A,B) \in \\ \text{Bild } P \times \text{Bild } P}} \text{Mor}(A, B),$$

so dass für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}$  gilt:  $p(x, y)$  ist ein Morphismus  $P(x) \rightarrow P(y)$ . Wir nennen  $\mathcal{G}$  das **Muster** oder die **Gestalt** des Diagramms  $(P, p)$ .

Die Abbildung  $P$  in dieser Definition ist nichts anderes als eine Belegung der Knoten von  $\mathcal{G}$  mit Objekten aus  $\mathcal{K}$ , und  $p$  ist nichts anderes als eine Belegung der gerichteten Kanten von  $\mathcal{G}$  mit Morphismen vom Anfangsobjekt zum Zielobjekt der Kante (bezüglich der Belegung  $P$ ). So wie in dieser Beschreibung schreibt man Diagramme auch hin:

**Beispiel 1.17** Hier ist ein einfaches Beispiel aus der Kategorie **AbGp**:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} \quad \text{modelliert das Diagramm} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbf{Z} \\ \downarrow \times 5 & & \downarrow \pi \\ \mathbf{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \end{array}$$

**Bemerkung 1.18** Man beachte, dass *Pfade* in Graphen so definiert wurden, dass in einem  $\mathcal{G}$ -Diagramm über einer Kategorie  $\mathcal{K}$  die Morphismen entlang eines Pfades in  $\mathcal{G}$  in der Kategorie verknüpft werden können. Genau dann, sogar, ist eine Folge von Kanten im Muster eines Diagramms ein Pfad, wenn die Verknüpfung der Morphismen, mit denen die Kanten belegt sind, in der Kategorie definiert ist.

Die verschiedenen Morphismen in einem Diagramm sind an und für sich ganz unabhängig voneinander und können beliebig gewählt werden. Aber Diagramme sind ja eigentlich ein Werkzeug, um Information über die darin enthaltenen Morphismen zu gewinnen, und zu diesem Zweck besteht in den praktischen Anwendungen von Diagrammen meistens doch folgende schöne Beziehung zwischen den Morphismen (oder man versucht sie einzurichten):

**Definition 1.19** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $D := (P, p)$  ein auf den Graphen  $\mathcal{G}$  modelliertes Diagramm über  $\mathcal{K}$ . Wir sagen, dass das Diagramm  $D$  **kommutiert**, oder wir nennen  $D$  ein **kommutatives Diagramm**, wenn für je zwei Pfade in  $\mathcal{G}$ , die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt haben, die Verknüpfung der Morphismen in  $D$  entlang dieser Pfade gleich ist.

Auch wenn ein Diagramm als Ganzes nicht kommutiert, können Teile davon oder bestimmte Pfade in  $\mathcal{G}$  kommutieren. Als Notation dafür ist es üblich, wenn die beiden Pfade im aufgezeichneten Diagramm ein Quadrat, Dreieck oder anderes „zusammenhängendes“ Gebiet umranden, in dieses Gebiet einen kreisförmigen Pfeil  $\circlearrowright$  zu schreiben.

*Beispiel.* Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbf{Z} \\ \times 5 \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi \\ \mathbf{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \end{array}$$

aus Beispiel 1.17 ist offensichtlich kommutativ, wie man leicht nachrechnet.

Obwohl wir manchmal sehr komplizierte Diagramme verwenden werden, gibt es gewisse einfache Gestalten, die am häufigsten vorkommen und die deshalb eigene Namen haben:

**Definition 1.20** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie. Ein Diagramm  $D$  über  $\mathcal{K}$  heißt

- a) eine **Folge**, wenn  $D$  eine der Gestalten

$$\dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

oder

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

oder

$$\dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$



oder

$$\bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \bullet$$

hat. Dies ist einfach eine lineare Anordnung von Objekten und Morphismen.

In den ersten drei Fällen ist die Folge auf beiden Seiten oder nur nach einer Seite hin unendlich, und diese Diagramme nennen wir **lange Folgen**. Eine Folge kann aber auch wie im letzten Fall nur aus endlich vielen Objekten und Morphismen bestehen (die Bezeichnung *kurze Folge* wird aber für einen Spezialfall reserviert und wird nicht für alle endlichen Folgen verwendet);

b) ein **Quadrat**, wenn  $D$  die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

aus Beispiel 1.17 hat;

c) ein **Dreieck**, wenn  $D$  eine der Gestalten

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bullet & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \swarrow & \searrow \\ & \bullet & \end{array}$$

oder eine dazu äquivalente Gestalt hat (äquivalent in Bezug auf die Reihenfolge der Objekte und Morphismen).

Diagramme sind mehr als nur zufällig auftretende und für manche Zwecke nützliche Werkzeuge, oder schöne und leicht zu verstehende Darstellungen von Zusammenhängen innerhalb einer Kategorie. Wenn man die Gestalt festlegt, dann bilden die Diagramme dieser Gestalt selber die Objekte einer Kategorie (so dass wir später in der Lage sein werden, auch mit diagrammwertigen Funktoren zu arbeiten):

**Definition 1.21** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Wir gewinnen aus  $\mathcal{K}$  wie folgt eine neue Kategorie  $\mathcal{G}\text{-}\mathbf{DK}$ , die Kategorie der  **$\mathcal{G}$ -Diagramme über  $\mathcal{K}$** .

Die Objekte dieser Kategorie sind alle Diagramme  $D := (P, p)$  von Gestalt  $\mathcal{G}$  über  $\mathcal{K}$ .

Wenn  $D := (P, p)$  und  $C := (Q, q)$  zwei solche Diagramme sind ( $P$  und  $Q$  belegen die Knoten von  $\mathcal{G}$  mit Objekten aus  $\mathcal{K}$  und  $p$  und  $q$  belegen die Kanten zwischen den Knoten mit Morphismen zwischen den entsprechenden

Objekten), so definieren wir einen Morphismus  $D \longrightarrow C$  in  $\mathcal{G}\text{-}\mathbf{DK}$  als eine Abbildung

$$\mu: E \longrightarrow \bigcup_{x \in E} \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P(x), Q(x)),$$

so dass für jeden Knoten  $x \in E$  gilt, dass  $\mu(x)$  ein  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $P(x) \longrightarrow Q(x)$  ist, und so dass für jede Kante  $(x, y) \in K$  das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} P(x) & \xrightarrow{p(x,y)} & P(y) \\ \mu(x) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mu(y) \\ Q(x) & \xrightarrow{q(x,y)} & Q(y) \end{array} \quad (1.4)$$

kommutiert.

In anderen Worten, die Morphismen zwischen zwei Diagrammen in der Diagrammkategorie bestehen aus einer Familie von Morphismen der einfachen Kategorie jeweils zwischen den Objekten an gleicher Stelle in den beiden Diagrammen, so dass alle durch diese Morphismen und den Morphismen in den beiden Diagrammen gebildeten kleinen Quadrate kommutieren.

Sind  $B := (R, r)$ ,  $C := (Q, q)$  und  $D := (P, p)$  drei Diagramme mit Gestalt  $\mathcal{G}$  und sind  $\mu: D \rightarrow C$  und  $\nu: C \rightarrow B$  Morphismen von  $\mathcal{G}\text{-}\mathbf{DK}$ , so definieren wir auf naheliegende Weise  $\nu \circ \mu: D \rightarrow B$  als die Zuordnung, die jedem Knoten  $x \in E$  den  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $\nu(x) \circ \mu(x): P(x) \rightarrow R(x)$  zuordnet.

Für ein Diagramm  $D := (P, p)$  definieren wir den Identitätsmorphismus  $\text{id}_D$  in  $\mathcal{G}\text{-}\mathbf{DK}$  als die Zuordnung, die jedem Knoten  $x \in E$  die  $\mathcal{K}$ -Identität  $\text{id}_{P(x)}$  zuordnet.

Die so definierte Verknüpfung und die Identitätsmorphismen erfüllen offenbar die Bedingungen aus Definition 1.1 c) (die Kommutativität der durch die verknüpften Morphismen gebildeten kleinen Quadrate ist sehr leicht nachzuprüfen).

Gerade die durch einen Morphismus der Diagrammkategorie entstehenden kommutierenden Quadrate machen diagrammwertige Funktoren so nützlich, denn sie liefern sehr viel Information über die verschiedenen Morphismen, die in den Diagrammen und als Funktorwerte auftreten.

Eine weitere schöne Eigenschaft ist, dass jeder Funktor auf der Grundkategorie automatisch einen Funktor auf den entsprechenden Diagrammkategorien liefert:

**Definition 1.22** Sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Sei

$$K^- := \{ (y, x) \mid (x, y) \in K \}.$$

Wir nennen  $\mathcal{G}^- := (E, K^-)$  den *umgekehrten* oder *umgerichteten* Graph zu  $\mathcal{G}$  (denn  $K^-$  besteht aus den Kanten von  $\mathcal{G}$  mit Anfangs- und Endpunkt vertauscht, also aus den „umgerichteten“ Kanten von  $\mathcal{G}$ ).

**Bemerkung und Definition 1.23** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und sei  $\mathcal{G} = (E, K)$  ein gerichteter Graph. Sei  $F$  ein kovarianter oder kontravarianter Funktor  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ .

Dann induziert  $F$  wie unten in a) beschrieben einen **Diagrammfunktor**

$$\mathcal{G}F: \begin{cases} \mathcal{G}\text{-}\mathbf{DK} \longrightarrow \mathcal{G}\text{-}\mathbf{DL} & \text{wenn } F \text{ kovariant ist;} \\ \mathcal{G}\text{-}\mathbf{DK} \longrightarrow \mathcal{G}^-\text{-}\mathbf{DL} & \text{wenn } F \text{ kontravariant ist,} \end{cases}$$

und  $\mathcal{G}F$  hat die gleiche Varianz, wie  $F$ .

- a) Wenn  $D := (P, p)$  ein auf den Graphen  $\mathcal{G}$  modelliertes Diagramm über  $\mathcal{K}$  ist, so erhalten wir das Bilddiagramm  $\mathcal{G}F(D) =: (P', p')$ , in dem wir die Knoten von  $D$  und die Kanten von  $D$  (die ja Objekte bzw. Morphismen von  $\mathcal{K}$  sind) durch ihre Bilder unter  $F$  ersetzen. Das heißt,

- i) für jeden Knoten  $x \in E$  von  $\mathcal{G}$  oder von  $\mathcal{G}^-$  (sie haben die gleichen Knoten) ist

$$P'(x) := F(P(x))$$

- ii) wenn  $F$  kovariant ist, dann ist für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}$

$$p'(x, y) := F(p(x, y))$$

und dies ist tatsächlich ein  $\mathcal{L}$ -Morphismus  $F(P(x)) \longrightarrow F(P(y))$ . Wenn  $F$  kontravariant ist, dann ist für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}^-$  die Umkehrung  $(y, x)$  eine Kante von  $\mathcal{G}$  und  $p(y, x)$  ist ein  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $P(y) \longrightarrow P(x)$ . Wir setzen

$$p'(x, y) := F(p(y, x))$$

und dies ist tatsächlich ein  $\mathcal{L}$ -Morphismus  $F(P(x)) \longrightarrow F(P(y))$ , da  $F$  kontravariant ist.

- b) Wenn  $D$  ein *kommutatives* Diagramm ist, dann ist auch  $\mathcal{G}F(D)$  kommutativ (und wenn nur Teile von  $D$  kommutieren, dann kommutiert zumindest das Bild dieses Teils unter  $\mathcal{G}F$ ), denn die Kommutativitätsbedingung besagt nur, dass zwei verschiedene Verknüpfungen von Morphismen übereinstimmen. Wendet man  $F$  auf diese Verknüpfungen an,

so gehen sie über in die Verknüpfungen der Bildmorphismen, in gleicher Reihenfolge wenn  $F$  kovariant ist, oder in umgekehrter Reihenfolge wenn  $F$  kontravariant ist.

Die Verknüpfungen waren vor der Abbildung mit  $F$  gleich, und gleiche Morphismen gehen unter  $F$  wieder in gleiche über, also gilt nach der Abbildung mit  $F$  wieder die Gleichheit der Verknüpfungen der Bildmorphismen, d. h., das Bilddiagramm (oder Teildiagramm) kommutiert auch.

- c) Hieraus folgt schließlich, dass  $\mathcal{G}F$  tatsächlich ein Funktor ist. In a) haben wir nur beschrieben, wie  $\mathcal{G}F$  auf Diagramme wirkt, also auf die Objekte der Diagrammkategorie.

Wenn  $D := (P, p)$  und  $C := (Q, q)$  zwei solche Objekte sind, so ist ein Morphismus  $\mu: D \rightarrow C$  eine Abbildung, die jedem Knoten  $x \in E$  ein  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $\mu(x): P(x) \rightarrow Q(x)$  zuordnet, und wir definieren  $\mathcal{G}F(\mu)$  als die Abbildung  $\nu$  auf  $E$ , die jedem Knoten  $x$  den  $\mathcal{L}$ -Morphismus

$$F(\mu(x)): \begin{cases} F(P(x)) \rightarrow F(Q(x)) & \text{im kovarianten Fall,} \\ F(Q(x)) \rightarrow F(P(x)) & \text{im kontravarianten Fall} \end{cases}$$

zuordnet.

Damit  $\nu$  ein Morphismus von Diagrammen ist, muss es mit den Pfeilen vom Diagramm kommutieren, wie im Quadrat (1.4) in Definition 1.21 verlangt. Aber die Morphismen der Zuordnung  $\mu$  kommutieren mit den Morphismen entlang den Kanten des Diagramms  $D$  wie in (1.4), und diese Kommutativität bleibt erhalten, wie wir gerade in b) gesehen haben, wenn wir alle Morphismen mit  $F$  abbilden, wie in der Definition von  $\mathcal{G}F$  festgelegt. Aus diesem Grund ist  $\nu$  tatsächlich ein Morphismus von Diagrammen, so dass  $\mathcal{G}F$  zumindest aus der richtigen Art von Zuordnungen besteht.

Man muss jetzt nur noch zeigen, dass  $\mathcal{G}F$  Verknüpfung von Diagrammmorphismen respektiert und Identitätsmorphismen wieder in Identitätsmorphismen abbildet, aber das ist aus der Definition klar.

**Notation 1.24** In Definition 1.23 haben wir den von  $F$  induzierten Diagrammfunktor  $\mathcal{G}F$  genannt, um eine Verwechslung mit  $F$  zu vermeiden, weil sonst die Definition kaum zu verstehen gewesen wäre. Diese Definition haben wir jetzt hoffentlich verstanden, und deshalb wollen wir uns in Zukunft die Bequemlichkeit erlauben, den Diagrammfunktor genauso zu benennen,

wie der einfache Funktor, der ihn induziert. Aus dem Kontext wird immer klar sein, welche Variante des Funktors gemeint ist, so dass dies kaum zu Verwirrung führen kann.

Der Gedanke, der in der Definition der Morphismen einer Diagrammkategorie steckt, kann auf sehr ähnliche Weise und mit ähnlich nützlichen Auswirkungen benutzt werden, um so etwas wie einen „Morphismus zwischen Funktoren“ zu definieren. Diese „Morphismen zwischen Funktoren“ nennt man **natürliche Transformationen**, und sie bilden neben den Kategorien selber und den Funktoren den dritten wichtigen Grundbegriff der Kategorientheorie.

**Definition 1.25 (natürliche Transformation)** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und seien  $F$  und  $G$  zwei Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  von gleicher Varianz (also beide kovariant oder beide kontravariant).

Eine **natürliche Transformation**  $T: F \rightarrow G$  zwischen  $F$  und  $G$  ist eine auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  definierte Abbildung, die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  einen Morphismus  $T(A): F(A) \rightarrow G(A)$  der Kategorie  $\mathcal{L}$  zuordnet, so dass für jedes Paar  $A, B$  von Objekten von  $\mathcal{K}$  und für jeden Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  das der Varianz entsprechende folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ T(A) \downarrow & & \downarrow T(B) \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array} \quad (F \text{ und } G \text{ kovariant}),$$

bzw.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xleftarrow{F(f)} & F(B) \\ T(A) \downarrow & & \downarrow T(B) \\ G(A) & \xleftarrow{G(f)} & G(B) \end{array} \quad (F \text{ und } G \text{ kontravariant}).$$

Nur aus technischen Gründen ist es nicht wirklich möglich, zu zwei gegebenen Kategorien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  eine Funktorkategorie zu definieren, deren Objekte die Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  sind. Da Funktoren auf der ganzen Objektklasse von  $\mathcal{K}$  definiert sind, sind sie im Allgemeinen Unmengen (also keine Mengen), und können daher nicht selber zu einer Klasse zusammengefasst werden, die die Objektklasse einer Kategorie wäre, mit den natürlichen Transformationen

als Morphismen. Das ist nicht weiter schlimm, denn wir können zumindest festhalten, dass die natürlichen Transformationen, so wie sie in 1.25 definiert werden, die *Eigenschaften* 1.1 c) besitzen, die man von Morphismen verlangt:

**Lemma 1.26** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei Kategorien und seien  $F, G$  und  $H$  drei Funktoren gleicher Varianz  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ . Seien  $S: F \longrightarrow G$  und  $T: G \longrightarrow H$  natürliche Transformationen.

- a) Sei  $U$  die auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  definierte Abbildung, die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus  $T(A) \circ S(A): F(A) \longrightarrow H(A)$  in  $\mathcal{L}$  zuordnet. Dann ist  $U$  eine natürliche Transformation  $F \longrightarrow H$ ; wir nennen  $U$  die **Verknüpfung** der natürlichen Transformationen  $S$  und  $T$  und wir schreiben dafür  $U = T \circ S$ .

Die Verknüpfung von natürlichen Transformationen erfüllt das Assoziativgesetz.

- b) Die Abbildung auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus  $\text{id}_{G(A)}$  in  $\mathcal{L}$  zuordnet, ist eine natürliche Transformation  $G \longrightarrow G$ , die wir die **identische Transformation** von  $G$  nennen und mit  $\text{id}_G$  bezeichnen. Für sie gilt

$$\text{id}_G \circ S = S \quad \text{und} \quad T \circ \text{id}_G = T$$

für jede Wahl der natürlichen Transformationen  $S$  und  $T$  ( $\text{id}_G$  benimmt sich also wie eine Identität).

*Beweis.* a) Nachzuprüfen ist nur die Kommutativität des für  $U$  und den Funktoren  $F$  und  $H$  passenden Diagramms aus Definition 1.25.

Im kovarianten Fall ist also zu zeigen, dass  $U(B) \circ F(f) = G(f) \circ U(A)$ . Wir haben

$$S(B) \circ F(f) = G(f) \circ S(A), \tag{1.5}$$

weil  $S$  eine natürliche Transformation ist, und

$$T(B) \circ G(f) = H(f) \circ T(A), \tag{1.6}$$

weil  $T$  eine natürliche Transformation ist. Also ist

$$\begin{aligned} U(B) \circ F(f) &= T(B) \circ S(B) \circ F(f) \\ &\stackrel{(1.5)}{=} T(B) \circ G(f) \circ S(A) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} H(f) \circ T(A) \circ S(A) \\ &= H(f) \circ U(A) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Den Beweis für den kontravarianten Fall erhält man wörtlich, wenn man in den Gleichungen  $A$  und  $B$  vertauscht. (Im Diagramm hat das die Wirkung, das Diagramm zu spiegeln und die waagerechten Pfeile umzukehren. Die Spiegelung wirkt sich nur optisch aus; inhaltlich ändert sich nur durch die Umkehrung der Pfeile etwas, und zwar wie verlangt die Varianz der Funktoren. Der Morphismus  $f$  geht nach wie vor von  $A$  nach  $B$ .)

Dass die Verknüpfung von natürlichen Transformationen assoziativ ist, ist sofort klar, denn es werden dabei nur die Morphismen verknüpft, die die natürliche Transformation jedem Objekt zuordnet, und die Verknüpfung von Morphismen ist nach Definition 1.1 c) i) assoziativ.

b) ist trivial. ■

Wenn  $\mathcal{K}$  eine kleine Kategorie ist, dann kann man tatsächlich eine Kategorie  $\mathbf{Funkt}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  definieren, deren Objekte die Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  sind und deren Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen diesen Funktoren sind; die erforderlichen Eigenschaften folgen sofort aus dem Lemma. Darauf wollen wir nicht weiter eingehen.

**Beispiel 1.27** Sei  $K$  ein Körper und sei  $\mathcal{K} := \mathbf{VR}^2$  die Kategorie der Paare von  $K$ -Vektorräumen und Untervektorräumen; d. h., wenn  $(V, W)$  ein Objekt von  $\mathcal{K}$  ist, dann ist  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $W$  ist ein Untervektorraum von  $V$ . Sei  $\mathcal{L} := \mathbf{VR}$  die Kategorie der Vektorräume über  $K$ .

Wir haben den vergesslichen Funktor  $P_1: \mathbf{VR}^2 \rightarrow \mathbf{VR}$ , der jedem Vektorraumpaar  $(V, W)$  den oberen Vektorraum  $V$  zuordnet und jedem Morphismus  $f$  von Vektorraumpaaaren den gleichen Morphismus zuordnet, aber aufgefasst als eine lineare Abbildung der oberen Vektorräume.

In Beispiel 1.13 h) hatten wir den Quotientenfunktor  $Q: \mathbf{VR}^2 \rightarrow \mathbf{VR}$  definiert, der jedem Vektorraumpaar  $(V, W)$  den Quotientenraum  $V/W$  zuordnet und jedem Morphismus  $f: (V, W) \rightarrow (V', W')$  von Vektorraumpaaaren die induzierte lineare Abbildung  $\bar{f}: V/W \rightarrow V'/W'$  zuordnet.

Für jedes Vektorraumpaar  $(V, W)$  ist die Projektion  $\pi: V \rightarrow V/W$  eine „kanonisch definierte“ lineare Abbildung (was immer das heißen mag; siehe dazu Bemerkung 1.28 unten). Diese Projektion ist eine natürliche Transformation  $\pi: P_1 \rightarrow Q$ , denn für jede lineare Abbildung von Vektorraumpaaaren  $f: (V, W) \rightarrow (V', W')$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\bar{f}} & V'/W' \end{array}$$

**Bemerkung 1.28 („natürlich“)** Eine sehr geläufige Redewendung in der Mathematik behauptet, dass es eine *natürlich definierte* Struktur einer gewissen Art gibt, oder eine *natürliche* Konstruktion eines gewissen Objekts, oder zu gewissen Daten eine *natürliche* Abbildung mit gewissen Eigenschaften, oder man spricht auch von *kanonischen* oder *kanonisch definierten* Objekten oder Abbildungen, die man aus gewissen Angaben gewinnt. Zunächst interpretiert man diese Ausdrücke ganz naiv, etwa in dem Sinne, dass diese Konstruktionen sich „wie von selbst“ anbieten, oder dass sie geradlinig definiert sind, oder dass einem einfach keine andere Möglichkeit einfallen kann, wie die vorgegebene, so etwas zu konstruieren oder zu definieren.

Vorsicht! Die Wörter **natürlich** und **kanonisch** (wörtlich: *gesetzmäßig*) haben in diesen Ausdrücken eine genaue technische Bedeutung, nämlich die, dass es sich bei der angegebenen Konstruktion je nach den Gegebenheiten entweder um einen *Funktor* handelt (wenn Objekte, oder Morphismen *und* Objekte konstruiert werden) oder um eine *natürliche Transformation* (wenn zwischen vorher schon bekannten Objekten einer bestimmten Art nur ein Morphismus konstruiert wird).

Das „kanonische“ daran ist eben die Einhaltung der Gesetze, denen Funktoren und natürliche Transformationen unterliegen, die Verträglichkeit mit Verknüpfungen bzw. die Kommutativität mit den als Funktorwerte auftretenden Morphismen der Zielkategorie.

So gibt es zu jedem Paar bestehend aus einem Vektorraum  $V$  und einem Untervektorraum  $W$  die *natürliche* Konstruktion des Quotientenraumes, mit der Angabe, dass lineare Abbildungen von Vektorraumpaaren eine *kanonische* lineare Abbildung zwischen den Quotientenräumen induzieren; hier handelt es sich um den in Beispiel 1.27 erwähnten Quotientenfunktor  $\mathbf{VR}^2 \longrightarrow \mathbf{VR}$ . Und es gibt für jedes Vektorraumpaar  $(V, W)$  eine *natürliche* lineare Projektion  $\pi: V \longrightarrow V/W$ ; hier wird nur ein Morphismus konstruiert und es handelt sich um die natürliche Transformation, die in Beispiel 1.27 präsentiert wird.

Wann immer wir in Zukunft von „natürlichen“ Objekten oder Morphismen reden, werden wir das mit der hier erklärten technischen Bedeutung meinen, und daraus können Sie selbstverständlich Rückschlüsse ziehen, die man auch in Beweisen verwenden kann, denn Funktoren und natürliche Transformationen erfüllen ja gewisse feste nützliche Eigenschaften.

Mit einem Funktor kann man eine natürliche Transformation in eine neue Kategorie übertragen:

**Lemma 1.29** Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien, seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  und sei  $T: F \longrightarrow G$  eine natürliche Transformation.



Sei  $H$  ein Funktor beliebiger Varianz  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ . Wir definieren auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  eine Zuordnung  $S$ , die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus

$$H(T(A)) : H(F(A)) \rightarrow H(G(A))$$

von  $\mathcal{M}$  zuordnet (bzw.  $H(G(A)) \rightarrow H(F(A))$ , wenn  $H$  kontravariant ist).

Dann ist  $S$  eine natürliche Transformation  $H \circ F \rightarrow H \circ G$ , wenn  $H$  kovariant ist, oder  $H \circ G \rightarrow H \circ F$ , wenn  $H$  kontravariant ist.

Wir nennen  $S$  die **Verknüpfung des Funktors  $H$  mit der natürlichen Transformation  $T$** , und schreiben dafür  $H \circ T$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass für  $S$  und den Funktoren  $H \circ F$  und  $H \circ G$  das der Varianz dieser Funktoren entsprechende Diagramm aus Definition 1.25 kommutiert. Aber für die natürliche Transformation  $T$  und den ursprünglichen Funktoren  $F$  und  $G$  kommutiert dieses Diagramm für jedes Paar von Objekten von  $\mathcal{K}$ , und das neue Diagramm entsteht daraus durch Anwendung des Funktors  $H$ , also kommutiert es auch nach Bemerkung 1.23 b). ■

Jede natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren lässt sich auf einfache Weise erweitern zu einer natürlichen Transformation zwischen den entsprechenden Diagrammfunktoren für Diagramme einer festen Gestalt, definiert in Definition 1.23:

**Lemma 1.30** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und sei  $\mathcal{G} = (E, K)$  ein gerichteter Graph. Seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  und sei  $T : F \rightarrow G$  eine natürliche Transformation.

Die Funktoren  $F$  und  $G$  induzieren Funktoren  $\mathcal{G}F$  und  $\mathcal{G}G$  zwischen den Diagrammkategorien  $\mathcal{G}\text{-}\mathbf{DK} \rightarrow \mathcal{G}\text{-}\mathbf{DL}$ .

Wir definieren eine Zuordnung  $\mathcal{G}T$ , die jedem Diagramm  $D := (P, p)$  von Gestalt  $\mathcal{G}$  über  $\mathcal{K}$  den Diagrammmorphismus  $\mu$  von  $\mathcal{G}\text{-}\mathbf{DL}$  zuordnet, der an jedem Knoten  $x \in E$  gegeben ist durch

$$\mu(x) := T(P(x)) : F(P(x)) \rightarrow G(P(x)).$$

Das so definierte  $\mathcal{G}T$  ist eine natürliche Transformation  $\mathcal{G}F \rightarrow \mathcal{G}G$ .

*Beweis.* Zunächst ist  $\mu$  tatsächlich ein Diagrammmorphismus, denn für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}$  kommutiert (im kovarianten Fall) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(P(x)) & \xrightarrow{F(p(x,y))} & F(P(y)) \\ T(P(x))=\mu(x) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mu(y)=T(P(y)) \\ G(P(x)) & \xrightarrow{G(p(x,y))} & G(P(y)) \end{array}$$

weil  $T$  eine natürliche Transformation ist (im kontravarianten Fall gilt der gleiche Schluss; der einzige Unterschied besteht darin, dass die waagerechten Pfeile im Diagramm von rechts nach links gehen).

Wir müssen noch zeigen, dass  $\mathcal{G}T$  wie in Definition 1.25 mit den Bildern eines Diagrammmorphismus unter  $F$  und  $G$  kommutiert. Sei also  $C := (Q, q)$  ein weiteres  $\mathcal{G}$ -Diagramm und  $\nu: D \rightarrow C$  ein Diagrammmorphismus. Wir gehen wieder vom kovarianten Fall aus, aber der Beweis im kontravarianten Fall geht genauso. Zu zeigen ist, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(D) & \xrightarrow{F(\nu)} & F(C) \\ \mathcal{G}T(D) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}T(C) \\ G(D) & \xrightarrow{G(\nu)} & G(C) \end{array}$$

von Diagrammmorphismen kommutiert, und dazu reicht es, für jeden Knoten  $x$  von  $\mathcal{G}$  die Kommutativität des entsprechenden Diagramms nachzuweisen, das zwischen den an diesem Knoten sitzenden Objekten entsteht:

$$\begin{array}{ccc} F(P(x)) & \xrightarrow{F(\nu(x))} & F(Q(x)) \\ T(P(x)) \downarrow & & \downarrow T(Q(x)) \\ G(P(x)) & \xrightarrow{G(\nu(x))} & G(Q(x)) \end{array}$$

Dies aber folgt wieder sofort aus der Tatsache, dass  $T$  eine natürliche Transformation  $F \rightarrow G$  ist. ■

Wir beenden diese Einführung in die Kategorientheorie mit der kategorientheoretischen Beschreibung, wann verschiedene Objekte einer Kategorie, oder wann verschiedene Funktoren von einer Kategorie in eine andere „gleich aussehen“ oder die „gleiche Struktur“ haben.

Der Begriff, den wir brauchen, ist Ihnen ja in vielen speziellen Kategorien schon bekannt, unter Namen wie „Isomorphismus“, „Homöomorphismus“ und so weiter.

**Definition 1.31** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und seien  $A$  und  $B$  Objekte von  $\mathcal{K}$  und  $f: A \rightarrow B$  ein Morphismus.

Wir nennen den Morphismus  $f$  einen **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus  $g: B \rightarrow A$  gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_B. \quad (1.8)$$

Einen solchen Morphismus  $g$  nennen wir einen **Umkehrmorphimus** oder einen **inversen Morphismus** zu  $f$ , und wir notieren ihn oft mit  $f^{-1}$ .

**Bemerkung 1.32** a) Wenn  $f: A \longrightarrow B$  ein Morphismus ist, der ein Linksinverses  $g: B \longrightarrow A$  und ein (vielleicht von  $g$  verschiedenes) Rechtsinverses  $g': B \longrightarrow A$  besitzt (also  $g \circ f = \text{id}_A$  und  $f \circ g' = \text{id}_B$ ), dann ist tatsächlich  $g = g'$  und  $f$  ist somit ein Isomorphismus mit dem Umkehrmorphismus  $g (= g')$ . Denn es gilt

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'.$$

- b) Wenn  $f: A \longrightarrow B$  ein Isomorphismus ist, dann ist der Umkehrmorphismus  $g$  eindeutig bestimmt, denn zwei verschiedene Umkehrmorphisme wären insbesondere ein Linksinverses und ein Rechtsinverses wie in Teil a). Diese Tatsache rechtfertigt die Verwendung einer festen Notation  $f^{-1}$  für den (ja eindeutigen) Umkehrmorphismus zu  $f$ .
- c) Für jedes Objekt  $A$  ist die Identität  $\text{id}_A$  offenbar ein Isomorphismus mit sich selber als Umkehrmorphismus.
- d) Wenn  $f$  ein Isomorphismus ist mit Umkehrmorphismus  $g$ , dann folgt aus Gleichung (1.8) auch, dass  $g$  ein Isomorphismus ist mit Umkehrmorphismus  $f$ .
- e) Seien  $f: A \longrightarrow B$  und  $h: B \longrightarrow C$  Morphismen. Wenn  $f$  und  $h$  Isomorphismen sind, dann ist auch  $h \circ f$  ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus  $f^{-1} \circ h^{-1}$ , wie man sofort nachrechnen kann.
- f) Seien  $f: A \longrightarrow B$  und  $h: B \longrightarrow C$  Morphismen, so dass  $h \circ f$  ein Isomorphismus ist, und so dass  $h$  oder  $f$  ein Isomorphismus ist. Dann sind  $h$  und  $f$  beide Isomorphismen.

Denn wenn  $f$  ein Isomorphismus ist, ist  $f^{-1}$  nach Teil d) ein Isomorphismus, also ist nach Teil e) auch  $(h \circ f) \circ f^{-1} = h$  ein Isomorphismus. Und wenn  $h$  ein Isomorphismus ist, ist  $h^{-1}$  nach Teil d) ein Isomorphismus, also nach Teil e) auch  $h^{-1} \circ (h \circ f) = f$ .

**Definition 1.33** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und seien  $A$  und  $B$  Objekte von  $\mathcal{K}$ . Wir sagen  $A$  ist *isomorph* zu  $B$  in der Kategorie  $\mathcal{K}$ , und wir schreiben  $A \cong B$  oder wo nötig zur Deutlichkeit  $A \cong_{\mathcal{K}} B$ , wenn es einen Isomorphismus  $f \in \text{Mor}(A, B)$  gibt.

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , denn Bemerkung 1.32 c) zeigt, dass die Relation  $\cong$  reflexiv ist, 1.32 d) zeigt, dass sie symmetrisch ist, und 1.32 e) zeigt, dass sie transitiv ist.

**Lemma 1.34** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und sei  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  ein kovarianter oder kontravarianter Funktor. Seien  $A$  und  $B$  Objekte von  $\mathcal{K}$  und  $f: A \longrightarrow B$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{K}$ . Dann ist  $F(f)$  ein Isomorphismus mit  $F(f^{-1})$  als seinen Umkehrmorphismus.

*Insbesondere gehen isomorphe Objekte unter jedem Funktor wieder in isomorphe Objekte über, und Isomorphie bleibt unter der Anwendung von Funktoren erhalten.*

*Beweis.* Wenn  $F$  kovariant ist haben wir

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

und

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

Wenn  $F$  kontravariant ist haben wir

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

und

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

■

Isomorphie haben Sie schon in vielen Situationen kennengelernt, in der Vektorraumtheorie, in der Gruppentheorie, in der Topologie (unter dem Namen Homöomorphie), und so ziemlich in jedem anderen Gebiet der Mathematik. In der Kategorientheorie kann man eine einzige Definition davon angeben, die für alle Kategorien passt und die das Wiederholen dieser Definition für jede neue Struktur, die man kennen lernt, überflüssig macht.

Ähnliches gilt für viele andere bekannte strukturelle Begriffe der Mathematik, für den Begriff eines Unterobjekts, eines Quotienten, eines Produkts oder einer Summe von Objekten. Diese Begriffe lassen sich charakterisieren durch allgemeine kategorientheoretische Eigenschaften, die oft die Gestalt haben, dass es Morphismen mit gewissen Eigenschaften gibt, oder Morphismen gibt, die sich immer durch weitere zu einem kommutativen Diagramm ergänzen lassen. Allerdings würde es uns zu weit vom Thema abbringen, wenn wir in die Details dieser Konstruktionen eingingen. Wir benötigen zwar diese Begriffe, aber nur in Kategorien, in denen wir sie schon kennen, nämlich in den algebraischen und topologischen Kategorien. In neuen Varianten dieser

Kategorien (z.B., in  $\mathbf{Top}^2$  oder in  $\mathbf{Top}_*$ ) werden wir die nötigen Anpassungen dieser Begriffe direkt definieren, weil das einfacher sein wird, als die Auswirkung der recht abstrakten kategoriethoretischen Definitionen in der jeweiligen Situation zu verstehen.

Der Isomorphiebegriff aber ist so wichtig, dass wir ihn hier noch in Verbindung mit natürlichen Transformationen betrachten wollen:

**Definition 1.35** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ . Wir nennen eine natürliche Transformation  $T: F \rightarrow G$  eine **natürliche Äquivalenz**, wenn für jedes Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  gilt, dass  $T(A): F(A) \rightarrow G(A)$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{L}$  ist.

In diesem Fall kann man auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  eine Abbildung  $S$  definieren, die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus  $T(A)^{-1}: G(A) \rightarrow F(A)$  zuordnet.

Man kann sehr leicht nachprüfen, dass auch  $S$  eine natürliche Transformation (und wegen Bemerkung 1.32 d) sogar eine natürliche Äquivalenz) ist:

Sei  $f: A \rightarrow B$  ein Morphismus von  $\mathcal{K}$ . Im kovarianten Fall folgt aus  $T(B) \circ F(f) = G(f) \circ T(A)$ , dass

$$S(B) \circ T(B) \circ F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f) \circ T(A) \circ S(A),$$

d. h.,

$$T(B)^{-1} \circ T(B) \circ F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f) \circ T(A) \circ T(A)^{-1},$$

woraus folgt

$$F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f),$$

was zu zeigen ist.

Der Beweis im kontravarianten Fall geht genauso.

Für die natürliche Transformation  $S$  gilt offensichtlich  $S \circ T = \text{id}_F$  und  $T \circ S = \text{id}_G$ . Wir nennen  $S$  die **Umkehrtransformation** oder die **inverse Transformation** zu  $T$  und schreiben dafür  $T^{-1}$ .

So wie die natürlichen Transformationen die „Morphismen“ der gedachten Funktorkategorie sind, sind die natürlichen Äquivalenzen ihre „Isomorphismen“. Natürlich äquivalente Funktoren haben im wesentlichen die gleiche Struktur, auch wenn sie nicht im Detail gleich sind, und sie bilden jedes Objekt ihrer Quellkategorie immer in zueinander isomorphe Objekte der Zielkategorie ab.

**Lemma 1.36** Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien, seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  und sei  $T: F \rightarrow G$  eine natürliche Äquivalenz mit Umkehrtransformation  $S: G \rightarrow F$ .

Sei  $H$  ein Funktor beliebiger Varianz  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ . Dann ist die natürliche Transformation  $H \circ T$  (definiert in Lemma 1.29) auch eine natürliche Äquivalenz, mit  $H \circ S$  als Umkehrtransformation.

*Beweis.* Das folgt sofort aus Lemma 1.34 und der Definition von  $H \circ T$ . ■

# Kapitel 2

## Singuläre Homologie

In der Sprache von Kapitel 1 besteht die algebraische Topologie aus der Konstruktion und Untersuchung von Funktoren von **Top**, **Top**<sup>2</sup> oder **Top**<sub>\*</sub> in eine algebraische Kategorie wie **Gp**, **AbGp** oder **Ring**. Dafür kennen wir bisher aus dem vergangenen Semester nur ein einfaches Beispiel, nämlich die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes, also den Funktor  $\pi_1$ , und vielleicht noch die höheren Homotopiegruppen  $\pi_n$  für  $n \geq 2$ , die aber nicht so intensiv behandelt wurden.

In diesem Kapitel wollen wir eine neue Art von algebraischen Funktoren für topologische Räume einführen, die **Homologiegruppen**, die nach ganz anderen Ideen und auf ganz andere Weise aufgebaut werden, als die Homotopiegruppen.

Die Konstruktion der Homologie geschieht in zwei Stufen, mit einem Zwischenstadium gegeben durch strukturreiche algebraische Objekte, die **Kettenkomplexe** heißen. Die erste Stufe der Konstruktion übersetzt die Geometrie auf recht geradlinige Weise in Kettenkomplexe (hierfür gibt es sowohl innerhalb der Topologie wie auch in anderen Gebieten der Mathematik ein großes Arsenal an Möglichkeiten), während die zweite Stufe auf eine einheitliche Weise aus den Kettenkomplexen die Homologiegruppen gewinnt.

Man könnte naiv fragen, wenn sowohl die Kettenkomplexe wie auch die Homologiegruppen die Geometrie algebraisch erfassen, warum die zweite Stufe überhaupt nötig ist, d.h., warum man nicht einfach auf der Stufe der Kettenkomplexe bleibt und dort weiterarbeitet. Abgesehen davon, dass die Homologie eine etwas einfachere Struktur hat als die Kettenkomplexe, liegt der entscheidende Grund in der Tatsache, dass die Homologiegruppen wohldefinierte Invarianten der topologischen Struktur und noch genauer, des Homotopietyps sind, was für die Kettenkomplexe keinesfalls zutrifft.

Die Kettenkomplexe haben eher die Rolle eines Baugerüsts für die Errichtung der Homologie. Als mathematische „Architekten“ der Homologie haben

wir den Entwurf des fertigen Gebäudes im Sinn, schreiben aber nicht unbedingt vor, welches passende Baugerüst der Konstrukteur verwenden oder für zweckmäßig halten soll, um die Konstruktion möglichst bequem ausführen zu können. So werden wir später verschiedene günstige und der Situation angepasste Möglichkeiten besprechen, um aus der Geometrie Kettenkomplexe zu gewinnen.

Obwohl wir unsere detaillierte Konstruktion der Homologie mit jeder der beiden Stufen beginnen könnten, und es wegen ihres einheitlichen Aufbaus vielleicht sogar eleganter wäre, die zweite Stufe zuerst zu besprechen, lässt die Untersuchung von Kettenkomplexen sich leichter motivieren, wenn man schon ein Beispiel parat hat. Wir beginnen deshalb doch mit der ersten Stufe und mit einer Kettenkomplexkonstruktion, die den Vorteil hat, ohne spezielle Voraussetzungen oder Hilfsstrukturen auf den topologischen Räumen auszukommen.

Es handelt sich um den so genannten *singulären Kettenkomplex* eines topologischen Raumes, und wir wollen zunächst beschreiben und motivieren, welche Gedanken hinter dieser Konstruktion stecken, bevor wir die Details nennen.

Während die Homotopiegruppen geometrische Merkmale eines Raumes als Hindernisse zur Homotopie von Schleifen sichtbar machen (die nichttrivialen Elemente der Homotopiegruppen sind gerade die Homotopieklassen von nicht nullhomotopen Schleifen), und während sie somit geometrische Besonderheiten praktisch mit einem Lasso einfangen, versucht die Homologie, den Raum „auszukacheln“ mit einfachen Standardbausteinen, und geometrische Besonderheiten daran sichtbar zu machen, dass es in dem Raum geschlossene Hüllen gibt, die nicht mit den Standardbausteinen aufgefüllt oder ausgekachtelt werden können, weil keine endliche Kachelung diese Hülle als ihr Rand hat.

Das ist, erst einmal sehr vague und schemenhaft beschrieben, die Grundidee der Homologietheorie, und es gibt, wie schon erwähnt, viele verschiedene Möglichkeiten, diese Idee auszuführen, ganz ähnlich zu der Tatsache, dass es viele verschiedene Möglichkeiten gibt, einen Fußboden auszulegen.

Man kann dabei sehr präzise geformte möglichst einfache Standardbausteine passgenau aneinander fügen, wie das bei einem Parkettboden der Fall ist. Der Vorteil ist eine regelmäßige und leicht erfassbare Struktur, die aber sehr starr ist, so dass der Bodenbelag sich nicht immer gut an die Raumform anschmiegt und diese Methode nicht geeignet ist für sehr exotisch geformte Räume. Wenn man nicht allzu großen Wert auf saubere Handwerksarbeit legt, kann man auch kleine Teppiche und Strohmatten und dergleichen überall in den Raum streuen, bis der ganze Fußboden bedeckt ist. Obwohl sich dann kein sehr übersichtliches Muster ergibt, passt sich diese Methode leicht



an jede Raumform an. Und schließlich, wenn man sich möglichst wenig Arbeit machen will, kann man auch Fertigparkett oder gemustertes Linoleum legen, bei dem kleine Bausteine schon zu größeren vorgefertigten Platten zusammengefügt sind, von denen man nur wenige braucht, um den Raum schnell und mühelos auszulegen.

Auch die Homologietheorie versucht, möglichst einfache Bausteine zu verwenden, die deshalb **Simplizes** genannt werden. Die Simplizes, die in den topologischen Raum gelegt werden, sind Kopien eines Musterstücks, des so genannten **Standardsimplexes** in jeder Dimension, aber es gibt verschiedene Forderungen, die man an die Genauigkeit der Kopien und die Genauigkeit der Auslegung stellen kann.

In einer Variante der Homologietheorie werden (wie bei einem Parkettboden) sehr genaue Bausteine verwendet, nämlich affine Kopien des Standardsimplexes, und sie werden sehr präzise aneinander gefügt, nämlich so, dass die sich berührenden Seiten zweier aneinander grenzender Simplizes genau deckungsgleich sind. Die so entstehenden Gebilde heißen **Simplizialkomplexe** und die mit ihnen konstruierte Homologie heißt die **simpliziale Homologie**. Der präzise Aufbau führt zu kleinen und überschaubaren Kettenkomplexen und ermöglicht deshalb eine sehr einfache Berechnung der Homologiegruppen unter effizienter Verwendung algebraischer Erzeugenden. Dafür muss man aber einen Preis bezahlen, denn die genaue simpliziale Struktur geht wesentlich in die Berechnung ein, und diese simpliziale Struktur ist ein künstlicher Zusatz zur topologischen Struktur, die man eigentlich untersuchen will. Man muss also mühsam zeigen, dass die simplizialen Homologiegruppen nur von der topologischen Struktur und nicht von der Wahl der simplizialen Zerlegung des Raumes abhängen. Außerdem ist die simpliziale Homologie nur definiert für Räume, die eine simpliziale Zerlegung besitzen, und das sind leider nicht alle (die Ausnahmen sind allerdings exotisch).

Die von uns bevorzugte Methode, die Homologiegruppen zu konstruieren, stellt im Gegensatz zur simplizialen Methode nur minimale Anforderungen an die verwendeten Kopien des Standardsimplexes und an die Art, wie diese Kopien zusammengefügt werden. In der Analogie oben entspricht sie der unordentlichen Ausstreuerung von sich überlappenden Teppichen und Strohmatten. Als Bausteine werden Bilder des Standardsimplexes unter beliebigen *stetigen* Abbildungen zugelassen, und sie dürfen beliebig im Raum verteilt sein. Nicht nur dürfen die Bildsimplizes sich überlappen oder ganz krumm zueinander liegen, es müssen die stetigen Abbildungen des Standardsimplexes, die die Bausteine ergeben, noch nicht einmal injektiv sein, sie können sogar völlig ausarten und konstant werden. Deshalb heißt diese Variante der Homologietheorie die **singuläre Homologie**. Weil man relativ frei geformte Bausteine frei zusammenbauen darf, ist die Ausgangssituation der singulä-

ren Homologie unhandlicher und komplizierter als bei den anderen Versionen, aber das ist der einzige, leicht zu verschmerzende Nachteil, denn weil dem topologischen Raum keine zusätzliche Struktur aufgeprägt werden muss als Fundament für die singuläre Homologie, liefert sie direkt und unmittelbar einen Funktor auf **Top**, der für alle topologische Räume definiert ist und schon in seiner Definition nur von der topologischen Struktur abhängt. Die verloren gegangene direkte und einfache Berechenbarkeit der Homologiegruppen, die die simpliziale Theorie bietet, wird kompensiert durch leistungsfähige algebraische Werkzeuge, mit denen man die Homologie immer noch bequem berechnen kann.

Und schließlich kann man, nach der Entwicklung der Grundzüge der Homologietheorie, für geeignete Räume noch eine dritte und vereinfachte Variante, ähnlich dem Fertigparkett, herleiten, bei der von einer Aufteilung des Raumes in geeignet zusammengeklebte Bälle verschiedener Dimensionen ausgegangen wird (die man **Zellen** nennt), und bei der man die Homologiegruppen direkt aus dieser Zellenzerlegung ohne die Betrachtung von einzelnen Simplizes oft sofort hinschreiben kann. Der Vorteil dieser **zellulären Homologie** liegt darin, dass in die Konstruktion eine sehr viel kleinere Anzahl von Grundbausteinen eingeht, als bei der simplizialen oder singulären Homologie, so dass man es auch in der Zwischenstufe der Kettenkomplexe mit kleinen und überschaubaren Gruppen zu tun hat, während in der singulären Homologie die in den Kettenkomplexen auftretenden Gruppen noch nicht einmal endlich erzeugt sind (abgesehen von wenigen trivialen Ausnahmen).

Wegen der genannten mit ihr verbundenen technischen Schwierigkeiten werden wir in dieser Vorlesung die simpliziale Homologie überhaupt nicht behandeln, sondern von vornherein uns auf die singuläre Homologie konzentrieren. Aber wir werden später auch die zelluläre Homologie erläutern, weil ihre Anwendung in vielen Fällen sehr angenehm ist. Die Entwicklung der zellulären Homologie setzt aber schon einige Kenntnisse über die singuläre Homologie voraus, so dass wir zunächst nur diese Variante besprechen werden.

Zum Schluss erwähnen wir noch, dass die moderne algebraische Topologie als allgemeinste Beschreibung die Homologie und Kohomologie gerne mittels einer homotopietheoretischen Konstruktion und kategorietheoretischen Methoden erzeugt, weil man so am besten die gemeinsamen Eigenschaften aller Homologie- und Kohomologietheorien erfasst und diese Theorien auch in ganz anderen Situationen und Gebieten verwenden kann, als in der Topologie. Aber diese sehr abstrakte Konstruktion ist kaum verständlich, wenn man sie nicht an einem illustrativen bekannten klassischen Beispiel wie der singulären Homologie ausprobieren kann. In dieser Vorlesung haben wir leider nur Zeit für die klassische Konstruktion, mit der wir jetzt beginnen wollen.

Wir haben schon gesagt, dass die Homologiegruppen in jeder Dimension aus möglichst einfachen Bausteinen zusammengebaut werden, die Kopien eines Standardstücks sind. Wie kann dieser „möglichst einfache“ Standardbaustein aussehen?

In Dimension 0 haben wir keine große Auswahl — das einfachste nulldimensionale Gebilde ist ein einzelner Punkt, und so sieht auch jeder 0-Simplex aus. Auch in Dimension 1 gibt es einen kanonischen Kandidaten für die Rolle des einfachsten Bausteins, nämlich eine Strecke und als Standardbeispiel dafür das Intervall  $I = [0, 1]$ .

Wenn man an den physikalischen Alltag, an Parkettbretter und Backsteine denkt, wäre eine natürliche Wahl für die Standardräume in den nächsthöheren Dimensionen dann das Quadrat, der Würfel usw., also die Räume  $I^n$ . Doch es gibt *noch* einfachere aber trotzdem regelmäßige und starr geformte Gebilde, in Dimension 2 zum Beispiel ein Dreieck, in Dimension 3 anstelle des Quaders ein Tetraeder, und so weiter. Das Dreieck ist einfacher als ein Quadrat oder ein Rechteck, weil letzteres vier Ecken und vier Kanten hat, das Dreieck aber nur drei. Entsprechend haben dreidimensionale Quader schon  $2^3 = 8$  Ecken und 6 Seiten, das Tetraeder jeweils nur 4.

Das sollte deutlich machen, dass eine sinnvolle Wahl des einfachsten Standardbausteins in jeder Dimension in der *konvexen Hülle einer für diese Dimension minimalen Anzahl von Punkten* eines geeigneten affinen Raumes besteht. Die konvexe Hülle von einer Menge von Punkten hat die gleiche Dimension wie ihre affine Hülle, und diese Dimension ist möglichst groß (und somit die Anzahl der benötigten aufspannenden Punkte möglichst klein), wenn die Punkte affin unabhängig, oder wie man sagt, in allgemeiner Lage sind. (Das ist gleichbedeutend damit, dass die Abstandsvektoren von einem der Punkte zu den anderen linear unabhängig sind.) In diesem Fall ist die erzielte Dimension um Eins kleiner, als die Anzahl der aufspannenden Punkte.

Um eine konvexe Hülle von Dimension  $n$  zu erhalten, braucht man also  $n + 1$  Punkte in allgemeiner Lage. Dafür gibt es im  $\mathbf{R}^n$  eine kanonische Auswahl, die uns unseren Standardsimplex der Dimension  $n$  liefert.

**Definition 2.1** Sei  $n$  eine natürliche Zahl und für  $1 \leq i \leq n$  sei

$$e_i := (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

der  $i$ -te Standardbasisvektor vom  $\mathbf{R}^n$ . Sei  $e_0 := (0, \dots, 0)$  der Koordinatenursprung.

Wir definieren den  $n$ -dimensionalen **Standardsimplex**  $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$  als die konvexe Hülle der Punkte  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

Die konvexe Hülle dieser Punkte ist die Menge aller Punkte

$$x = \sum_{i=0}^n t_i e_i, \quad (2.1)$$

wo  $0 \leq t_i \leq 1$  und  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ . Die Koeffizienten  $t_i$  in der Darstellung (2.1) heißen die **baryzentrischen Koordinaten** des Punktes  $x \in \Delta_n$ .

Weil  $e_0 = 0$  bedeutet die Darstellung (2.1) der Punkte von  $\Delta_n$ , dass

$$\Delta_n := \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i=1}^n t_i \leq 1 \right\}.$$

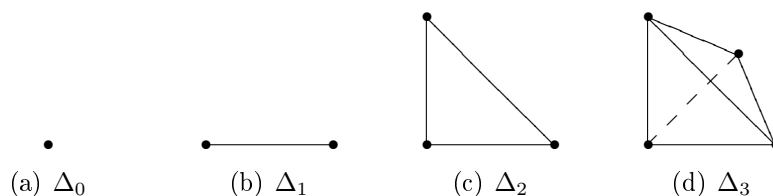


Abbildung 2.1: Die ersten vier Standardsimplizes.

Wie schon angekündigt, werden unsere eigentlichen Bausteine stetige Bilder des Standardsimplexes sein.

**Definition 2.2** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Ein **singulärer  $n$ -Simplex**  $\sigma$  in  $X$  ist eine stetige Abbildung

$$\sigma: \Delta_n \longrightarrow X.$$

Die Punkte  $x_i := \sigma(e_i)$  für  $i = 0, \dots, n$  nennen wir die **Eckpunkte** von  $\sigma$ .

Die Menge aller singulären  $n$ -Simplizes in  $X$  bezeichnen wir mit  $S_n(X)$ .

Weil man die singulären Simplizes auf diese Weise erhält, ist es auch möglich, einige Operationen, die wir mit ihnen durchführen werden, musterhaft auf dem Standardsimplex zu definieren und die Definition dann automatisch auf alle singulären Simplizes zu übertragen.

Deshalb ist es sinnvoll, gleich eine Sonderklasse von besonders schönen singulären Simplizes auszuzeichnen, zu der auch der Standardsimplex gehört, und für diese Klasse eine Notation einzuführen, die für die Erläuterung der Grundoperationen besonders geeignet ist.

**Definition 2.3** Sei  $V$  ein Vektorraum oder allgemeiner ein affiner Raum über  $\mathbf{R}$ . Einen singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in  $V$  nennen wir einen **linearen** oder einen **affinen  $n$ -Simplex**, wenn die stetige Abbildung  $\sigma: \Delta_n \rightarrow V$  die Einschränkung einer affinen Abbildung  $\mathbf{R}^n \rightarrow V$  ist.

In diesem Fall ist  $\sigma$  eindeutig bestimmt durch seine **Eckpunkte**  $v_i := \sigma(e_i)$  für  $i = 0, \dots, n$ , denn in baryzentrischen Koordinaten  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  auf  $\Delta_n$  (mit  $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$ , also  $t_0 = 1 - t_1 - \dots - t_n$ ) gilt die Formel

$$\sigma(t_1, \dots, t_n) = \sigma\left(\sum_{i=0}^n t_i e_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i \sigma(e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i. \quad (2.2)$$

In dieser Formel ist das Argument  $(t_1, \dots, t_n)$  des ganz linken Terms ein gewöhnliches kartesisches Koordinatentupel im  $\mathbf{R}^n$ , das wir in den anderen Termen zu einem  $n+1$ -Tupel  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  von baryzentrischen Koordinaten erweitern mit  $t_0$  wie in der Zeile vor der Formel.

Zu jeder Auswahl von  $n+1$  Punkten  $v_0, \dots, v_n \in V$  gibt es tatsächlich einen eindeutigen linearen Simplex  $\sigma$  mit diesen Punkten als Eckpunkte, definiert durch die Formel (2.2). Diese Formel bestimmt offensichtlich eine stetige Abbildung, die die Einschränkung einer affinen Abbildung auf ganz  $\mathbf{R}^n$  ist.

Wir notieren durch  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  den eindeutigen affinen Simplex mit Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n$ .

**Bemerkung 2.4** Man beachte, dass ein singulärer Simplex  $\sigma$  nicht injektiv sein muss, und keine besonderen Voraussetzungen außer Stetigkeit erfüllen muss.

Das gilt auch für affine Simplizes: ihre Eckpunkte müssen nicht affin unabhängig sein; sie müssen noch nicht einmal verschieden sein.

**Beispiel 2.5** Unser wichtigstes Beispiel eines affinen Simplexes wird der Standardsimplex selber sein, oder genauer, der singuläre Simplex  $\text{id}_{\Delta_n}$ , welcher in der Notation von Definition 2.3 der affine Simplex

$$[e_0, e_1, \dots, e_n] \in \mathbf{R}^n$$

ist.

Denn viele Operationen auf Simplizes brauchen wir nur auf diesem Musterbeispiel zu erklären, um sie sofort für alle singulären Simplizes  $\sigma$  verfügbar zu haben, in dem wir das Muster mit der stetigen Abbildung  $\sigma$  auf den Simplex  $\sigma$  übertragen.

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde gesagt, dass die Definition der Homologiegruppen zwei Stufen involviert. In der ersten Stufe bauen wir aus den geometrischen Bausteinen, die in unserem Fall die singulären Simplizes sind, auf einfache Weise ein algebraisches Objekt, dass sich ein **Kettenkomplex** nennt, und erst in der zweiten Stufe wird auf rein algebraischem Wege aus dem Kettenkomplex die Homologie gewonnen.

Wie kann man schnell aus singulären Simplizes algebraische Objekte, zum Beispiel Gruppen und Gruppenhomomorphismen, erzeugen? Es gibt dazu eine sehr einfache Methode.

Anders als bei der Fundamentalgruppe werden wir nicht versuchen, eine Gruppenoperation irgendwie aus der geometrischen Struktur der singulären Simplizes herzuleiten, wie das bei der Verkettung von Schleifen der Fall war, sondern wir werden sie ganz billig als eine *formale* Addition von Simplizes gewinnen — wir schreiben einfach Summen (und Differenzen) von Simplizes hin, und rechnen mit ihnen nach den üblichen Gesetzen für additive abelsche Gruppen, als ob wir das dürften.

Und wir dürfen das tatsächlich, wie Sie aus der genaueren Definition weiter unten sehen werden. Zu diesem Zweck machen wir ein paar algebraische Vorbereitungen.

**Bemerkung 2.6** Sei  $A$  eine additive abelsche Gruppe. Dann können wir eine Art „skalare Multiplikation“ zwischen ganzen Zahlen und Elementen von  $A$  definieren, wenn wir wie üblich für  $a \in A$  und  $n > 0 \in \mathbf{Z}$

$$na := \underbrace{a + \cdots + a}_n \quad (2.3)$$

setzen,  $0 \cdot a := 0 \in A$  setzen und für  $n < 0$  das Produkt  $na$  als  $(-n)(-a)$  im Sinne von (2.3) definieren.

Es ist nicht schwer nachzurechnen, dass diese Operation die gleichen Eigenschaften erfüllt, wie die skalare Multiplikation in einem Vektorraum; man muss dazu nur eine lästige Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens der ganzen Zahlen durcharbeiten, weshalb wir den Nachweis auch nicht vorführen.

Diese „zusätzliche“ algebraische Struktur ist eine kostenlose Beigabe zu jeder additiven abelschen Gruppe — sie hat automatisch diese skalare Multiplikation mit Elementen von  $\mathbf{Z}$ , die unmittelbar aus der Gruppenaddition herleitbar ist.

Wir wollen jetzt versuchen, möglichst effizient zu beschreiben, was für eine Gruppe wir erhalten, wenn wir „formale Summen“ von singulären Simplizes, oder allgemeiner von Elementen einer beliebigen Menge bilden. Die „ $\mathbf{Z}$ -Modul“-Struktur aus Bemerkung 2.6 weist uns da einen günstigen Weg.

Eine formale Summe von Elementen einer Menge  $X$  können wir auf Grund der Bemerkung auch auffassen als eine formale  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination, in der nur endlich viele Summanden erscheinen (weil wir auch in einer formalen Summe nur endlich viele Summanden beteiligt sind). Weil es sich um „formale“ Summen handelt, gibt es hierbei keine Relationen oder andere Rechenregeln außer der normalen Rechenregeln, die in jeder additiven abelschen Gruppe gelten. Das heißt, dass die Reihenfolge der Summanden und der Additionen oder Subtraktionen keine Rolle spielt, aber dass außer auf diese Weise keine Gleichheiten zwischen verschiedenen Summationen auftreten. Als Konsequenz sind zwei  $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen in der formalen Summe genau dann gleich, wenn jedes Element von  $X$  in beiden Linearkombinationen den gleichen  $\mathbf{Z}$ -Koeffizienten trägt.

Sowohl dieser Begriff der Gleichheit, wie auch die Addition von zwei Linearkombinationen miteinander, kann man genau erfassen, wenn man eine Linearkombination durch die Funktion  $X \rightarrow \mathbf{Z}$  beschreibt, die jedem Element von  $X$  seinen Koeffizienten in der Linearkombination zuordnet. Weil die Linearkombinationen endlich sind, sind auch nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0, was man bei der Definition der entstehenden Gruppe berücksichtigen muss.

**Definition 2.7** Sei  $X$  eine Menge.

Wir bezeichnen mit  $\mathbf{Z}^X$  die Menge aller mengentheoretischen Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbf{Z}$ , und wir erinnern daran, dass diese Funktionenmenge zu einer additiven abelschen Gruppe wird, wenn wir zwei Funktionen  $f$  und  $g$  addieren, indem wir ihre Werte an jeder Stelle addieren.

Die Addition von zwei Funktionen wird also erklärt durch die Formel:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{für jedes } x \in X. \quad (2.4)$$

Wir setzen

$$F(X) := \{ f \in \mathbf{Z}^X \mid f(x) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } x \in X \}.$$

Offensichtlich ist dies eine Untergruppe von  $\mathbf{Z}^X$ , denn die Summe von zwei Funktionen, die nur an endlich vielen Stellen Werte ungleich 0 annehmen, nimmt nur dort Werte ungleich 0 an, wo einer der Summanden dies tut, und das sind immer noch insgesamt nur endlich viele Stellen.

Also ist  $F(X)$  eine additive abelsche Gruppe. Sie heißt die **freie abelsche Gruppe erzeugt durch die Menge  $X$** .

Für die Elemente von  $F(X)$  führen wir eine alternative suggestive Schreibweise ein: das Element  $f \in F(X)$  notieren wir auch mit

$$\sum_{x \in X} f(x) \cdot x. \quad (2.5)$$

Zunächst dürfen wir dies nicht wirklich als eine Summe verstehen (was soll da eigentlich addiert werden?), sondern nur als eine alternative Notation für die Funktion  $f$ , in der alle Werte der Funktion als die Koeffizienten der formalen Summe auftreten.

**Bemerkung 2.8** Definition 2.7 ist auch anwendbar, wenn  $X$  die leere Menge ist. In diesem Fall sind  $Z^\emptyset$  und  $F(\emptyset)$  additive abelsche Gruppen, deren Elemente Funktionen von der leeren Menge nach  $\mathbf{Z}$  sind.

Wenn man sich die Definition einer Funktion genau ansieht, erkennt man, dass es nicht keine Funktionen, sondern *genau eine* Funktion von der leeren Menge in jede beliebige Menge, also insbesondere auch nach  $\mathbf{Z}$ , gibt. Das bedeutet, dass  $Z^\emptyset$  eine additive abelsche Gruppe mit genau einem Element ist, und die einzige solche Gruppe ist die triviale Gruppe  $\{0\}$ .

Die „leere“ Funktion hat überhaupt keine Werte  $\neq 0$  und erfüllt deshalb die Bedingung für die Zugehörigkeit zu  $F(\emptyset)$ . In anderen Worten, es gilt auch

$$F(\emptyset) = \{0\}. \quad (2.6)$$

Auch die Summendarstellung (2.5) kann hier angewendet werden. Das einzige Element von  $F(\emptyset)$  ist die „leere“ Summe oder die Summe ohne Summanden, und diese hat nach Konvention den Wert 0.

**Bemerkung 2.9** Wir können jede Menge  $X$  als eine Teilmenge von  $F(X)$  auffassen, wenn wir jedes  $x \in X$  mit seiner **charakteristischen Funktion**  $\chi_x$  identifizieren, die gegeben ist durch

$$\chi_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } y = x; \\ 0, & \text{wenn } y \neq x, \end{cases}$$

und die nur einen Wert ungleich 0 annimmt und somit tatsächlich zu  $F(X)$  gehört.

Für solche Elemente  $x \in F(X)$  hat die Darstellung (2.5) den Koeffizienten 1 bei  $x$  und 0 bei allen anderen Summanden. Für ein beliebiges Element  $f \in F(X)$  sind in (2.5) nur endlich viele der Koeffizienten ungleich 0, und aus diesem Grund kann man (2.5) nun doch auch als eine endliche Linearkombination der Elemente aus  $X \subseteq F(X)$  lesen.

Hierbei überzeugt man sich leicht anhand der Einbettung von  $X$  in  $F(X)$ , dass diese Lesart das gleiche Element liefert, wie die Lesart als formale Notation für die Funktion  $f$ . Nämlich, für jedes einzelne  $x_0 \in X$  ist  $f(x_0) \cdot x_0$  die Funktion, die bei  $x_0$  den Wert  $f(x_0) \cdot 1 = f(x_0)$  annimmt, und überall sonst den Wert 0. Addiert man diese Funktionen für die endlich vielen  $x_0$ ,



bei denen  $f$  einen nichtverschwindenden Wert annimmt, erhält man genau die Funktion  $f$ .

Man stellt ferner leicht anhand der Definition fest, dass man mit den formalen Summen (2.5) wie gewohnt rechnen kann. D.h., die Addition und die skalare Multiplikation formaler Summen, ausgeführt in der Untergruppenstruktur von  $F(X) \subseteq \mathbf{Z}^X$ , verhalten sich nach den üblichen Regeln der Theorie der additiven abelschen Gruppen.

**Lemma 2.10** *Sei  $X$  eine Menge. Wir betrachten  $X$  als eine Teilmenge der freien abelschen Gruppe  $F(X)$ .*

a) *Jedes Element von  $F(X)$  hat eine eindeutige Darstellung*

$$\sum_{x \in X} n_x x \quad (2.7)$$

*als endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von Elementen von  $X$  (wo „endlich“ heißt, dass  $n_x \neq 0$  nur für endlich viele  $x$ ), und jeder Ausdruck (2.7), in der nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0 sind, bestimmt ein eindeutiges Element von  $F(X)$ .*

b) *Sei  $A$  eine beliebige additive abelsche Gruppe. Jede mengentheoretische Abbildung  $\varphi: X \longrightarrow A$  bestimmt einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus*

$$g_\varphi: F(X) \longrightarrow A,$$

*so dass  $g_\varphi|_X = \varphi$ . Er ist gegeben durch die Formel*

$$g_\varphi\left(\sum_{x \in X} n_x x\right) = \sum_{x \in X} n_x \varphi(x) \quad (2.8)$$

*(hier sind die  $n_x \in \mathbf{Z}$  und nur endlich viele von ihnen sind  $\neq 0$ ).*

Die Aussagen dieses Lemmas gelten trivialerweise auch wenn  $X = \emptyset$ . In diesem Fall ist (2.7) für das einzige Element von  $F(\emptyset)$  die leere Summe, und für die einzige Funktion  $\varphi: \emptyset \longrightarrow A$  ist  $g_\varphi$  der Nullhomomorphismus, der einzige Homomorphismus  $F(\emptyset) = \{0\} \longrightarrow A$ .

*Beweis.* Zu a): Jedes  $f \in F(X)$  hat eine eindeutige Darstellung (2.5), weil die Koeffizienten in dieser Darstellung alle Werte von  $f$  auflisten. Wir haben schon gesehen, dass man die Darstellung (2.5) tatsächlich als eine endliche Linearkombination in  $F(X)$  lesen darf, und man erhält die Darstellung (2.7), wenn man einfach  $n_x$  anstelle von  $f(x)$  schreibt.

Umgekehrt kann jede endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination (2.7) auch in der Gestalt (2.5) geschrieben werden, indem man die Werte der in (2.5) vorkommenden Funktion  $f$  aus den Koeffizienten  $n_x$  abliest; diese Funktion gehört automatisch zu  $F(X)$ , weil alle bis auf endlich viele  $n_x = 0$  sind, und sie ist der Wert der Linearkombination (2.7), wenn man die Elemente  $x \in X$  wie in Bemerkung 2.9 mit Funktionen in  $F(X)$  identifiziert.

Zu b): Wegen der Aussage von Teil a) bestimmt Formel (2.8) auf jeden Fall eine wohldefinierte und eindeutig bestimmte mengentheoretische Funktion  $g_\varphi: F(X) \rightarrow A$ . Weil in den additiven abelschen Gruppen  $F(X)$  und  $A$   $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen wie in der Formel sich „koeffizientenweise“ miteinander addieren, ist es klar, dass  $g_\varphi$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Anhand der Darstellung der Elemente  $x \in X$  als Linearkombinationen mit nur einem nichtverschwindenden Koeffizienten, der den Wert 1 hat, prüft man mit Formel (2.8) direkt nach, dass  $g_\varphi(x) = \varphi(x)$  für jedes  $x \in X$ , also dass  $g_\varphi|X = \varphi$ . Das beweist die Existenz eines Homomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften.

Umgekehrt erfüllt jeder Gruppenhomomorphismus  $g_\varphi: F(X) \rightarrow X$  die Beziehung

$$g_\varphi\left(\sum_{x \in X} n_x x\right) = \sum_{x \in X} n_x g_\varphi(x),$$

und wenn  $g_\varphi|X = \varphi$ , dann können wir die Werte  $g_\varphi(x)$  auf der rechten Seite durch  $\varphi(x)$  ersetzen und erhalten (2.8), die die Funktion  $g_\varphi$  eindeutig festlegt. Das zeigt die Eindeutigkeit. ■

Wir haben jetzt das algebraische Werkzeug für die Konstruktion des singulären Kettenkomplexes.

**Definition 2.11** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{N}$ .

- a) Die ***n-te singuläre Kettengruppe*** von  $X$  ist die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären  $n$ -Simplizes in  $X$  erzeugt wird, also die Gruppe

$$C_n(X) := F(S_n(X)).$$

Sie besteht aus allen formalen endlichen  $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen von singulären  $n$ -Simplizes. Die Elemente von  $C_n(X)$  heißen ***singuläre n-Ketten*** in  $X$ .

Wir können auch für negative ganze Zahlen  $n$  die  $n$ -te singuläre Kettengruppe definieren; da es in negativen Dimensionen keine singulären Simplizes gibt, gilt für  $n < 0 \in \mathbf{Z}$ , dass

$$C_n(X) := F(\emptyset) = \{0\} \tag{2.9}$$

- b) Sei  $Y$  ein topologischer Raum und sei  $f: X \longrightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $\sigma \in S_n(X)$ ; dann ist  $\sigma$  eine stetige Abbildung  $\Delta_n \longrightarrow X$ . Setze

$$f_{\#}(\sigma) := f \circ \sigma: \Delta_n \longrightarrow Y. \quad (2.10)$$

Dies ist ein singulärer  $n$ -Simplex in  $Y$ . Also induziert  $f$  eine mengentheoretische Abbildung  $f_{\#}: S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$ .

Nach Lemma 2.10 b) gibt es eine eindeutige Erweiterung von dieser Abbildung zu einem Gruppenhomomorphismus  $f_{\#}: C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$  (den wir auch  $f_{\#}$  oder formaler und genauer  $C_n(f)$  nennen), gegeben durch

$$f_{\#}\left(\sum_{\sigma \in S_n(X)} n_{\sigma} \sigma\right) = \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_{\sigma} (f \circ \sigma), \quad (2.11)$$

wobei die Summe auf der rechten Seite eine endliche Linearkombination von singulären Simplexes in  $Y$  ist.

Den Homomorphismus  $f_{\#}$  können wir auch in negativen Dimensionen definieren; dort ist er erzwungenermaßen der Nullhomomorphismus.

**Bemerkung 2.12** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{N}$ . Aus (2.10) und (2.11) ist klar, dass

$$C_n(\text{id}_X) = (\text{id}_X)_{\#} = \text{id}_{C_n(X)}.$$

Entsprechend, wenn  $Y$  und  $Z$  weitere topologische Räume sind und wenn  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen sind, dann folgt sofort aus (2.10) und (2.11), dass

$$C_n(g \circ f) = (g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} = C_n(g) \circ C_n(f).$$

Das heißt, die Zuordnung  $X \mapsto C_n(X)$  und  $f \mapsto f_{\#} = C_n(f)$  bildet für jedes  $n \in \mathbf{N}$  einen kovarianten Funktor  $C_n: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$ .

Diese Behauptung gilt trivialerweise auch für  $n < 0 \in \mathbf{Z}$ , wie man sofort überlegt.

Neben den einzelnen Kettengruppen ist auch eine bestimmte Abbildung  $C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$  wichtig, die wir nun definieren wollen. Dazu betrachten wir zunächst den Standardsimplex von Dimension  $n$ :

**Definition 2.13** Sei  $n \geq 1 \in \mathbf{N}$  und sei  $0 \leq i \leq n$ .

- a) Die  $i$ -te **Seite**  $\Delta_n^{(i)}$  von  $\Delta_n$  ist der affine  $n-1$  Simplex in  $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$ , der als Ecken alle Ecken von  $\Delta_n$  hat, bis auf die  $i$ -te  $e_i$ . In anderen Worten,

$$\Delta_n^{(i)} := [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n]. \quad (2.12)$$

Abbildung 2.2 zeigt die Seiten der eins- und zweidimensionalen Standardsimplizes.

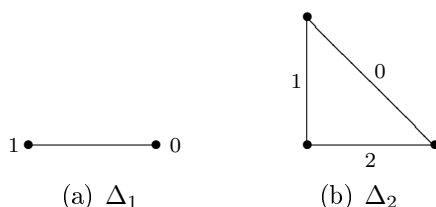


Abbildung 2.2: Die Seiten der Standardsimplizes.

Man sieht, dass die  $i$ -te Seite die Seite ist, die der  $i$ -ten Ecke *gegenüberliegt*.

Man beachte, dass der Standardnullsimplex  $\Delta_0$  gar keine Seiten besitzt, da es keine  $(-1)$ -Simplizes gibt.

- b) Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\sigma \in S_n(X)$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ . Wir definieren die  $i$ -te **Seite**  $\sigma^{(i)}$  von  $\sigma$  als

$$\sigma^{(i)} := \sigma_{\#}(\Delta_n^{(i)}) = \sigma \circ \Delta_n^{(i)}. \quad (2.13)$$

Dies ist ein singulärer  $(n-1)$ -Simplex in  $X$ .

Wieder ist es der Fall, dass ein singulärer 0-Simplex keine Seiten besitzt.

**Notation 2.14** Wir werden es in Zukunft oft mit Ausdrücken wie die rechte Seite von (2.12) zu tun haben, in denen aus einer Liste von Koordinaten oder dergleichen ein oder zwei Elemente weggelassen werden.

In diesen Fällen ist die Schreibweise von (2.12) sehr unhandlich. Üblich ist es deshalb, solche „Listen mit Auslassungen“ zu notieren, indem man alle Elemente der vollen Liste hinschreibt, aber ein Dachakzent  $\hat{\phantom{x}}$  über die Elemente setzt, die auszulassen oder zu überspringen sind.

In dieser Notation, die wir fortan verwenden werden, ist

$$\Delta_n^{(i)} := [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n].$$

**Bemerkung 2.15** Sei  $V$  ein reeller affiner Raum und seien  $v_0, v_1, \dots, v_n$  Punkte von  $V$  (wobei  $n \geq 1$ ). Dann folgt sofort aus (2.13) und der Definition des affinen Simplexes  $[v_0, \dots, v_n]$ , dass

$$[v_0, \dots, v_n]^{(i)} = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]. \quad (2.14)$$

**Bemerkung 2.16** Sei  $X$  ein topologischer Raum, sei  $n \geq 2 \in \mathbf{N}$  und sei  $\sigma$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ . Sei  $0 \leq i < j \leq n$ .

Dann ist

$$(\sigma^{(j)})^{(i)} = (\sigma^{(i)})^{(j-1)} = \sigma_{\sharp}([e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n]). \quad (2.15)$$

Denn nach Definition der Seiten eines singulären Simplexes  $\sigma$  reicht es, diese Operationen auf dem Standardsimplex  $\Delta_n$  auszuführen und das Ergebnis mit  $\sigma_{\sharp}$  nach  $X$  zu übertragen, und nach Bemerkung 2.15 erhält man die  $k$ -te Seite eines affinen Simplexes, in dem man aus der Liste der Ecken die  $k$ -te Ecke entfernt.

Wir haben  $i < j$ , und wenn man im Simplex  $\text{id}_{\Delta_n} = [e_0, \dots, e_n]$  zuerst die  $j$ -te Ecke entfernt, ist die  $i$ -te Ecke des neuen Simplexes immer noch die ursprüngliche  $i$ -te Ecke  $e_i$ , so dass

$$([e_0, \dots, e_n]^{(j)})^{(i)} = [e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n].$$

Entfernt man aber zuerst die  $i$ -te Ecke, so ist die ursprüngliche  $j$ -te Ecke jetzt die  $j - 1$ -te, und somit erhält man das gleiche Ergebnis in der anderen Reihenfolge der Eckenentfernung als  $([e_0, \dots, e_n]^{(i)})^{(j-1)}$ .

Man beachte, dass Gleichung (2.15) alle Fälle der Bildung einer Seite von einer Seite eines Simplexes abdeckt, denn wenn  $i \not< j$ , so ist  $j \leq i$  und (2.15) kann dann gelesen werden (mit  $j$  in der Rolle von  $i$  und  $i + 1$  in der Rolle von  $j$ ) als

$$(\sigma^{(i+1)})^{(j)} = (\sigma^{(j)})^{(i)} = \sigma_{\sharp}([e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e_{i+1}}, \dots, e_n]). \quad (2.16)$$

**Definition 2.17** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $n \in \mathbf{N}$  und sei  $\sigma \in S_n(X)$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ .

Wir definieren den **Rand**  $\partial_n \sigma$  von  $\sigma$  als die  $(n - 1)$ -Kette gegeben durch die alternierende Summe der Seiten von  $\sigma$ , also:

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}. \quad (2.17)$$

Diese Definition gilt, wenn man sie richtig versteht, auch für  $n = 0$ , aber da ein 0-Simplex  $\sigma$  keine Seiten hat, haben wir auf der rechten Seite von (2.17) dann die leere Summe, d. h., eine Summe über keine Summanden, die nach Konvention den Wert 0 hat.

Nach Lemma 2.10 b) erweitert sich die Funktion  $\partial_n$  auf  $S_n(X)$  zu einem wohldefinierten Gruppenhomomorphismus  $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ , genannt der **Randoperator**.

Der Randoperator  $\partial_0$  ist auch in Dimension 0 erklärt und ist da der Nullhomomorphismus. Man kann den Randoperator auch in allen negativen Dimensionen erklären, aber da muss er auch der Nullhomomorphismus sein, da die negativdimensionalen Kettengruppen alle  $\{0\}$  sind.

Meistens vereinfachen wir die Notation für den Randoperator zu  $\partial$ , solange klar ist, in welcher Dimension wir gerade arbeiten.

**Bemerkung und Definition 2.18** Sei  $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ . Wir definieren den **Rand des Standard  $n$ -Simplexes** als

$$\partial_n \Delta_n := \partial_n \text{id}_{\Delta_n} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \Delta_n^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n].$$

Der Rand des Standard 0-Simplexes wird als 0 definiert.

Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\sigma \in S_n(X)$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ . Weil die Seiten  $\sigma^{(i)}$  von  $\sigma$  nach Definition 2.13 b) die Bilder unter  $\sigma_{\#}$  der entsprechenden Seiten  $\Delta_n^{(i)}$  des Standardsimplexes sind, ist klar, dass

$$\partial_n \sigma = \sigma_{\#}(\partial_n \Delta_n). \quad (2.18)$$

Mit den eingeführten Konventionen für Ränder von Nullsimplexes gilt diese Formel auch für  $n = 0$ .

Hier zwei sehr wichtige Grundeigenschaften des Randoperators:

**Lemma 2.19** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{Z}$ .

- a) Sei  $Y$  ein weiterer topologischer Raum und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann kommutiert für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array} \quad (2.19)$$

oder in anderen Worten: für jede Kette  $c \in C_n(X)$  ist

$$\partial_n f_{\#}(c) = f_{\#}(\partial_n c). \quad (2.20)$$

- b)

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0: C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X), \quad (2.21)$$

d. h., der Rand eines Randes ist immer 0.

*Beweis.* Beide Behauptungen sind trivial wenn  $n < 0$ , da dann alle auftretenden Abbildungen Nullhomomorphismen sind. Wir können also annehmen, dass  $n \in \mathbf{N}$ .

Zu a): Es reicht, (2.20) für einzelne Simplizes  $\sigma$  als  $c$  nachzuprüfen. Aber nach (2.18) und der Definition von  $f_\#$  haben wir wie behauptet

$$\partial_n(f_\#(\sigma)) = \partial_n(f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)_\#(\partial_n \Delta_n) = f_\#(\sigma_\#(\partial_n \Delta_n)) = f_\#(\partial_n \sigma).$$

Zu b): Nach (2.18) und Teil a) reicht es, die Behauptung für  $\text{id}_{\Delta_n}$  nachzuweisen, also zu zeigen, dass  $\partial_{n-1}(\partial_n(\Delta_n)) = 0$ .

Für  $n \leq 1$  ist dies trivial, so dass wir nur noch den Fall betrachten müssen, wo  $n \geq 2$ .

Wir haben

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\Delta_n)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \Delta_n^{(j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_{n-1}(\Delta_n^{(j)}) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\Delta_n^{(j)})^{(i)} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} (\Delta_n^{(j)})^{(i)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dies ist eine Linearkombination von Seiten von  $\Delta_n$ , und nach Bemerkung 2.16 erscheint jede zweifache Seite  $[e_0, \dots, \widehat{e_p}, \dots, \widehat{e_q}, \dots, e_n]$  von  $\Delta_n$  (mit  $0 \leq p < q \leq n$ ) zweimal in der Summation (2.22): einmal mit Vorzeichen  $(-1)^{p+q}$  im Summanden für  $i = p$  und  $j = q$ , und einmal mit Vorzeichen  $(-1)^{p+q-1}$  im Summanden für  $i = q - 1$  und  $j = p$ .

Diese beiden Beiträge heben sich wegen des verschiedenen Vorzeichens weg. Also ist die Gesamtsumme (2.22) gleich 0.  $\blacksquare$

An dieser Stelle haben wir die angekündigte Zwischenstufe der Homologiekonstruktion erreicht. Aus den singulären Simplizes in einem topologischen Raum  $X$  haben wir folgende einfache algebraische Struktur gebaut: in jeder Dimension  $n \in \mathbf{N}$  (oder sogar in  $\mathbf{Z}$ ) eine so genannte **singuläre Kettengruppe**  $C_n(X)$ , und für jede Dimension einen Homomorphismus  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ , den **Randoperator**, mit der Eigenschaft, dass zweimal hintereinander Rand nehmen den Nulloperator ergibt:  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .

Weil der Randoperator wie in Lemma 2.19 a) mit den von einer stetigen Abbildung induzierten Homomorphismen kommutiert, ist diese Struktur auch *natürlich*.

Die jetzige Struktur ist die eines **Kettenkomplexes**, und wir wollen zunächst die Struktur ein bisschen genauer beschreiben und zeigen, dass sie eine Kategorie bestimmt. Danach werden wir die zweite Stufe der Homologiekonstruktion durchführen, in der wir die Homologiegruppen aus dem singulären Kettenkomplex gewinnen. Anschließend wollen wir diese Strukturen in eine etwas elegantere Verpackung einkleiden, mit der wir effizienter darüber reden können; diese „elegante“ Variante, formuliert in der Sprache der graduierten abelschen Gruppen, wird uns dann für den Rest der Vorlesung begleiten.

**Definition 2.20** a) Ein **Kettenkomplex**  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ist eine Folge

$$C = \{ C_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

von additiven abelschen Gruppen  $C_n$  (genannt die **Kettengruppen** von  $\mathcal{C}$ , wobei  $C_n$  die *n-te Kettengruppe* oder die **Kettengruppe in Dimension**  $n$  genannt wird) zusammen mit einer Folge

$$\partial = \{ \partial_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen

$$\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1},$$

so dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0: C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}. \quad (2.23)$$

Wir nennen  $\partial_n$  den *n-ten Randoperator* oder die *n-te Randabbildung* des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ .

b) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist eine Folge  $f = \{ f_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$  von Gruppenhomomorphismen

$$f_n: C_n \longrightarrow D_n,$$

so dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_{n+1} \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$



kommutiert, d. h., so dass

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n. \quad (2.24)$$

In anderen Worten, Kettenabbildungen sind Folgen von Gruppenhomomorphismen zwischen den Kettengruppen gleicher Dimension der beiden Kettenkomplexe, die mit dem Randoperator verträglich sind, indem sie mit ihm kommutieren.

**Bemerkung und Definition 2.21** Die Kettenkomplexe und die Kettenabbildungen zwischen ihnen bilden die Objekte und Morphismen einer neuen Kategorie **KK**, der *Kategorie der Kettenkomplexe und Kettenabbildungen*.

Ein *Kettenkomplex* ist nichts anderes als ein Diagramm über **AbGp** modelliert auf dem beiderseits unendlichen Graphen

$$\mathcal{G} := \dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots,$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Verknüpfung je zwei aufeinanderfolgender Pfeile in dem Diagramm der Nullhomomorphismus ist. Eine *Kettenabbildung* ist einfach ein Diagrammmorphismus solcher Diagramme.

Insofern ist **KK** eine *volle Unterkategorie* der Kategorie  **$\mathcal{G}\text{-DAbGp}$**  der beiderseits unendlich langen Folgen von abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Damit wissen wir automatisch, dass Kettenkomplexe und Kettenabbildungen alle Eigenschaften aus Definition 1.1 erfüllen, einschließlich der Eigenschaften über die Verknüpfung und den Identitätsmorphisimen. Kettenabbildungen werden wie Diagrammmorphismen verknüpft, und das bedeutet, dass für Kettenkomplexe  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{E}$  und für Kettenabbildungen  $f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  und  $g: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$  die Verknüpfung  $g \circ f$  gegeben wird durch

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n \quad \text{für jedes } n.$$

Entsprechend sind die Identitätskettenabbildungen einfach die Identität auf jeder Kettengruppe.

**Beispiel und Definition 2.22** Wir haben in Lemma 2.19 gesehen, dass die singulären Kettengruppen eines topologischen Raumes  $X$ , zusammen mit dem singulären Randoperator, einen Kettenkomplex bilden. Diesen Kettenkomplex wollen wir mit  $(C_*(X), \partial_X)$  bezeichnen; der Index „ $*$ “ ist zu verstehen als ein Platzhalter für die verschiedenen Dimensionen  $n$  der einzelnen Kettengruppen  $C_n(X)$  oder als ein Zeichen, der alle Dimensionen zusammenfasst und gleichzeitig darstellt.

In Lemma 2.19 haben wir außerdem gesehen, dass für jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen die induzierten Abbildungen  $f_\#$  zwischen den entsprechenden singulären Kettengruppen der beiden Räume eine Kettenabbildung

$$C_*(f) = f_\#: (C_*(X), \partial_X) \rightarrow (C_*(Y), \partial_Y)$$

bilden.

Der Kettenkomplex  $(C_*(X), \partial_X)$  heißt der *singuläre Kettenkomplex* des topologischen Raumes  $X$ . Die Kettenabbildung  $C_*(f) := f_\#$ , die eine stetige Abbildung zwischen den singulären Kettenkomplexen ihres Quell- und Zielraumes induziert, nennen wir die *singuläre Kettenabbildung* der stetigen Abbildung  $f$ .

Weil nach Bemerkung 2.12 schon die einzelnen Kettengruppen  $C_n(X)$  und die einzelnen Homomorphismen  $C_n(f)$  einen Funktor  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  bilden, erfüllt auch die Zuordnung der gesamten singulären Kettenabbildung  $C_*(f)$  zu einer stetigen Abbildung die funktoriellen Eigenschaften aus Definition 1.11 b).

In anderen Worten, die Zuordnung  $C_*$ , die jedem topologischen Raum  $X$  seinen singulären Kettenkomplex  $(C_*(X), \partial_X)$  und jeder stetigen Abbildung  $f$  ihre singuläre Kettenabbildung  $C_*(f)$  zuordnet, ist ein kovarianter Funktor  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{KK}$ .

Wir werden später viele weitere Beispiele für Kettenkomplexe und kettenkomplexwertige Funktoren kennenlernen, aber im Moment wollen wir uns mit diesem einen Beispiel begnügen und zunächst die Homologiekonstruktion zu Ende führen.

Die jetzt folgende zweite Stufe der Konstruktion geht von einem Kettenkomplex aus und benutzt die spezielle Struktur, die Kettenkomplexe auszeichnet, um eine Familie von Funktoren

$$H_n: \mathbf{KK} \rightarrow \mathbf{AbGp}$$

zu erzeugen, die man die *Homologiegruppen* des Kettenkomplexes nennt.

**Definition 2.23** a) Sei  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ein Kettenkomplex. Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  setze

$$Z_n(\mathcal{C}) := \text{Ker } \partial_n \subseteq C_n$$

und setze

$$B_n(\mathcal{C}) := \text{Bild } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_n.$$

$Z_n(\mathcal{C})$  heißt die  $n$ -te **Zykelgruppe** des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ , und seine Elemente heißen  $n$ -**Zykel**<sup>1</sup>.  $B_n(\mathcal{C})$  heißt die  $n$ -te **Rändergruppe** des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ , und seine Elemente heißen  $n$ -**Ränder**.

Wegen (2.23) ist jeder Rand automatisch ein Zykel, d.h., wir haben  $B_n(\mathcal{C}) \subseteq Z_n(\mathcal{C})$  für jedes  $n$ .

Die Quotientengruppe

$$H_n(\mathcal{C}) := \frac{Z_n(\mathcal{C})}{B_n(\mathcal{C})}$$

heißt die  $n$ -te **Homologiegruppe** des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ .

Jede Homologiekategorie in  $H_n(\mathcal{C})$  ist eine Äquivalenzklasse von  $n$ -Zykeln im Quotienten nach der Rändergruppe. Dabei sind zwei Zykeln  $z$  und  $z'$  genau dann äquivalent, wenn ihre Differenz  $z - z'$  ein Rand ist. Diese Äquivalenzrelation auf der Zykelgruppe heißt auch **Homologie**, und wir sagen im Falle der Äquivalenz,  $z$  ist **homolog** zu  $z'$ , und wir schreiben dafür  $z \sim z'$ .

Genau dann ist ein Zykel  $z$  selber ein Rand, wenn  $z \sim 0$ . In diesem Fall sagen wir auch,  $z$  ist **nullhomolog**.

- b) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe. Sei  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Kettenabbildung. Da  $f$  mit den Randoperatoren kommutiert wie in (2.24) und außerdem als Homomorphismus 0 in 0 abbildet, bildet  $f$  Zykeln wieder in Zykeln ab und Ränder wieder in Ränder, d.h.,

$$f_n(Z_n(\mathcal{C})) \subseteq Z_n(\mathcal{D}) \quad (2.25)$$

und

$$f_n(B_n(\mathcal{C})) \subseteq B_n(\mathcal{D}). \quad (2.26)$$

Folglich induziert  $f_n$  auch einen Homomorphismus

$$f_* = H_n(f): H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{D}),$$

so dass für jeden  $n$ -Zykel  $z \in Z_n(\mathcal{C})$  gilt  $f_*([z]) = [f_n(z)]$ .

**Bemerkung 2.24** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ,  $\mathcal{D} = (D, \partial')$ , und  $\mathcal{E} = (E, \partial'')$  Kettenkomplexe und seien  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Kettenabbildungen. Da in jeder Dimension  $n$  nach Definition gilt

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n,$$

---

<sup>1</sup>Die Einzahl lautet **Zykel**; genauso gebräuchlich ist die Variante **Zyklus** mit Mehrzahl **Zyklen**. Beide Varianten sind grammatisch männlich.

gilt diese Beziehung auch für die Einschränkungen von  $g_n$  und  $f_n$  auf die Ränder- und Zykelgruppen und somit auch für die induzierten Homomorphismen in Homologie. Wir haben also

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$

Und da für jeden Kettenkomplex  $\mathcal{C}$  die identische Kettenabbildung  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  auf jeder Kettengruppe die Identität ist und somit auch auf den Zykelgruppen und Rändergruppen, induziert sie in Homologie die Identität:

$$H_n(\text{id}_{\mathcal{C}}) = \text{id}_{H_n(\mathcal{C})}.$$

Folglich ist  $H_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  ein *kovarianter Funktor*  $\mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$ .

**Definition 2.25** Der *singuläre  $n$ -te Homologiefunktor*

$$H_n: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$$

ist definiert als die Verknüpfung des in Beispiel und Definition 2.22 definierten singulären Kettenkomplexfunktors  $C_*: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{KK}$  mit dem Homologiefunktor  $H_n: \mathbf{KK} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  aus Definition 2.23 und Bemerkung 2.24.

In anderen Worten, der singuläre  $n$ -te Homologiefunktor

$$H_n: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$$

ist gegeben durch die Zuordnungen

$$H_n(X) := H_n(C_*(X))$$

für jeden topologischen Raum  $X$ , und

$$H_n(f) := H_n(C_*(f)) = H_n(f_{\#})$$

für jede stetige Abbildung  $f$ .

Wir werden bald neben dem singulären Kettenkomplex eines topologischen Raumes weitere Beispiele von kettenkomplexwertigen Funktoren kennen lernen, die uns dann, verknüpft mit dem Homologiefunktor auf Kettenkomplexen, weitere Homologiegruppen liefern werden.

Vorher wollen wir uns aber das Leben ein bisschen bequemer machen. Kettenkomplexe sind, wie wir gesehen haben, wesentliche Grundobjekte der Homologietheorie, aber schon jetzt können Sie sehen, dass sie unhandlich sind, weil sie aus unendlich vielen Gruppen und Randhomomorphismen bestehen. Aus diesem Grund werden wir sie in eine Art Kapsel packen, nämlich

in eine *einzelne* Gruppe, die die Kettengruppen in allen Dimensionen gleichzeitig in sich birgt und somit ermöglicht, sie alle auf einmal und einheitlich zu behandeln.

Der Trick (der nicht nur für Kettengruppen funktioniert, sondern für beliebige Folgen von abelschen Gruppen) ist ganz einfach: wir machen im Wesentlichen aus einer Folge von Gruppen die entsprechende Reihe, d. h., wir bilden als Kodierung für die Gruppenfolge die direkte Summe der beteiligten Gruppen. Wir lassen nur solche Homomorphismen zu, die diese Summenstruktur respektieren. Wir können dann die einzelnen Gruppen der Folge und die einzelnen Homomorphismen einer Homomorphismenfolge zwischen ihnen jederzeit aus dem Kapsel wieder herausholen.

**Definition 2.26** Eine *graduierete abelsche Gruppe* ist eine abelsche Gruppe  $G$  zusammen mit einer direkten Summenzerlegung

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n. \quad (2.27)$$

Jede einzelne Gruppe  $G_n$  in dieser Summenzerlegung heißt die  *$n$ -te Stufe* oder der  *$n$ -te homogene Anteil* der graduierten abelschen Gruppe  $G$ . Diese Gruppen sind alle auch Untergruppen von  $G$ .

Seien  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  und  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  graduierte abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen  $f$  *graduieret von Grad  $k \in \mathbf{Z}$*  oder eine *Grad- $k$  Abbildung*, wenn für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt

$$f(G_n) \subseteq H_{n+k}.$$

In diesem Fall und genau in diesem Fall ist  $f_n := f|_{G_n}$  ein Gruppenhomomorphismus

$$f_n: G_n \rightarrow H_{n+k},$$

den wir die  *$n$ -te Stufe* oder den  *$n$ -ten homogenen Anteil* von  $f$  nennen.

Man beachte, dass die Verknüpfung eines graduierten Homomorphismus von Grad  $k$  mit einem graduierten Homomorphismus von Grad  $l$  offensichtlich wieder ein graduierter Homomorphismus ist, und zwar von Grad  $k + l$ . Und die Identität  $\text{id}_G$  einer graduierten abelschen Gruppe  $G$  ist graduieret von Grad 0.

Somit bilden die graduierten abelschen Gruppen und die graduierten Homomorphismen die Objekte und Morphismen einer Kategorie **GAG**, der *Kategorie der graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen*.

Da die Verknüpfung von zwei Grad-0 Abbildungen wieder Grad 0 hat, und da die Identität  $\text{id}_G$  eine Grad-0 Abbildung ist, erhalten wir eine Unterkategorie **GAG**<sub>0</sub> von **GAG**, die die gleichen Objekte wie **GAG** hat, aber

die nur die Grad-0 Abbildungen (und nicht alle graduierten Homomorphismen) als Morphismen zulässt. Wir nennen diese Kategorie die **Kategorie der graduierten abelschen Gruppen und Grad-0 Abbildungen**.

**Bemerkung und Definition 2.27** Sei  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  eine graduierte abelsche Gruppe und sei  $a \in G$ . Dann schreibt sich  $a$  auf eindeutige Weise als eine (im Wesentlichen endliche) Summe

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n, \quad (2.28)$$

wo jedes  $a_n \in G_n$  und nur endlich viele  $a_n \neq 0$ . Wir nennen  $a_n$  die ***n-te Stufe*** oder den ***n-ten homogenen Anteil*** von  $a$ .

Die Nützlichkeit von graduierten abelschen Gruppen rührt daher, dass die üblichen Operationen, die man mit Gruppen macht (Bildung von Untergruppen, von Quotienten, von Kern und Bild eines Homomorphismus, usw.) bei graduierten abelschen Gruppen „stufenweise“ wirken, so dass man sie gleichzeitig auf alle Einzelstufen einer graduierten abelschen Gruppe ausführen kann, indem man sie auf die ganze Gruppe anwendet; das Ergebnis für die einzelnen Stufen ist trotzdem aus dem Gesamtergebnis wieder auslesbar. Das gibt uns eine sehr effiziente und knappe Notation für die Anwendung solcher Operationen auf alle Glieder einer Folge von Gruppen.

**Bemerkung und Notation 2.28** Seien  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  und  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  graduierte abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow H$  ein graduierter Homomorphismus von Grad  $k$ . Für jedes

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \in G$$

ist

$$f(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a_n) \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_{n+k} = H, \quad (2.29)$$

denn die Darstellung (2.28) für  $a$  ist eine endliche Summe (nur endlich viele Summanden auf der rechten Seite sind  $\neq 0$ ) und  $f$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

In anderen Worten,

$$(f(a))_n = f_{n-k}(a_{n-k}) \quad (2.30)$$

für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .

Aus (2.29) und (2.30) ist klar, dass die homogenen Anteile  $f_n$  eines graduierten Homomorphismus  $f$  diesen eindeutig bestimmen. Andererseits kann man für jede Folge  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  von Homomorphismen

$$f_n: G_n \longrightarrow H_{n+k}$$

(für ein fest gewähltes  $k$ ) mit Formel (2.29) einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus  $f: G \longrightarrow H$  definieren, dessen Einschränkung auf  $G_n$  gleich  $f_n$  ist und der durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist. Das gilt auch wenn unendlich viele der  $f_n \neq 0$  sind, denn für jedes einzelne  $a \in G$  sind alle bis auf endlich viele  $a_n = 0$ , und somit sind alle bis auf endlich viele  $f_n(a_n) = 0$ , da die  $f_n$  Homomorphismen sind. Die rechte Seite von (2.29) ist also *immer* eine endliche Summe.

Diese Abbildung  $f$  ist offensichtlich ein graduierter Homomorphismus von Grad  $k$  mit den vorgegebenen  $f_n$  als seine homogenen Anteile.

Es gibt also eine Bijektion zwischen den Grad- $k$  Abbildungen  $G \longrightarrow H$  und den Folgen von Homomorphismen  $f_n: G_n \longrightarrow H_{n+k}$ .

Den eindeutigen graduierten Homomorphismus  $f$  mit den homogenen Anteilen  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  werden wir in Zukunft mit

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n \quad \text{oder} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$$

notieren.

**Definition 2.29** Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe und sei  $A \subseteq G$  eine Untergruppe von  $G$ .

Wir nennen  $A$  eine **graduierete Untergruppe** von  $G$  genau dann, wenn

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (A \cap G_n).$$

In diesem Fall ist  $A$  selber eine graduierte abelsche Gruppe mit Stufen

$$A_n := A \cap G_n \subseteq G_n$$

**Lemma 2.30** Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe.

- a) Sei  $A$  eine Untergruppe von  $G$  und  $A$  lasse sich als eine direkte Summe  $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$  schreiben, so dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt  $A_n \subseteq G_n$ . Dann ist  $A_n = A \cap G_n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ , und  $A$  ist somit eine graduierte Untergruppe von  $G$ .

In anderen Worten, eine Untergruppe  $A$  von  $G$  ist genau dann eine graduierte Untergruppe, wenn sie eine graduierte abelsche Gruppe ist mit Stufen enthalten in den entsprechenden Stufen von  $G$ .

- b) Sei  $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$  eine graduierte Untergruppe von  $G$  und sei  $g \in G$  mit homogenen Anteilen  $g_n \in G_n$  für  $n \in \mathbf{Z}$ . Dann ist  $g \in A$  genau dann, wenn  $g_n \in A_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .
- c) Sei  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  eine weitere graduierte abelsche Gruppe und sei  $f: G \rightarrow H$  ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$ .
- i)  $\text{Ker } f$  ist eine graduierte Untergruppe von  $G$  und der  $n$ -te homogene Anteil von  $\text{Ker } f$  ist  $\text{Ker } f_n \subseteq G_n$  für jedes  $n$ .
  - ii)  $\text{Bild } f$  ist eine graduierte Untergruppe von  $H$  mit  $n$ -tem homogenen Anteil  $\text{Bild } f_{n-k} \subseteq H_n$  für jedes  $n$ .
- d) Sei  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  eine graduierte abelsche Gruppe und  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  eine graduierte Untergruppe von  $G$  (so dass  $H_n \subseteq G_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ ). Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\frac{G}{H} \cong \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n}, \quad (2.31)$$

so dass wir  $G/H$  als eine graduierte abelsche Gruppe behandeln können mit Stufen  $G_n/H_n$ .

- e) Seien  $G$  und  $K$  graduierte abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow K$  ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$ , mit homogenen Anteilen  $f_n$ . Sei  $H$  eine graduierte Untergruppe von  $G$  und sei  $L$  eine graduierte Untergruppe von  $K$ , so dass  $f(H) \subseteq L$ .

Dann gilt:

- i) Die Abbildung  $f|_H: H \rightarrow L$  ist ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$  mit  $n$ -tem homogenen Anteil  $f_n|_{H_n}$ .
- ii) Die von  $f$  induzierte Abbildung der Quotienten  $\bar{f}: G/H \rightarrow K/L$  ist vermöge der Isomorphismen (2.31) ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$  und sein  $n$ -ter homogener Anteil ist der von  $f_n$  induzierte Homomorphismus  $\bar{f}_n: G_n/H_n \rightarrow K_{n+k}/L_{n+k}$ . Dies zeigt übrigens, dass der Isomorphismus aus Teil d) tatsächlich **kanonisch** ist, im Sinne einer **natürlichen Äquivalenz**.



*Beweis.* a): Sei  $a \in A$ . Dann hat  $a$  eine eindeutige Darstellung

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

als eine Summe von Elementen  $a_n$  der einzelnen homogenen Anteile  $A_n$  von  $A$ , und weil für jedes  $n$  gilt  $A_n \subseteq G_n$ , ist dies auch die eindeutige Darstellung (2.28) von  $a$  als Summe von Elementen der  $G_n$ .

Es gilt  $a \in G_n$  genau dann, wenn alle homogenen Anteile von  $a$  außer der  $n$ -ten gleich 0 sind, also wenn  $a = a_n \in A_n$ . Somit ist, wie behauptet,  $A \cap G_n = A \cap A_n = A_n$ .

b): Da  $g_n$  die homogenen Anteile von  $g$  sind, hat  $g$  die eindeutige Darstellung

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \quad (2.32)$$

als eine endliche Summe von Elementen der homogenen Anteile  $G_n$  von  $G$ .

Wenn alle  $g_n \in A_n$ , dann ist  $g$  eine endliche Summe von Elementen von  $A$  und somit selber in  $A$ .

Für die andere Richtung, wenn  $g \in A$ , dann hat  $g$  auch eine Darstellung

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

als endliche Summe von homogenen Anteilen  $a_n \in A_n \subseteq G_n$ , und wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (2.32) ist  $g_n = a_n$  für alle  $n$  und somit sind alle  $g_n \in A_n$ .

c): Sei

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \in G,$$

wo die  $a_n$  die homogenen Anteile von  $a$  sind. Nach (2.29) und (2.30) bilden die  $f_n(a_n)$  die homogenen Anteile von  $f(a)$  und

$$f(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a_n) \in H. \quad (2.33)$$

Es ist  $a \in \text{Ker } f$  genau dann, wenn  $f(a) = 0$ , und dies gilt genau dann, wenn alle homogenen Anteile  $f_n(a_n)$  von  $f(a)$  Null sind, also genau dann, wenn  $a_n \in \text{Ker } f_n$  für alle  $n$ . Nach dem Beweis von Teil b) ist das gleichbedeutend damit, dass  $a \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } f_n$ , also ist

$$\text{Ker } f = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } f_n.$$

Somit ist  $\text{Ker } f$  nach Teil a) eine graduierte Untergruppe von  $G$  mit homogenen Anteilen  $\text{Ker } f_n \subseteq G_n$ . Das beweist i).

Aus Gleichung (2.33) ist klar, dass  $f(G) \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$ . Für die Inklusion in der anderen Richtung, sei

$$b = \sum_{m \in \mathbf{Z}} b_m \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n) \subseteq H.$$

Nach Teil b) ist dann jedes  $b_m$  in der  $m$ -ten Stufe von  $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$ , und diese ist  $f_{m-k}(G_{m-k})$ , da  $f$  Grad  $k$  hat. Insbesondere können wir für jedes  $m \in \mathbf{Z}$  ein Element  $a_{m-k} \in G_{m-k}$  finden, so dass  $f_{m-k}(a_{m-k}) = b_m$ . Falls  $b_m = 0$  wählen wir speziell  $a_{m-k} = 0$ . Da nur endlich viele  $b_m \neq 0$ , sind somit nur endlich viele  $a_{m-k} \neq 0$ , und  $a := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$  ist ein wohldefiniertes Element von  $G$ , für das  $f(a) = b$  nach (2.33) und der Wahl der  $a_n$ .

Wir haben also die Gleichheit  $f(G) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$  gezeigt, und nach Teil a) ist  $f(G)$  eine graduierte Untergruppe von  $H$  mit  $f_n(G_n) \subseteq H_{n+k}$  als  $n+k$ -te Stufe für jedes  $n$ . Das beweist ii).

d): Für jedes  $n$  sei  $\pi_n: G_n \rightarrow G_n/H_n$  die kanonische Projektion auf den Quotienten und sei

$$p = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_n: G \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n}.$$

Dies ist ein graduierter Homomorphismus von Grad 0 mit homogenen Anteilen  $\pi_n$ .

Da jedes  $\pi_n$  surjektiv ist, folgt aus Teil c) ii), dass  $p$  surjektiv ist. Nach Teil c) i) ist

$$\text{Ker } p = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } \pi_n = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n = H$$

und aus dem ersten Isomorphiesatz für Quotienten induziert  $p$  einen Isomorphismus

$$\bar{p}: \frac{G}{H} \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n},$$

gegeben durch

$$\bar{p}\left(\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\right]\right) = p\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_n]. \quad (2.34)$$

Zu e) i): Sei  $h_n \in H_n \subseteq H$ . Weil  $f$  graduiert ist, ist  $f(h_n) = f_n(h_n) \in K_{n+k}$ . Weil  $f(H) \subseteq L$ , gehört  $f_n(h_n)$  nach Teil b) sogar zu  $L_{n+k}$ .

Also ist  $f(H_n) \subseteq L_{n+k}$  für jedes  $n$  und somit ist  $f|H: H \rightarrow L$  graduiert von Grad  $k$ .

Zu e) ii): Aus Teil i) folgt  $f_n(H_n) \subseteq L_{n+k}$  für jedes  $n$ , und somit induziert jedes  $f_n$  einen Homomorphismus

$$\bar{f}_n: G_n/H_n \longrightarrow K_{n+k}/L_{n+k}.$$

Sei

$$g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n \in G.$$

Vermöge des Isomorphismus (2.34) und nach der Definition von  $\bar{f}$  können wir schreiben

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_n]\right) &= \bar{f}([g]) = [f(g)] \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(g_n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_n(g_n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}_n([g_n]). \end{aligned}$$

Bezüglich der Graduierung von  $G/H$  aus Teil d) hat  $\bar{f}$  die gleiche Formel, wie die Grad- $k$  Abbildung  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{f}_n$ .

Das heißt,  $\bar{f}$  ist diese Abbildung und ist somit eine graduierte Abbildung von Grad  $k$  mit homogenen Anteilen  $\bar{f}_n$ . ■

Mit Hilfe der graduierten abelschen Gruppen können wir Kettenkomplexe und ihre Homologie viel prägnanter und einfacher definieren, als wir es oben getan haben (die neue Definition ist aber äquivalent zur alten und übersetzt sie nur in eine andere Sprache).

### Definition 2.31 (Kettenkomplex und Homologie, graduiert)

- a) Ein **Kettenkomplex**  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  besteht aus einer graduierten abelschen Gruppe  $C$  und einem graduierten Homomorphismus  $\partial: C \longrightarrow C$  von Grad  $-1$ , genannt der **Randoperator**, so dass

$$\partial \circ \partial = 0 \tag{2.35}$$

(oder  $\partial^2 = 0$ , wie wir oft schreiben werden).

- b) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist ein graduierter Homomorphismus  $C \longrightarrow D$  von Grad 0, so dass

$$\partial' \circ f = f \circ \partial. \tag{2.36}$$

- c) Die Kettenkomplexe bilden, wie man leicht nachprüft, die Objekte einer Kategorie **KK**, deren Morphismen die Kettenabbildungen sind.
- d) Sei  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ein Kettenkomplex. Wir nennen die graduierte abelsche Gruppe

$$Z = Z(\mathcal{C}) := \text{Ker } \partial$$

die graduierte **Zykelgruppe von  $\mathcal{C}$**  und wir nennen die graduierte abelsche Gruppe

$$B = B(\mathcal{C}) := \text{Bild } \partial$$

die graduierte **Rändergruppe von  $\mathcal{C}$** .

- e) Wegen (2.35) ist  $B \subseteq Z$ . Die graduierte abelsche Gruppe

$$H(\mathcal{C}) := \frac{Z}{B} \quad (2.37)$$

heißt die graduierte **Homologiegruppe** von  $\mathcal{C}$ .

- f) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe und sei

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

eine Kettenabbildung. Aus (2.36) folgt

$$f(Z(\mathcal{C})) \subseteq Z(\mathcal{D})$$

und

$$f(B(\mathcal{C})) \subseteq B(\mathcal{D}).$$

Deshalb induziert  $f$  einen wohldefinierten Homomorphismus

$$H(f) := \bar{f}: H(\mathcal{C}) = \frac{Z(\mathcal{C})}{B(\mathcal{C})} \longrightarrow \frac{Z(\mathcal{D})}{B(\mathcal{D})} = H(\mathcal{D}),$$

der nach Lemma 2.30 e) ii) auch ein graduierter Homomorphismus von Grad 0 ist. Wir nennen  $H(f)$  die graduierte **Homologieabbildung** oder den graduerten **Homologiemorphismus**, der von der Kettenabbildung  $f$  induziert wird.

- g) Die graduierte Homologie ist ein Funktor

$$H: \mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{GAG}.$$

Der Nachweis der erforderlichen Eigenschaften ist trivial.

Der Vorteil dieser neuen Definition der Kettenkomplexe und ihrer Homologie ist, dass wir nun die gesamte Homologie eines Kettenkomplexes als eine einzelne graduierte abelsche Gruppe erhalten, statt einer Folge von ganz vielen Homologiegruppen  $H_n(\mathcal{C})$  in allen einzelnen Dimensionen. Damit ist sehr viel einfacher und effizienter umzugehen.

Wir werden in Zukunft beide Versionen verwenden, je nachdem, welche Version für die jeweilige Betrachtung angebracht erscheint, aber in der Regel wird die bevorzugte Version die graduierte sein.

**Beispiele 2.32** a) Sei  $G$  eine beliebige additive abelsche Gruppe. Wir können aus  $G$  eine offensichtlich zu  $G$  isomorphe und deshalb auch  $G$  benannte graduierte abelsche Gruppe

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

machen, indem wir  $G_0 = G$  setzen und  $G_m = \{0\}$  setzen für alle  $m \neq 0$ .

Entsprechend wird jeder Gruppenhomomorphismus  $f: G \rightarrow H$  von additiven abelschen Gruppen zu einem Grad-0 Homomorphismus

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$$

der graduierten abelschen Gruppen  $G \rightarrow H$ , wenn wir  $f_0 = f$  setzen und  $f_m = 0$  setzen für alle  $m \neq 0$  (was bleibt uns anderes übrig?). Natürlich nimmt  $f$  als Grad-0 Abbildung der graduierten abelschen Gruppen genau die gleichen Werte an, wie der ursprüngliche Homomorphismus  $f$  der ursprünglichen abelschen Gruppen.

Auf diese Weise wird **AbGp** zu einer (sogar vollen) Unterkategorie der Kategorie **GAG**<sub>0</sub>.

b) Seien  $X_1, X_2, \dots, X_m$  endlich viele Unbekannte. Ein **Monom**  $X^\alpha$  in  $X_1, \dots, X_m$  ist ein Ausdruck der Form

$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_m^{\alpha_m},$$

wo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$  ein  $m$ -Tupel von natürlichen Zahlen ist. Der **Grad** des Monoms  $X^\alpha$  ist definiert als die natürliche Zahl

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m.$$

Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Die additive abelsche Gruppe  $(\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m])_n$ , definiert als die freie abelsche Gruppe erzeugt von allen Monomen in  $X_1, \dots, X_m$  von Grad  $n$ , heißt die **additive Gruppe der homogenen Polynome in  $X_1, \dots, X_m$  von Grad  $n$** , und

$$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m])_n$$

heißt die **additive Gruppe der ganzzahligen Polynome in den Variablen  $X_1, \dots, X_m$** .

$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m]$  ist ein Beispiel einer graduierten abelschen Gruppe, aber noch besser, die formale Multiplikation

$$X^\alpha \cdot X^\beta := X^{\alpha+\beta}$$

(wo  $\alpha + \beta$  in  $\mathbf{N}^m \subseteq \mathbf{Z}^m$  zu verstehen ist) erweitert sich eindeutig zu einer bilinearen Abbildung

$$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] \times \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m],$$

die eine Ringmultiplikation ist und  $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m]$  zu einem graduierten Ring macht, genannt der **Polynomring über  $\mathbf{Z}$  in den Unbekannten  $X_1, \dots, X_m$** .

Für jedes Monom  $X^\alpha$  ist die Multiplikation mit  $X^\alpha$  ein graduierter Homomorphismus

$$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m]$$

von Grad  $|\alpha|$ .

- c) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Für  $n \in \mathbf{N}$  sei  $C_n(X)$  die singuläre Kettengruppe von  $X$  wie in Definition 2.11 und für jedes  $n$  sei  $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$  der singuläre Randoperator aus Definition 2.17. Für  $n < 0$  sei  $C_n(X) := \{0\}$  und für  $n \leq 0$  setze  $\partial_n := 0: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ .

Wir definieren  $C_*(X)$  als die graduierte abelsche Gruppe

$$C_*(X) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n(X)$$

und  $\partial: C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$  als den graduierten Homomorphismus

$$\partial := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \partial_n$$

von Grad  $-1$ .

Weil die Verknüpfung von graduierten Homomorphismen offenbar stufenweise ausgerechnet werden kann (wende Gleichung (2.29) an) folgt aus Lemma 2.19 b), dass  $\partial^2 = 0$ .

Also ist  $\mathcal{C}(X) := (C_*(X), \partial)$  ein Kettenkomplex im Sinne von Definition 2.31. Wir nennen diesen Kettenkomplex den **singulären Kettenkomplex** des topologischen Raumes  $X$ .

Dies ist kein Widerspruch zur früheren Definition 2.22 des singulären Kettenkomplexes eines topologischen Raumes oder zur Verwendung der in Definition 2.22 schon eingeführten Notation  $C_*(X)$ . Es stellt lediglich die Übersetzung dieser Begriffe in die graduierte Version von Kettenkomplexen dar, wie in Definition 2.31. Beide Versionen sind nur verschiedene Schreibweisen für die letztendlich gleiche Struktur.

Wenn  $f: X \longrightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so ist

$$C_*(f) = f_{\#} := \sum_{n=0}^{\infty} C_n(f)$$

eine Grad-0 Abbildung und wegen Lemma 2.19 a) ist sie eine Kettenabbildung im Sinne von Definition 2.31, was sich leicht nachrechnen lässt unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Verknüpfungen von graduierten Homomorphismen sich stufenweise berechnen lassen.

Wir bezeichnen die graduierte Zykelgruppe  $\text{Ker } \partial$  des Kettenkomplexes  $C_*(X)$  fortan mit  $Z_*(X)$  und die graduierte Rändergruppe  $\text{Bild } \partial$  des Kettenkomplexes  $C_*(X)$  mit  $B_*(X)$ . Die graduierte Homologiegruppe dieses Kettenkomplexes bezeichnen wir mit  $H_*(X)$  und nennen sie die **graduierte singuläre Homologiegruppe** des Raumes  $X$ .

Alle diese graduierten Gruppen haben als ihre homogenen Anteile in den verschiedenen Dimensionen die in Definition 2.23 a) eingeführten Zykeln-, Ränder-, bzw. Homologiegruppen für den singulären Kettenkomplex von  $X$ . Das folgt sofort aus Lemma 2.30 c) und d), und wenn  $f: X \longrightarrow Y$  eine stetige Abbildung ist, dann folgt aus Lemma 2.30 e), dass die homogenen Anteile des von der Kettenabbildung  $C_*(f)$  induzierten Grad-0 Homomorphismus

$$H_*(f) = f_* := H(C_*(f)): H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

die in den einzelnen Dimensionen induzierten Homomorphismen

$$H_n(f_{\#}) = H_n(C_*(f))$$

aus Definition 2.23 b) sind.

Der graduierte Kettenkomplex  $(C_*(X), \partial)$  und die graduierte Homologiegruppe  $H_*(X)$  bringen also nichts Neues, sondern sind nur eine bequeme und nützliche Zusammenfassung der bisherigen Folgen der singulären Kettengruppen und der Homologiegruppen  $H_n(X)$  jeweils zu einer einzigen Gesamtgruppe, ohne dass Details verloren gehen.

Wir haben mit den graduierten abelschen Gruppen eine sehr knappe und effiziente Formulierung der Definition der singulären Homologie eines topologischen Raumes gefunden. Wir werden gleich darangehen, Methoden zur Berechnung der Homologie zu entwickeln, und wir werden diese Berechnungen systematisch im nächsten Kapitel durchführen. Auch ganz einfache Beispiele werden wir deshalb auf den nächsten Abschnitt vertagen, mit einer trivialen Ausnahme:

**Beispiel 2.33** Sei  $X := \emptyset$  der leere topologische Raum. Dann gibt es überhaupt keine singulären Simplizes in  $X$  und somit auch keine Erzeugenden der Kettengruppe. Es folgt

$$C_*(\emptyset) = \{0\} \quad \text{und} \quad H_*(\emptyset) = \{0\}.$$

Das jetzige Kapitel wollen wir mit einem wichtigen weiteren Beispiel von einem Kettenkomplex beenden, der den Homologiebegriff auf die Kategorie **Top**<sup>2</sup> überträgt, eine Verallgemeinerung, die auch für die Berechnung der Homologie in **Top** erforderlich ist.

**Definition 2.34** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard, also ein Objekt der Kategorie **Top**<sup>2</sup> (das bedeutet, dass  $X$  ein topologischer Raum ist und  $A$  ein Unterraum von  $X$ ). Sei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.

Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Offensichtlich kann man  $S_n(A)$  als eine Teilmenge von  $S_n(X)$  betrachten (die Inklusion  $S_n(A) \hookrightarrow S_n(X)$  ist gegeben durch  $i_\#$ ). Somit wird auch  $C_n(A)$  zu einer Untergruppe von  $C_n(X)$  für jedes  $n$ ; wir fassen dabei jede Kette auf  $A$  als eine Kette auf  $X$  auf, deren Koeffizienten auf Simplizes, die nicht in  $A$  enthalten sind, alle 0 sind.

Also ist  $C_*(A)$  eine graduierte Untergruppe von  $C_*(X)$ ; die Grad-0 Abbildung  $i_\# = C_*(i)$  ist die Inklusion  $C_*(A) \rightarrow C_*(X)$ .

Dies ist aber eine Kettenabbildung, und wenn man die Bedingung dafür,  $\partial \circ i_\# = i_\# \circ \partial$ , richtig liest, besagt sie einfach, dass  $\partial_A = \partial_X|_{C_*(A)}$  und somit

$$\partial_X(C_*(A)) \subseteq C_*(A) \tag{2.38}$$



Folglich induziert  $\partial_X$  einen graduierten Homomorphismus

$$\bar{\partial}: \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \longrightarrow \frac{C_*(X)}{C_*(A)}$$

von Grad -1, und weil  $\partial_X^2 = 0$ , gilt auch  $\bar{\partial}^2 = 0$ .

Wir bezeichnen die graduierte abelsche Gruppe  $C_*(X)/C_*(A)$  fortan mit  $C_*(X, A)$ . Wir haben soeben gesehen, dass das Paar

$$\mathcal{C}(X, A) := (C_*(X, A), \bar{\partial})$$

ein Kettenkomplex ist. Wir nennen ihn den **relativen singulären Kettenkomplex** des Raumpaars  $(X, A)$ .

Seine Zykelgruppe bezeichnen wir mit  $Z_*(X, A)$  und seine Rändergruppe mit  $B_*(X, A)$ .

Die Homologiegruppe von  $\mathcal{C}(X, A)$  wird mit  $H_*(X, A)$  notiert und heißt die **relative graduierte Homologiegruppe** des Raumpaars  $(X, A)$ . Ihre homogenen Anteile  $H_n(X, A)$  heißen die **relativen Homologiegruppen** des Paares  $(X, A)$ .

**Bemerkung 2.35** Hier ein paar Gedanken, die vielleicht helfen, die relativen Kettengruppen und die relative Homologie zu verstehen.

Der Nenner von  $C_*(X, A)$  ist  $C_*(A)$  und besteht aus allen endlichen Summen und Differenzen von singulären Simplexes in  $A$ . Eine Kette  $c \in C_*(X, A)$  ist zwar eigentlich nur eine Äquivalenzklasse oder Restklasse von Ketten in  $X$ , aber da man bei der Quotientenbildung im Wesentlichen nur alle singulären Simplexes in  $A$  gleich 0 setzt, hat jede relative Kette  $c$  einen eindeutigen Repräsentanten  $c' \in C_*(X)$ , der eine endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von singulären Simplexes ist, die *nicht ganz in  $A$  enthalten sind*.

Wenn  $c' \in C_*(X)$  irgendein Repräsentant von  $c$  ist, dann ist  $c$  genau dann ein relativer Zykel, nicht wenn  $\partial c' = 0$ , sondern wenn  $\partial c'$  eine Kette in  $A$  ist, also nur Simplexes enthält, die ganz in  $A$  liegen.

Und  $c$  ist genau dann ein Rand im relativen Kettenkomplex, wenn  $c'$  zu einem Rand von  $C_*(X)$  gemacht werden kann durch Addition einer geeigneten Kette ganz in  $A$ , wenn sich also  $c'$  von einem Rand in  $C_*(X)$  nur durch eine Kette in  $A$  unterscheidet ( $c'$  muss aber nicht selber ein Rand in  $C_*(X)$  sein).

**Bemerkung und Definition 2.36** Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  topologische Raumpaare und sei

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

eine stetige Abbildung von Raumpaaren.

Weil  $f(A) \subseteq B$ , ist

$$f_{\#}(C_*(A)) \subseteq C_*(B)$$

und  $f_{\#} = C_*(f)$  induziert somit einen wohldefinierten graduierten Homomorphismus

$$\bar{f}_{\#}: C_*(X, A) = \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \longrightarrow \frac{C_*(Y)}{C_*(B)} = C_*(Y, B),$$

der eine Kettenabbildung ist (d. h., mit  $\bar{\partial}$  kommutiert), weil schon  $f_{\#}$  mit  $\partial$  kommutiert.

Diese Kettenabbildung der relativen Kettenkomplexe bezeichnen wir auch mit  $C_*(f)$ , da aus dem Kontext immer hervorgeht, welche der so bezeichneten Abbildungen gemeint ist.

$C_*(f)$  induziert natürlich auch in Homologie einen Grad-0 Homomorphismus

$$H_*(f) = f_* := H(C_*(f)): H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B).$$

**Lemma 2.37**  $C_*$  (wie in Definition 2.34 für Raumpaare definiert) ist ein Funktor  $\mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{KK}$ . Somit ist auch  $H_*$  ein Funktor  $\mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{GAG}$ .

*Beweis.* Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, und für die erste Behauptung müssen nur die funktoriellen Eigenschaften der Zuordnung von Morphismen zu Morphismen nachgeprüft werden, nämlich, dass

$$\bar{\text{id}}_{\#} = C_*(\text{id}_{(X,A)}) = \text{id}_{C_*(X,A)}$$

und dass

$$C_*(g \circ f) = C_*(g) \circ C_*(f),$$

wenn  $f$  eine stetige Abbildung von Raumpaaren  $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$  ist und  $g$  eine stetige Abbildung  $(Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ .

Beides ist aber trivial. ■

**Bemerkung 2.38** In Beispiel 1.10 c) hatten wir gesehen, dass man  $\mathbf{Top}$  als eine Unterkategorie von  $\mathbf{Top}^2$  auffassen kann, wenn man jeden topologischen Raum  $X$  mit dem Raumpaar  $(X, \emptyset)$  identifiziert, und die Inklusion  $J: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}^2$  ist ein Funktor nach Beispiel 1.13 b).

Weil  $C_*(\emptyset) = \{0\}$  (Beispiel 2.33) ist  $C_*(X, \emptyset) = C_*(X)$  oder in anderen Worten  $H_* \circ J = H_*$  auf  $\mathbf{Top}$ .

Umgekehrt haben wir nach Beispiel 1.13 g) auf  $\mathbf{Top}^2$  die vergesslichen Funktoren  $P_1(X, A) := X$  und  $P_2(X, A) = A$ .

Für jedes topologische Raumpaar  $(X, A)$  gibt es Inklusionen  $i: A \longrightarrow X$  und  $j: X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ , und nach der Definition der Morphismen von

$\mathbf{Top}^2$  ist  $i$  eine natürliche Transformation  $P_2 \longrightarrow P_1$  und  $j$  eine natürliche Transformation  $P_1 \longrightarrow \text{id}_{\mathbf{Top}^2}$ ; die genannten Inklusionen sind also *natürliche* Inklusionen.

Wenn wir Lemma 1.29 anwenden, sehen wir dass  $i_{\sharp} = C_* \circ i$  salopp gesagt eine natürliche Transformation  $C_*(A) \longrightarrow C_*(X)$  ist, und  $j_{\sharp} = C_* \circ j$  ist eine natürliche Transformation  $C_*(X) \longrightarrow C_*(X, A)$ . Entsprechend ist  $i_* = H_* \circ i_{\sharp}$  eine natürliche Transformation  $H_*(A) \longrightarrow H_*(X)$  und  $j_* = H_* \circ j_{\sharp}$  eine natürliche Transformation  $H_*(X) \longrightarrow H_*(X, A)$ .

(Korrekt ausgedrückt müsste man sagen:  $i_{\sharp}$  ist eine natürliche Transformation  $C_* \circ P_2 \longrightarrow C_* \circ P_1$  und  $j_{\sharp}$  ist eine natürliche Transformation  $C_* \circ P_1 \longrightarrow C_*$ ; ferner ist  $i_*$  eine natürliche Transformation  $H_* \circ P_2 \longrightarrow H_* \circ P_1$  und  $j_*$  ist eine natürliche Transformation  $H_* \circ P_1 \longrightarrow H_*$ . Aber auch die saloppe Formulierung versteht man nicht falsch und man „verinnerlicht“ sie etwas besser.)

Im folgenden Kapitel werden wir noch eine dritte natürliche Transformation zwischen diesen Homologiefunktoren konstruieren, diesmal eine von Grad -1, aber das ist schon Teil der Berechnung der Homologie, womit wir sofort beginnen wollen.



# Kapitel 3

## Die Eilenberg-Steenrod Axiome

In diesem Kapitel wollen wir Methoden entwickeln zur Berechnung der Homologiegruppen von topologischen Räumen und Raumpaaren. Zum Glück ist das einfacher, als im Falle der Homotopie.

Natürlich würden wir auch gerne ein bisschen mehr über das Verhalten des Homologiefunktors und seiner Grundeigenschaften wissen, als wir in Kapitel 2 herleiten konnten (genauer gesagt haben wir in Kapitel 2 noch nicht einmal den Versuch unternommen, viel darüber herauszubekommen). Aber dieses Ziel widerspricht sich nicht mit dem erstgenannten. Im Gegenteil, beide ergänzen sich hervorragend, und wir könnten genauso gut sagen, in diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten Eigenschaften der Homologie im Detail erforschen.

Deshalb heißt das Kapitel auch nicht „Berechnung der Homologie“ oder so ähnlich, sondern in der Kapitelüberschrift ist von gewissen „Axiomen“ die Rede. Das hat folgendes Bewandnis.

Es gibt im Wesentlichen nur einen topologischen Raum (oder etwas präziser, nur eine sehr kleine Klasse von topologischen Räumen), deren singuläre Homologiegruppen man direkt anhand der Definition ausrechnet, in dem man die singulären Kettengruppen und die singulären Randoperatoren genau angibt. Für andere Varianten der Homologie, etwa die simpliziale, ist das nicht so — da berechnet man fast alle Homologiegruppen direkt über die dort sehr viel kleineren Kettengruppen (das erfordert allerdings die Vorarbeit, den topologischen Raum zu triangulieren, d. h., ihn zu einem Simplizialkomplex zu machen).

Bei der singulären Homologie ist die direkte Berechnung nur für wenige Räume überhaupt möglich, weil fast alle Räume sehr große Kettengruppen haben, in denen man schwer rechnen kann. Die einzige wesentliche nichtleere Ausnahme, bei der eine direkte Berechnung sogar die einzige Möglichkeit ist, ist der Einpunktraum oder etwas allgemeiner, total unzusammenhängende to-

pologische Räume, also Räume, die eine spezielle und nicht sehr interessante topologische Struktur haben.

Bei allen anderen Räumen benutzt man die *Eigenschaften* der singulären Homologie, um die Homologiegruppen des gegebenen Raumes mit der Homologie von einfacheren Räumen in Verbindung zu bringen, für die man die Homologie schon vorher ausgerechnet hat. Stellt man die richtigen Verbindungen her, so kann man aus der bekannten Homologie der einfacheren Räume die Homologie des neuen Raumes genau bestimmen.

Der Ausgangspunkt für diese Methodik ist natürlich die Homologie des Einpunktraumes. Für alles andere wird eine Werkzeugkiste eingesetzt, die aus einer kleinen Liste von Standardsätzen besteht, über die Homologie eben des Einpunktraumes und über die Beziehungen zwischen den Homologiegruppen verschiedener verwandter Raumpaare.

Diese Standardsätze oder Standardeigenschaften der Homologie sind typisch für alle üblichen Varianten der Homologie und sind so wichtig, dass sie von Eilenberg und Steenrod 1952 aufgezählt wurden in Form einer Liste von *Axiomen der Homologie*. Es handelt sich allerdings nicht wirklich um Axiome, sondern um grundlegende Sätze, die wir für die singuläre Homologie auch beweisen werden.

Die eigentliche Aussage des Satzes von Eilenberg und Steenrod war, dass diese grundlegenden Sätze über Homologie in einer ganzen Reihe von topologischen Kategorien gelten (genannt „zulässige Kategorien“), und dass sie für die Kategorie der kompakten Polyederpaare (in anderen Worten, der Paare von kompakten Simplicialkomplexen) die Homologie bis auf Isomorphie eindeutig charakterisieren. Sie *gelten* aber in weit mehr als dieser einen Kategorie und können dort anstelle der eigentlichen, womöglich komplizierten Konstruktion der Homologie benutzt werden als wären sie Axiome, um alle wichtigen Eigenschaften der Homologietheorie herzuleiten. Zu diesen „wichtigen Eigenschaften“ gehört auch die Berechnung der Homologiegruppen beliebiger Räume.

Diese axiomatische Vorgehensweise hat mehrere Vorteile: sie ist in der Regel einfacher als ein unmittelbares Hantieren mit der jeweiligen Homologiekonstruktion; sie ist äußerst leistungsfähig, wenn man in der Anwendung ein bisschen Übung hat (insbesondere leistungsfähig genug, um die Vorteile der simplicialen über die singuläre Homologie völlig wettzumachen); sie ist universell, in dem Sinne, dass man mit *einem* Beweis den gleichen Satz für viele verschiedene Homologietheorien herleiten kann, ohne sich auf die Details und Unterschiede dieser Theorien zu beziehen (vor der Einführung dieser Axiome gab es chaotische Zustände, weil mehrere verschiedene Homologietheorien auf dem Markt waren, mit denen man sich einzeln beschäftigen musste); und schließlich machen sie ganz klar und deutlich, worauf es in der Homologie ankommt, d. h., welche Eigenschaften für Homologietheorien ty-

pisch sind und welche Eigenschaften eine Theorie haben sollte, um als eine Homologietheorie zu gelten.

Der letzte Punkt soll nicht unterschätzt werden, denn er bietet einen Prüfstein für Ideen zur Entwicklung neuer Varianten der Homologie, die vielleicht Fragen lösen können, die die klassischen Homologievarianten nicht beantworten können. Seit dem Erscheinen von Eilenberg und Steenrods Buch sind eine ganze Anzahl von „verallgemeinerten Homologietheorien“ und „verallgemeinerten Kohomologietheorien“ entwickelt worden, die auf ganz andersartige Merkmale aufgebaut sind, z.B. auf Vektorbündel, auf Kobordismen usw., und die zwar nicht alle Eilenberg-Steenrod Eigenschaften erfüllen, aber nur geringfügig und in einzelnen Punkten davon abweichen und somit insgesamt eine einheitliche Theorie bilden.

Für diese verallgemeinerten Theorien gibt es heute modernere und allgemeinere Konstruktionsmöglichkeiten, die starke Beziehungen zur Homotopietheorie haben und die in vielen Kategorien anwendbar sind, und die die Einzelkonstruktionen der verschiedenen Homologie- und Kohomologietheorien zusammenfassen und ersetzen können. Was bei diesen Konstruktionen passiert, kann man aber am besten verstehen, wenn man eine wichtige Homologietheorie als Beispiel schon kennt. Aus diesem Grund werden wir die klassische Untersuchung der singulären Homologie weiterführen und müssen leider aus Zeitgründen und Mangel an den nötigen Grundlagen darauf verzichten, viel zum modernen Zugang zu sagen.

Für die singuläre Homologie bieten die Eilenberg-Steenrod Axiome fast den einzigen praktikablen Weg, in die Theorie einzudringen und darin weiter zu kommen. Unser erstes Ziel wird deshalb sein, diese Axiome zu beweisen, damit wir sie anwenden können.

Es gibt vier Axiome in der Eilenberg-Steenrod Liste, und eines ist ganz einfach und beschreibt nur die Homologie des Einpunktraumes (die wir direkt ausrechnen werden). Ein anderes besagt, dass die Homologie homotopieinvariant ist, d.h., dass Räume mit dem gleichen Homotopietyp die gleiche Homologie haben und dass homotope Abbildungen die gleichen Homomorphismen in Homologie induzieren.

Die verbleibenden beiden Axiome beschreiben die Beziehung zwischen der Homologie eines Raumpaars  $(X, A)$  und der Homologie der einzelnen Räume  $X$  und  $A$ , oder zwischen der Homologie eines Raumes und der Homologie zweier offener Mengen, die den Raum überdecken, sowie von ihrem Durchschnitt. Diese Beziehung wird aber nicht direkt und eindeutig ausgedrückt, etwa durch Isomorphismen, sondern durch eine gewisse algebraische Konstruktion, genannt eine *exakte Folge* von Gruppen und Homomorphismen, aus der man in speziellen Fällen genaue Informationen herleiten kann, aber in ungünstigen Fällen eben nicht sehr viel über die einzelnen Gruppen

und Homomorphismen herausbekommt. Die ganze Kunst der Anwendung besteht darin, eine Berechnungsaufgabe so zu zerlegen, dass die günstigen Fälle auftreten und man am Ende klare Ergebnisse erhält.

Wegen der Wichtigkeit dieser algebraischen Konstruktion in der ganzen Homologietheorie beginnen wir dieses Kapitel mit einem kurzen Abschnitt über exakte Folgen, auch als Vorbereitung für die Formulierung der Eilenberg-Steenrod Axiome.

**Definition 3.1** Sei  $\mathcal{F}$  eine Folge von Gruppen und Homomorphismen (also ein linear angeordnetes Diagramm wie in Definition 1.20 a)) und in  $\mathcal{F}$  komme die Teilfolge

$$\dots A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \dots \quad (3.1)$$

vor. Hier können die Punkte leer sein oder für weitere Homomorphismen und Gruppen stehen.

Wir sagen, (3.1) oder  $\mathcal{F}$  ist *exakt an der Stelle B*, wenn

$$\text{Bild } f = \text{Ker } g. \quad (3.2)$$

Wir nennen die ganze Folge  $\mathcal{F}$  eine *exakte Folge*, wenn sie an jeder Stelle, wo es Sinn macht, d. h., an jeder Stelle der Gestalt von  $B$  in (3.1), exakt ist.

(Wenn die Folge  $\mathcal{F}$  eine erste oder eine letzte Gruppe hat, d. h., wenn sie irgendwo beginnt oder irgendwo endet, dann lässt sich die Definition natürlich nicht auf diese erste oder letzte Stelle anwenden, weil dort entweder der eingehende Homomorphismus  $f$  oder der abgehende Homomorphismus  $g$  fehlt.)

**Bemerkung 3.2** Die Exaktheitsbedingung (3.2) impliziert, dass in einer exakten Folge (oder an jeder exakten Stelle in einer nicht überall exakten Folge) die Verknüpfung zweier aufeinanderfolgender Homomorphismen der triviale Homomorphismus 0 ist (im nichtabelschen Fall entsprechend der triviale Homomorphismus mit konstantem Wert 1).

Insbesondere ist eine exakte Folge von abelschen Gruppen immer auch ein Kettenkomplex, allerdings kein sehr interessanter Kettenkomplex, denn Bedingung (3.2) besagt gerade, dass alle Rändergruppen *gleich* den Zykelgruppen der gleichen Dimension sind, also dass die Homologie in jeder Dimension  $\{0\}$  ist.

Man kann das so verstehen, dass die Homologie eines Kettenkomplexes ein Maß für seine *Nichtexaktheit* ist!

Folgende Beispiele werden ein bisschen deutlicher machen, was Exaktheit bedeutet oder bedeuten kann. Wir beschränken uns dabei bewusst auf den



Fall von additiven abelschen Gruppen, weil wir diesen vorrangig betrachten werden, aber die Aussagen gelten auch (wenn man 1 statt 0 schreibt) für den nichtabelschen Fall.

**Lemma 3.3** a) Wenn  $f = 0$ , dann ist (3.1) genau dann exakt, wenn  $g$  injektiv ist.

Insbesondere,  $\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{g} C$  ist genau dann exakt, wenn  $g$  injektiv ist.

b) Wenn  $g = 0$ , dann ist (3.1) genau dann exakt, wenn  $f$  surjektiv ist.

Insbesondere,  $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\}$  ist genau dann exakt, wenn  $f$  surjektiv ist.

c)  $\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow \{0\}$  ist genau dann exakt, wenn  $A = \{0\}$ .

d)  $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\}$  ist genau dann exakt, wenn  $f$  ein Isomorphismus ist.

*Beweis.* a): Wenn  $f = 0$ , so ist  $\text{Bild } f = \{0\}$  und (3.1) ist genau dann exakt, wenn dies  $\text{Ker } g$  ist, also, wenn  $g$  injektiv ist.

b): Wenn  $g = 0$ , so ist  $\text{Ker } g = B$  und (3.1) ist genau dann exakt, wenn dies  $\text{Bild } f$  ist, also, wenn  $f$  surjektiv ist.

c): Das Bild der linken Abbildung ist  $\{0\} \subseteq A$ ; der Kern der rechten Abbildung ist ganz  $A$ ; das Diagramm ist genau dann exakt, wenn sie gleich sind, also wenn  $A = \{0\}$ .

d) folgt sofort aus a) und b). ■

Für kompliziertere (insbesondere längere) Folgen als diese beinhaltet die Exaktheit außer in Spezialfällen nicht so eine klare Aussage wie in diesen ganz einfachen Beispielen, aber sie liefert trotzdem viel Information. Der nächstkompliziertere Fall sieht so aus wie 3.3 d), aber ist in der Mitte um eine nichttriviale Gruppe länger. Dieser Fall ist so wichtig, dass er einen eigenen Namen hat:

**Definition 3.4** Eine **kurze exakte Folge** von abelschen Gruppen und Homomorphismen ist eine exakte Folge der speziellen Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (3.3)$$

Auch hier können wir etwas sagen über die Gruppen, die in der Folge vorkommen:

**Definition 3.5** Seien  $G$  und  $H$  abelsche Gruppen und sei  $f: G \longrightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Die Quotientengruppe

$$\frac{H}{\text{Bild } f}$$

heißt der **Cokern** von  $f$  und wird mit  $\text{Coker } f$  bezeichnet.

**Lemma 3.6** Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen. Dann ist

$$f: A \longrightarrow f(A) = \text{Ker } g \subseteq B$$

ein Isomorphismus, und  $g$  induziert einen Isomorphismus

$$\bar{g}: \text{Coker } f = \frac{B}{f(A)} \longrightarrow C.$$

*Beweis.* Nach Lemma 3.3 a) ist  $f$  injektiv, also ein Isomorphismus auf sein Bild, und dieses ist gleich  $\text{Ker } g$  wegen der Exaktheit der Folge bei  $B$ . Nach Lemma 3.3 b) ist  $g$  surjektiv und nach dem „Ersten Isomorphiesatz“ für Gruppen induziert  $g$  einen Isomorphismus

$$\bar{g}: B/\text{Ker } g \longrightarrow g(B) = C.$$

Wegen der Exaktheit der Folge bei  $B$  ist aber  $\text{Ker } g = \text{Bild } f$ ; also ist  $\bar{g}$  ein Isomorphismus  $B/f(A) = \text{Coker } f \longrightarrow C$ . ■

Man kann das etwas salopp so ausdrücken, dass in einer kurzen exakten Folge (3.3) im Wesentlichen gilt  $C \cong B/A$ .

**Bemerkung 3.7** Exakte Folgen von Gruppen und Homomorphismen sind insbesondere Folgen, also *Diagramme* von einer bestimmten Gestalt, und für jede mögliche Gestalt  $\mathcal{G}$  eines Folgendigramms bilden die exakten Folgen dieser Gestalt die Objekte einer vollen Unterkategorie der Diagrammkategorie  $\mathcal{G}\text{-DGP}$  oder in unserem Fall eher  $\mathcal{G}\text{-DAbGp}$  (siehe Definition 1.21).

Das bedeutet insbesondere, dass wir über Funktoren sprechen können, die auf exakten Folgen definiert sind oder die exakte Folgen als Werte annehmen.

Es macht deshalb auch Sinn zu behaupten, eine in einer gewissen Situation auftretende exakte Folge sei **natürlich** — das bedeutet nichts anderes, als dass diese Folge die Objektzuordnung eines Funktors ist, der exakte Folgen als Objektwerte und Morphismen im Sinne der Diagrammkategorie als

Morphismenwerte annimmt. Zur Erinnerung, ein Morphismus in der Diagrammkategorie zwischen zwei Gruppenfolgen gleicher Gestalt besteht aus einer Familie von Gruppenhomomorphismen zwischen entsprechenden Stellen in den beiden Folgen, so dass alle kleinen Quadrate, die diese Homomorphismen mit den Homomorphismen *innerhalb* der beiden Folgen bilden, kommutieren.

Kurze exakte Folgen sind aus verschiedenen Gründen besonders wichtig. Einer dieser Gründe besteht in der Tatsache, dass man jede längere exakte Folge in kurze exakte Folgen zerlegen kann:

**Bemerkung 3.8** Seien  $G$  und  $H$  abelsche Gruppen und sei  $f: G \longrightarrow H$  ein Homomorphismus. Dann gibt es natürliche kurze exakte Folgen

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} \operatorname{Bild} f \longrightarrow \{0\} \quad (3.4)$$

und

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Bild} f \xrightarrow{j} H \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f \longrightarrow \{0\}, \quad (3.5)$$

wo  $i$  und  $j$  die Inklusionen sind und  $p$  die Projektion auf den Quotienten ist, als den der Cokern definiert ist. Als Abbildung auf ihr Bild ist  $f$  ja auch surjektiv, so dass die Exaktheit bei den äußeren Gruppen in jeder Folge von vornherein gegeben ist, und die Exaktheit bei den mittleren Gruppen  $G$  und  $H$  ist für diese Folgen auch trivial.

Die Natürlichkeit bezieht sich, wie in Bemerkung 3.7 erklärt, auf die Diagrammkategorien, d. h., die hier genannten kurzen exakten Folgen hängen funktoriell von dem Diagramm  $G \xrightarrow{f} H$  ab. Davon kann man sich leicht überzeugen; wir führen es nicht vor.

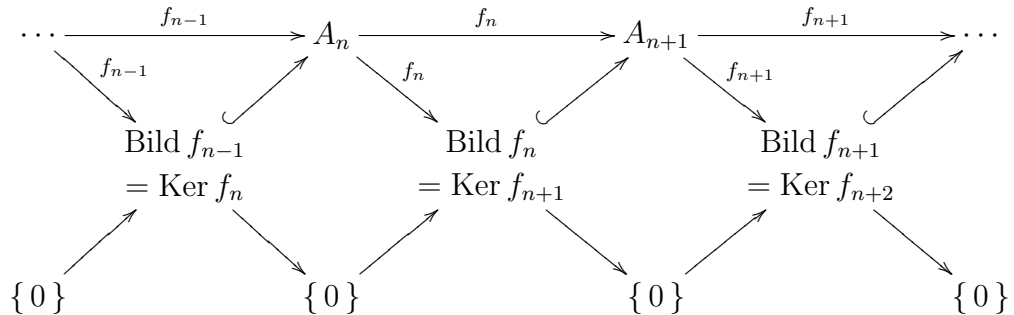
Eine exakte Folge, egal welcher Länge, ist eine Hintereinanderreihung von Gruppenhomomorphismen, und die Exaktheit bewirkt, dass die kurzen exakten Folgen (3.4) für diese Gruppenhomomorphismen sich ineinander verzahnen und somit die gesamte gegebene längere exakte Folge in viele kurze exakte Folgen zerlegen:

**Bemerkung 3.9** Sei

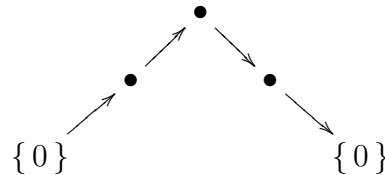
$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

eine exakte Folge von Gruppen und Homomorphismen beliebiger Länge. Dann zerlegt sich diese Folge wie in folgendem Diagramm in lauter kurze

exakte Folgen des Typs (3.4):



Die kurzen exakten Folgen bestehen jeweils aus zwei schräg steigenden und den anschließenden zwei schräg fallenden Pfeilen



Wegen dieser Bemerkung kann man jede noch so komplizierte Situation mit exakten Folgen auf kurze exakte Folgen zurückführen. In einem gewissen Sinne sind sie also die kompliziertesten exakten Folgen, die man betrachten muss.

Ein anderer Grund für die Bedeutung der kurzen exakten Folgen ist, dass sie Quotienten  $G/H$  von abelschen Gruppen genau beschreiben durch die entsprechende kurze exakte Folge  $\{0\} \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow \{0\}$ . Weitere Gründe werden später ganz deutlich werden.

Bisher haben wir nur danach gefragt, welche Bedeutung die Exaktheit einer Folge für die Gruppen und Homomorphismen innerhalb der Folge hat. Sie wirkt sich aber auch auf sehr angenehme Weise aus auf Eigenschaften von Homomorphismen (also Diagrammmorphismen) *zwischen* zwei verschiedenen exakten Folgen:

**Lemma 3.10**    a) (*Das 5-er Lemma*)

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
 \alpha \downarrow \cong & & \beta \downarrow \cong & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \cong & & \varepsilon \downarrow \cong \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen, in dem die waagerechten Reihen exakt sind. Die vier äußeren (also die ersten beiden und die letzten beiden) der fünf senkrechten Abbildungen seien Isomorphismen. Dann ist auch der mittlere senkrechte Homomorphismus  $\gamma$  ein Isomorphismus.

Die Voraussetzung über die senkrechten Homomorphismen kann man geringfügig abschwächen — der gleiche Schluss gilt, wenn die erste Abbildung  $\alpha$  nur surjektiv und die letzte Abbildung  $\varepsilon$  nur injektiv ist (und  $\beta$  und  $\delta$  nach wie vor Isomorphismen sind).

Die Aussage des 5-er Lemmas lässt sich in zwei sich komplementierenden Bestandteile zerlegen, nämlich, dass die mittlere senkrechte Abbildung unter geeigneten Voraussetzungen injektiv ist, und dass sie, unter anderen Voraussetzungen, surjektiv ist. Auch der Beweis folgt dieser Zerlegung.

Für zukünftige Zwecke und zur Steigerung der Allgemeinheit lohnt es sich, diese Bestandteile auch getrennt vorrätig zu halten, als die Teile des folgenden **4-er Lemmas**:

b) (**Das 4-er Lemma**)

Sei

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen, in dem die waagerechten Reihen exakt sind.

- i) Wenn  $\alpha$  surjektiv ist und  $\beta$  und  $\delta$  injektiv sind, dann ist auch  $\gamma$  injektiv.
- ii) Wenn  $\alpha$  und  $\gamma$  surjektiv sind und  $\delta$  injektiv ist, dann ist auch  $\beta$  surjektiv.

*Beweis.* Wir werden zunächst das 4-er Lemma, also Teil b) beweisen, da es eine detailliertere „auseinander gebaute“ Version des 5-Lemmas darstellt.

Der Beweis erfolgt nach einer in der algebraischen Topologie äußerst beliebten Vorgehensweise, die man **Diagrammjagd** nennt. Diese Methode besteht darin, einzelne Elemente (hier der Gruppen  $B$  und  $C'$ ) mit den vorhandenen Abbildungen auf Pfade durch das Diagramm zu schicken, bis man Nullwerte erhält. Die Kommutativität der einzelnen Quadrate wird ausgenutzt, um Pfade um zwei Seiten eines Quadrats über die anderen beiden Seiten

umzuleiten, und die Exaktheit der waagerechten Folgen und die vorausgesetzten Eigenschaften der senkrechten Abbildungen werden ausgenutzt, um zu zeigen, dass gewisse Elemente 0 sind, oder um Elemente entlang der Pfeile „zurückzuholen“, also um Urbilder unter den Homomorphismen zu finden — für die waagerechten Abbildungen existieren solche Urbilder, auf Grund der Exaktheit, genau dann, wenn der folgende Pfeil das Element auf 0 schickt.

Wir führen jetzt einen solchen Beweis durch, wobei wir die Kommutativität des Diagramms immer stillschweigend einsetzen werden, um Verknüpfungen umzuschreiben. Auf die Verwendung der anderen Voraussetzungen wird immer explizit hingewiesen. Wenn man sich den Beweis auf dem Papier ansieht, erscheint er sehr undurchsichtig, aber wenn man die einzelnen Schritte mit dem Finger im Diagramm nachfährt, wird alles ganz einfach. Deshalb heißt diese Beweismethode auch so — im Wesentlichen besteht sie darin, Elemente mit dem Finger auf dem Blatt oder an der Tafel durch das Diagramm zu „jagen“.

Beweis von Teil b) i): Sei  $c \in C$  mit  $\gamma c = 0$ . Dann ist  $h'\gamma c = \delta hc = 0$ . Weil  $\delta$  injektiv ist, ist  $hc = 0$ . Weil die obere Reihe exakt ist, gibt es ein  $b \in B$  mit  $gb = c$ .

Für dieses  $b$  gilt nun  $0 = \gamma c = \gamma gb = g'\beta b$ . Weil die untere Reihe exakt ist, gibt es ein Element  $a' \in A'$  mit  $f'a' = \beta b$ , und weil  $\alpha$  surjektiv ist, gibt es ein  $a \in A$  mit  $\alpha a = a'$ .

Wir haben dann  $\beta b = f'a' = f'\alpha a = \beta fa$  und weil  $\beta$  injektiv ist folgt daraus  $b = fa$ . Also ist  $c = gb = gfa = 0$ , denn die Exaktheit der oberen Reihe impliziert  $gf = 0$  (Bemerkung 3.2). Also ist  $c = 0$  und  $\gamma$  ist injektiv.

Beweis von Teil b) ii): Sei  $b' \in B'$ . Weil  $\gamma$  surjektiv ist, gibt es ein Element  $c \in C$  mit  $\gamma c = g'b'$ . Weil die untere Reihe exakt ist, ist  $h'g'b' = 0$ , also auch  $h'\gamma c = \delta hc = 0$ , und weil  $\delta$  injektiv ist, ist  $hc = 0$ . Weil die obere Reihe exakt ist, gibt es ein Element  $\bar{b} \in B$  mit  $g\bar{b} = c$ .

Leider muss nicht unbedingt gelten, dass  $\beta\bar{b} = b'$ , aber wir haben zumindest  $g'\beta\bar{b} = \gamma g\bar{b} = \gamma c = g'b'$ , woraus folgt  $g'(b' - \beta\bar{b}) = 0$ . Weil die untere Reihe exakt ist, gibt es ein Element  $a' \in A'$  mit  $f'a' = b' - \beta\bar{b}$ , und weil  $\alpha$  surjektiv ist, gibt es ein Element  $a \in A$  mit  $\alpha a = a'$ .

Sei  $b = \bar{b} + fa \in B$ . Wir haben  $\beta b = \beta\bar{b} + \beta fa = \beta\bar{b} + f'\alpha a = \beta\bar{b} + f'a' = \beta\bar{b} + b' - \beta\bar{b} = b'$ . Also ist  $\beta b = b'$  und  $\beta$  ist surjektiv.

Damit haben wir Teil b) vollständig bewiesen.

Die *abgeschwächten* Voraussetzungen für das Diagramm in Teil a) setzen sich genau zusammen aus den Voraussetzungen für Teil b) i) für die linken vier Spalten und den Voraussetzungen für Teil b) ii) für die *rechten* vier Spalten dieses Diagramms. Die Kombination der Schlüsse von Teil b) i) und ii) ergibt, dass Abbildung  $\gamma$  in diesem Diagramm ein Isomorphismus ist.

Damit ist Teil a) bewiesen. ■

**Bemerkung 3.11** Das „5-er Lemma“ heißt natürlich wegen der fünf Gruppen in jeder Reihe und der fünf senkrechten Abbildungen so (entsprechend für das 4-er Lemma).

Wichtig ist, dass die Folgerungen die Existenz des *gesamten kommutativen Diagramms* mit allen senkrechten Abbildungen voraussetzen. So besagt etwa die Aussage des 5-er Lemmas nämlich *nicht*: "Wenn man zwei exakte Folgen  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{i} E$  und  $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} D' \xrightarrow{i'} E'$  hat mit  $A \cong A'$ ,  $B \cong B'$ ,  $D \cong D'$  und  $E \cong E'$ , dann ist auch  $C \cong C'$ ." Diese naive Vereinfachung kann durchaus **falsch** sein.

Wenn man keine mittlere Abbildung  $\gamma: C \rightarrow C'$  vorweisen kann, die das Diagramm kommutativ macht (und die dann wegen des 5-er Lemmas tatsächlich ein Isomorphismus ist), ist es sogar möglich, dass die äußeren vier Abbildungen Identitäten sind, ohne dass die mittleren Gruppen isomorph sind. Natürlich existiert dann auch kein Homomorphismus der mittleren Gruppen, der das Diagramm kommutativ macht.

Wir wissen jetzt genug über exakte Folgen, um sie in einfachen Fällen anwenden zu können. Für die algebraische Topologie brauchen wir diesen Begriff aber auch für andere Kategorien, die in der Homologietheorie eine Rolle spielen.

**Bemerkung 3.12** Wir haben die Exaktheit bisher nur definiert für Folgen von Gruppen und Homomorphismen. Den gleichen Begriff mit den gleichen Konsequenzen kann man aber problemlos erweitern auf jede Kategorie, die aus Gruppen aufgebaut ist oder deren Objekte eine Gruppenstruktur tragen.

Neben der offensichtlichen Verallgemeinerung auf die Kategorie der Moduln über einen Ring können wir Exaktheit ohne weitere Vorbereitung auf jede Diagrammkategorie über den Kategorien **Gp** oder **AbGp** anwenden, und auf Unterkategorien solcher Kategorien, sowie auf die Kategorie **GAG** der graduierten abelschen Gruppen und der graduierten Homomorphismen und auf ihre Unterkategorien.

Sei  $\mathcal{G}$  ein gerichteter Graph und sei  $\mathcal{K} = \mathcal{G}\text{-DAbGp}$  die Kategorie der  $\mathcal{G}$ -Diagramme von abelschen Gruppen und Homomorphismen (man kann die Einschränkung „abelsch“ aber auch weglassen). Eine Folge

$$\dots D \xrightarrow{\mu} D' \xrightarrow{\nu} D'' \dots \quad (3.6)$$

von  $\mathcal{G}$ -Diagrammen und Diagrammmorphismen heißt dann exakt beim Diagramm  $D'$ , wenn die Bedingung (3.2) für die Gruppenhomomorphismen und


Gruppen an jeder einzelnen, in den drei Diagrammen sich entsprechenden, Stelle in den Diagrammen erfüllt ist.

Das heißt etwas ausführlicher: wenn  $D = (P, p)$  in der Notation von Definition 1.16, wenn  $D' = (Q, q)$  und wenn  $D'' = (R, r)$ , dann ist die Folge (3.6) exakt bei  $D'$  genau dann, wenn für jeden einzelnen Knoten  $x$  von  $\mathcal{G}$  die Folge

$$P(x) \xrightarrow{\mu(x)} Q(x) \xrightarrow{\nu(x)} R(x)$$

von Gruppen und Homomorphismen bei  $Q(x)$  exakt ist.

Die Exaktheit für Folgen von graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen braucht man gar nicht extra zu definieren, weil Definition 3.1 hier direkt anwendbar ist — graduierte abelsche Gruppen sind ja schließlich auch Gruppen und graduierte Homomorphismen sind insbesondere auch Gruppenhomomorphismen; sie erfüllen nur *zusätzliche* Eigenschaften. Aber auch in diesem Fall ist es eine Konsequenz von Lemma 2.30 c), dass eine Folge von graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen genau dann exakt ist, wenn dies für jede Stufe einzeln gilt.

Natürlich überträgt sich der Exaktheitsbegriff automatisch auch auf Unterkategorien. Insbesondere wird es sinnvoll sein, von exakten Folgen von *Kettenkomplexen* zu sprechen, weil die Kategorie **KK** der Kettenkomplexe je nach der bevorzugten Variante der Definition eine Unterkategorie einer Diagrammkategorie von Gruppen und Homomorphismen ist, oder eine Unterkategorie einer Diagrammkategorie von graduierten abelschen Gruppen, modelliert auf dem Graphen  mit einem Knoten (der ein Platzhalter für die direkte Summe der Kettengruppen ist) und einem Pfeil von diesem Knoten zurück zu sich (als Platzhalter für den Randoperator).

Der erste grundlegende Satz der Homologietheorie, den wir beweisen, hängt nicht von den Einzelheiten der jeweiligen Homologietheorie ab, sondern ist im Wesentlichen eine Eigenschaft von *Kettenkomplexen*.

**Definition 3.13** Eine *lange exakte Folge* von Gruppen und Homomorphismen ist eine exakte Folge, die unendliche Länge hat, also die an mindestens einem Ende unbegrenzt ist (vergleiche Definition 1.20 a)).

**Satz 3.14** Sei

$$\{0\} \longrightarrow (C, \partial) \xrightarrow{f} (D, \partial') \xrightarrow{g} (E, \partial'') \longrightarrow \{0\} \quad (3.7)$$

eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen.



Dann gibt es eine natürliche lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots \quad (3.8)$$

zwischen den Homologiegruppen der drei Kettenkomplexe, oder effizienter in der Kategorie **GAG** ausgedrückt, es gibt ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H(C) & \xrightarrow{f_*} & H(D) \\ & \nwarrow \beta & \nearrow g_* \\ & H(E) & \end{array} \quad \text{Grad } -1 \quad (3.9)$$

zwischen den graduierten Homologiegruppen der drei Kettenkomplexe, mit den von den Kettenabbildungen induzierten Grad 0 Homomorphismen  $f_* = H(f)$  und  $g_* = H(g)$  und mit einem Grad  $-1$  Homomorphismus

$$\beta: H(E) \longrightarrow H(C),$$

den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen wollen, und der wie folgt erklärt wird:

Das unten stehende Diagramm von graduierten abelschen Gruppen hat die Randoperatoren der Kettenkomplexe als senkrechte Abbildungen und kommutiert, weil die waagerechten Abbildungen Kettenabbildungen sind:

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\} \\ & & \partial \downarrow & & \partial' \downarrow & & \partial'' \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\} \end{array} \quad (3.10)$$

Eine Homologieklassse  $\varepsilon$  in  $H(E)$  ist die Restklasse eines Zyklus  $z \in Z(E) = \text{Ker } \partial''$ . Man stelle sich  $z$  vor in der Gruppe  $E$  in der oberen Reihe des Diagramms (beide Reihen sind eigentlich die gleiche Folge, zweimal hingeschrieben um die Randoperatoren sichtbar zu machen).

Weil  $g$  surjektiv ist, gibt es ein Element  $d \in D$  mit  $gd = z$ . Weil  $z$  ein Zykel ist und das rechte Quadrat im Diagramm kommutiert, gilt  $g\partial'd = \partial''gd = \partial''z = 0$ , und weil die untere Reihe exakt ist gibt es ein Element  $c \in C$  mit  $fc = \partial'd$ . Dieses Element ist ein Zykel und  $\beta(\gamma) = [c]$ .

*Beweis.* Im Beweis sind viele Einzelschritte zu tun: wir müssen zeigen, dass das Dreieck (3.9) an allen drei Stellen exakt ist; wir müssen außerdem zeigen, dass das Dreieck natürlich ist, also dass alle drei Homomorphismen im Dreieck mit den Homomorphismen kommutieren, die von einem Morphismus

zwischen zwei kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen induziert werden; aber bevor wir mit diesen Aufgaben überhaupt beginnen können, müssen wir nachprüfen, dass wir tatsächlich ein wohldefiniertes Dreieck von graduierten Homomorphismen vor uns haben und speziell, dass die Angaben in der Aussage des Satzes die Abbildung  $\beta$  wohl und eindeutig definieren und dass  $\beta$  wirklich ein Homomorphismus ist. Das machen wir als Erstes.

Die einzelnen Beweisschritte lassen sich am einfachsten verfolgen in einer erweiterten Version von Diagramm (3.10) mit drei Zeilen (die aber wieder alle die gleiche kurze exakte Folge darstellen):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' \\
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' \\
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\}
 \end{array} \tag{3.11}$$

**Wohldefiniertheit von  $\beta$ :** Die Vorschrift zur Konstruktion von  $\beta$  war: zu einer Homologieklassse  $\varepsilon$  in  $H(E)$  wähle man einen Zykel  $z \in Z(E) \subseteq E$  mit  $\varepsilon = [z]$ , man wähle ein Urbild  $d \in D$  von  $z$  mit  $gd = z$ , und man findet dann aus schon erläuterten Gründen eine Kette  $c \in C$  mit  $fc = \partial'd$ . Diese Kette  $c$  ist sogar eindeutig bestimmt, weil  $f$  wegen der Exaktheit der Folge injektiv ist.

Es wurde behauptet, dass  $c$  ein Zykel ist. Das gilt wegen der Injektivität von  $f$  und weil die linken Quadrate in (3.11) kommutieren, denn  $f\partial c = \partial'fc = \partial'\partial'd = 0$ , also ist  $\partial c = 0$ .

Folglich repräsentiert  $c$  eine Homologieklassse  $[c] \in H(C)$  und diese nehmen wir als den Wert  $\beta(\varepsilon)$ .

Es gibt zwei Stellen in dieser Konstruktion, wo eine *nichteindeutige* Wahl getroffen wird, und wir müssen zeigen, dass das Ergebnis  $\beta(\varepsilon)$  nicht von diesen Wahlen abhängt, nämlich nicht von der Wahl des Zyklus  $z \in E$  mit  $\varepsilon = [z]$ , und nicht von der Wahl des Elementes  $d \in D$  mit  $gd = z$ .

Stellen wir uns also vor, wir hätten statt  $z$  einen vielleicht anderen Zykel  $z' \in E$  gewählt mit der gleichen Homologieklassse, und wir hätten statt  $d \in D$  ein anderes Element  $d' \in D$  gewählt mit  $gd' = z'$  (da  $z'$  auch gleich  $z$  sein darf, decken wir hiermit auch die Möglichkeit ab, verschiedene Urbilder des gleichen Zyklus  $z \in E$  zu wählen). Wir stellen uns diese Elemente vor in der mittleren Reihe von Diagramm (3.11).

Sei  $c$  das eindeutige Element von  $C$  mit  $fc = \partial'z$  und sei  $c'$  das eindeutige Element von  $C$  mit  $fc' = \partial'z'$ . Wir müssen zeigen, dass  $[c] = [c']$ , also dass  $c - c'$  ein Rand ist.

Weil  $[z] = [z']$  ist  $z - z'$  ein Rand und es gibt ein Element  $y \in E$  mit  $z - z' = \partial'' y$ . Weil  $g$  surjektiv ist finden wir ein Element  $x \in D$  mit  $gx = y$ . Wir stellen uns diese Elemente vor in der oberen Reihe von Diagramm (3.11).

Weil das obere rechte Quadrat kommutiert, gilt

$$gd - gd' = z - z' = \partial'' gx = g\partial' x$$

und somit ist  $d - d' - \partial' x \in \text{Ker } g = \text{Bild } f$ . Wähle ein Element  $w \in C$  mit

$$d - d' - \partial' x = f(w).$$

Weil das linke untere Quadrat in Diagramm (3.11) kommutiert, haben wir

$$\begin{aligned} f\partial w &= \partial' fw \\ &= \partial'(d - d' - \partial' x) = \partial'd - \partial'd' - \partial'\partial' x = \partial'd - \partial'd' - 0 \\ &= \partial'd - \partial'd' \\ &= fc - fc', \end{aligned}$$

und weil  $f$  injektiv ist gilt  $\partial w = c - c'$  und  $c - c'$  ist ein Rand, wie behauptet. Das heißt,  $\beta(\varepsilon)$  hängt nicht von den während der Konstruktion getroffenen Wahlen ab und  $\beta$  ist wohldefiniert.

Aus der Konstruktion ist klar, dass  $\beta$  die Dimension eines homogenen Elementes von  $H(E)$  um 1 erniedrigt, aber wir müssen noch zeigen, dass  $\beta$  ein Homomorphismus ist.

Das ist ganz einfach einzusehen, denn wenn  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  zwei Elemente von  $H(E)$  sind, so seien  $z$  und  $z'$  Zykeln in  $E$  mit  $\varepsilon = [z]$  und  $\varepsilon' = [z']$ , man wähle Elemente  $d$  und  $d' \in D$  mit  $gd = z$  und  $gd' = z'$ , und man finde die Elemente  $c$  und  $c' \in C$  mit  $fc = \partial' z$  und  $fc' = \partial' z'$ , für die dann gilt  $\beta(\varepsilon) = [c]$  und  $\beta(\varepsilon') = [c']$ .

Dann ist  $z + z'$  ein Zykel in  $E$ , dessen Homologieklassse  $\varepsilon + \varepsilon'$  ist,  $d + d'$  ist ein Element von  $D$  mit  $g(d + d') = z + z'$ , und  $c + c'$  ist ein Element von  $C$  mit  $f(c + c') = \partial'd + \partial'd' = \partial'(d + d')$ . Also ist

$$\beta(\varepsilon + \varepsilon') = [c + c'] = \beta(\varepsilon) + \beta(\varepsilon'),$$

und  $\beta$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

**Exaktheit bei  $H(C)$ :** Nach der Definition von  $\beta$  hat jede Homologieklassse in  $\text{Bild } \beta$  die Form  $[c]$  für einen Zykel  $c \in C$  so dass  $fc = \partial'd$  für ein geeignetes Element  $d \in D$ . Insbesondere ist  $f_*[c] = [fc] = 0$ , weil  $fc$  ein Rand ist. Also ist  $\text{Bild } \beta \subseteq \text{Ker } f_*$ .

Für die andere Inklusion, sei  $\gamma \in H(C)$  mit  $f_*(\gamma) = 0$  und sei  $c$  ein Zykel in  $C$  mit  $\gamma = [c]$ . Da  $f_*[c] = [fc] = 0$ , ist  $fc$  ein Rand und es gibt ein Element  $d \in D$  mit  $\partial'd = fc$ . Sei  $z := gd \in E$ . Wegen der Kommutativität der rechten Quadrate und der Exaktheit der Zeilen von (3.11) ist  $\partial''z = \partial''gd = g\partial'd = gfc = 0$  und  $z$  ist somit ein Zykel. Nach der Definition von  $\beta$  gilt  $\beta([z]) = [c] = \gamma$ . Also ist  $\text{Ker } f_* \subseteq \text{Bild } \beta$  und die Exaktheit bei  $H(C)$  ist bewiesen.

**Exaktheit bei  $H(D)$ :**  $g_* \circ f_* = 0$ , weil schon  $g \circ f = 0$  in der exakten Folge (3.7). Also ist  $\text{Bild } f_* \subseteq \text{Ker } g_*$ .

Für die andere Inklusion, sei  $\delta \in H(D)$  mit  $g_*(\delta) = 0$  und sei  $d$  ein Zykel in  $D$  mit  $\delta = [d]$ . Wir stellen uns diese Elemente vor in der mittleren Zeile von (3.11).

Weil  $g_*[d] = [gd] = 0$ , ist  $gd$  ein Rand und es gibt ein Element  $e \in E$  mit  $\partial''e = gd$ . Weil  $g$  surjektiv ist gibt es ein Element  $a \in D$  mit  $ga = e$ . Sei  $d' := d - \partial'a$ ; dies ist ein Zykel weil  $d$  und  $\partial'a$  Zykeln sind, und  $[d'] = [d]$ , weil  $d$  und  $d'$  sich nur um einen Rand unterscheiden. Wir haben also auch  $\delta = [d']$ .

Wegen der Kommutativität der rechten Quadrate von (3.11) ist

$$gd' = gd - g\partial'a = gd - \partial''ga = gd - \partial''e = 0$$

und weil die Zeilen des Diagramms exakt sind gibt es ein  $c \in C$  mit  $fc = d'$ .

Dieses  $c$  ist ein Zykel, denn weil  $d'$  ein Zykel ist, ist  $0 = \partial'd = \partial'fc = f\partial c$ , und aus der Injektivität von  $f$  folgt, dass  $\partial c = 0$ .

Wir haben also

$$\delta = [d'] = [fc] = f_*([c]),$$

und somit ist  $\text{Ker } g_* \subseteq \text{Bild } f_*$  und die Exaktheit bei  $H(D)$  ist bewiesen.

**Exaktheit bei  $H(E)$ :** Sei  $\varepsilon \in H(E)$ ; diese Homologiekategorie ist eine Äquivalenzklasse von Zykeln von  $E$ . Nach der Definition von  $\beta$  gibt es für jeden Zykel  $z \in \varepsilon$  ein Element  $d \in D$  mit  $gd = z$  und zu jedem solchen Element  $d \in D$  gibt es einen Zykel  $c \in C$  mit  $fc = \partial'd$ , der wegen der Injektivität von  $f$  eindeutig ist, und es gilt  $\beta(\varepsilon) = [c]$ . Weil  $\beta$  wohldefiniert ist hängt  $[c]$  weder von der Wahl von  $z \in \varepsilon$  noch von der Wahl von  $d$  ab.

Wenn  $\varepsilon \in \text{Bild } g_*$ , so gibt es einen Zykel  $d \in D$  mit  $\varepsilon = g_*([d]) = [gd]$ , d. h., in der Konstruktion von  $\beta(\varepsilon)$  können wir  $gd$  als den Zykel  $z$  wählen und den gegebenen Zykel  $d$  als sein Urbild in  $D$ . Weil  $d$  ein Zykel ist, haben wir  $\partial'd = 0$ , also können wir  $c = 0$  wählen und  $\beta(\varepsilon) = [0] = 0$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $\text{Bild } g_* \subseteq \text{Ker } \beta$ .

Für die andere Inklusion, sei  $\varepsilon \in \text{Ker } \beta$ . Dann ist der Zykel  $c$  in der oben beschriebenen Konstruktion von  $\beta(\varepsilon)$  ein Rand, d. h., es gibt ein Element  $a \in C$  mit  $c = \partial a$ .

Wir haben dann

$$\partial' d = f c = f \partial a = \partial' f a,$$

so dass  $d' := d - f a$  ein *Zykel* ist. Ferner gilt wegen der Exaktheit der waagerechten Folgen in (3.11)

$$g_*([d']) = [gd'] = [gd - gfa] = [gd - 0] = [z] = \varepsilon,$$

so dass  $\varepsilon \in \text{Bild } g_*$ .

Damit haben wir gezeigt, dass  $\text{Ker } \beta \subseteq \text{Bild } g_*$  und das Dreieck (3.9) ist auch bei  $H(E)$  exakt. Es ist also tatsächlich an jeder Stelle exakt.

### Natürlichkeit des exakten Dreiecks (3.9):

Sei die Familie der senkrechten Abbildungen in

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & (C, \partial) & \xrightarrow{f} & (D, \partial') & \xrightarrow{g} & (E, \partial'') \longrightarrow \{0\} \\ & & p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & (\bar{C}, \bar{\partial}) & \xrightarrow{\bar{f}} & (\bar{D}, \bar{\partial}') & \xrightarrow{\bar{g}} & (\bar{E}, \bar{\partial}'') \longrightarrow \{0\} \end{array} \quad (3.12)$$

ein Diagrammmorphismus zwischen zwei kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen (das bedeutet, dass das Diagramm kommutiert).

Die Kettenabbildungen  $p$ ,  $q$  und  $r$  induzieren Grad-0 Homomorphismen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  zwischen den Homologiegruppen an entsprechenden Stellen in den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen. Wir müssen zeigen, dass das exakte Homologiedreieck natürlich ist, und das bedeutet, dass die Zuordnung des exakten Homologiedreiecks zu einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen und die Zuordnung der Homologiehomo-morphismen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  zu einem Morphismus (3.12) von kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen zu der Kategorie der exakten Dreiecke von graduierten abelschen Gruppen bildet.

Funktoren müssen zwar den Identitätsmorphismus und Verknüpfungen von Morphismen richtig übertragen, aber damit müssen wir uns nicht groß auseinandersetzen, weil die entsprechenden Eigenschaften in unserer Situation offensichtlich und trivial sind.

Es geht vielmehr darum, zu zeigen, dass die zugeordneten Abbildungen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  *überhaupt* einen Morphismus der Kategorie der exakten Dreiecke bilden, also einen *Diagrammmorphismus* zwischen den Objekten dieser Kategorie. Dazu müssen wir zeigen, dass  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  mit den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen ein kommutatives Diagramm

bilden, und das läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass sie mit den Homomorphismen in diesen exakten Homologiedreiecken drei kommutative Quadrate bilden.

Zwei Seiten des exakten Homologiedreiecks der beiden kurzen exakten Folgen werden jeweils durch die Abbildungen  $f_*$  und  $g_*$  bzw.  $\bar{f}_*$  und  $\bar{g}_*$  gebildet und sie kommutieren mit den Homomorphismen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  wegen Bemerkung 1.23 b), weil die Quadrate, um die es hier geht, durch Anwendung des Homologiefunktors auf die kommutativen Quadrate in (3.12) entstehen.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} H(E) & \xrightarrow{\beta} & H(C) \\ r_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ H(\bar{E}) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & H(\bar{C}) \end{array} \quad (3.13)$$

kommutiert, das  $r_*$  und  $p_*$  mit den dritten Seiten der exakten Homologiedreiecke (also mit den verbindenden Homomorphismen) bilden.

Sei  $\varepsilon \in H(E)$  und sei  $z \in E$  ein Zykel mit  $\varepsilon = [z]$ . Wähle ein Element  $d \in D$  mit  $gd = z$  und sei  $c \in C$  der Zykel mit  $fc = \partial'd$ . Nach der Definition von  $\beta$  ist  $\beta(\varepsilon) = [c]$  und somit  $p_*\beta(\varepsilon) = [pc]$ .

Sei  $\bar{z} := rz \in \bar{E}$ , sei  $\bar{d} := qd \in \bar{D}$  und sei  $\bar{c} := pc \in \bar{C}$ . Da  $r$  eine Kettenabbildung ist, ist  $\bar{z}$  ein Zykel und  $r_*(\varepsilon) = [rz] = [\bar{z}]$ .

Weil (3.12) kommutiert und weil die Abbildungen in dem Diagramm Kettenabbildungen sind, überträgt sich die gesamte Konstruktion von  $\beta(\varepsilon)$  mittels  $p$ ,  $q$  und  $r$  in die andere kurze exakte Folge und wir haben  $\bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}]$ .

Oder wenn Sie diese Schlussfolgerung etwas langsamer und detaillierter erklärt haben wollen: Weil (3.12) kommutiert haben wir

$$\bar{z} = rz = rgd = \bar{g}qd = \bar{g}\bar{d}$$

und weil  $q$  eine Kettenabbildung ist und (3.12) kommutiert haben wir

$$\bar{\partial}'\bar{d} = \bar{\partial}'qd = q\partial'd = qfc = \bar{f}pc = \bar{f}\bar{c}.$$

Das bedeutet, nach der Konstruktion des exakten Homologiedreiecks, dass  $\bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}]$ .

Nach den Definitionen von  $\bar{z}$  und  $\bar{c}$  gilt nun

$$\bar{\beta}r_*(\varepsilon) = \bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}] = [pc] = p_*\beta(\varepsilon).$$

In anderen Worten  $\bar{\beta}r_* = p_*\beta$  und (3.13) kommutiert. Das exakte Homologiedreieck ist also natürlich. ■

Hiermit haben wir zunächst nur einen schönen Satz über Kettenkomplexe erhalten, aber daraus gewinnen wir leicht eine Grundaussage über die singuläre Homologie.

**Bemerkung 3.15** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard und seien

$$i: A \rightarrow X$$

und

$$j: X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$$

die Inklusionen. Dann bilden die singulären Kettenkomplexe von  $X$ ,  $A$  und  $(X, A)$  eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A) \xrightarrow{i_\#} C_*(X) \xrightarrow{\pi=j_\#} C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \quad (3.14)$$

von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen.

Man erinnere sich aus Definition 2.34 daran, dass  $C_*(A)$  eine graduierte Untergruppe von  $C_*(X)$  ist und dass  $i_\#$  die Inklusion dieser Untergruppe ist. Der dritte Pfeil in der Folge (3.14) ist die Projektion  $\pi$  von  $C_*(X)$  auf den Quotienten  $C_*(X)/C_*(A) = C_*(X, A)$ .

Gleichzeitig ist diese Abbildung auch die Kettenabbildung  $j_\#$ , die von der Inklusion von Raumpaaren  $j: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$  induziert wird, denn  $C_*(X)$  können wir nach Bemerkung 2.38 als den Quotienten

$$\frac{C_*(X)}{\{0\}} = \frac{C_*(X)}{C_*(\emptyset)} = C_*(X, \emptyset)$$

auffassen und  $j_\#$  ist dann die Projektion

$$C_*(X) = C_*(X, \emptyset) = \frac{C_*(X)}{C_*(\emptyset)} \xrightarrow{j_\#} \frac{C_*(X)}{C_*(A)} = C_*(X, A).$$

*Beweis.* Die Folge (3.14) ist exakt bei  $C_*(A)$ , weil  $i_\#$  die Inklusion einer Untergruppe ist und deshalb injektiv ist, und sie ist exakt bei  $C_*(X, A)$  und bei  $C_*(X)$ , weil  $\pi$  die Projektion auf den Quotienten nach dem Bild von  $i_\#$  ist, und deshalb surjektiv ist und das Bild von  $i_\#$  als Kern hat.

Diese Folge ist eine Instanz von der exakten Folge (3.5) mit  $i_\#$  in der Rolle von  $f$ .

Sie ist natürlich, weil die Kettenabbildungen  $i_\# = C_*(i)$  und  $j_\# = C_*(j)$  nach Bemerkung 2.38 natürliche Transformationen sind und somit mit den Kettenabbildungen kommutieren, die von **Top**<sup>2</sup>-Morphismen und den dazugehörigen stetigen Abbildungen der einzelnen Räume induziert werden. ■

**Korollar 3.16** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard und seien  $i: A \rightarrow X$  und  $j: X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H_*(A) & \xrightarrow{i_*} & H_*(X) \\ & \nwarrow \beta & \swarrow j_* \\ & H_*(X, A) & \end{array} \quad (3.15)$$

Grad -1

zwischen den graduierten Homologiegruppen von  $A$ ,  $X$  und  $(X, A)$ , mit den von den Inklusionen induzierten Grad 0 Homomorphismen  $i_* = H_*(i)$  und  $j_* = H_*(j)$  und mit einem Grad -1 Homomorphismus

$$\beta: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A),$$

den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen und der wie folgt leicht zu konstruieren ist:

Sei  $\gamma \in H_*(X, A)$  und sei  $z \in C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$  ein beliebiger Zykel mit Homologieklassse  $\gamma$ . Nach der Definition von  $C_*(X, A)$  ist  $z$  die Restklasse  $c + C_*(A)$  einer Kette  $c \in C_*(X)$ . Dass  $z$  ein relativer Zykel ist bedeutet, dass  $\partial c$  ein Element des Nenners  $C_*(A) \subseteq C_*(X)$  des Quotienten  $C_*(X, A)$  ist. Als Rand in  $C_*(X)$  ist  $\partial c$  auch in  $C_*(A)$  ein Zykel und

$$\beta(\gamma) = [\partial c] \in H_*(A).$$

Das exakte Dreieck (3.15) heißt das **exakte Homologiedreieck** des Paares  $(X, A)$  von topologischen Räumen.

*Beweis.* Die Existenz und Natürlichkeit des exakten Homologiedreiecks (3.15) folgt sofort durch Anwendung von Satz 3.14 auf die natürliche kurze exakte Folge von singulären Kettenkomplexen (3.14) aus Bemerkung 3.15.

Die Vorschrift für die Konstruktion des verbindenden Homomorphismus  $\beta$  spezialisiert sich wie folgt für die kurze exakte Folge (3.14): Zu einer Homologieklassse  $\gamma \in H_*(X, A)$  wähle man einen Zykel  $z \in C_*(X, A)$  mit  $\gamma = [z]$  und man bestimme ein Urbild von  $z$  unter  $\pi$ , also eine Kette  $c \in C_*(X)$  mit  $z = c + C_*(A)$ . Dann ist  $\beta(\gamma)$  die Homologieklassse der eindeutigen Kette in  $C_*(A)$ , die unter  $i_\#$  auf  $\partial c$  abgebildet wird, in anderen Worten,  $\beta(\gamma)$  ist die Homologieklassse von  $\partial c$  aufgefasst als Kette auf  $A$ . Das ist genau die Konstruktion, die in der Aussage oben beschrieben wird. ■

**Bemerkung 3.17** Wenn man die einzelnen Homologiegruppen  $H_n$  ausrechnen will, kann man das exakte Dreieck (3.15) „abwickeln“ und man erhält



eine natürliche lange exakte Folge

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots \quad (3.16)$$

zwischen den Homologiegruppen in den einzelnen Dimensionen, genannt die **lange exakte Homologiefolge** des Raumpaars  $(X, A)$ .

Die nächste wichtige Eigenschaft der singulären Homologie, die wir beweisen wollen, ist die Homotopieinvarianz. Wir beginnen wieder mit einem (ganz einfachen) Satz für Kettenkomplexe.

**Definition 3.18** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  Kettenkomplexe und seien  $f$  und  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Kettenabbildungen.

Eine **Kettenhomotopie** von  $f$  nach  $g$  ist ein Grad +1 Homomorphismus  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , so dass

$$g - f = \partial' \circ \Phi + \Phi \circ \partial. \quad (3.17)$$

Wenn es eine solche Kettenhomotopie  $\Phi$  gibt, so sagen wir,  $f$  und  $g$  sind **kettenhomotop** vermöge  $\Phi$ , und wir schreiben dazu  $f \simeq_\Phi g$ .

Beachten Sie, dass die rechte Seite von (3.17) eine Grad-0 Abbildung ist, wie die linke Seite.

**Lemma 3.19** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  Kettenkomplexe und seien  $f$  und  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Kettenabbildungen.

- a) Wenn  $f \simeq g$ , dann ist  $H(f) = H(g): H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{D})$ .
- b) Kettenhomotopie  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kettenabbildungen  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .
- c) Sei  $\mathcal{E} = (E, \partial'')$  ein dritter Kettenkomplex und seien  $h$  und  $k$  Kettenabbildungen  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ . Wenn  $f \simeq g$  und  $h \simeq k$ , dann ist  $h \circ f \simeq k \circ g$ .

(Teile b) und c) besagen, dass Kettenhomotopie eine Kongruenz auf der Kategorie **KK** ist. Das ist eine passende Eigenschaft für einen „Homotopiebegriff“, da auch die normale Homotopie von stetigen Abbildungen eine Kongruenz auf **Top** ist.)

*Beweis.* Teil a): Sei  $\gamma \in H(\mathcal{C})$  und sei  $z \in C$  ein Zykel mit  $\gamma = [z]$ . Dann ist

$$gz - fz = \partial' \Phi z + \Phi \partial z = \partial' \Phi z + 0 = \partial' \Phi z,$$

weil  $z$  ein Zykel ist. Also ist  $gz - fz$  ein Rand und somit ist

$$g_*(\gamma) - f_*(\gamma) = [gz] - [fz] = [gz - fz] = [\partial' \Phi z] = 0$$

und  $g_* = f_*$ .

Teil b): Für jede Kettenabbildung  $f$  ist offensichtlich die konstante Abbildung 0 eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $f$ ; also ist  $\simeq$  reflexiv.

Wenn  $f \simeq_{\Phi} g$ , so ist  $-\Phi$  eine Kettenhomotopie von  $g$  nach  $f$  und  $\simeq$  ist symmetrisch.

Und schließlich, wenn  $f \simeq_{\Phi} g$  und  $g \simeq_{\Psi} h$ , wo  $f, g$  und  $h$  Kettenabbildungen  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  sind, so ist

$$h - f = (h - g) + (g - f) = \partial' \Psi + \Psi \partial + \partial' \Phi + \Phi \partial = \partial' \circ (\Psi + \Phi) + (\Psi + \Phi) \circ \partial$$

(weil  $\partial'$  ein Gruppenhomomorphismus ist). Also ist  $\Psi + \Phi$  eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $h$  und  $\simeq$  ist transitiv.

Teil c): Sei  $\Phi$  eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $g$  und sei  $\Psi$  eine Kettenhomotopie von  $h$  nach  $k$ . Wir haben

$$\begin{aligned} kg - hf &= kg - hg + hg - hf && (-hg + hg = 0) \\ &= (k - h) \circ g + h \circ (g - f) && (h \text{ ist Homomorphismus}) \\ &= (\partial'' \Psi + \Psi \partial') \circ g + h \circ (\partial' \Phi + \Phi \partial) && (h \simeq_{\Psi} k \text{ und } f \simeq_{\Phi} g) \\ &= \partial'' \Psi g + \Psi \partial' g + h \partial' \Phi + h \Phi \partial && (h \text{ ist Homomorphismus}) \\ &= \partial'' \Psi g + \Psi g \partial + \partial'' h \Phi + h \Phi \partial && (g, h \text{ Kettenabbildungen}) \\ &= \partial'' \circ (\Psi g + h \Phi) + (\Psi g + h \Phi) \circ \partial && (\partial'' \text{ ist Homomorphismus.}) \end{aligned}$$

Also ist  $\Psi g + h \Phi$  eine Kettenhomotopie von  $h \circ f$  zu  $k \circ g$ . ■

**Definition 3.20** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  Kettenkomplexe.

Eine Kettenabbildung  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt eine **Kettenhomotopieäquivalenz**, wenn es eine Kettenabbildung  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt (genannt eine **Kettenhomotopieinverse** zu  $f$ ), so dass

$$g \circ f \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

und

$$f \circ g \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Wenn es eine Kettenhomotopieäquivalenz  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  gibt, sagen wir, dass  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  **kettenhomotopieäquivalent** oder **vom gleichen Kettenhomotopietyp** sind und wir schreiben  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ .

**Bemerkung 3.21** Aus Lemma 3.19 a) folgt sofort, dass Kettenhomotopieäquivalenzen Isomorphismen der Homologiegruppen induzieren und dass Kettenkomplexe vom gleichen Kettenhomotopietyp isomorphe graduierte Homologiegruppen haben.

Unser Ziel ist es, Aussagen wie Lemma 3.19 a) oder Bemerkung 3.21 für die *topologische* Homotopie zwischen stetigen Abbildungen zu gewinnen, aber die topologischen Aussagen lassen sich am bequemsten und effektivsten erhalten, wenn man den Umweg über die Kettenhomotopie nimmt oder die Kettenhomotopie als Zwischenstufe verwendet. Wir wollen also aus einer topologischen Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen eine Kettenhomotopie zwischen den induzierten Kettenabbildungen konstruieren.

Wie bei fast allen Konstruktionen in der singulären Homologie lässt sich auch diese Konstruktion am einfachsten zunächst auf dem Standardsimplex oder genauer für die konstante Homotopie des singulären Simplexes  $\text{id}_{\Delta_n}$  erklären und dann mit einer beliebigen topologischen Homotopie in den eigentlich interessierenden topologischen Raum übertragen.

Da aber auch Randoperatoren und somit Seiten des Standardsimplexes ins Spiel kommen, fassen wir die Grunddefinitionen und die Anfänge dieser Konstruktion ein bisschen allgemeiner.

**Definition 3.22** a) Wir konstruieren einen Funktor  $Z: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$  durch die Zuordnungen

$$Z(X) := X \times I$$

für jeden topologischen Raum  $X$  und

$$Z(f) := f \times \text{id}_I: Z(X) = X \times I \longrightarrow Y \times I = Z(Y)$$

für jede stetige Abbildung  $f: X \longrightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen. Wir haben hier den Namen  $Z$  gewählt als Abkürzung für *Zylinder*.

- b) Neben dem Funktor  $Z$  haben wir auch den Identitätsfunktor  $\text{id}_{\mathbf{Top}}$  von  $\mathbf{Top}$  nach sich. Wir konstruieren zwei natürliche Transformationen  $\lambda$  (für „linkes Ende“) und  $\rho$  (für „rechtes Ende“) von  $\text{id}_{\mathbf{Top}} \longrightarrow Z$ , indem wir für jeden topologischen Raum  $X$  stetige Abbildungen

$$\lambda(X) \text{ und } \rho(X): \text{id}_{\mathbf{Top}}(X) = X \longrightarrow X \times I = Z(X)$$

definieren durch die Vorschriften

$$\lambda(X)(x) := (x, 0) \in X \times I \quad \text{und} \quad \rho(X)(x) := (x, 1) \in X \times I$$

für jedes  $x \in X$ .

Für jede stetige Abbildung  $f: X \longrightarrow Y$  kommutieren  $\lambda(X)$  und  $\rho(X)$  offensichtlich mit  $f$  und  $Z(f) = f \times \text{id}_I$ , so dass diese Zuordnungen tatsächlich natürliche Transformationen definieren.

Die Abbildungen  $\lambda(X)$  und  $\rho(X)$  sind für jeden Raum  $X$  sogar Einbettungen  $X \longrightarrow X \times I$ .

Um die Notation zu vereinfachen, werden wir bei der Anwendung dieser natürlicher Transformationen  $\lambda$  und  $\rho$  auch die jedem topologischen Raum  $X$  zugeordneten stetigen Abbildungen  $\lambda(X)$  und  $\rho(X)$  schlicht  $\lambda$  und  $\rho$  nennen, obwohl dann eigentlich verschiedene Abbildungen den gleichen Namen erhalten. Der Raum  $X$  wird sowieso bei jeder Anwendung aus den jeweiligen Umständen hervorgehen.

**Definition 3.23** Sei  $n \in \mathbf{N}$ .

- a) Das  $n$ -te **Standardprisma** ist die  $n + 1$ -dimensionale affine Kette  $P_n$  auf  $\Delta_n \times I \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$  gegeben durch die Formel

$$P_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i [\lambda e_0, \dots, \lambda e_i, \rho e_i, \dots, \rho e_n]. \quad (3.18)$$

- b) Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\sigma \in S_n(X)$ . Wir definieren das **Prisma auf  $\sigma$**  als die  $n + 1$ -dimensionale Kette

$$P_\sigma := (\sigma \times \text{id}_I)_\#(P_n) \in C_{n+1}(X \times I). \quad (3.19)$$

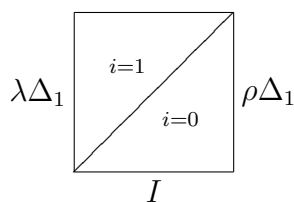
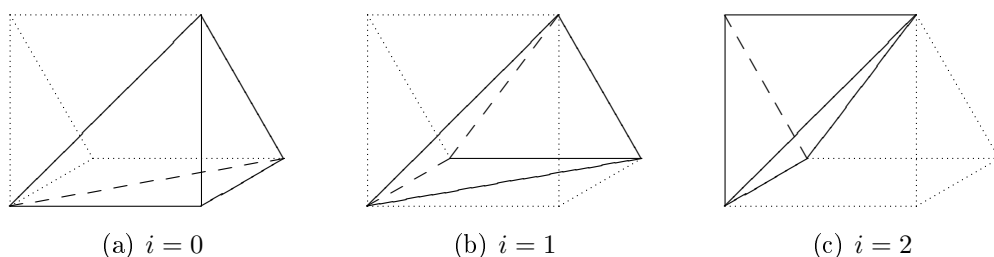
- c) Nach Lemma 2.10 b) und Bemerkung 2.28 erweitert sich die Zuordnung aus Teil b) zu einem eindeutigen graduierten Homomorphismus

$$P: C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I),$$

von Grad  $+1$ , so dass  $P(\sigma) = P_\sigma$  für jeden singulären Simplex  $\sigma$  in  $X$ . Wir nennen  $P$  den **Prismenoperator** oder die **Prismenabbildung** auf  $X$ .

Die Summanden von  $P_n$  zerlegen  $\Delta_n \times I$  in  $n + 1$  schön zusammengefügte  $n + 1$ -dimensionale affine Simplexes, die für  $n = 1$  und  $n = 2$  in Abbildungen 3.1 und 3.2 zu sehen sind.

**Bemerkung 3.24** Sei  $V$  ein affiner Raum und sei  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner  $n$ -Simplex in  $V$ . Dann ist  $V \times \mathbf{R}$  auch ein affiner Raum und  $\sigma \times \text{id}_I$  ist die Einschränkung einer affinen Abbildung  $\mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow V \times \mathbf{R}$  auf  $\Delta_n \times I$ , so dass  $(\sigma \times \text{id}_I)_\#$  affine Simplexes in  $\Delta_n \times I$  (und insbesondere die Summanden von  $P_n$ ) wieder in affine Simplexes überführt, deren Ecken die Bilder der Ecken der Summanden von  $P_n$  unter  $\sigma \times \text{id}_I$  sind.

Abbildung 3.1: Die Simplexes im Standardprisma  $P_1$ .Abbildung 3.2: Die drei Summanden im Prisma  $P_2$ .

Deshalb ist das Prisma auf einem affinen Simplex  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  gegeben durch die Formel

$$P_\sigma = P_{[v_0, \dots, v_n]} = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n]. \quad (3.20)$$

**Notation 3.25** Wir wollen jetzt den Rand von  $P_n$  oder allgemeiner von  $P_\sigma$  für einen affinen Simplex  $\sigma$  in einem affinen Raum  $V$  ausrechnen, und um darüber einfacher reden zu können führen wir kurze Namen ein für die Summanden von  $P_\sigma$  und für die affinen Simplexes, die in den Rändern dieser Summanden auftreten.

All diese Simplexes haben gemeinsam, dass ihre Ecken aus den Ecken eines affinen Simplexes  $\tau = [v_0, \dots, v_n]$  in  $V$  gewonnen werden (dieser ist entweder  $\sigma$  selber oder eine Seite von  $\sigma$ ), indem die ersten paar Ecken mit  $\lambda$  nach  $V \times \{0\}$  versetzt werden und die letzten Ecken mit  $\rho$  nach  $V \times \{1\}$  versetzt werden. Trotzdem kommen zwei verschiedene Situationen vor.

Die meisten dieser Simplexes  $v$  haben eine Gestalt wie in (3.20), wo eine Ecke  $v_k$  von  $\tau$  zweimal unter den Ecken von  $v$  vertreten ist, als  $\lambda v_k$  und direkt anschließend als  $\rho v_k$ .

Bilden wir aber eine Seite eines solchen Simplexes  $v$ , was bei der Berechnung des Randoperators passiert, so kann diese Verdoppelung aufgehoben

werden und wir haben es deshalb auch mit Simplizes zu tun, unter deren Ecken jede Ecke von  $\tau$  genau einmal vorkommt.

Wir führen für diese beiden Situationen bequeme Kürzel ein, die nur  $\tau$  nennen und den Index, ab dem die Ecken von  $V \times \{0\}$  nach  $V \times \{1\}$  übersiedeln.

Ist  $\tau = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner Simplex in  $V$  und  $0 \leq k \leq n$ , so bezeichnen wir mit  $\delta_k(\tau)$  den affinen  $n+1$ -Simplex

$$\delta_k(\tau) = \delta_k([v_0, \dots, v_n]) := [\lambda v_0, \dots, \lambda v_k, \rho v_k, \dots, \rho v_n],$$

und für  $0 \leq k \leq n+1$  bezeichnen wir mit  $\varepsilon_k(\tau)$  den affinen  $n$ -Simplex

$$\varepsilon_k(\tau) = \varepsilon_k([v_0, \dots, v_n]) := [\lambda v_0, \dots, \lambda v_{k-1}, \rho v_k, \dots, \rho v_n]$$

in  $V \times I$ . (Hier soll  $\delta$  an „doppelt“ und  $\varepsilon$  an „einfach“ erinnern.)

Man beachte: für  $k = n+1$  ist

$$\varepsilon_{n+1}(\tau) = \lambda_{\sharp}(\tau) \tag{3.21}$$

und ist ganz in  $V \times \{0\}$  enthalten; für  $k = 0$  ist

$$\varepsilon_0(\tau) = \rho_{\sharp}(\tau) \tag{3.22}$$

und ist ganz in  $V \times \{1\}$  enthalten.

**Bemerkung 3.26** Sei  $V$  ein affiner Raum und sei  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner Simplex in  $V$ . Im  $i$ -ten Summanden von  $P_\sigma$  in (3.19) erscheint in der Notation von 3.25 der affine Simplex

$$\delta_i(\sigma) = [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n].$$

Wir erhalten die  $j$ -te Seite dieses Simplexes durch Entfernung der  $j$ -ten Ecke innerhalb der Klammern  $[ \ ]$ . Diese Ecke ist  $\lambda v_j$  für  $j \leq i$  und  $\rho v_{j-1}$  für  $i < j \leq n+1$ . Umgekehrt ist  $v_i$  die  $i-1$ -te Ecke von  $\sigma^{(j)}$  wenn  $j < i$  und die  $i$ -te Ecke von  $\sigma^{(j)}$  für  $j > i$ .

Somit erhalten wir für  $0 \leq j \leq n+1$

$$(\delta_i(\sigma))^{(j)} = \begin{cases} [\lambda v_0, \dots, \widehat{\lambda v_j}, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j < i; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_{i-1}, \rho v_i, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j = i; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_{i+1}, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j = i+1; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \widehat{\rho v_{j-1}}, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j > i+1 \end{cases} \tag{3.23}$$

oder mit den in Notation 3.25 eingeführten Abkürzungen

$$(\delta_i(\sigma))^{(j)} = \begin{cases} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) & \text{wenn } j < i; \\ \varepsilon_i(\sigma) & \text{wenn } j = i; \\ \varepsilon_{i+1}(\sigma) & \text{wenn } j = i + 1; \\ \delta_i(\sigma^{(j-1)}) & \text{wenn } j > i + 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

**Lemma 3.27** Sei  $V$  ein affiner Raum und  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner Simplex in  $V$ . Dann ist

$$\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) = \rho_{\sharp}(\sigma) - \lambda_{\sharp}(\sigma) \in C_n(V \times I). \quad (3.25)$$

*Beweis.* Aus Gleichung (3.20) für  $P_{\sigma}$ , aus der Definition des Randoperators und aus Gleichung (3.24) für die Seiten der Summanden von  $P_{\sigma}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \partial P_{\sigma} = \partial \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i(\sigma) \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial(\delta_i(\sigma)) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (\delta_i(\sigma))^{(j)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} (\delta_i(\sigma))^{(j)} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n (-1)^{2i} \varepsilon_i(\sigma) + \sum_{i=0}^n (-1)^{2i+1} \varepsilon_{i+1}(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j-1)}) \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(\sigma) - \sum_{i=0}^n \varepsilon_{i+1}(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j-1)}) \end{aligned} \quad (3.26b)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i'=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i'} (-1)^{i'+j+1} \delta_{i'}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(\sigma) - \sum_{i'=1}^{n+1} \varepsilon_{i'}(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j'=i+1}^n (-1)^{i+j'+1} \delta_i(\sigma^{(j')}) \end{aligned} \quad (3.26c)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j+1} \delta_i(\sigma^{(j)}) + \varepsilon_0(\sigma) - \varepsilon_{n+1}(\sigma). \quad (3.26d)$$

Hier erhalten wir zunächst (3.26a) durch Einsetzen aus den verschiedenen Fällen in (3.24), und wir vereinfachen diese Zeile zu (3.26b) durch Ausrechnen der Vorzeichen der mittleren Summanden und durch die Beobachtung, dass es zu  $i = 0$  in der ersten Summation kein  $j \leq i - 1$  und zu  $i = n$  in der letzten Summation kein  $j \geq i + 2$  geben kann.

In (3.26c) „glätten“ wir die nicht in einfacher Form in den Summanden stehenden Indizes durch die Einführung neuer, um eins verschobener Indizes gleich den Ausdrücken in den Summanden (dabei werden die Summationen unabhängig voneinander behandelt, so dass die neuen Indizes in verschiedenen Summationen verschiedene Bedeutungen haben); wir schreiben *nur in dieser Zeile* die neuen Indizes mit einem Strich, um sie von den alten zu unterscheiden, und wir passen alle Vorkommnisse der alten Indizes entsprechend an.

Anschließend schreiben wir die Striche nicht mehr und es wird dann ersichtlich, dass man nun die erste und letzte Summe zu einer einzigen Summation für  $j$  von 0 bis  $n$  zusammenfassen kann, und dass in den mittleren Summen die Terme für Indexwerte 1 bis  $n$  sich wegheben und nur der Summand für  $i = 0$  in der zweiten Summe und der Summand für  $i = n + 1$  in der dritten Summe übrig bleiben. Diese Vereinfachung ergibt schließlich (3.26d).

Jetzt berechnen wir den zweiten Summanden auf der linken Seite von (3.25). Da  $P$  ein Homomorphismus ist, folgt direkt aus der Definition des Randoperators und aus Formel 3.20 für das Prisma eines affinen Simplexes, dass

$$\begin{aligned} P(\partial\sigma) &= P\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma^{(j)}\right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P(\sigma^{(j)}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_{\sigma^{(j)}} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{\dim \sigma^{(j)}} (-1)^i \delta_i(\sigma^{(j)}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j)}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Der letzte Ausdruck ist die erste Summe in (3.26d), aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Also heben sich diese Beiträge weg, wenn wir die Summe von (3.26d) und (3.27) bilden, und wir erhalten

$$\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) = \varepsilon_0(\sigma) - \varepsilon_{n+1}(\sigma) = \rho_{\sharp}(\sigma) - \lambda_{\sharp}(\sigma)$$

nach (3.22) und (3.21). ■

**Korollar 3.28** *Der Prismenoperator  $P: C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I)$  ist eine natürliche Kettenhomotopie zwischen den natürlichen Kettenabbildungen  $\lambda_{\sharp}$  und  $\rho_{\sharp}$ .*



*Beweis.*  $\lambda_{\#}$  und  $\rho_{\#}$  sind natürliche Kettenabbildungen  $C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I)$ , weil  $\lambda$  und  $\rho$  natürliche Transformationen  $\text{id}_{\mathbf{Top}} \longrightarrow Z$  sind und somit nach Lemma 1.29 die Anwendung von  $C_*$  auf  $\lambda$  und  $\rho$  natürliche Transformationen  $C_* \longrightarrow C_* \circ Z$  liefert.

Die Definition von  $P$  bewirkt, dass  $P$  automatisch eine natürliche Transformation  $C_* \longrightarrow C_* \circ Z$  ist, denn wenn  $f: X \longrightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so gilt für jeden singulären Simplex  $\sigma \in S_n(X)$ , dass

$$\begin{aligned}
 P(C_*(f)(\sigma)) &= P(f_{\#}(\sigma)) = P(f \circ \sigma) = P_{f \circ \sigma} \\
 &= ((f \circ \sigma) \times \text{id}_I)_{\#}(P_n) \\
 &= ((f \times \text{id}_I) \circ (\sigma \times \text{id}_I))_{\#}(P_n) \\
 &= (f \times \text{id}_I)_{\#}((\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P_n)) \\
 &= (f \times \text{id}_I)_{\#}(P_{\sigma}) = (f \times \text{id}_I)_{\#}(P(\sigma)) \\
 &= C_*Z(f)(P(\sigma)).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Bisher haben wir in der Notation für den Prismenoperator aus Bequemlichkeit den Namen des topologischen Raumes, auf den er wirkt, nicht erwähnt, aber wenn wir das der Genauigkeit halber jetzt einmal tun, so haben wir gerade gezeigt, dass  $P(Y) \circ C_*(f) = C_*(Z(f)) \circ P(X)$  zumindest auf singulären Simplizes in  $X$ . Da diese aber  $C_*(X)$  frei erzeugen, gilt diese Beziehung auf ganz  $C_*(X)$  und  $P$  ist eine natürliche Transformation  $C_* \longrightarrow C_* \circ Z$ .

Nach Definition ist  $P$  für jeden Raum  $X$  ein Grad +1 Homomorphismus, und für jeden singulären Simplex  $\sigma$  gilt, weil  $P$ ,  $\rho_{\#}$  und  $\lambda_{\#}$  natürliche Transformationen und  $\sigma_{\#}$  und  $(\sigma \times \text{id}_I)_{\#}$  Kettenabbildungen sind, dass:

$$\begin{aligned}
 \partial P(\sigma) + P\partial(\sigma) &= \partial P(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) + P\partial(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= \partial((\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P(\text{id}_{\Delta_n}))) + P(\sigma_{\#}(\partial(\text{id}_{\Delta_n}))) \\
 &= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\partial P(\text{id}_{\Delta_n})) + (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P\partial(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}((\partial P + P\partial)(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &\stackrel{\text{Lem 3.27}}{=} (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}((\rho_{\#} - \lambda_{\#})(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\rho_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) - (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\lambda_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= \rho_{\#}(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) - \lambda_{\#}(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= \rho_{\#}(\sigma) - \lambda_{\#}(\sigma).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Da dies für singuläre Simplizes gilt, gilt es auch für jede Kette in  $C_*(X)$  und  $P$  ist eine Kettenhomotopie von  $\rho_\#$  nach  $\sigma_\#$ . ■

**Satz 3.29** a) Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und seien  $f$  und  $g$  stetige Abbildungen  $X \rightarrow Y$ . Wenn  $f \simeq g$ , dann ist

$$f_\# \simeq g_\#: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$$

und somit ist

$$f_* = g_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y).$$

b) Die gleiche Aussage gilt auch in **Top**<sup>2</sup> statt **Top** und für die relative Homologie, nämlich:

Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  topologische Raumpaare und seien  $f$  und  $g$  stetige Abbildungen  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Wenn  $f$  homotop ist zu  $g$  als Abbildungen von Raumpaaren, dann sind auch  $f_\#$  und  $g_\#: C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$  kettenhomotop. Folglich ist

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B).$$

*Beweis.* Es reicht, Teil b) zu beweisen, da Teil a) den Spezialfall  $A = B = \emptyset$  darstellt. Trotzdem erhalten wir als Zwischenschritt auch einen direkten Beweis von Teil a).

Sei  $K: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$  eine Homotopie in **Top**<sup>2</sup> von  $f$  nach  $g$ . Sei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion. Und schließlich, sei  $P$  der Prismenoperator aus Definition 3.23 c).

Damit klar ist, auf welchen Kettengruppen wir im folgenden die Rand- und Prismenoperatoren betrachten, werden wir sie nicht wie sonst aus Bequemlichkeit mit einem einfachen Buchstaben notieren, sondern den jeweiligen topologischen Raum als Index an das Symbol  $\partial$  oder  $P$  heften.

Nach Korollar 3.28 ist

$$\partial_{X \times I} P_X + P_X \partial_X = \rho_\# - \lambda_\#$$

als Abbildungen  $C_*(X) \rightarrow C_*(X \times I)$ , und weil  $K_\#: C_*(X \times I) \rightarrow C_*(Y)$  eine Kettenabbildung ist, haben wir

$$\begin{aligned} \partial_Y K_\# P_X + K_\# P_X \partial_X &= K_\# \partial_{X \times I} P_X + K_\# P_X \partial_X \\ &= K_\# \circ (\partial_{X \times I} P_X + P_X \partial_X) \\ &= K_\# \circ (\rho_\# - \lambda_\#) = K_\# \rho_\# - K_\# \lambda_\# \\ &= (K \circ \rho)_\# - (K \circ \lambda)_\# \\ &= g_\# - f_\# \end{aligned} \tag{3.30}$$

als Abbildungen  $C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$ .

(Insbesondere ist  $K_\# P_X$  eine Kettenhomotopie von  $f_\#$  nach  $g_\#$  und  $f$  und  $g$  induzieren den gleichen Homologiehomomorphismus  $H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ ; wir haben an dieser Stelle also schon Teil a) bewiesen.)

Weil  $P$  eine natürliche Transformation ist, ist  $(i \times \text{id}_I)_\# \circ P_A = P_X \circ i_\#$  oder anders gesagt,  $P_A = P_X|_{C_*(A)}$ . Insbesondere bildet  $P_X$  den Unterkettenkomplex  $C_*(A) \subseteq C_*(X)$  nach  $C_*(A \times I)$  ab (weil  $P_A$  dies tut) und induziert somit nach Lemma 2.30 e) ii) auf dem Quotienten einen Grad +1 Homomorphismus

$$\bar{P}_X: C_*(X, A) \longrightarrow C_*(X \times I, A \times I).$$

Weil die Randoperatoren und die Kettenabbildungen der relativen Kettengruppen von den entsprechenden Randoperatoren und Kettenabbildungen der Oberräume der Paare induziert werden, folgt sofort aus (3.30), dass

$$\bar{\partial}_{(Y,B)} \bar{K}_\# \bar{P}_X + \bar{K}_\# \bar{P}_X \bar{\partial}_{(X,A)} = \bar{g}_\# - \bar{f}_\#$$

als Abbildungen  $C_*(X, A) \longrightarrow C_*(Y, B)$ .

Das heißt,  $\bar{K}_\# \bar{P}_X$  ist eine Kettenhomotopie von  $\bar{f}_\#$  nach  $\bar{g}_\#$  und diese relativen Kettenabbildungen induzieren somit die gleiche Abbildung

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

in der relativen Homologie. ■

**Lemma 3.30** a) Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und sei  $f: X \longrightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz. Dann ist

$$f_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

ein Isomorphismus.

b) Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  topologische Raumpaare und sei  $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  eine stetige Abbildung, so dass  $f: X \longrightarrow Y$  und  $f|_A: A \longrightarrow B$  Homotopieäquivalenzen sind. Dann ist

$$f_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

ein Isomorphismus.

(Man beachte, dass man nicht verlangen muss, dass  $f$  eine Homotopieäquivalenz in **Top**<sup>2</sup> ist, sondern nur dass  $f$  für die Oberräume und für die Unterräume jeweils Homotopieinversen hat, die nichts miteinander zu tun haben müssen. Ebenfalls können die Homotopien für die Ober- und Unterräume unabhängig voneinander existieren und müssen keine besondere Beziehung zueinander einhalten.)

*Beweis.* Zu a): Sei  $g: Y \longrightarrow X$  ein Homotopieinverses zu  $f$ . Aus  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  folgt mit Satz 3.29 a), dass  $g_\#$  und  $f_\#$  Kettenhomotopieinverse zueinander sind und somit Kettenhomotopieäquivalenzen sind, und weiter, dass  $f_*$  und  $g_*$  Umkehrabbildungen zueinander sind und somit Isomorphismen der Homologiegruppen.

Zu b): In dem von  $f$  induzierten Diagrammmorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) \\ f_* \downarrow \cong & & f_* \downarrow \cong & & \downarrow f_* & & \cong \downarrow f_* & & \cong \downarrow f_* \\ H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(Y) \end{array}$$

des gezeigten Abschnitts der langen exakten Homologiefolgen von  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  sind in jeder Dimension, nach Teil a) und nach den Voraussetzungen, die vier äußeren Homomorphismen  $f_*$  Isomorphismen. Aus dem 5-er Lemma folgt, dass auch der mittlere Homomorphismus

$$f_*: H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$$

für jedes  $n$  ein Isomorphismus ist. ■

An dieser Stelle können wir schon ein erstes einfaches Ergebnis über die Homologiegruppen zusammenziehbarer Räume erhalten, sobald wir die einfachste Grundeigenschaft in der Eilenberg-Steenrod Liste behandelt haben, nämlich die Bestimmung der Homologie eines Einpunktraumes. Wir müssen das ohnehin jetzt tun, weil wir ohne dieses Ergebnis die letzte schwierige Grundeigenschaft des Homologiefunktors nicht herleiten können.

**Satz 3.31** *Sei  $X = \{p\}$  ein topologischer Raum, der nur aus einem Punkt besteht. Dann ist*

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0; \\ \{0\}, & \text{wenn } n \neq 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

*Beweis.* Da  $X$  nur aus einem Punkt besteht, ist jede stetige Abbildung nach  $X$  konstant und insbesondere gibt es in jeder Dimension  $n \geq 0$  genau einen singulären  $n$ -Simplex in  $X$ , nämlich die konstante Abbildung  $\Delta_n \longrightarrow \{p\}$ . Wir nennen diesen eindeutigen  $n$ -Simplex  $s_n$ . Es folgt, dass  $C_n(X) = \mathbf{Z}$  für jedes  $n \geq 0$ .

Weil  $C_{-1}(X) = \{0\}$ , ist  $s_0$  automatisch ein Zykel. Wenn  $n > 1$ , so gibt es auch in Dimension  $n - 1$  nur einen singulären Simplex in  $X$ , d.h., jede Seite

$s_n^{(i)}$  von  $s_n$  ist gleich  $s_{n-1}$ , und wir haben

$$\begin{aligned}\partial_n s_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i s_n^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_{n-1} \\ &= \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \right) s_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist;} \\ s_{n-1}, & \text{wenn } n \text{ gerade ist.} \end{cases}\end{aligned}\quad (3.32)$$

In anderen Worten,  $\partial_n$  ist ein Isomorphismus  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  für  $n$  gerade  $\geq 2$ , und  $\partial_n$  ist 0, wenn  $n$  ungerade oder wenn  $n \leq 0$  ist.

Wann immer in einem Kettenkomplex  $\partial_n$  ein Isomorphismus ist, ist  $Z_n$  und somit auch  $B_n = \{0\}$ , und  $B_{n-1}$  und somit auch  $Z_{n-1}$  ist ganz  $C_{n-1}$ , so dass  $H_n = H_{n-1} = \{0\}$ .

Weil dies im singulären Kettenkomplex  $C_*(X)$  für alle geraden  $n \geq 2$  der Fall ist, ist  $H_n(X) = \{0\}$  für alle  $n \geq 1$ , und natürlich auch für  $n < 0$ , weil dann  $C_n$  schon  $\{0\}$  ist.

Es verbleibt nur der Fall  $n = 0$ . Wir haben  $\partial_1 = \partial_0 = \{0\}$ . Also ist  $Z_0(X) = \mathbf{Z}$  aber  $B_0(X) = \{0\}$ , und deshalb ist  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ . ■

**Definition 3.32** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **azyklisch**, wenn die Homologie von  $X$  wie in (3.31) ist, d. h., wenn  $H_n(X) = \{0\}$  für alle  $n \neq 0$  und wenn  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ .

$X$  ist also azyklisch genau dann, wenn  $X$  die Homologie eines Punktes hat.

**Korollar 3.33** Jeder zusammenziehbare topologische Raum  $X$  ist azyklisch.

*Beweis.* Wenn  $X$  zusammenziehbar ist, hat  $X$  den Homotopietyp eines Einpunktraumes, und aus Lemma 3.30 a) folgt, dass  $X$  dann auch die Homologie (3.31) eines Einpunktraumes hat. ■

**Beispiele 3.34** Die Räume  $\mathbf{R}^n$ ,  $D^n$ , und jede konvexe Teilmenge von  $\mathbf{R}^n$  (insbesondere auch  $\Delta_n$ !) sind alle azyklisch und haben die durch (3.31) gegebene Homologie.

Wir brauchen noch eine wichtige Eigenschaft der singulären Homologie, um die Homologiegruppen interessanter Räume tatsächlich berechnen zu können. Diese Eigenschaft erlaubt es, Räume  $X$  auf gewisse zulässige Weisen in zwei überlappende Teile  $A$  und  $B$  zu zerlegen und aus der (hoffentlich einfacheren) Homologie der Teile und ihres Durchschnitts die Homologie des ganzen Raumes zusammenzubauen.

Dabei tritt ein technisches Problem auf, für dessen Lösung wir zuerst sorgen müssen: wir wollen aus den Kettengruppen von  $A$  und  $B$  die Homologie von  $X$  berechnen, aber leider gibt es singuläre Simplizes in  $X$ , die weder in  $A$  noch in  $B$  enthalten sind, und deshalb erzeugen  $C_*(A)$  und  $C_*(B)$  nicht die volle Kettengruppe von  $X$ , sondern nur eine Untergruppe. Dieses Problem lässt sich letztendlich doch überwinden, weil diese echte Untergruppe  $C_*(A) + C_*(B)$  der singulären Kettengruppe trotzdem die volle *Homologiegruppe* von  $X$  erzeugt und ohne Verzerrung berechnet.

Der Clou, um das zu zeigen, besteht darin, zu große Simplizes in  $X$  in kleinere zu unterteilen, die ganz in  $A$  oder ganz in  $B$  liegen. Hier sind die wichtigen Grundbegriffe für die Zerlegung von großen Simplizes in „kleine“.

**Definition 3.35** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  eine Überdeckung von  $X$ . In anderen Worten, sei

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

Wir nennen einen singulären Simplex  $\sigma \in S_n(X)$  **klein** oder genauer  **$\mathcal{U}$ -klein**, wenn es ein  $\lambda \in \Lambda$  gibt mit  $\text{Bild } \sigma \subseteq U_\lambda$ .

Wir bezeichnen mit  $S_n(\mathcal{U})$  die Menge aller  $\mathcal{U}$ -kleinen  $n$ -Simplizes in  $X$  und mit

$$C_n(\mathcal{U}) := F(S_n(\mathcal{U}))$$

die freie abelsche Gruppe erzeugt von den kleinen  $n$ -Simplizes in  $X$ ; sie ist eine Untergruppe von  $C_n(X)$  und offensichtlich wird sie erzeugt von den Untergruppen  $C_n(U_\lambda)$  für  $\lambda \in \Lambda$ , d. h., wir haben

$$C_n(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_n(U_\lambda) \quad (3.33)$$

für jedes  $n \in \mathbf{N}$ . Die Elemente von  $C_n(\mathcal{U})$  nennen wir  **$\mathcal{U}$ -kleine  $n$ -Ketten** auf  $X$ .

Wir setzen

$$C_*(\mathcal{U}) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n(\mathcal{U}). \quad (3.34)$$

Dies ist eine graduierte Untergruppe von  $C_*(X)$  und wegen (3.33) gilt auch hier

$$C_*(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_*(U_\lambda). \quad (3.35)$$

Die Elemente von  $C_*(\mathcal{U})$  nennen wir  **$\mathcal{U}$ -kleine Ketten** auf  $X$ .

Offensichtlich ist jede Seite eines kleinen Simplexes wieder klein und deshalb ist der Rand einer kleinen Kette wieder klein. Das heißt, der Randoperator  $\partial$  von  $C_*(X)$  bildet  $C_*(\mathcal{U})$  wieder in sich ab und  $C_*(\mathcal{U})$  ist ein *Unterkettenkomplex* von  $C_*(X)$ . (Das ist auch klar aus (3.35), denn jedes  $C_*(U_\lambda)$  ist ein Unterkettenkomplex von  $C_*(X)$  und unter  $\partial$  abgeschlossen.)

Wir bezeichnen mit  $j$  die Inklusion

$$j: C_*(\mathcal{U}) \longrightarrow C_*(X);$$

sie ist eine Kettenabbildung.

Wir schreiben  $H_*(\mathcal{U})$  als bequeme Kurznotation für die graduierte Homologiegruppe  $H(C_*(\mathcal{U}))$  des Kettenkomplexes  $C_*(\mathcal{U})$ .

Unser Ziel wird es sein, zu zeigen, dass der Unterkettenkomplex  $C_*(\mathcal{U})$  die gleiche Homologie hat, wie ganz  $C_*(X)$ , und zu diesem Zweck werden wir beweisen, dass unter geeigneten leicht zu erfüllenden Voraussetzungen für die Überdeckung  $\mathcal{U}$  die Kettenabbildung  $j$  einen Isomorphismus in Homologie induziert.

Um das zeigen zu können, müssen wir große Simplizes  $\sigma$  auf geeignete Weise zerkleinern. Die Methode, die wir dafür wählen, heißt ***baryzentrische Unterteilung***, und wir bereiten ihre Definition vor durch einige Betrachtungen über affine Simplizes.

**Definition 3.36** Sei  $V$  ein affiner Raum und sei  $v \in V$ . Für jeden affinen  $n$ -Simplex  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  in  $V$  bezeichnen wir mit  $v \cdot \sigma$  den affinen  $n+1$ -Simplex

$$v \cdot \sigma := [v, v_0, v_1, \dots, v_n]. \quad (3.36)$$

Diese Definition setzen wir linear fort auf die von den affinen Simplizes erzeugte Untergruppe von  $C_n(V)$ , d. h., für eine affine Kette

$$c = \sum_{\substack{\sigma \in S_n(X) \\ \sigma \text{ affin}}} m_\sigma \sigma$$

setzen wir

$$v \cdot c := \sum_{\substack{\sigma \in S_n(X) \\ \sigma \text{ affin}}} m_\sigma (v \cdot \sigma) \in C_{n+1}(V).$$

Dies ist wieder eine affine Kette. Die Abbildung  $v \cdot$  ist nach Definition ein Gruppenhomomorphismus.

**Bemerkung 3.37** Sei  $V$  ein affiner Raum. Sei  $v \in V$  und  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner  $n$ -Simplex in  $V$ .

Der 0-te Eckpunkt von  $v \cdot \sigma$  ist  $v$ , und für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq n+1$  ist der  $i$ -te Eckpunkt von  $v \cdot \sigma$  gleich dem  $i-1$ -ten Eckpunkt  $v_{i-1}$  von  $\sigma$ . Folglich ist

$$(v \cdot \sigma)^{(0)} = [v_0, \dots, v_n] = \sigma$$

und

$$(v \cdot \sigma)^{(i)} = v \cdot \sigma^{(i-1)} \quad \text{für jedes } i \geq 1.$$

Hieraus folgt sofort

$$\partial(v \cdot \sigma) = \sigma - v \cdot \partial\sigma,$$

wie man sofort nachrechnet.

Diese Beziehung überträgt sich auf jede affine Kette, d. h., wir haben

$$\partial(v \cdot c) = c - v \cdot \partial c \quad (3.37)$$

für jede affine Kette  $c$  auf  $V$ .

**Definition 3.38** Das **Baryzentrum** des  $n$ -dimensionalen Standardsimplexes  $\Delta_n$  ist der Punkt

$$b_n := \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)}_n \in \Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n, \quad (3.38)$$

dessen baryzentrische Koordinaten alle gleich sind und somit gleich  $1/(n+1)$  sind, da ihre Summe 1 sein muss. Die kartesischen Koordinaten in (3.38) sind einfach die letzten  $n$  baryzentrischen Koordinaten. Das Baryzentrum ist, wie der Name sagt, der Schwerpunkt von  $\Delta_n$ .

**Definition 3.39** Durch Induktion über  $n$  definieren wir für jedes  $n \in \mathbf{N}$  und jeden topologischen Raum  $X$  eine natürliche Kettenabbildung

$$B_n: C_n(X) \longrightarrow C_n(X),$$

genannt die **baryzentrische Unterteilung**, wie folgt:

Für  $n = 0$  setzen wir

$$B_0 := \text{id}_{C_0(X)} \quad (3.39)$$

und für  $n < 0$  setzen wir  $B_n = \mathbf{0}$ , da wir ohnehin keine andere Wahl haben. Offensichtlich ist dies natürlich und offensichtlich gilt  $\partial_0 B_0 = B_{-1} \partial_0$ .

Nun sei  $n \geq 0$  und es sei  $B_n$  schon als natürliche Kettenabbildung  $B_n: C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$  definiert, und insbesondere gelte

$$\partial_n B_n = B_{n-1} \partial_n. \quad (3.40)$$



Wir nennen

$$B_{n+1}^* := b_{n+1} \cdot B_n(\partial\Delta_{n+1}) \quad (3.41)$$

die *baryzentrische Unterteilung des Standard  $n+1$ -Simplexes*; sie ist eine affine Kette in  $C_{n+1}(\Delta_{n+1})$ .

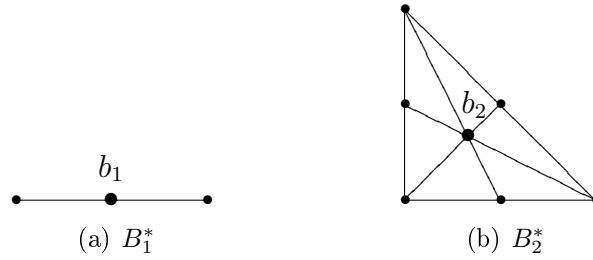


Abbildung 3.3: Die baryzentrische Unterteilung des Standardsimplexes.

Für jeden singulären  $n+1$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$  definieren wir

$$B_{n+1}(\sigma) := \sigma_{\#}(B_{n+1}^*) \quad (3.42)$$

und setzen dies linear fort zu einem Homomorphismus

$$B_{n+1}: C_{n+1}(X) \longrightarrow C_{n+1}(X).$$

Dies ist nach Definition eine natürliche Transformation, denn für jede stetige Abbildung  $f: X \longrightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen gilt für jeden singulären  $n+1$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$ , dass

$$f_{\#}(B_{n+1}(\sigma)) = f_{\#}\sigma_{\#}(B_{n+1}^*) = (f \circ \sigma)_{\#}(B_{n+1}^*) = B_{n+1}(f \circ \sigma) = B_{n+1}(f_{\#}(\sigma)),$$

und diese Beziehung setzt sich auf beliebige Ketten fort, so dass

$$f_{\#} \circ B_{n+1} = B_{n+1} \circ f_{\#}$$

auf ganz  $C_n(X)$ .

$B_{n+1}$  hat bezüglich  $\partial_{n+1}$  die Eigenschaft einer Kettenabbildung, denn für

jeden singulären  $n + 1$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$  gilt:

$$\partial_{n+1}(B_{n+1}(\sigma)) = \partial_{n+1}(\sigma_{\sharp}(B_{n+1}^*)) \quad (3.43a)$$

$$= \sigma_{\sharp}(\partial_{n+1}B_{n+1}^*) \quad (3.43b)$$

$$= \sigma_{\sharp}\left(\partial_{n+1}(b_{n+1} \cdot B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}))\right) \quad (3.43c)$$

$$= \sigma_{\sharp}(B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) - b_{n+1} \cdot \partial_n B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1})) \quad (3.43d)$$

$$= \sigma_{\sharp}(B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) - b_{n+1} \cdot B_{n-1}\partial_n\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) \quad (3.43e)$$

$$= \sigma_{\sharp}B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) \quad (3.43f)$$

$$= B_n(\sigma_{\sharp}(\partial_{n+1}\Delta_{n+1})) \quad (3.43g)$$

$$= B_n(\partial_{n+1}(\sigma)). \quad (3.43h)$$

Dabei folgt (3.43a) durch Einsetzen aus der Definition (3.42) von  $B_{n+1}$ ; wir erhalten (3.43b), weil  $\sigma_{\sharp}$  eine Kettenabbildung ist; in (3.43c) haben wir die rechte Seite von Gleichung (3.41) für  $B_{n+1}^*$  eingesetzt; wir erhalten (3.43d) aus (3.37); für (3.43e) nutzen wir die Induktionsannahme (3.40) aus, dass  $B_n$  mit  $B_{n-1}$  und  $\partial_n$  die Eigenschaft einer Kettenabbildung erfüllt; (3.43f) folgt, weil  $\partial_n\partial_{n+1} = 0$  ist; in (3.43g) nutzen wir die Induktionsvoraussetzung aus, dass  $B_n$  natürlich ist; und wir erhalten (3.43h) aus der Beziehung (2.18) für den Randoperator  $\partial$ .

Die Beziehung (3.43) setzt sich auf beliebige Ketten fort, so dass

$$\partial_{n+1}B_{n+1} = B_n\partial_{n+1}$$

auf ganz  $C_{n+1}(X)$  und  $B_{n+1}$  in Bezug auf  $B_n$  und  $\partial_{n+1}$  die Eigenschaften einer Kettenabbildung hat.

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und wir erhalten durch Induktion eine Familie von Abbildungen  $B_n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ , die mit den  $B_n = \mathbf{0}$  für  $n < 0$  die homogenen Anteile einer natürlichen graduierten Kettenabbildung

$$B: C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$$

sind, die wir die (erste) **baryzentrische Unterteilung** nennen.

Wir werden gleich sehen, dass für eine Kette  $c \in C_*(X)$  die Simplizes in  $Bc$  tatsächlich kleiner sind als die Simplizes in  $c$ , aber nur ein bisschen kleiner, so dass die einmalige baryzentrische Unterteilung für die meisten Anwendungen nicht „fein genug“ ist. Da aber  $B$  eine Selbstabbildung von  $C_*(X)$  ist, kann man es mehrmals anwenden um „beliebig feine“ Unterteilungen zu erhalten.

Wir benutzen deshalb neben  $B$  selber auch die Potenzen

$$B^k = \underbrace{B \circ \cdots \circ B}_k$$

von  $B$  und nennen  $B^k$  die  *$k$ -te baryzentrische Unterteilung* auf  $C_*(X)$ . Auch die  $B^k$  sind natürliche Kettenabbildungen.

Wir werden gleich zeigen, dass für eine vorgegebene offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  genügend oft baryzentrisch unterteilte Simplizes  $\mathcal{U}$ -klein werden, aber damit uns das etwas nützt, darf die baryzentrische Unterteilung die homologischen Eigenschaften der Ketten, also ihre Bedeutung für die Homologiegruppen des Raumes, nicht verändern. Das wollen wir zuerst sicherstellen, in dem wir zeigen, dass die baryzentrische Unterteilung kettenhomotop zur Identität ist.

Aber die Konstruktion der Kettenhomotopie ist nicht so schön geometrisch wie bei der Konstruktion des Prismenoperators weiter oben. Zum Glück brauchen wir uns nicht um die geometrischen Details zu kümmern—sie würden uns ohnehin nur verwirren. Die eigentliche Konstruktion ist „nichtkonstruktiv“ und ein wenig abstrakt, und gibt die Bildketten der Kettenhomotopie gar nicht explizit an.

Wir werden in diesem Geiste handeln und die Einzelheiten der Konstruktion in einem allgemeinen, von dem speziellen Falle der baryzentrischen Unterteilung losgelösten Satz erläutern, der dann für viele andere Fälle auch anwendbar ist. Das hat auch den Vorteil, dass dadurch das Wesentliche herausgekehrt wird und die Konstruktion im Endeffekt leichter verständlich wird.

**Lemma 3.40** *Seien  $f$  und  $g$  zwei natürliche Transformationen  $C_* \rightarrow C_*$  (natürliche Transformationen der Kategorie  $\mathbf{KK}$ , also natürliche Kettenabbildungen), so dass  $f_0 = g_0$ . Dann gibt es eine natürliche Kettenhomotopie  $\Phi$  von  $f$  nach  $g$ , d. h., ein natürlicher Grad +1 Homomorphismus  $C_* \rightarrow C_*$ , so dass*

$$g - f = \partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial.$$

*Beweis.* Damit die Notation nicht ganz unhandlich wird, werden wir für jeden einzelnen topologischen Raum  $X$  die von den natürlichen Transformationen  $f, g$  und  $\Phi$  gegebenen graduierten Homomorphismen  $C_*(X) \rightarrow C_*(X)$  auch mit  $f, g$  und  $\Phi$  bezeichnen (anstatt mit  $f(X), g(X), \Phi(X)$ , wie es richtiger wäre); nur an einer Stelle wird zur Genauigkeit die volle Notation doch verwendet.

Wir beginnen mit der Konstruktion einer solchen natürlichen Kettenhomotopie  $\Phi$ . Für  $n \leq 0$  müssen wir  $\Phi_n = 0$  setzen, da die Kettengruppen in negativen Dimensionen  $\{0\}$  sind. Wir brauchen also nur die  $\Phi_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  zu konstruieren, und das tun wir durch Induktion über  $n$ . Dabei muss  $\Phi_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Bedingung

$$g_n - f_n = \partial_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ \partial_n \tag{3.44}_n$$

erfüllen (und eine natürliche Transformation sein).

Um die Induktion zu beginnen setzen wir  $\Phi_0 := 0$ . Bedingung  $(3.44)_0$  ist erfüllt, weil  $f_0 = g_0$ .

Wir nehmen jetzt an, dass  $n > 0$  und dass wir schon für alle  $k < n$  natürliche Transformationen  $\Phi_k: C_k \longrightarrow C_{k+1}$  definiert haben, die  $(3.44)_k$  für jedes  $k < n$  erfüllen.

Um  $\Phi_n$  zu definieren, konstruieren wir erst einen „Prototypen“, aus dem wir die Werte für alle Ketten erhalten können. Dazu betrachten wir die Kette

$$c := g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \in C_n(\Delta_n), \quad (3.45)$$

wobei mit  $f_n, g_n$  und  $\Phi_{n-1}$  die Abbildungen gemeint sind, die diese natürliche Transformationen dem topologischen Raum  $\Delta_n$  zuordnen.

Weil  $g$  und  $f$  natürliche Kettenabbildungen sind und weil  $(3.44)_{n-1}$  erfüllt ist, haben wir

$$\begin{aligned} \partial_n c &= \partial_n g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n f_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= g_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) - f_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= \Phi_{n-2}(\partial_{n-1} \partial_n \text{id}_{\Delta_n}) = \Phi_{n-2}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Kette  $c$  ist also ein Zykel.

Aber  $\Delta_n$  ist zusammenziehbar und somit azyklisch. Weil  $n > 0$  haben wir  $H_n(\Delta_n) = 0$  und jeder  $n$ -Zykel ist auch ein  $n$ -Rand. Wir können also eine Kette  $d \in C_{n+1}(\Delta_n)$  finden mit  $\partial_{n+1} d = c$ .

Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  und einen beliebigen singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$  setzen wir

$$\Phi_n(\sigma) := \sigma_{\#}(d) \in C_{n+1}(X), \quad (3.46)$$

und wir erweitern  $\Phi_n$  linear zu einem Homomorphismus  $C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ .

Erstens liefert dies automatisch eine natürliche Transformation, denn wenn  $h: X \longrightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so gilt für jeden singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$ , dass

$$h_{\#}(\Phi_n(\sigma)) = h_{\#}\sigma_{\#}(d) = (h \circ \sigma)_{\#}(d) = \Phi_n(h \circ \sigma) = \Phi_n(h_{\#}(\sigma)).$$

Weil diese Beziehung für die Erzeugenden  $\sigma$  von  $C_n(X)$  gilt, gilt sie auch für jede Kette und wir haben

$$h_{\#} \circ \Phi_n(X) = \Phi_n(Y) \circ h_{\#}.$$

Die so definierte natürliche Transformation  $\Phi_n$  erfüllt auch  $(3.44)_n$ , denn für jeden singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in einem topologischen Raum  $X$  haben wir

$$\partial_{n+1}\Phi_n(\sigma) + \Phi_{n-1}\partial_n(\sigma) = \partial_{n+1}\sigma_\#(d) + \Phi_{n-1}\partial_n\sigma_\#(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47a)$$

$$= \sigma_\#\partial_{n+1}(d) + \Phi_{n-1}\sigma_\#\partial_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47b)$$

$$= \sigma_\#(c) + \sigma_\#\Phi_{n-1}\partial_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47c)$$

$$= \sigma_\#(c + \Phi_{n-1}\partial_n(\text{id}_{\Delta_n})) \quad (3.47d)$$

$$= \sigma_\#(g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n(\text{id}_{\Delta_n})) \quad (3.47e)$$

$$= \sigma_\#g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \sigma_\#f_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47f)$$

$$= g_n\sigma_\#(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n\sigma_\#(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47g)$$

$$= g_n(\sigma) - f_n(\sigma).$$

Hier setzen wir aus (3.46) ein, um die rechte Seite von (3.47a) zu erhalten, (3.47b) folgt, weil  $\sigma_\#$  eine Kettenabbildung ist, wir erhalten den ersten Term von (3.47c) weil  $\partial d = c$  und den zweiten Term weil  $\Phi_{n-1}$  natürlich ist, und (3.47d) folgt, weil  $\sigma_\#$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir erhalten (3.47e), indem wir für  $c$  die rechte Seite von seiner definierenden Gleichung (3.45) einsetzen. (3.47f) folgt wieder, weil  $\sigma_\#$  ein Gruppenhomomorphismus ist, und wir können es zu (3.47g) umschreiben, weil  $f$  und  $g$  als natürliche Transformationen vorausgesetzt wurden.

Die Gleichung (3.47) beweist, dass  $(3.44)_n$  für einzelne singuläre Simplizes gilt, aber dann gilt es auch für beliebige Ketten in  $C_n(X)$ .

Den gesamten Beweis von  $(3.44)_n$  kann man wie folgt kurz zusammenfassen: die Eigenschaft, dass  $h_\#$  für jede stetige Abbildung  $h$  eine Kettenabbildung ist, bedeutet anders ausgedrückt, dass der singuläre Randoperator eine natürliche Transformation ist, und dann folgt alles aus der Tatsache, dass  $d$  gerade so gewählt wurde, dass  $(3.44)_n$  für den singulären Simplex  $\text{id}_{\Delta_n}$  gilt. Wegen der Natürlichkeit aller Abbildungen in  $(3.44)_n$  gilt diese Gleichung dann auch für beliebige singuläre Simplizes, und durch Linearität für beliebige Ketten.

Damit haben wir den Induktionsschritt zu Ende geführt, denn wir haben eine natürliche Transformation  $\Phi_n$  definiert, die  $(3.44)_n$  erfüllt. Durch Induktion erhalten wir nun alle homogenen Anteile einer natürlichen Transformation  $\Phi: C_* \longrightarrow C_*$ , die eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $g$  ist. ■

Ähnliche Gedanken und Methoden, wie in diesem Beweis, kommen immer wieder zur Anwendung in der algebraischen Topologie, und es gibt viele Situationen, wo ein direkter oder „geometrischer“ Beweis gar nicht möglich oder kaum zu verstehen wäre.

Das wichtige Merkmal, das diesen Beweis ermöglicht, ist die Tatsache, dass die spezielle Kette  $\text{id}_{\Delta_n}$ , die auf einem azyklischen Raum lebt, als Mo-

dell für *alle* singulären Ketten dient, in dem Sinne, dass jede singuläre Kettengruppe von Bildern oder Kopien dieser speziellen Kette frei erzeugt wird.

**Korollar 3.41** *Für jedes  $k \in \mathbf{N}$  ist die  $k$ -te baryzentrische Unterteilung  $B^k$  natürlich kettenhomotop zur Identität als Kettenabbildungen von  $C_*(X)$  in sich.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus Lemma 3.40, denn  $B^k$  und  $\text{id}_{C_*(X)}$  sind natürliche Kettenabbildungen, die in Dimension 0 gleich sind nach Bestimmung (3.39) in Definition 3.39. ■

Die Tragweite dieses Korollars liegt darin, dass wir die singuläre Homologie eines Raumes genauso gut mit singulären Ketten berechnen können, die beliebig oft baryzentrisch unterteilt wurden. Uns bleibt nur noch zu zeigen, dass wir dadurch die Ketten „klein“ bekommen können bezüglich einer vorgegebenen offenen Überdeckung.

Dazu müssen wir die Größe eines baryzentrisch unterteilten Simplexes messen können, und dass tun wir am einfachsten mit einer Metrik in einem metrischen Raum. Da der Standardsimplex im metrischen Raum  $\mathbf{R}^n$  liegt und als Muster für alle singulären Simplizes fungiert, reicht es, diese Messung für den Standardsimplex oder, ohne Mehraufwand, für beliebige affine Simplizes in einem normierten Vektorraum vorzunehmen.

**Definition 3.42** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $A \subseteq X$ . Wir definieren den **Durchmesser**  $\delta(A)$  von  $A$  als

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

$A$  heißt **beschränkt**, wenn  $\delta(A) < \infty$ .

Wenn  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$  ist, nennen wir den Durchmesser der Bildmenge  $\sigma(\Delta_n)$  vereinfachend den **Durchmesser von  $\sigma$**  und schreiben dafür  $\delta(\sigma)$ .

Weil ihr Bild kompakt ist, sind singuläre Simplizes in metrischen Räumen immer beschränkt.

**Lemma 3.43** *Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{R}$ , sei  $\| \cdot \|$  eine Norm auf  $V$  und sei  $d$  die Metrik dieser Norm. Seien  $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$  und sei  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ . Bezüglich der Metrik  $d$  ist dann*

$$\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i, j \leq n} d(v_i, v_j),$$

*d. h., die maximale Entfernung zwischen zwei Punkten in einem affinen Simplex (genauer: im Bild des affinen Simplexes) wird zwischen zwei Eckpunkten angenommen.*

*Beweis.* Zunächst sei  $x$  ein beliebiger Punkt von  $V$  und sei  $a \in \text{Bild } \sigma$ . Dann gibt es reelle Zahlen  $t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0$  mit  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$  und mit  $\sum_{i=0}^n t_i v_i = a$ .

Wir haben

$$\begin{aligned} d(x, a) = \|x - a\| &= \left\| \sum_{i=0}^n t_i x - \sum_{i=0}^n t_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n t_i (x - v_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i \|x - v_i\| \leq \sum_{i=0}^n t_i \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\| \\ &= 1 \cdot \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\| \\ &= \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\|. \end{aligned}$$

In anderen Worten, die maximale Entfernung von irgendeinem Punkt  $x$  zu einem Punkt in einem affinen Simplex ist die Entfernung von  $x$  zum entferntesten Eckpunkt des Simplexes.

Nun seien  $a$  und  $b$  beliebige Punkte von  $\sigma$ . Dann gibt es nach dieser Feststellung einen Eckpunkt  $v_j$  mit  $d(a, b) \leq d(a, v_j)$  und es gibt anschließend einen Eckpunkt  $v_i$  mit  $d(a, v_j) \leq d(v_i, v_j)$ .

Also gibt es zu je zwei Punkten  $a$  und  $b$  von  $\sigma$  Eckpunkte  $v_i$  und  $v_j$  mit  $d(a, b) \leq d(v_i, v_j)$ , und deshalb wird die maximale Entfernung zwischen zwei Punkten von  $\sigma$  zwischen zwei Eckpunkten angenommen. ■

**Korollar 3.44** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{R}$ , sei  $\| \cdot \|$  eine Norm auf  $V$  und sei  $d$  die Metrik dieser Norm. Sei  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner  $n$ -Simplex in  $V$  und sei  $B\sigma$  seine erste baryzentrische Unterteilung.

Für jeden Simplex  $\tau$  in der Kette  $B\sigma$  gilt

$$\delta(\tau) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma). \quad (3.48)$$

*Beweis.* Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über  $n$ . Sie gilt automatisch für  $n = 0$ , weil jeder Nullsimplex aus einem einzigen Punkt besteht und Durchmesser 0 hat.

Nun sei  $n > 0$  und die Behauptung sei richtig für alle  $k < n$ . Sei

$$s := \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$$

der Schwerpunkt oder das Baryzentrum von  $\sigma$ .

Die Definition von  $B$  in Gleichungen (3.41) und (3.42) besagt (für Dimension  $n$  statt  $n + 1$ ), dass

$$\begin{aligned} B_n(\sigma) &= \sigma_{\#}(B_n^*) = \sigma_{\#}(b_n \cdot B_{n-1}(\partial\Delta_n)) \\ &= \sigma(b_n) \cdot \sigma_{\#}(B_{n-1}(\partial\Delta_n)) && (\sigma \text{ affin}) \\ &= \sigma(b_n) \cdot B_{n-1}(\sigma_{\#}(\partial\Delta_n)) && (B_{n-1} \text{ natürlich}) \\ &= s \cdot B_{n-1}(\partial\sigma). \end{aligned}$$

Die Eckpunkte der Simplizes in dieser Kette sind  $s$  und Eckpunkte der Simplizes in  $B_{n-1}(\partial\sigma)$ .

Die Simplizes in  $\partial\sigma$  sind Seiten von  $\sigma$  und haben somit höchstens den Durchmesser von  $\sigma$ . Nach Induktionsannahme haben zwei Eckpunkte eines Simplexes in  $B_{n-1}(\partial\sigma)$  höchstens die Entfernung

$$\frac{n-1}{n} \delta(\sigma) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma)$$

zueinander.

Der Punkt  $s$  hat zu den Eckpunkten  $v_j$  von  $\sigma$  die Entfernung

$$\begin{aligned} d(s, v_j) &= \|s - v_j\| = \left\| \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i - \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \right) v_j \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (v_i - v_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \|v_i - v_j\| \\ &\leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma), \end{aligned}$$

weil  $\|v_j - v_j\| = 0$  und jedes der  $n$  anderen  $\|v_i - v_j\| \leq \delta(\sigma)$ . Nach Lemma 3.43 hat  $s$  zu jedem beliebigen Punkt von Bild  $\sigma$  und insbesondere zu den Eckpunkten der Simplizes in  $B_{n-1}(\partial\sigma)$  *höchstens* diese Entfernung.

Also haben je zwei Eckpunkte eines Simplexes in  $B_n(\sigma)$  höchstens Entfernung  $\frac{n}{n+1} \delta(\sigma)$  zueinander und die Behauptung folgt sofort aus Lemma 3.43. ■

**Satz 3.45 (Satz über kleine Simplizes)** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ , so dass

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overset{\circ}{U}_\lambda.$$



(Das gilt zum Beispiel, wenn  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist.)

Dann induziert die Inklusion  $j: C_*(\mathcal{U}) \longrightarrow C_*(X)$  einen Isomorphismus in Homologie, d. h.,

$$H(j): H_*(\mathcal{U}) \longrightarrow H_*(X)$$

ist ein Isomorphismus von graduierten abelschen Gruppen.

*Beweis.* Zunächst sei  $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$  (und insbesondere eine stetige Abbildung). Für jedes  $\lambda \in \Lambda$  sei

$$V_\lambda := \sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}_\lambda).$$

Weil  $\sigma$  stetig ist bilden die  $V_\lambda$  eine offene Überdeckung von  $\Delta_n$ , und weil  $\Delta_n$  kompakt ist besitzt diese Überdeckung bezüglich der Maximumsmetrik auf  $\mathbf{R}^n$  eine Lebesgue-Zahl  $\varepsilon$ , so dass jede Scheibe von Radius  $< \varepsilon$  und somit auch jede Teilmenge von Durchmesser  $< \varepsilon$  ganz in einer der Mengen  $V_\lambda$  enthalten ist.

Weil  $n/(n+1) < 1$  gibt es eine Zahl  $k_\sigma \in \mathbf{N}$ , so dass  $(n/(n+1))^{k_\sigma} < \varepsilon$ , und das gilt natürlich immer noch, wenn man  $k_\sigma$  durch eine größere Zahl ersetzt. Der Standardsimplex  $\Delta_n$  hat offenbar Durchmesser 1, und aus Korollar 3.44 folgt deshalb, dass für jedes  $k \geq k_\sigma$  die Simplizes in der affinen Kette  $B^k \text{id}_{\Delta_n}$  alle Durchmesser  $< \varepsilon$  haben und somit jeweils in einer der Überdeckungsmengen  $V_\lambda$  liegen.

Nach Anwendung der stetigen Abbildung  $\sigma$  bedeutet das, dass das Bild jedes singulären Simplexes in der Kette  $B^k \sigma = \sigma_\# B^k \text{id}_{\Delta_n}$  ganz enthalten ist in einer der Mengen

$$\sigma(V_\lambda) \subseteq \overset{\circ}{U}_\lambda \subseteq U_\lambda,$$

d. h., die Kette  $B^k \sigma$  ist  $\mathcal{U}$ -klein wenn  $k \geq k_\sigma$ .

Eine singuläre Kette  $c \in C_*(X)$  ist eine lineare Kombination von endlich vielen singulären Simplizes  $\sigma$ , und wenn wir  $k_c$  als das Maximum der  $k_\sigma$  für die Simplizes  $\sigma$  in  $c$  definieren, so gilt offensichtlich, dass  $B^k c$  eine  $\mathcal{U}$ -kleine Kette ist für jedes  $k \geq k_c$ .

In anderen Worten, **wenn man eine singuläre Kette in  $X$  genügend oft baryzentrisch unterteilt, wird sie  $\mathcal{U}$ -klein.**

Wir zeigen nun, dass  $H(j)$  ein Isomorphismus ist.

Zur Klarheit bezeichnen wir den Randoperator von  $C_*(\mathcal{U})$  mit  $\partial_{\mathcal{U}}$  und den Randoperator von  $C_*(X)$  mit  $\partial_X$ .

Zunächst zur Surjektivität: sei  $\gamma \in H_*(X)$  und sei  $w \in C_*(X)$  ein Zykel mit  $[w] = \gamma$ . Dann gibt es ein  $k \in \mathbf{N}$ , so dass  $B^k w \in j(C_*(\mathcal{U}))$  und es gibt  $z \in C_*(\mathcal{U})$  mit  $B^k w = jz$ . Da  $j$  und  $B^k$  Kettenabbildungen sind, haben wir

$$j\partial_{\mathcal{U}}z = \partial_X jz = \partial_X B^k w = B^k \partial_X w = B^k(0) = 0$$

und weil  $j$  injektiv ist, ist  $\partial_{\mathcal{U}}z = 0$ , d. h.,  $z$  ist ein Zykel.

(Zum besseren Verständnis hier eine informellere Version dieses Arguments:  $k$  ist so gewählt, dass  $B^k w$  eine  $\mathcal{U}$ -kleine Kette ist, und weil  $B^k$  eine Kettenabbildung ist, ist  $B^k w$  wie  $w$  ein Zykel auf  $X$ . Weil aber  $\partial_{\mathcal{U}}$  nur die Einschränkung von  $\partial_X$  auf  $\mathcal{U}$ -kleine Ketten ist und in seinen Werten mit  $\partial_X$  übereinstimmt, ist  $B^k w$  auch ein Zykel als  $\mathcal{U}$ -kleine Kette; in dieser Rolle nennen wir es  $z$  und es repräsentiert eine Homologieklassse  $[z] \in H_*(\mathcal{U})$ .)

Weil  $B^k \simeq \text{id}_{C_*(X)}$ , gibt es eine Kettenhomotopie  $\Phi$ , so dass

$$\begin{aligned} w &= B^k w + \partial_X \Phi w + \Phi \partial_X w \\ &= B^k w + \partial_X \Phi w + 0 && \text{(da } w \text{ ein Zykel ist)} \\ &= B^k w + \partial_X \Phi w, \end{aligned}$$

und somit ist

$$\gamma = [w] = [B^k w + \partial_X \Phi w] = [B^k w] = [jz] \in \text{Bild } H(j).$$

Zur Injektivität von  $H(j)$ : Sei  $\omega \in \text{Ker } H(j) \subseteq H_*(\mathcal{U})$  und sei  $z$  ein Zykel in  $C_*(\mathcal{U})$  mit  $\omega = [z]$ .

Weil

$$H(j)([z]) = [jz] = 0 \in H_*(X)$$

ist  $jz$  ein Rand in  $C_*(X)$ . Sei  $c$  eine Kette in  $C_*(X)$  mit  $jz = \partial_X c$ .

Nach dem einleitenden Teil des Beweises gibt es eine Zahl  $k$  und eine Kette  $d \in C_*(\mathcal{U})$ , so dass  $B^k c = jd$ , und weil  $B^k$  und  $j$  Kettenabbildungen sind, ist

$$B^k jz = B^k \partial_X c = \partial_X B^k c = \partial_X jd = j \partial_{\mathcal{U}} d \in C_*(X). \quad (3.49)$$

Nun ist  $B^k$  eine natürliche Kettenabbildung und kettenhomotop zur Identität vermöge einer natürlichen Kettenhomotopie  $\Phi$ , die auf dem singulären Kettenkomplex jedes topologischen Raumes definiert ist.

Diese Kettenhomotopie ist insbesondere auf den Kettenkomplexen  $C_*(U_\lambda)$  und auf  $C_*(X)$  definiert, aber leider *nicht* direkt auf dem Kettenkomplex  $C_*(\mathcal{U})$ , weil dieser Kettenkomplex nicht der Wert des Funktors  $C_*$  auf einem Objekt von **Top** ist! Aus diesem Grund müssen wir einen etwas umständlichen Weg gehen und Ketten in  $C_*(\mathcal{U})$  in ihre Bestandteile auf den einzelnen Unterräumen  $U_\lambda$  zerlegen, bevor wir die Kettenhomotopie anwenden können.

Es gilt

$$C_*(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_*(U_\lambda), \quad (3.50)$$

und für  $z$  existiert eine (nicht eindeutige) Zerlegung

$$z = \sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

mit  $z_\lambda \in C_*(U_\lambda)$  und mit nur endlich vielen  $z_\lambda \neq 0$ .

Auf den einzelnen Summanden  $C_*(U_\lambda)$  in (3.50) ist  $j = (i_\lambda)_\#$ , wo  $i_\lambda$  die Inklusion  $U_\lambda \longrightarrow X$  ist.

Wir schreiben  $\Phi_\lambda$  für die Kettenhomotopie  $\Phi(U_\lambda)$ , die die natürliche Transformation  $\Phi$  dem Raum  $U_\lambda$  zuordnet, und  $\Phi_X$  für die Kettenhomotopie  $\Phi(X)$ , die die natürliche Transformation  $\Phi$  dem Raum  $X$  zuordnet. Die natürliche Transformation  $B^k$  notieren wir auf  $U_\lambda$  entsprechend mit  $B_\lambda^k$ , aber auf  $X$  einfach wie bisher mit  $B^k$ . Den Randoperator von  $C_*(U_\lambda)$  notieren wir zur Klarheit mit  $\partial_\lambda$ , bemerken aber, dass er die Einschränkung des Randoperators  $\partial_\mathcal{U}$  von  $C_*(\mathcal{U})$  ist und dass wir deshalb überall wo  $\partial_\lambda$  steht genauso gut auch  $\partial_\mathcal{U}$  schreiben können; den Randoperator von  $C_*(X)$  notieren wir, wie schon gesagt, mit  $\partial_X$ .

Wir haben

$$jz = j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) = j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda^k z_\lambda + \partial_\lambda \Phi_\lambda z_\lambda + \Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda)\right) \quad (3.51a)$$

$$\begin{aligned} &= j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^k z_\lambda\right) + j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \partial_\mathcal{U} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda\right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} j(B_\lambda^k z_\lambda) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} j(\Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (i_\lambda)_\#(B_\lambda^k z_\lambda) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} (i_\lambda)_\#(\Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} B^k((i_\lambda)_\# z_\lambda) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_X((i_\lambda)_\# \partial_\lambda z_\lambda) \end{aligned} \quad (3.51b)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\lambda \in \Lambda} B^k jz_\lambda + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_X j\partial_\mathcal{U} z_\lambda \\ &= B^k j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \Phi_X j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) \\ &= B^k jz + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \Phi_X j\partial_\mathcal{U} z \\ &= B^k jz + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) \end{aligned} \quad (3.51c)$$

$$= j\partial_\mathcal{U} d + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right). \quad (3.51d)$$

Hier erhalten wir die Summanden auf der rechten Seite von (3.51a) aus der Tatsache, dass  $\Phi_\lambda$  eine Kettenhomotopie von  $B_\lambda^k$  zu  $\text{id}_{C_*(U_\lambda)}$  ist. In (3.51b) wird ausgenutzt, dass  $B^k$  und  $\Phi$  natürlich sind. Wir erhalten (3.51c) weil  $z$  ein Zykel von  $C_*(\mathcal{U})$  ist. Schließlich folgt (3.51d) aus (3.49).

Weil  $j$  aber injektiv ist, gilt

$$z = \partial_{\mathcal{U}} d + \partial_{\mathcal{U}} \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_{\lambda} z_{\lambda} \right)$$

und somit ist  $z$  ein Rand in  $C_*(\mathcal{U})$ , also  $\omega = [z] = 0$  und  $H(j)$  ist injektiv. Damit sind wir fertig.  $\blacksquare$

Wir wollen den Satz über kleine Simplizes gleich verwenden, um eine weitere sehr nützliche exakte Homologiefolge zu gewinnen. Wir erhalten diese Folge wieder als das exakte Homologiedreieck oder die lange exakte Homologiefolge einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen, aber ohne den Satz über kleine Simplizes wäre diese Homologiefolge nicht sehr hilfreich, wie Sie gleich sehen werden.

**Lemma und Definition 3.46** Sei  $(X; A, B)$  eine topologische Raumtriade (d. h.,  $X$  ist ein topologischer Raum und  $A$  und  $B$  sind Unterräume von  $X$  mit  $X = A \cup B$ ).

Sei  $i'$  die Inklusion  $A \cap B \longrightarrow A$  und sei  $i''$  die Inklusion  $A \cap B \longrightarrow B$ .

Die direkte Summe  $C_*(A) \oplus C_*(B)$  ist ein Kettenkomplex mit Randoperator  $\partial_A \oplus \partial_B$ , und die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota: C_*(A \cap B) &\longrightarrow C_*(A) \oplus C_*(B) \\ c &\longmapsto (i'_{\#} c, i''_{\#} c) \end{aligned} \quad (3.52)$$

ist offensichtlich eine Kettenabbildung.

Sei  $j'$  die Inklusion  $A \longrightarrow X$  und sei  $j''$  die Inklusion  $B \longrightarrow X$ .

Die Bilder der Kettenabbildungen  $j'_{\#}$  und  $j''_{\#}$  sind enthalten in

$$C_*(\{A, B\}) := j'_{\#}(C_*(A)) + j''_{\#}(C_*(B)) \subseteq C_*(X)$$

und wir haben eine offensichtliche Kettenabbildung

$$\begin{aligned} \kappa: C_*(A) \oplus C_*(B) &\longrightarrow C_*(\{A, B\}) \\ (c_1, c_2) &\longmapsto j'_{\#} c_1 - j''_{\#} c_2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Man erhält aus diesen Kettenkomplexen und Kettenabbildungen eine offensichtlich natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\iota} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\kappa} C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \quad (3.54)$$

und wir nennen diese Folge die **Kettenkomplexfolge der Triade**  $(X; A, B)$ .

*Beweis.* Die Kettenabbildung  $\iota$  ist injektiv, weil schon die Komponenten  $i'_{\sharp}$  und  $i''_{\sharp}$  injektiv sind, da sie jeweils von einer Inklusion induziert werden.

Für eine Kette  $(c_1, c_2) \in C_*(A) \oplus C_*(B)$  ist

$$\kappa(c_1, c_2) = j'_{\sharp}c_1 - j''_{\sharp}c_2 = 0$$

genau dann, wenn  $j'_{\sharp}c_1 = j''_{\sharp}c_2$ , oder in anderen Worten, wenn  $c_1$  und  $c_2$  in  $C_*(\{A, B\}) \subseteq C_*(X)$  die gleiche eindeutige Linearkombination von singulären Simplizes in  $X$  sind.

Da aber alle Simplizes in  $c_1$  ihr Bild in  $A$  haben und alle Simplizes in  $c_2$  ihr Bild in  $B$  haben, folgt aus der Gleichheit, dass alle Simplizes in  $c_1$  oder in  $c_2$  ihr Bild sowohl in  $A$  wie auch in  $B$ , sprich in  $A \cap B$  haben müssen. Somit ist  $j'_{\sharp}c_1 = j''_{\sharp}c_2$  genau dann, wenn  $c_1$  und  $c_2$  die gleiche Kette in  $X$  sind und diese Kette eine Kette auf  $A \cap B$  ist, also genau dann, wenn es eine Kette  $c \in C_*(A \cap B)$  gibt mit  $c_1 = i'_{\sharp}c$  und  $c_2 = i''_{\sharp}c$ .

Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $(c_1, c_2) = \iota c$ . Wir haben somit gezeigt, dass  $\text{Ker } \kappa = \text{Bild } \iota$ , und die Folge (3.54) ist an der mittleren Stelle exakt.

Und schließlich ist  $\kappa$  surjektiv weil

$$\begin{aligned} \kappa(C_*(A) \oplus C_*(B)) &= \kappa\left((C_*(A) \oplus \{0\}) + (\{0\} \oplus C_*(B))\right) \\ &= \kappa(C_*(A) \oplus \{0\}) + \kappa(\{0\} \oplus C_*(B)) \\ &= j'_{\sharp}(C_*(A)) + j''_{\sharp}(C_*(B)) \\ &= C_*(\{A, B\}). \end{aligned}$$

(In der vorletzten Zeile beachte man, dass obwohl  $\kappa = -j''_{\sharp}$  auf  $\{0\} \oplus C_*(B)$ , wir hier  $+$  schreiben können, weil  $+j''_{\sharp}$  und  $-j''_{\sharp}$  die gleiche Bildgruppe haben.)

Also ist die Folge (3.54) an allen Stellen exakt.  $\blacksquare$

In diesem Beweis sind wir, um absolute Klarheit zu erreichen, sehr genau mit den Bezeichnungen für die von den Rauminklusionen induzierten Kettenabbildungen umgegangen, aber man kann das auch etwas lockerer handhaben:

**Bemerkung 3.47** Die Kettenabbildungen  $i'_{\sharp}$ ,  $i''_{\sharp}$ ,  $j'_{\sharp}$  und  $j''_{\sharp}$ , die in Definition 3.46 eingeführt wurden, sind alle injektiv, weil sie von Inklusionen von topologischen Räumen induziert werden und diese naturgemäß injektiv sind.

Deshalb können wir vermöge dieser Abbildungen, wie wir es schon oft getan haben,  $C_*(A \cap B)$  als eine Untergruppe von  $C_*(A)$  und von  $C_*(B)$  auffassen (mit  $i'_{\sharp}$  und  $i''_{\sharp}$  als die Inklusionen), und wir können  $C_*(A)$  und

$C_*(B)$  und ihre gemeinsame Untergruppe  $C_*(A \cap B)$  als Untergruppen von  $C_*(\{A, B\})$  oder von  $C_*(X)$  auffassen.

Betrachten wir diese Kettengruppen als Untergruppen von  $C_*(\{A, B\})$  oder von  $C_*(X)$ , so gilt

$$C_*(A \cap B) = C_*(A) \cap C_*(B), \quad (3.55)$$

da, wie im Beweis von Lemma 3.46 schon erklärt, eine Kette  $c \in C_*(X)$  genau dann zu  $C_*(A)$  und zu  $C_*(B)$  gehört, wenn jeder singuläre Simplex mit nichtverschwindendem Koeffizienten in  $c$  in  $A$  enthalten ist und auch in  $B$ , und somit in  $A \cap B$  liegt. Das ist genau die Bedingung dafür, dass  $c \in C_*(A \cap B)$ .

Diese Bedingung wurde ja im Beweis von Lemma 3.46 schon ausgenutzt, um die Exaktheit der Folge (3.54) bei  $C_*(A) \oplus C_*(B)$  zu zeigen:  $j'_\# c_1 - j''_\# c_2 = 0$  genau dann, wenn  $c_1 = c_2$  in  $C_*(X)$ , woraus aber auch automatisch folgt, dass  $c_1 = c_2 \in C_*(A) \cap C_*(B) = C_*(A \cap B)$  und somit  $(c_1, c_2) \in \text{Bild } \iota$ .

Die lange exakte Homologiefolge oder das exakte Homologiedreieck der kurzen exakten Folge (3.54) kann ein sehr leistungsfähiges Berechnungsinstrument bieten, sofern wir die Homologie der in dieser kurzen Folge vorkommenden Kettenkomplexen mit topologischen Räumen in Verbindung bringen können. Für den mittleren Komplex ist das kein Problem:

**Bemerkung 3.48** Sind  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei beliebige Kettenkomplexe, so bildet ihre direkte Summe  $C \oplus D$  mit dem Randoperator  $\partial \oplus \partial'$  wieder einen Kettenkomplex  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ , und man sieht sehr leicht ein, ähnlich aber einfacher als im Beweis von Lemma 2.30 c) und d), dass

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) &= Z(\mathcal{C}) \oplus Z(\mathcal{D}) \\ B(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) &= B(\mathcal{C}) \oplus B(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

und deshalb auch

$$H(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) \cong H(\mathcal{C}) \oplus H(\mathcal{D}). \quad (3.56)$$

Entsprechend, und wieder ähnlich beweisbar wie Lemma 2.30 e), wenn  $\bar{\mathcal{C}} = (\bar{C}, \bar{\partial})$  und  $\bar{\mathcal{D}} = (\bar{D}, \bar{\partial}')$  zwei weitere Kettenkomplexe sind und wenn  $f: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  und  $g: \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathcal{D}}$  Kettenabbildungen sind, so ist  $f \oplus g$  eine Kettenabbildung  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} \oplus \bar{\mathcal{D}}$  und vermöge des Isomorphismus (3.56) gilt

$$H(f \oplus g) = H(f) \oplus H(g): H(\mathcal{C}) \oplus H(\mathcal{D}) \rightarrow H(\bar{\mathcal{C}}) \oplus H(\bar{\mathcal{D}}).$$

Diese Bemerkung erlaubt uns, die Homologie des mittleren Kettenkomplexes in der kurzen exakten Folge (3.54) zu berechnen. Nur der rechte Kettenkomplex ist manchmal problematisch, aber wir kennen schon viele Fälle, in denen das nicht der Fall ist, und bevor wir darauf zurückkommen, lösen wir den gordischen Knoten einfach durch eine Verfügung.

**Definition 3.49** Eine Triade  $(X; A, B)$  von topologischen Räumen wird eine **Mayer-Vietoris Triade** genannt, wenn die Inklusion

$$j: C_*(\{A, B\}) \longrightarrow C_*(X)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert, d. h., wenn

$$H(j): H_*(\{A, B\}) \longrightarrow H_*(X)$$

ein Isomorphismus ist.

**Beispiel 3.50** Jede Triade  $(X; A, B)$  von topologischen Räumen für die gilt

$$X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \quad (3.57)$$

ist eine Mayer-Vietoris Triade.

Das ist die Aussage des Satzes über kleine Simplizes 3.45 für die Überdeckung  $\mathcal{U} = \{A, B\}$  von  $X$ .

**Satz 3.51 (Mayer-Vietoris)** Sei  $(X; A, B)$  eine Mayer-Vietoris Triade von topologischen Räumen. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck von graduierten Gruppen

$$\begin{array}{ccc} H_*(A \cap B) & \xrightarrow{(i'_*, i''_*)} & H_*(A) \oplus H_*(B) \\ & \swarrow \text{Grad } -1 & \searrow j'_* \circ \pi_1 - j''_* \circ \pi_2 \\ & H_*(X) & \end{array} \quad (3.58)$$

wo  $i': A \cap B \longrightarrow A$ ,  $i'': A \cap B \longrightarrow B$ ,  $j': A \longrightarrow X$ , und  $j'': B \longrightarrow X$  die Inklusionen sind, wo die  $\pi_i$  die Projektionen von  $H_*(A) \oplus H_*(B)$  auf den  $i$ -ten Summanden sind, und wo der verbindende Homomorphismus  $\delta$  von Grad  $-1$  wie folgt erklärt wird.

Sei  $\gamma \in H_*(X)$ . Dann gibt es Ketten  $c \in C_*(A)$  und  $d \in C_*(B)$  so dass  $c + d$  ein Zykel in  $C_*(X)$  ist und  $\gamma = [c + d]$ . Weil  $c + d$  ein Zykel ist, ist  $\partial c = -\partial d$  und muss eine Kette auf  $A \cap B$  sein, da  $\partial c$  eine Kette auf  $A$  ist und  $\partial d$  eine Kette auf  $B$  ist.

$\partial c$  ist sogar ein Zykel in  $C_*(A \cap B)$  (da  $\partial\partial c = 0$ , egal in welchem Raum wir den Randoperator beim zweiten Mal anwenden). Es gilt

$$\delta(\gamma) = [\partial c] \in H_*(A \cap B). \quad (3.59)$$

Das exakte Dreieck (3.58) heißt das **Mayer-Vietoris Homologiedreieck** der Triade  $(X; A, B)$ .

*Beweis.* Die natürliche kurze exakte Kettenkomplexfolge (3.54) der Triade  $(X; A, B)$  hat nach Satz 3.14 ein ebenfalls natürliches exaktes Homologiedreieck, das wir wie im folgenden Diagramm (3.60) durch den Isomorphismus  $H(j)$  ergänzen, um das Mayer-Vietoris Homologiedreieck (3.58), bestehend aus dem waagerechten Pfeil  $H(\iota)$  und den beiden gestrichelten Pfeilen, zu erhalten:

$$\begin{array}{ccc} H_*(A \cap B) & \xrightarrow{H(\iota)} & H_*(A) \oplus H_*(B) \\ & \searrow \beta & \swarrow H(\kappa) \\ & H_*(\{A, B\}) & \\ \delta \swarrow & \downarrow H(j) & \searrow H(j \circ \kappa) \\ & H_*(X) & \end{array} \quad (3.60)$$

Auch  $j$  und somit  $H(j)$  sind offenbar natürliche Transformationen, so dass das ganze Diagramm (3.60) einschließlich des Mayer-Vietoris Dreiecks natürlich ist.

Das Mayer-Vietoris Dreieck ist in diesem Diagramm das äußere Dreieck. Die Abbildung  $\delta$  ist  $\beta \circ (H(j))^{-1}$  und die andere gestrichelte Seite ist die Abbildung  $H(j) \circ H(\kappa) = H(j \circ \kappa)$ .

Weil der Pfeil  $H(j)$  ein Isomorphismus ist, ist  $\text{Bild } \delta = \text{Bild } \beta$  und es ist  $\text{Ker } \delta = H(j)(\text{Ker } \beta)$ . Entsprechend ist  $\text{Ker } H(j \circ \kappa) = \text{Ker } H(\kappa)$  und  $\text{Bild } H(j \circ \kappa) = H(j)(\text{Bild } H(\kappa))$ . Weil das innere Dreieck in (3.60) exakt ist, ist somit auch das äußere, also das Mayer-Vietoris Dreieck, exakt.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Abbildungen im Mayer-Vietoris Dreieck die in der Satzaussage genannte Gestalt haben.

Wegen der in Gleichung (3.52) angegebenen Definition von  $\iota$  ist offensichtlich  $H(\iota) = (i'_*, i''_*)$  wie behauptet.

Für Ketten  $c_1 \in C_*(A)$  und  $c_2 \in C_*(B)$  ist  $\kappa(c_1, c_2) = j'_\# c_1 - j''_\# c_2$  nach (3.53), und  $(j \circ \kappa)(c_1, c_2)$  ist die gleiche Kette, nur betrachtet als Kette in  $C_*(X)$  und nicht in  $C_*(\{A, B\})$ . Es folgt, dass für je zwei Homologieklassen



$\alpha_1 \in H_*(A)$  und  $\alpha_2 \in H_*(B)$  gilt

$$H(j \circ \kappa)(\alpha_1, \alpha_2) = j'_* \alpha_1 - j''_* \alpha_2 = (j'_* \pi_1 - j''_* \pi_2)(\alpha_1, \alpha_2).$$

Und schließlich, sei  $\gamma \in H_*(X)$ . Wir haben  $\delta(\gamma) = \beta((H(j))^{-1}(\gamma))$ . Sei  $z$  ein Zykel in  $C_*(\{A, B\})$  mit  $[z] = (H(j))^{-1}(\gamma)$  oder, was das Gleiche bedeutet, mit  $\gamma = H(j)([z]) = [jz]$ .

Die Kette  $z \in C_*(\{A, B\})$  lässt sich zerlegen als eine Summe von einer Kette  $c \in C_*(A)$  und einer Kette  $d \in C_*(B)$  (wenn man diese Kettengruppen gemäß Bemerkung 3.47 als Untergruppen von  $C_*(\{A, B\})$  auffasst).

Also  $z = c + d$ , und  $jz$  ist die gleiche Kette, aber betrachtet als Kette in  $C_*(X)$ . Wir haben also  $\gamma = [c + d]$ , wie es in der Satzaussage steht.

Nach Definition ist  $\delta(\gamma) = \beta([z])$ .

Um diesen Wert des verbindenden Homomorphismus  $\beta$  zu konstruieren, müssen wir zuerst ein Urbild von der Kette  $z \in C_*(\{A, B\})$  unter  $\kappa$  finden. Die Kette  $(c, -d) \in C_*(A) \oplus C_*(B)$  ist offensichtlich ein solches Urbild.

Wir haben dann den Rand von diesem Urbild zu bilden, also  $\partial(c, -d) = (\partial c, -\partial d)$ . Dieser liegt automatisch im Bild von  $\iota$  und aus der Definition von  $\iota$  ist klar, dass  $\partial c$  die einzige Kette  $w$  in  $C_*(A \cap B)$  sein kann, für die gilt  $\iota(w) = (\partial c, -\partial d)$ . Folglich ist  $\beta([z]) = [\partial c]$ , wie in (3.59) behauptet wurde.

Man beachte, dass wir uns hier im Beweis gar nicht darum kümmern müssen, warum  $\partial c$  tatsächlich ein Zykel in  $C_*(A \cap B)$  ist, denn das ist ein Teil der Aussage von Satz 3.14 und muss hier nicht noch einmal bewiesen werden. Der Grund wird aber in der Aussage des jetzigen Satzes ohnehin kurz erläutert.

Worum wir uns aber doch kurz kümmern müssen ist die Frage, ob das Funktionieren dieser Vorschrift irgendwie von der Wahl des Zyklus  $z$  und der Zerlegung  $z = c + d$  abhängen kann. Das tut es nicht, denn die Homologieklassse von  $z$  in  $H_*(\{A, B\})$  ist durch  $\gamma$  eindeutig bestimmt, weil  $H(j)$  ein Isomorphismus ist, und alles andere hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, weil der verbindende Homomorphismus  $\beta$  wohldefiniert ist. Insbesondere hängt  $\beta([z])$  nicht von der Wahl des Zyklus  $z$  in dieser Homologieklassse ab, und auch nicht von der Wahl des Urbilds  $(c, -d)$  von  $z$  unter  $\kappa$ . Diese Wahlen entsprechen aber der Wahl von  $z$  und seiner Zerlegung  $z = c + d$ ; diese beeinflussen also nicht den Wert  $\delta(\gamma)$  und  $\delta$  ist durch die angegebene Konstruktion wohldefiniert. ■

Der Satz von Mayer-Vietoris wird sich als das wichtigste Hilfsmittel erweisen, wenn wir bald mit der Berechnung von Homologiegruppen beginnen. Zuerst wollen wir aber noch einen anderen wichtigen Satz präsentieren, der aber keine neuen Beweismittel erfordert, weil er äquivalent zum Satz von Mayer-Vietoris ist.

Dieser neue Satz besagt im Wesentlichen, dass eine relative Homologiegruppe  $H_*(X, A)$  nicht davon abhängt, was tief im Innern des Unterraumes  $A$  passiert; das wird sozusagen „geschluckt“ durch die Relativierung modulo  $A$ . Die Aussage ist, dass sich  $H_*(X, A)$  nicht verändert, wenn man einen „genügend kleinen“ Unterraum  $B$  von  $A$  aus  $X$  und  $A$  entfernt oder „ausschneidet“. Deshalb heißt dieser Satz der **Ausschneidungssatz**.

**Definition 3.52** Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel, also ein Objekt von  $\mathbf{Top}^3$  ( $X$  ist ein topologischer Raum und  $B \subseteq A \subseteq X$ ).

Wir nennen  $(X, A, B)$  ein **Ausschneidungstripel**, wenn die natürliche Inklusion

$$i: (X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert, d. h., wenn

$$i_*: H_*(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow H_*(X, A)$$

ein Isomorphismus von graduierten abelschen Gruppen ist.

**Bemerkung 3.53** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $A$  und  $B$  zwei Unterräume von  $X$ .

Die Komplementierung von  $B$  verwandelt topologische Raumtripel in entsprechende Raumtriaden und umgekehrt.

In anderen Worten, wenn  $(X, A, B)$  ein Raumtripel ist (das heißt, wenn  $B \subseteq A$ ), dann ist  $(X; A, X \setminus B)$  eine Raumtriade (d. h.,  $X = A \cup (X \setminus B)$ ).

Umgekehrt, wenn  $(X; A, B)$  eine Raumtriade ist (also wenn  $X = A \cup B$ ), dann ist  $(X, A, X \setminus B)$  ein Raumtripel (d. h.,  $X \setminus B \subseteq A$ ).

Die Komplementierung von  $B$  liefert somit eine Bijektion zwischen der Menge aller Raumtripel mit  $X$  als Oberraum und der Menge aller Raumtriaden mit  $X$  als Oberraum, eine Bijektion, die ihre eigene Umkehroperation ist.

**Lemma 3.54** Ein topologisches Raumtripel  $(X, A, B)$  ist genau dann ein Ausschneidungstripel, wenn die entsprechende Raumtriade  $(X; A, X \setminus B)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist.

*Beweis.* Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir  $D$  für  $X \setminus B$ .

Wir bemerken zuerst, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\varphi: \frac{C_*(\{A, D\})}{C_*(A)} \xrightarrow{\cong} C_*(X \setminus B, A \setminus B)$$

gibt, denn nach dem zweiten Isomorphiesatz für additive abelsche Gruppen ist

$$\frac{C_*(\{A, D\})}{C_*(A)} = \frac{C_*(A) + C_*(D)}{C_*(A)} \cong \frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)},$$

wobei der Isomorphismus für  $a \in C_*(A)$  und  $d \in C_*(D)$  die Restklasse

$$a + d + C_*(A) = d + C_*(A) \in \frac{C_*(A) + C_*(D)}{C_*(A)}$$

auf die wohldefinierte Restklasse

$$d + (C_*(A) \cap C_*(D)) \in \frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)}$$

abbildet. Weil  $D = X \setminus B$ , ist aber

$$\frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)} \stackrel{(3.55)}{=} \frac{C_*(D)}{C_*(A \cap D)} = C_*(D, A \cap D) = C_*(X \setminus B, A \setminus B).$$

Aus dieser Beschreibung ist klar, dass  $\varphi$  eine Kettenabbildung ist.

Nun betrachte man folgendes Diagramm von Kettenkomplexen, in denen die Zeilen kurze exakte Folgen sind:

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{j'_\#} & C_*(\{A, D\}) & \xrightarrow{\pi} & \frac{C_*(\{A, D\})}{C_*(A)} \longrightarrow \{0\} \\ & & \downarrow \text{id} = & & \downarrow j & & \downarrow \cong \varphi \\ & & & & & & C_*(X \setminus B, A \setminus B) \\ & & & & & & \downarrow i_\# \\ \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{j'_\#} & C_*(X) & \xrightarrow{\pi'} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \end{array} \quad (3.61)$$

Das linke Quadrat kommutiert offensichtlich (alle Pfeile sind Inklusionen von Untergruppen).

Auch das rechte Quadrat kommutiert. Sei  $a + d \in C_*(\{A, D\})$ , wobei  $a \in C_*(A)$  und  $d \in C_*(D)$ . Die waagerechten Abbildungen  $\pi$  und  $\pi'$  sind kanonischen Projektionen auf Quotienten, und nach der Beschreibung oben des Isomorphismus  $\varphi$  haben wir

$$\begin{aligned} i_\# \varphi \pi(a + d) &= i_\# \varphi(a + d + C_*(A)) \\ &= i_\#(d + C_*(A \setminus B)) \\ &= d + C_*(A) \in C_*(X, A), \end{aligned}$$

während

$$\pi'j(a+d) = \pi'(a+d) = a+d + C_*(A) = d + C_*(A)$$

das Gleiche ist.

Die senkrechten Pfeile in (3.61) bilden also einen Morphismus von kurzen exakten Folgen von Kettenabbildungen, und nach Übergang zu Homologie induzieren sie einen Morphismus der zugeordneten langen exakten Homologiefolgen, da diese funktoriell von den kurzen exakten Folgen abhängen.

Dieser Morphismus der langen Folgen enthält an jeder dritten Stelle die Identität von  $H_n(A)$ , also einen Isomorphismus, an den Stellen daneben (auch jede dritte Stelle insgesamt)  $H_n(j)$ , und an den Stellen daneben (das restliche Drittel der Stellen)  $H_n(i) \circ H_n(\varphi)$ .

Das 5-er Lemma impliziert sofort, dass genau dann alle  $H_n(j)$  Isomorphismen sind, wenn alle  $H_n(i) \circ H_n(\varphi)$  Isomorphismen sind, oder äquivalent, wenn alle  $H_n(i)$  Isomorphismen sind (denn  $H_*(\varphi)$  ist immer ein Isomorphismus, weil schon  $\varphi$  einer ist).

In anderen Worten,  $(X; A, D)$  ist eine Mayer-Vietoris Triade genau dann, wenn  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstripel ist. ■

**Satz 3.55 (Ausschneidungssatz)** Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel, so dass  $\bar{B} \subseteq A^\circ$ . Dann ist  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstripel.

*Beweis.* Aus  $\bar{B} \subseteq A^\circ$  folgt  $X = A^\circ \cup (X \setminus \bar{B}) = A^\circ \cup (X \setminus B)^\circ$ . Also ist  $(X; A, X \setminus B)$  nach Beispiel 3.50 eine Mayer-Vietoris Triade und  $(X, A, B)$  nach Lemma 3.54 ein Ausschneidungstripel. ■

Man kann vermuten, und die Vermutung ist auch richtig, dass der Satz von Mayer-Vietoris oder die Ausschneidung sehr nützliche Hilfsmittel sein werden zur Berechnung der Homologie von topologischen Räumen, so dass diese gerade entwickelten Methoden sehr laut nach einem Anwendungsbeispiel schreien. Solche Beispiele werden wir auch bald geben (im nächsten Kapitel), aber vorher wollen wir die Gesamtergebnisse dieses Abschnitts kurz Revue passieren lassen und zusammenfassen, was wir erreicht haben und welche Werkzeuge wir nun besitzen. Danach können wir die Werkzeuge ein bisschen verfeinern, was die Berechnung von Beispielen erleichtern wird.

Es gibt eine „Standardzusammenfassung“ der wichtigen Ergebnisse dieses Kapitels in der Gestalt von folgender Definition von Eilenberg und Steenrod, die die Grundeigenschaften der Homologie als Axiome festhält, aus denen man Beweise und vor allem auch Berechnungen herleiten kann, die in allen Homologietheorien (und nicht nur in der singulären Homologie) zutreffen.

**Definition 3.56 (Eilenberg-Steenrod Axiome)** Sei  $\mathcal{K}$  eine „geeignete“ Kategorie von topologischen Raumpaaren und stetigen Abbildungen von Raumpaaren (die Objekte und Morphismen können aber zusätzliche Struktur haben und der vergessliche Funktor  $\mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Top}^2$  muss nicht surjektiv sein, d. h., nicht jedes topologische Raumpaar muss ein Objekt von  $\mathcal{K}$  bilden). Die geeigneten Kategorien nennt man **zulässige Kategorien** und wir wollen gar nicht so genau sagen, was das beinhaltet, außer zu betonen, dass  $\mathbf{Top}^2$  auf jeden Fall eine zulässige Kategorie ist.

Eine **Homologietheorie** auf  $\mathcal{K}$  ist ein Funktor  $H: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{GAG}_0$ , zusammen mit einer Grad  $-1$  natürlichen Transformation  $\beta: H(X, A) \rightarrow H(A, \emptyset)$ , die folgende Eigenschaften erfüllen (wenn wir wie üblich jeden topologischen Raum  $X$  mit dem Raumpaar  $(X, \emptyset)$  gleichsetzen):

**Homotopieaxiom:** Sind  $f$  und  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Morphismen von  $\mathcal{K}$ , so ist  $H(f) = H(g): H(X, A) \rightarrow H(Y, B)$ .

**Exaktheitsaxiom:** Zu jedem Objekt  $(X, A)$  von  $\mathcal{K}$  seien  $i: A \rightarrow X$  und  $j: X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen. Dann ist das natürliche Homologiedreieck

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{H(i)} & H(X) \\ & \nwarrow \text{Grad } -1 & \swarrow H(j) \\ & H(X, A) & \end{array}$$

$\beta$

exakt.

**Ausschneidungsaxiom:** Sei  $(X, A)$  ein Objekt von  $\mathcal{K}$  und sei  $U$  ein offener Unterraum von  $A$  mit  $\bar{U} \subseteq A^\circ$ , und so dass  $(X \setminus U, A \setminus U) \in \mathcal{K}$ . Dann induziert die Inklusion  $k: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus in Homologie, d. h.,  $H(k): H(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H(X, A)$  ist ein Isomorphismus.

**Dimensionsaxiom:** Wenn  $P$  ein Einpunktraum ist, dann ist  $H_n(P) = \{0\}$  für alle  $n \neq 0$ . Die Gruppe  $H_0(P)$  heißt die **Koeffizientengruppe** der Homologietheorie.

**Satz 3.57** Die singuläre Homologie  $H_*$  ist eine Homologietheorie im Sinne von Definition 3.56 auf der Kategorie  $\mathcal{K} = \mathbf{Top}^2$ . Diese Homologietheorie hat Koeffizientengruppe  $\mathbf{Z}$ .

*Beweis.* Das Homotopieaxiom ist Satz 3.29, das Exaktheitsaxiom gilt nach Korollar 3.16, das Ausschneidungsaxiom ist erfüllt (sogar ohne die Voraussetzung  $U$  offen) wegen Satz 3.55, und Satz 3.31 ist das Dimensionsaxiom

und zeigt außerdem, dass die Koeffizientengruppe der singulären Homologie, wie wir sie präsentiert haben,  $\mathbf{Z}$  ist. ■

Bevor wir diesen Abschnitt beenden, wollen wir mit Hilfe des Homotopieaxioms eine Verbesserung des Mayer-Vietoris Satzes und des Ausschneidungssatzes erzielen, die es erlaubt, die Voraussetzungen für ihre Anwendung etwas abzuschwächen.

**Definition 3.58** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $A \subseteq X$  ein Unter-  
raum von  $X$  und  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.

- a) Eine **Retraktion** von  $X$  auf  $A$  ist eine stetige Abbildung  $r: X \rightarrow A$ ,  
so dass

$$r|_A = r \circ i = \text{id}_A.$$

Wir nennen  $A$  einen **Retrakt** von  $X$ , wenn es eine Retraktion von  $X$   
nach  $A$  gibt.

- b) Eine **Deformationsretraktion** von  $X$  auf  $A$  ist eine Retraktion  
 $r: X \rightarrow A$  mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass

$$i \circ r \simeq \text{id}_X. \quad (3.62)$$

Wenn sogar gilt  $i \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$  (dabei bleibt jeder Punkt von  $A$   
während der Homotopie fest), so nennen wir  $r$  eine **starke Deformationsretraktion**.

Wir nennen  $A$  einen **(starken) Deformationsretrakt** von  $X$ , wenn  
es eine (starke) Deformationsretraktion von  $X$  nach  $A$  gibt.

**Lemma 3.59** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $A \subseteq X$  ein Retrakt  
von  $X$ . Sei  $r: X \rightarrow A$  eine Retraktion und sei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.  
Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a)  $A$  ist ein Deformationsretrakt von  $X$ .
- b) Die Inklusion  $i$  ist eine Homotopieäquivalenz.
- c) Die Retraktion  $r$  ist eine Homotopieäquivalenz.
- d) Die Retraktion  $r$  ist eine Deformationsretraktion.

*Beweis.* Seien  $j: A \longrightarrow X$  und  $s: X \longrightarrow A$  stetige Abbildungen. Wenn  $s \circ i \simeq \text{id}_A$  und  $j \circ s \simeq \text{id}_X$ , dann ist

$$j = j \circ \text{id}_A \simeq j \circ s \circ i \simeq \text{id}_X \circ i = i$$

und  $s = \text{id}_A \circ s = r \circ i \circ s \simeq r \circ j \circ s \simeq r \circ \text{id}_X = r.$

In diesem Fall sind  $i$  und  $j$  Homotopieinverse zu  $r$  wie auch  $s$ .

Wenn  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$  ist, dann existiert eine Deformationsretraktion  $s: X \longrightarrow A$  und jede solche Deformationsretraktion  $s$  erfüllt die Voraussetzungen des vorigen Absatzes mit  $j := i$ , und ist somit eine Homotopieinverse zu  $i$ . Das beweist  $a) \Rightarrow b)$ .

Wenn  $i$  eine Homotopieäquivalenz ist, dann hat  $i$  eine Homotopieinverse  $s$  und jede solche Homotopieinverse  $s$  erfüllt die Voraussetzungen des ersten Absatzes des Beweises mit  $j := i$ . Dann ist auch  $r$  eine Homotopieinverse zu  $i$  und somit eine Homotopieäquivalenz. Das beweist  $b) \Rightarrow c)$ .

Wenn die Retraktion  $r$  eine Homotopieäquivalenz ist und  $j: A \longrightarrow X$  eine Homotopieinverse zu  $r$  ist, dann sind die Voraussetzungen des ersten Absatzes erfüllt mit  $s := r$ . Folglich ist auch  $i$  eine Homotopieinverse zu  $r$ , was besagt, dass  $r$  eine Deformationsretraktion ist. Das beweist  $c) \Rightarrow d)$ .

$d) \Rightarrow a)$  ist trivial. ■

**Lemma 3.60** a) Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel und sei  $C$  eine Teilmenge von  $B$ , so dass  $X \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus C$  und  $A \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $A \setminus C$  ist. Dann ist  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstripel genau dann, wenn  $(X, A, C)$  ein Ausschneidungstripel ist.

Insbesondere ist  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstripel, wenn  $\bar{C} \subseteq A^\circ$ .

b) Sei  $(X; A, B)$  eine Raumtriade und seien  $A' \supseteq A$  und  $B' \supseteq B$  Teilmengen von  $X$ , so dass  $A$  ein Deformationsretrakt von  $A'$ ,  $B$  ein Deformationsretrakt von  $B'$  und  $A \cap B$  ein Deformationsretrakt von  $A' \cap B'$  ist. Dann ist  $(X; A, B)$  eine Mayer-Vietoris Triade genau dann, wenn  $(X; A', B')$  eine Mayer-Vietoris Triade ist.

Insbesondere ist  $(X; A, B)$  Mayer-Vietoris, wenn  $X = A'^\circ \cup B'^\circ$ .

*Beweis.* Zu a): Sei  $j: (X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X \setminus C, A \setminus C)$  die Inklusion. Weil  $X \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus C$  ist und  $A \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $A \setminus C$  ist, sind die Inklusionen  $j: X \setminus B \longrightarrow X \setminus C$  und die Einschränkung  $j|(A \setminus B): A \setminus B \longrightarrow A \setminus C$  Homotopieäquivalenzen, nach Lemma 3.59.

Aus Lemma 3.30 b) folgt, dass auch in der relativen Homologie

$$j_*: H_*(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow H_*(X \setminus C, A \setminus C)$$

ein Isomorphismus ist.

Sei  $i$  die Inklusion  $(X \setminus C, A \setminus C) \longrightarrow (X, A)$ , so dass  $i \circ j$  die Inklusion  $(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$  ist. Da  $j_*$  ein Isomorphismus ist, ist  $i_*$  genau dann ein Isomorphismus, wenn  $i_* \circ j_* = (i \circ j)_*$  einer ist. Das ist genau die Aussage von Teil a).

„Insbesondere“ ist klar aus Satz 3.55.

Zu b): Seien  $k: A \cap B \longrightarrow A' \cap B'$ ,  $k': A \longrightarrow A'$  und  $k'': B \longrightarrow B'$  die Inklusionen. Wegen der Voraussetzungen und Lemma 3.59 sind diese Inklusionen Homotopieäquivalenzen und induzieren deshalb Isomorphismen in Homologie.

Wir haben eine natürliche Inklusion  $\gamma: C_*(\{A, B\}) \longrightarrow C_*(\{A', B'\})$ , die man auch schreiben kann als  $\gamma = k'_\# + k''_\#$  und die eine injektive Kettenabbildung ist. Die Kettenabbildungen  $k_\#, k'_\# \oplus k''_\#$  und  $\gamma$  sind offensichtlich die Bestandteile eines Morphismus zwischen den kurzen exakten Kettenkomplexfolgen der Triaden  $(X; A, B)$  und  $(X; A', B')$ . Das heißt, das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_*(A \cap B) & \xrightarrow{\iota} & C_*(A) \oplus C_*(B) & \xrightarrow{\kappa} & C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \\ & & k_\# \downarrow & & k'_\# \oplus k''_\# \downarrow & & \gamma \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & C_*(A' \cap B') & \xrightarrow{\iota'} & C_*(A') \oplus C_*(B') & \xrightarrow{\kappa'} & C_*(\{A', B'\}) \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

kommutiert, weil alle senkrechten Homomorphismen von den Inklusionen der ineinander verschachtelten Unterräume induziert werden.

Die senkrechten Abbildungen induzieren einen Morphismus zwischen den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen, wobei die linken beiden senkrechten Pfeile Isomorphismen  $k_*$  und  $k'_* \oplus k''_*$  induzieren, die, wenn man die exakten Dreiecke zu langen exakten Homologiefolgen abwickelt, die Abbildungen  $H_n(\gamma)$  von beiden Seiten einrahmen. In anderen Worten, in jeder auf  $H_n(\gamma)$  zentrierten Gruppe von fünf Abbildungen im Morphismus zwischen den langen exakten Folgen sind die äußeren vier Abbildungen Isomorphismen. Das 5-er Lemma besagt, dass auch  $H(\gamma)$  ein Isomorphismus ist.

Wenn  $j$  die Inklusion  $C_*(\{A', B'\}) \longrightarrow C_*(X)$  ist, so ist  $j \circ \gamma$  die Inklusion  $C_*(\{A, B\}) \longrightarrow C_*(X)$ . Weil  $H(\gamma)$  ein Isomorphismus ist, ist  $H(j)$  genau dann ein Isomorphismus (und  $(X; A', B')$  genau dann Mayer-Vietoris), wenn  $H(j \circ \gamma) = H(j) \circ H(\gamma)$  ein Isomorphismus ist und  $(X; A, B)$  Mayer-Vietoris ist.

Der Zusatz „insbesondere“ folgt sofort aus Beispiel 3.50. ■



**Beispiel und Definition 3.61** In den Sphären

$$S^n := \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \}$$

für  $n \in \mathbf{N}$  finden wir schöne Beispiele zur Anwendung von Mayer-Vietoris Triaden und Ausschneidungstripeln, wo auch die Verbesserungen aus Lemma 3.60 sich als sehr hilfreich erweisen.

Wir führen dazu ein paar Namen ein für wichtige Teilräume von  $S^n$ .

Zunächst enthält jede Sphäre einen **Nordpol**

$$p_+ := (0, \dots, 0, 1)$$

und einen **Südpol**

$$p_- := (0, \dots, 0, -1),$$

und die Komplemente  $S_+^n := S^n \setminus \{p_-\}$  und  $S_-^n := S^n \setminus \{p_+\}$  dieser Pole sind offene Teilmengen, die zu  $\mathbf{R}^n$  oder zu der offenen  $n$ -dimensionalen Einheitsscheibe homöomorph sind (und somit zusammenziehbar sind).

Für jedes  $n$  können wir  $S^{n-1}$  in  $S^n$  einbetten als seinen **Äquator**

$$S^{n-1} = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n = 0 \}.$$

Man findet leicht einen Homöomorphismus

$$S_+^n \cap S_-^n = S^n \setminus \{p_{\pm}\} \cong S^{n-1} \times (-1, 1). \quad (3.63)$$

Wir können  $S^n$  auch in zwei **Halbsphären** zerlegen: die **obere Halbsphäre**

$$D_+^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0 \}$$

und die **untere Halbsphäre**

$$D_-^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq 0 \}.$$

Indem man einfach die letzte Koordinate nicht hinschreibt, erhält man einen Homöomorphismus von den Halbsphären  $D_+^n$  und  $D_-^n$  zur abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen Einheitsscheibe  $D^n$ . Dieser Homöomorphismus ist die Identität auf  $S^{n-1}$ .

Man beachte, dass  $S^n = D_+^n \cup D_-^n$  und dass  $D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$ .

Wir können auch das Innere dieser Halbsphären betrachten. Diese Unterräume sind die **offene obere Halbsphäre**

$$E_+^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n > 0 \}$$

und die *offene untere Halbsphäre*

$$E_-^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n < 0 \}.$$

Sie sind jeweils homöomorph zur offenen  $n$ -dimensionalen Scheibe  $D_n^\circ$  oder zu  $\mathbf{R}^n$ . Die offenen Halbsphären sind jeweils das Komplement der entgegengesetzten abgeschlossenen Halbsphäre, d. h.,

$$S^n \setminus D_\pm^n = E_\mp^n.$$

Als Instanz von Beispiel 3.50 sehen wir, dass  $(S^n; S_+^n, S_-^n)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist. Das gilt auch, wenn wir  $S_\pm^n$  durch beliebige Umgebungen von  $D_\pm^n$  ersetzen.

Wenn  $B$  eine beliebige in  $S^n$  abgeschlossene Teilmenge von  $E_-^n$  ist, so ist  $(S^n, D_-^n, B)$  ein Ausschneidungstripel nach dem Ausschneidungssatz 3.55. Insbesondere ist  $(S^n, D_-^n, \{p_-\})$  ein Ausschneidungstripel.

Natürlich gilt diese Aussage auch, wenn wir in ihr die unteren offenen und abgeschlossenen Halbsphären und den unteren Pol durch die oberen ersetzen.

Mit Hilfe von Lemma 3.60 können wir aus diesen Instanzen von Mayer-Vietoris Folgen und Ausschneidungstriplen weitere gewinnen, die angenehmer anzuwenden sind.

Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  ist  $(S^n, D_-^n, E_-^n)$  ein Ausschneidungstripel, denn man sieht leicht, dass  $D_+^n = S^n \setminus E_-^n$  ein Deformationsretrakt von  $S_+^n = S^n \setminus \{p_-\}$  ist und  $S^{n-1} = D_-^n \setminus E_-^n$  ein Deformationsretrakt von  $D_-^n \setminus \{p_-\}$  ist. Eine jeweilige Homotopie  $H$  von der Identität zu einer Retraktion lässt die Punkte in der oberen Halbsphäre unverändert, und verschiebt die Punkte der unteren Halbsphäre entlang Großkreisen, die den Punkt mit den Polen verbinden, zum Äquator hin. Wer will, findet leicht die Formel für diese Homotopie — die Koordinate  $x_n$  wird linear mit der Zeit gegen 0 geschoben, und die anderen Koordinaten werden passend vergrößert, damit der Bildpunkt in der Sphäre bleibt.

Natürlich ist auch  $(S^n, D_+^n, E_+^n)$  ein Ausschneidungstripel.

Weil  $(S^n; S_+^n, S_-^n)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist und weil, wie wir gesehen haben,  $D_\pm^n$  ein Deformationsretrakt von  $S_\pm^n$  ist und weil  $S^{n-1} = D_+^n \cap D_-^n$  offenbar ein Deformationsretrakt von

$$S_+^n \cap S_-^n \cong S^{n-1} \times (-1, 1)$$

ist, ist auch  $(S^n; D_+^n, D_-^n)$  eine Mayer-Vietoris Triade.

Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt auf einfache Weise die wichtigsten Homologiegruppen ausrechnen.

# Kapitel 4

## Berechnungen und Anwendungen

Wir wollen die Erkenntnisse, Grundeigenschaften und Vorbereitungen aus Kapitel 3, insbesondere die Eilenberg-Steenrod Axiome für die singuläre Homologie, jetzt benutzen, um einige wichtige Homologiegruppen und Homomorphismen auszurechnen und ein paar Anwendungen herzuleiten.

Wir beginnen mit einer ganz einfachen Bemerkung.

**Bemerkung 4.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei

$$\mathcal{W} = \{ W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$$

die Menge der Wegkomponenten von  $X$ .

Da jeder Standardsimplex  $\Delta_n$  wegweise zusammenhängend ist, liegt das Bild jedes singulären Simplexes  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$  ganz in einer Wegkomponente. Weil die singulären Kettengruppen von den singulären Simplizes frei erzeugt werden, ist somit

$$C_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_*(W_\lambda), \quad (4.1)$$

und weil die Summanden Unterkettenkomplexe sind ist es klar, dass auch

$$H_*(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(W_\lambda). \quad (4.2)$$

Der Beweis der Existenz des Isomorphismus in (4.2) lässt sich auf die gleiche Weise führen, wie der Beweis von Lemma 2.30 d).

In Dimension 0 können wir für jeden topologischen Raum die Homologie ganz einfach bestimmen.

**Lemma 4.2** Sei  $A \neq \emptyset$  ein wegweise zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist  $H_0(A) = \mathbf{Z}$  und die  $1 \in \mathbf{Z}$  ist die Homologieklass  $[y]$

eines beliebigen Punktes  $y \in A$ , aufgefasst als ein singulärer 0-Simplex (der automatisch ein 0-Zykel ist).

Ferner, für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  und eine beliebige stetige Abbildung  $f: A \rightarrow X$  ist  $H_0(f)$  injektiv.

Wenn  $X$  wegweise zusammenhängend ist, dann gilt sogar  $H_0(f) = \text{id}_{\mathbf{Z}}$  (mit der oben gegebenen Wahl der Isomorphismen  $H_0(A) \cong \mathbf{Z} \cong H_0(X)$ ).

*Beweis.* Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. Da  $\Delta_0 = \{0\}$  einpunktig ist, ist ein 0-Simplex in  $X$  eindeutig bestimmt durch seinen einzigen Bildpunkt, d. h., wir können  $S_0(X)$  mit  $X$  identifizieren und somit  $C_0(X)$  mit der von  $X$  erzeugten freien abelschen Gruppe  $F(X)$ .

Jede 0-Kette ist ein Zykel, weil  $C_{-1}(X) = \{0\}$ . Um die 0-te Homologie zu berechnen, müssen wir nur noch die Rändergruppe bestimmen.

Jeder Rand ist eine Linearkombination von Rändern von 1-Simplexes, und ein 1-Simplex  $\sigma: \Delta_1 = I \rightarrow X$  ist nichts anderes als ein Weg in  $X$ . Ferner ist

$$\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0) \quad (4.3)$$

nach Definition.

Sei  $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbf{Z}$  die Abbildung definiert durch

$$\varepsilon\left(\sum_{x \in X} n_x x\right) = \sum_{x \in X} n_x,$$

die jeder Kette ihre Koeffizientensumme in  $\mathbf{Z}$  zuordnet. Sie ist wohldefiniert, weil in einer Kette nur endlich viele Koeffizienten  $\neq 0$  sind, und sie ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. (Diese Abbildung heißt die **Augmentation**.)

An (4.3) sieht man, dass  $B_0(X) \subseteq \text{Ker } \varepsilon$ . Insbesondere repräsentiert jede 0-Kette, die nicht im Kern von  $\varepsilon$  liegt, eine nichtverschwindende Homologiekategorie.

Für einen wegweise zusammenhängenden nichtleeren Raum  $A$  gilt sogar  $B_0(A) = \text{Ker } \varepsilon$ . Denn für je zwei Punkte  $x$  und  $y \in A$  gibt es einen Weg, also einen 1-Simplex, von  $x$  nach  $y$ , und nach (4.3) ist  $y - x$  ein Rand. Das bedeutet, dass wenn wir einen festen Punkt  $y \in A$  wählen, wir jede Kette

$$c = \sum_{x \in A} n_x x \in C_0(A)$$

durch Addition des Randes

$$\sum_{x \in A} n_x (y - x)$$

in die zu  $c$  homologe Kette

$$c' := \sum_{x \in A} n_x y = \varepsilon(c) y$$

verwandeln können. Weil sie sich durch einen Rand unterscheiden, sind  $c$  und  $c'$  entweder beide Ränder oder beide keine Ränder. Aber  $c'$  ist offensichtlich *genau dann* ein Rand, wenn  $\varepsilon(c) = 0$ .

Nach dem Ersten Isomorphiesatz aus der Gruppentheorie induziert  $\varepsilon$  einen Isomorphismus

$$H_0(A) = \frac{Z_0(A)}{B_0(A)} = \frac{C_0(A)}{\text{Ker } \varepsilon} \longrightarrow \text{Bild } \varepsilon = \mathbf{Z}.$$

Dieser Isomorphismus bildet die Homologieklassse  $[y]$  eines beliebigen Punktes  $y \in A$  (aufgefasst als 0-Zykel) auf  $1 \in \mathbf{Z}$  ab, d. h., diese Homologieklassse, die nicht von  $y$  abhängt, entspricht der 1 in  $\mathbf{Z}$ .

Sei  $X$  ein anderer topologischer Raum und sei  $f: A \longrightarrow X$  stetig und  $z := f(y)$ . Für jedes  $n \neq 0 \in \mathbf{Z}$  ist

$$f_*(n[y]) = f_*([ny]) = [f_\#(ny)] = [nz] \neq 0, \quad (4.4)$$

weil  $\varepsilon(nz) = n \neq 0$ . Also ist  $f_* = H_0(f)$  injektiv.

Wenn auch  $X$  wegweise zusammenhängend ist, ist auch  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ , erzeugt zum Beispiel von der Homologieklassse  $[z]$ , und Gleichung (4.4) zeigt, dass  $H_0(f)$  tatsächlich die Identität ist. ■

**Korollar 4.3** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{W}$  die Menge der Wegkomponenten von  $X$ .

Dann ist

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{W \in \mathcal{W}} \mathbf{Z}, \quad (4.5)$$

wobei jeder Punkt  $x \in X$  einen Zykel in  $Z_0(X)$  darstellt, dessen Homologieklassse die 1 ist in demjenigen Summanden  $\mathbf{Z}$  von (4.5), der zur Wegkomponente von  $x$  gehört.

Sei  $Y$  ein zweiter topologischer Raum und sei  $f: X \longrightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Für jede Wegkomponente  $W$  von  $X$  gibt es eine eindeutige Wegkomponente  $V$  von  $Y$  mit  $f(W) \subseteq V$ , und  $H_0(f)$  bildet den  $W$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(X)$  identisch ab auf den  $V$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(Y)$ .

*Beweis.* Die Darstellung (4.5) folgt sofort aus Gleichung (4.2) in Bemerkung 4.1 und aus Lemma 4.2. Dabei wird der  $W$ -te Summand  $\mathbf{Z}$  erzeugt von der Homologieklassse eines beliebigen Punktes  $w \in W$ .

Wenn  $f: X \rightarrow Y$  stetig ist und  $V$  die Wegkomponente von  $Y$  ist mit  $f(W) \subseteq V$ , dann bildet  $H_0(f)$  die Homologieklassse von  $w$  ab auf die Homologieklassse von  $f(w) \in Y$ , und weil  $f(w)$  in  $V$  liegt, erzeugt diese Klasse den  $V$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(Y)$ .

Das bedeutet, dass  $H_0(f)$  den  $W$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(X)$  identisch abbildet auf den  $V$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(Y)$ . ■

**Beispiele 4.4** a)  $S^0 = \{+1, -1\}$  besteht aus zwei Punkten, mit der diskreten Topologie. Aus dem Dimensionsaxiom und aus Bemerkung 4.1 folgt, dass

$$H_n(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0 \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.6)$$

b)  $D^0 = \{0\}$  hat einen Punkt und  $S^{-1} = \emptyset$ . Deshalb ist

$$H_n(D^0, S^{-1}) = H_n(D^0) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0 \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.7)$$

c)  $S^0 \subseteq D^1 = [-1, 1]$  und  $D^1$  ist azyklisch, hat also Homologie  $\mathbf{Z}$  in Dimension 0 und  $\{0\}$  in jeder anderen Dimension. Für die Inklusion  $i: S^0 \rightarrow D^1$  gilt also  $H_n(i) = 0$  für alle  $n \neq 0$ , und nach Korollar 4.3 hat

$$H_0(i): \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$$

die Matrix  $(1, 1)$ , d. h., die Gestalt

$$H_0(m, n) = m + n, \quad (4.8)$$

denn  $i$  bildet beide Wegkomponenten von  $S^0$  ab in die einzige Wegkomponente von  $D^1$ .

Mit diesem kleinen Anfang sind wir jetzt in der Lage, die Homologiegruppen aller Sphären auszurechnen.

**Satz 4.5** Für jedes  $n \geq 1$  und für jedes  $k \in \mathbf{Z}$  ist

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.9)$$

und

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong H_k(S^n, D_-^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Die Isomorphismen zwischen diesen Homologiegruppen werden zum Teil durch stetige Abbildungen induziert.

Insbesondere wird der erste Isomorphismus in (4.10) induziert durch die Inklusion  $i: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, D_-^n)$ , die die Scheibe  $D^n$  als die obere Halbsphäre  $D_+^n$  in  $S^n$  einbettet; für diese Inklusion ist  $i_*$  ein Isomorphismus der gesamten graduierten Homologiegruppen.

Für die Inklusion  $j: (S^n, \emptyset) \rightarrow (S^n, D_-^n)$  ist  $H_k(j)$  für alle  $k \geq 1$  ein Isomorphismus (aber nicht für  $k = 0$ ).

*Beweis.*  $S^n$  ist die Vereinigung der beiden wegweise zusammenhängenden Scheiben  $D_+^n$  und  $D_-^n$ , und für  $n > 0$  ist ihr Durchschnitt  $S^{n-1}$  nichtleer. Daraus folgt, dass  $S^n$  wegweise zusammenhängend ist, wenn  $n > 0$ , und deshalb ist  $H_0(S^n) = \mathbf{Z}$ .

Wir können in der Aussage des Satzes die „Standardscheibe“  $D^n$  ersetzen durch eine homöomorphe Kopie, nämlich durch die Scheibe  $D_+^n$ , die obere Halbsphäre in  $S^n$ .

Wir betrachten nun folgendes Diagramm, in dem die Zeilen Auszüge aus den langen exakten Homologiefolgen der Paare  $(D_+^n, S^{n-1})$  und  $(S^n, D_-^n)$  sind und die senkrechte Abbildung durch die Inklusion des Raumpaares induziert wird:

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(D_+^n) & \longrightarrow & H_k(D_+^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D_+^n) \\ & & \downarrow i_* \cong & & & & \\ H_k(D_-^n) & \longrightarrow & H_k(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^n, D_-^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(D_-^n) \longrightarrow H_{k-1}(S^n) \end{array}$$

Die Abbildung  $i_*$  ist ein Ausschneidungsisomorphismus, denn  $(S^n, D_-^n, E_-^n)$  ist ein Ausschneidungstripel nach Beispiel und Definition 3.61 und das Paar  $(D_+^n, S^{n-1})$  erhält man aus dem Paar  $(S^n, D_-^n)$  durch Ausschneidung von  $E_-^n$  (in anderen Worten,  $D_+^n = S^n \setminus E_-^n$  und  $S^{n-1} = D_-^n \setminus E_-^n$ ).

Das liefert, wie behauptet, den ersten Isomorphismus in (4.10).

Das Diagramm enthält aber mehr Isomorphismen, wobei ihr genaues Aussehen von dem Wert von  $k$  und  $n$  abhängt. Wenn  $k = 0$  hat die untere Zeile nach Lemma 4.2 die Gestalt

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \longrightarrow H_0(S^n, D_-^n) \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \{0\},$$

woraus folgt, dass  $H_0(S^n, D_-^n) = \{0\}$ , wie es in (4.10) steht.

Für  $k = 1$  hat das Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_1(D_+^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\beta_1} & H_0(S^{n-1}) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ & & \downarrow \cong & & & & \\ \{0\} & \longrightarrow & H_1(S^n) & \xrightarrow[\cong]{H_1(j)} & H_1(S^n, D_-^n) & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \end{array}$$

Der verbindende Homomorphismus in der unteren Zeile ist 0, weil die anschließende Abbildung nach Lemma 4.2 injektiv ist. Aus diesem Grund ist die Abbildung  $H_1(j): H_1(S^n) \rightarrow H_1(S^n, D_-^n)$  ein Isomorphismus.

Die Gestalt des verbindenden Homomorphismus in der oberen Zeile hängt vom Wert von  $n$  ab, aber  $\beta_1$  ist auf jeden Fall injektiv und somit ein Isomorphismus auf sein Bild, welches der Kern des rechten Pfeils ist.

Wenn  $n = 1$ , so ist der rechte Pfeil in der oberen Zeile nach Beispiel 4.4 c) die Abbildung  $(m, n) \mapsto m + n$  von  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  und hat Kern

$$\{(m, -m) \mid m \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}.$$

Das zeigt, dass  $H_1(S^1) \cong H_1(D_+^1, S^0) \cong \mathbf{Z}$  und beweist den Fall  $k = n = 1$  in (4.9) und (4.10).

Wenn  $n > 1$ , so ist der rechte Pfeil die Identität von  $\mathbf{Z}$  nach Lemma 4.2, da dann  $S^{n-1}$  wegweise zusammenhängend ist. Folglich ist  $\beta_1 = 0$  (da der Kern des rechten Pfeils  $\{0\}$  ist) und wir haben

$$H_1(S^n) \cong H_1(D_+^n, S^{n-1}) = \{0\},$$

im Einklang mit (4.9) und (4.10).

Wir haben damit den Fall  $k = 1$  vollständig berechnet.

Wenn  $k > 1$ , so hat unser Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_k(D_+^n, S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{} & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow \cong & & & & \\ \{0\} & \longrightarrow & H_k(S^n) & \xrightarrow[\cong]{H_k(j)} & H_k(S^n, D_-^n) & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

und wir sehen, dass  $H_k(j)$  ein Isomorphismus ist, wie behauptet, und dass für alle  $n > 0$  und  $k > 1$  gilt

$$H_k(S^n) \cong H_k(D_+^n, S^{n-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}).$$

Durch Induktion folgt hieraus, dass

$$H_k(S^n) \cong H_{k-r}(S^{n-r})$$



für jedes  $r > 0$ , so dass  $k - r \geq 1$  und  $n - r \geq 0$ , also für jedes  $r > 0$  mit  $r < k$  und  $r \leq n$ .

Wenn  $k \leq n$  nehmen wir  $r = k - 1$  und wir finden

$$H_k(S^n) \cong H_1(S^{n-k+1}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n - k + 1 = 1, \text{ also wenn } k = n; \\ \{0\}, & \text{wenn } n - k + 1 > 1, \text{ also wenn } k < n. \end{cases}$$

Wenn  $k > n$  nehmen wir  $r = n$  und wir finden

$$H_k(S^n) \cong H_{k-n}(S^0) = \{0\}$$

nach Beispiel 4.4 a), da  $k - n > 0$ .

Das beweist alle Fälle von (4.9), und die fehlenden Fälle von (4.10) folgen sofort aus dem Isomorphismus  $H_k(S^n) \cong H_k(D_+^n, S^{n-1})$  für  $k > 1$ . ■

In der Vorlesung *Topologie* des vergangenen Sommersemesters haben Sie den Begriff des **Abbildungsgrades** einer stetigen Selbstabbildung  $f$  des Kreises  $S^1$  kennengelernt, den man etwa mit Hilfe der Überlagerungstheorie definieren kann, oder Sie kennen diesen Begriff womöglich anderswo her. Was eine wesentliche Rolle bei der Definition des Abbildungsgrades spielt ist die Tatsache, dass die Fundamentalgruppe des Kreises  $\mathbf{Z}$  ist. Der von  $f$  induzierte Endomorphismus  $f_*$  der Fundamentalgruppe ist deshalb die Multiplikation mit einer bestimmten ganzen Zahl  $n$  (wie es für jeden Endomorphismus von  $\mathbf{Z}$  der Fall ist); diese Zahl ist der (homotopietheoretische) Abbildungsgrad.

Wir haben für die *singuläre Homologie* gerade bewiesen, dass  $H_n(S^n) = \mathbf{Z}$  für jedes  $n > 0$ . Das erlaubt uns nun, auf ähnliche Weise für jede stetige Selbstabbildung der  $n$ -Sphäre einen **homologischen Abbildungsgrad** zu definieren (der wie auch der homotopietheoretische Abbildungsgrad<sup>1</sup> beschreibt, wie oft, intuitiv gesehen, die Abbildung die Sphäre um sich selbst wickelt).

**Definition 4.6** Sei  $n \geq 1$  und sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung.

Dann ist  $H_n(f): H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  ein Homomorphismus  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  und somit die Multiplikation mit einer wohldefinierten Zahl  $a \in \mathbf{Z}$ , die wir den **Abbildungsgrad** Grad  $f$  von  $f$  nennen.

**Bemerkung 4.7** a) Da homotope Abbildungen den gleichen Homomorphismus in Homologie induzieren, hängt der Grad einer Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  nur von der Homotopieklasse von  $f$  ab.

---

<sup>1</sup>In Wirklichkeit haben beide Varianten des Abbildungsgrades den gleichen Wert (aber das werden wir in dieser Vorlesung nicht beweisen). Sie werden nur unterschiedlich definiert.

- b) Sei  $P = \{p\}$  ein Einpunktraum. Wenn  $f$  konstant ist, so faktorisiert  $f$  durch  $P$ , d.h., wir können schreiben  $f = g \circ h$ , wo  $h$  die einzige Abbildung  $S^n \rightarrow P$  ist und wo  $g$  eine Abbildung  $P \rightarrow S^n$  ist.

Da aber  $H_n(P) = \{0\}$  (weil  $n \geq 1$ ), folgt daraus, dass  $\text{Grad } f = 0$  wenn  $f$  konstant ist, und wegen Teil a) gilt dies auch, wenn  $f$  nullhomotop ist.

- c) Offensichtlich ist  $\text{Grad } \text{id}_{S^n} = 1$ .

- d) Wenn  $f$  und  $g$  zwei Abbildungen  $S^n \rightarrow S^n$  sind, dann ist

$$\text{Grad}(g \circ f) = \text{Grad } g \cdot \text{Grad } f,$$

wie man leicht sieht.

**Lemma 4.8** Sei  $n$  eine positive natürliche Zahl und sei  $0 \leq k \leq n$ . Wir bezeichnen mit  $s_k$  die Abbildung  $S^n \rightarrow S^n$ , die die Einschränkung auf  $S^n$  der Spiegelung von  $\mathbf{R}^{n+1}$  in der Ebene  $x_k = 0$  ist, also die Abbildung gegeben durch

$$s_k(x_0, \dots, x_n) := (x_0, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (4.11)$$

Der Grad von  $s_k$  ist  $-1$ .

*Beweis.* Es reicht, die Behauptung für  $k = n$  zu beweisen, denn für je zwei Indizes  $k$  und  $l$  zwischen 0 und  $n$ , sei  $\tau: S^n \rightarrow S^n$  die Abbildung, die die  $k$ -te und  $l$ -te Koordinate vertauscht. Da  $\tau^2 = \text{id}_{S^n}$ , muss  $(\text{Grad } \tau)^2 = 1$  sein. Offensichtlich ist  $s_l = \tau s_k \tau$  und somit

$$\text{Grad } s_l = (\text{Grad } \tau)^2 \text{Grad } s_k = \text{Grad } s_k,$$

d.h., alle  $s_k$  haben den gleichen Grad.

Seien  $i: (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, D_-^n)$  und  $j: (S^n, \emptyset) \rightarrow (S^n, D_-^n)$  die Inklusionen. Nach der Aussage von Satz 4.5 induzieren diese stetigen Abbildungen Isomorphismen der  $n$ -ten Homologiegruppen dieser Raumpaare.

Sei  $c \in C_n(D_+^n)$  eine Kette, deren Restklasse in  $C_n(D_+^n, S^{n-1})$  ein relativer Zykel ist, dessen Homologieklassse die Gruppe  $H_n(D_+^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$  erzeugt. Da  $C_n(D_+^n) \subseteq C_n(S^n)$ , können wir  $c$  auch als eine Kette in  $C_n(S^n)$  betrachten.

Sei  $d = (s_n)_\#(c)$ . Dies ist eine Kette in  $C_n(D_-^n)$ .

Weil  $c$  einen Zykel von  $C_n(D_+^n, S^{n-1})$  repräsentiert, ist  $\partial c \in C_*(S^{n-1})$ , und weil  $s_n|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ , gilt

$$\partial d = \partial(s_n)_\#(c) = (s_n)_\#(\partial c) = \partial c.$$

Es folgt, dass  $c - d$  ein Zykel in  $C_n(S^n)$  ist. Weil  $d \in C_n(D_-^n)$ , ist

$$j_{\#}(c - d) = j_{\#}(c) = i_{\#}(c + C_n(S^{n-1})) \in C_n(S^n, D_-^n).$$

Da  $H_n(i)$  und  $H_n(j)$  Isomorphismen sind und  $[c + C_n(S^{n-1})]$  nach der Wahl von  $c$  ein Erzeugendes von  $H_n(D_+^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$  ist, ist  $[c - d]$  ein Erzeugendes von  $H_n(S^n)$ .

Aber  $(s_n)_{\#}(c) = d$  und  $(s_n)_{\#}(d) = c$  (weil  $(s_n)^2 = \text{id}_{S^n}$ ). Also ist

$$(s_n)_{\#}(c - d) = d - c = -(c - d)$$

und  $\text{Grad } s_n = -1$ . ■

**Korollar 4.9** Sei  $n \geq 1$  und sei  $\tau: S^n \rightarrow S^n$  die Antipodenabbildung  $\tau(x) = -x$ . Dann ist  $\text{Grad } \tau = (-1)^{n+1}$ .

*Beweis.*  $\tau = s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1 \circ s_0$  und nach Bemerkung 4.7 d) und Lemma 4.8 ist  $\text{Grad } \tau$  das Produkt von  $n + 1$  Kopien von  $-1$ . ■

Mit diesen Vorbereitungen lassen sich einige schöne einfache Anwendungen der Homologie von Sphären beweisen. Zwar kann man ähnliche Anwendungen auch mit der homotopietheoretischen Variante des Abbildungsgrades erzielen, aber auf elementare Weise nur in Dimension 1, da in höheren Dimensionen einige Komplikationen auftreten. In der Homologie sind alle Dimensionen in etwa gleich schwer (oder gleich leicht) zu behandeln.

**Hilfssatz 4.10** Jeder Retrakt eines azyklischen topologischen Raumes  $X$  ist auch azyklisch.

*Beweis.* Sei  $A \subseteq X$  ein Retrakt von  $X$  und sei  $r: X \rightarrow A$  eine Retraktion. Sei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.

Dann ist  $r \circ i = \text{id}_A$  und somit

$$H_n(r) \circ H_n(i) = H_n(\text{id}_A) = \text{id}_{H_n(A)} \quad (4.12)$$

für jedes  $n$ .

Wenn  $X$  azyklisch ist, dann ist  $H_n(X) = \{0\}$  für jedes  $n \geq 1$  und  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ .

Letzteres besagt nach Lemma 4.2, dass  $X$  wegzusammenhängend ist. Da aus  $r \circ i = \text{id}_A$  folgt, dass  $r$  surjektiv ist, ist auch  $A = \text{Bild } r$  wegzusammenhängend und hat somit  $\mathbf{Z}$  als 0-te Homologiegruppe.

Für  $n \geq 1$  folgt aus  $H_n(X) = \{0\}$ , dass  $H_n(r)$  und  $H_n(i)$  und nach Gleichung (4.12) auch  $\text{id}_{H_n(A)}$  die Nullabbildung sind, woraus man schliesst, dass  $H_n(A) = \{0\}$ . Insgesamt heißt das, dass  $A$  azyklisch ist. ■

**Lemma 4.11** Für jedes  $n \geq 1$  ist  $S^{n-1}$  kein Retrakt von  $D^n$ .

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Hilfssatz 4.10, da  $D^n$  azyklisch ist aber  $S^{n-1}$  nicht, denn die  $n - 1$ -te Homologiegruppe der Sphäre ist  $\mathbf{Z}$  und nicht  $\{0\}$  (oder im Fall  $n = 1$  ist sie  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  und nicht  $\mathbf{Z}$ ). ■

**Satz 4.12 (Brouwerscher Fixpunktsatz)** Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Jede stetige Abbildung

$$f: D^n \longrightarrow D^n$$

hat einen Fixpunkt; d. h., es gibt einen Punkt  $x \in D^n$ , so dass  $f(x) = x$ .

*Beweis.* Für  $n = 0$  muss nichts bewiesen werden, da  $D^0$  nur aus einem einzigen Punkt besteht. Also sei  $n \geq 1$ .

Angenommen, es gibt eine stetige Abbildung  $f: D^n \longrightarrow D^n$  ohne Fixpunkte. Wir können dann wie folgt eine Retraktion  $r: D^n \longrightarrow S^{n-1}$  konstruieren.

Sei  $x \in D^n$ . Da nach Annahme  $f(x) \neq x$ , gibt es eine eindeutig bestimmte gerichtete Gerade in  $\mathbf{R}^n$  von  $f(x)$  nach  $x$ , und wenn wir diese Gerade in der gleichen Richtung fortsetzen, schneidet sie  $S^{n-1}$  in einem eindeutig bestimmten Punkt  $r(x)$  (siehe Abbildung 4.1).

Falls  $x \in S^{n-1}$ , so braucht man die Gerade von  $f(x)$  durch  $x$  gar nicht weiter fortzusetzen, um in  $S^{n-1}$  zu landen, also ist in diesem Fall  $r(x) = x$ .

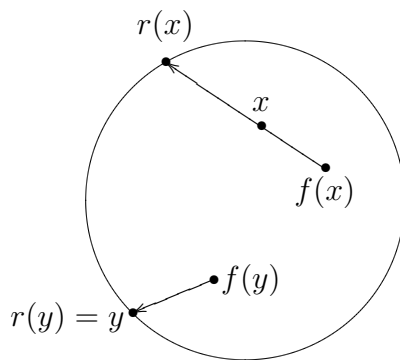


Abbildung 4.1: Eine Retraktion von  $D^n$  auf  $S^{n-1}$ .

Man „sieht“ an dem Bild, dass diese Abbildung stetig ist (wenn man  $x$  wenig verändert, verändert sich auch  $f(x)$  wenig, weil  $f$  stetig ist, und somit ändern sich die Verbindungsgerade und damit ihr Schnittpunkt mit dem Kreis nur wenig).

Aber man kann auch leicht einen richtigen Beweis für die Stetigkeit von  $r$  geben. Für jedes  $x \in D^n$  ist

$$r(x) = f(x) + t(x - f(x)), \quad (4.13)$$

wo  $t \geq 1$  die größere (und eindeutige positive) Lösung der quadratischen Gleichung

$$\|f(x) + t(x - f(x))\|^2 = 1 \quad (4.14)$$

ist. (Hier verwenden wir die normale euklidische Norm auf  $\mathbf{R}^n$ .)

Die übliche  $p$ - $q$ -Formel für die Lösung quadratischer Gleichungen zeigt, dass die größere der beiden Lösungen (in  $t$ ) von der Gleichung (4.14) stetig von  $x$  und  $f(x)$  abhängt. Deshalb, und weil  $f$  stetig ist, hängt  $r$  nach Gleichung (4.13) stetig von  $x$  ab.

Da ferner  $r(x) = x$  für  $x \in S^{n-1}$ , ist  $r$  eine Retraktion von  $D^n$  auf  $S^{n-1}$ , in Widerspruch zu Lemma 4.11. Also hat  $f$  einen Fixpunkt. ■

**Lemma 4.13** Sei  $n \in \mathbf{N}$  und seien  $f$  und  $g: S^n \rightarrow S^n$  stetige Abbildungen.

Wenn für jedes  $x \in S^n$  gilt  $f(x) \neq -g(x)$ , dann ist  $f \simeq g$ .

*Beweis.* Sei  $r: D^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  die Retraktion

$$r(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Definiere eine Homotopie  $H: S^n \times I \rightarrow D^{n+1}$  durch

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass  $H(x, t)$  nie 0 ist, denn sonst gibt es ein  $x \in S^n$  und ein  $t \in [0, 1]$  mit  $(1 - t)f(x) + tg(x) = 0$  oder

$$(1 - t)f(x) = -tg(x). \quad (4.15)$$

Da aber  $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 1$ , ist

$$1 - t = |1 - t| = \|(1 - t)f(x)\| = \|-tg(x)\| = |-t| = t$$

oder in anderen Worten  $t = 1 - t = \frac{1}{2}$ , und daraus folgt mit (4.15), dass  $f(x) = -g(x)$ , in Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Da also  $H(x, t)$  nie 0 ist, können wir  $r$  auf seinen Wert anwenden, und  $r \circ H$  ist eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  als Abbildungen  $S^n \rightarrow S^n$ . ■

**Korollar 4.14** Sei  $n \geq 1$  und sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung.

Wenn  $f$  keinen Fixpunkt hat (also keinen Punkt  $x$  mit  $f(x) = x$ ), so ist  $f$  homotop zur Antipodenabbildung  $\tau$  mit  $\tau(x) = -x$  für jedes  $x$ .

Wenn  $f$  keinen Antipodenpunkt hat (also keinen Punkt  $x$  mit  $f(x) = -x$ ), so ist  $f \simeq \text{id}_{S^n}$ .

*Beweis.* Ein Punkt  $x$  ist genau dann ein Fixpunkt von  $f$ , wenn  $f(x) = -\tau(x)$ . Wenn es keinen solchen Punkt gibt, dann folgt aus Lemma 4.13, dass  $f \simeq \tau$ . Und wenn  $f$  keinen Antipodenpunkt hat, so folgt entsprechend aus Lemma 4.13, dass  $f \simeq \text{id}_{S^n}$ . ■

**Korollar 4.15** Sei  $n \in \mathbf{N}$  gerade. Jede stetige Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  hat entweder einen Fixpunkt (mit  $f(x) = x$ ) oder einen Antipodenpunkt (mit  $f(x) = -x$ ).

*Beweis.* Sei  $\tau: S^n \rightarrow S^n$  die Antipodenabbildung mit  $\tau(x) = -x$  für jedes  $x$ .

Wenn  $f$  weder einen Fixpunkt noch einen Antipodenpunkt hat, so besagt Korollar 4.14, dass  $\tau \simeq f \simeq \text{id}_{S^n}$ , aber für  $n$  gerade ist das nach Bemerkung 4.7 a) nicht möglich, weil nach Korollar 4.9  $\text{Grad } \tau = (-1)^{n+1} = -1$  und  $\text{Grad } \text{id}_{S^n} = 1$ . ■

**Satz 4.16 (Satz vom Igel)** Wenn  $n > 0$  gerade ist, so besitzt  $S^n$  kein nirgends verschwindendes stetiges Tangentenvektorfeld.

Dies kann man auch anders ausdrücken. Da man ein nichtverschwindendes Tangentenvektorfeld auf Länge 1 normieren kann und da die Tangentenvektoren zu  $S^n$  genau die Orthogonalen des Ortsvektors sind, besagt dieser Satz:

Es gibt keine stetige Abbildung  $v: S^n \rightarrow S^n$ , so dass  $v(x) \perp x$  für jedes  $x \in S^n$ .

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Korollar 4.15, denn  $\pm x$  ist nie orthogonal zu  $x$ . Also hat eine solche Abbildung  $v$ , mit  $v(x) \perp x$  für jedes  $x \in S^n$ , weder einen Fixpunkt noch einen Antipodenpunkt, in Widerspruch zum Korollar. ■

Dieser Satz heißt der „Satz vom Igel“, da er, in einer skurrilen Fassung für  $n = 2$ , besagt, dass man die Stacheln eines Igels (ein Einheitsvektorfeld auf einer  $S^2$ , welche die Haut des Igels darstellt), nicht kämmen kann, so dass sie flach (also tangential) liegen.

Die amerikanische Version lautet: man kann eine behaarte Billiardkugel nicht kämmen.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Behaarte Billiardkugeln scheint es in Deutschland nicht zu geben (obwohl es Igel oder zumindest ähnliche Tiere in Amerika gibt).

Wir schließen dieses Kapitel mit einem weiteren Berechnungsbeispiel als Anwendung der Mayer-Vietoris Folge.

**Beispiel 4.17** In  $X := S^1 \times I$  verkleben wir den Kreis  $S^1 \times \{0\}$  mit dem Kreis  $S^1 \times \{1\}$  vermöge eines geeigneten Homöomorphismus  $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$  und betrachten den daraus resultierenden Raum  $Y$ .

Etwas genauer gesagt: wir definieren  $\sim$  als die kleinste Äquivalenzrelation auf  $X$ , so dass  $(z, 0) \sim (\varphi(z), 1)$  für jedes  $z \in S^1$ . Das bedeutet,  $(z, s) \sim (w, t)$  genau dann, wenn  $s = 0, t = 1$  und  $w = \varphi(z)$ , oder wenn  $t = 0, s = 1$  und  $z = \varphi(w)$ , oder wenn  $(z, s) = (w, t)$ . Wir setzen  $Y := S^1 \times I / \sim$ .

Uns interessieren zwei spezielle Instanzen von  $\varphi$ .

- a) Wenn  $\varphi = \text{id}_{S^1}$ , so ist  $Y$  homöomorph zum **Torus**  $T^2 = S^1 \times S^1$  und die Abbildung  $[(z, t)] \mapsto (z, e^{2\pi it})$  ist ein Homöomorphismus, denn die Abbildung

$$\begin{aligned} S^1 \times I &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (z, t) &\longmapsto (z, e^{2\pi it}) \end{aligned}$$

ist identifizierend, wie man leicht überlegt, und bildet genau dann zwei Punkte auf den gleichen Wert, wenn sie bezüglich  $\sim$  äquivalent sind.

Der Torus hat nichttriviale Homologiegruppen nur in Dimension 0, 1 und 2, und dort gilt:

$$H_0(T^2) = \mathbf{Z} \quad (4.16a)$$

$$H_1(T^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \quad (4.16b)$$

$$H_2(T^2) = \mathbf{Z} \quad (4.16c)$$

- b) Der Quotientenraum  $Y$ , der sich ergibt, wenn  $\varphi$  die Spiegelung  $s_1$  aus Lemma 4.8 ist, nennt sich die **Kleinsche Flasche**; wir wollen ihn mit  $K$  bezeichnen. Wir erinnern daran, dass  $s_1(x_0, x_1) = (x_0, -x_1)$ , oder wenn wir  $S^1$  als den Einheitskreis in  $\mathbf{C}$  betrachten, dann ist  $s_1$  die komplexe Konjugation.

Die Kleinsche Flasche hat nichttriviale Homologiegruppen nur in Dimension 0 und 1, und dort gilt:

$$H_0(K) = \mathbf{Z} \quad (4.17a)$$

$$H_1(K) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2 \quad (4.17b)$$

wobei  $\mathbf{Z}_2$ , wie in der Topologie üblich, die Gruppe  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  bedeutet.

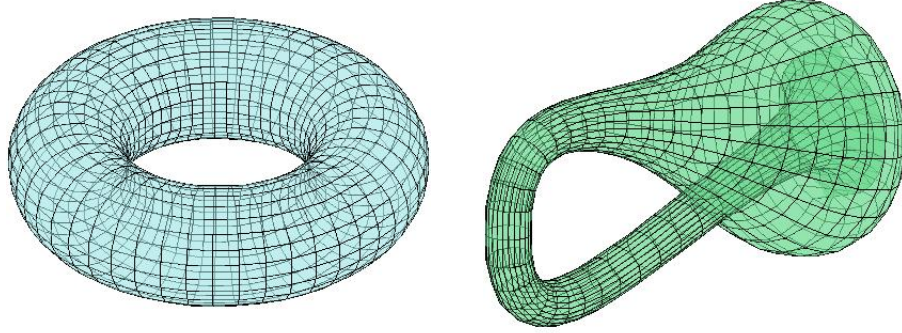
(a) Der Torus  $T^2$ .(b) Die Kleinsche Flasche  $K$ .

Abbildung 4.2: Räume, die man aus einem Kreiszylinder kleben kann.

*Beweis.* Um die Homologie dieser beiden Räume auszurechnen, geben wir eine Mayer-Vietoris Triade an.

Sei  $\pi: S^1 \times I \longrightarrow Y$  die kanonische Projektion auf den Quotientenraum und sei  $A := \pi(S^1 \times [0, \frac{1}{2}])$  und  $B := \pi(S^1 \times [\frac{1}{2}, 1])$ . Auf den beiden genannten Halbzylindern ist  $\pi$  stetig, abgeschlossen (bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab, weil alle genannten Räume kompakt und Hausdorffsch sind) und ist vor allem injektiv und deshalb ein Homöomorphismus auf die Bildräume  $A$  und  $B$ , die also homöomorph zu  $S^1 \times I$  sind.

Man beachte auch, dass für jedes einzelne  $t \in I$  die Abbildung

$$\pi_t := \pi|_{S^1 \times \{t\}}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild  $Y_t := \pi(S^1 \times \{t\}) \cong S^1$  in  $Y$  ist, und dass für jedes  $t$  gilt, dass das Komplement  $Z_t := Y \setminus Y_t \cong S^1 \times (0, 1)$ .

Für  $t = 0$  oder  $1$  ist diese letzte Behauptung klar. Für andere  $t$  drehen wir  $Y$  in sich entlang eines Kreises in der zweiten Koordinatenrichtung, bis  $Y_t$  auf  $Y_0 = Y_1$  zu liegen kommt. Diese „Drehung“ können wir in Koordinaten beschreiben als die Abbildung  $\Phi_t: Y \rightarrow Y$  definiert durch

$$\Phi_t\left([ (x, s) ]\right) := \begin{cases} [(\varphi(x), 1 - t + s)], & \text{wenn } 0 \leq s \leq t; \\ [(x, s - t)], & \text{wenn } t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert. Man prüft als Erstes leicht nach, dass die Koordinatenpaare für die Werte tatsächlich in  $S^1 \times I$  liegen.

Zweitens, wenn  $[(x, s)] = [(x', s')]$  aber  $(x, s) \neq (x', s')$ , dann gilt (eventuell nach Vertauschung der Paare), dass  $s = 0$ ,  $s' = 1$  und  $x' = \varphi(x)$ . Weil



$t$  weder 0 noch 1 ist, ist für jedes dieser Koordinatenpaare in (4.18) eine eindeutige Zeile für die Bestimmung des Wertes anwendbar, und wir finden

$$\Phi_t\left([(x, s)]\right) = \Phi_t\left([(x, 0)]\right) = \left[(\varphi(x), 1-t)\right] = \left[(x', s'-t)\right] = \Phi_t\left([(x', s')]\right).$$

Das heißt, verschiedene Koordinatendarstellungen des Argumentes von  $\Phi_t$  führen zum gleichen Wert.

Drittens, wenn  $s = t \neq 0$  und  $\neq 1$ , dann sind beide Zeilen der Fallunterscheidung in (4.18) anwendbar und bestimmen einen Wert, nämlich  $[(\varphi(x), 1)]$  in der oberen Zeile und  $[(x, 0)]$  in der unteren Zeile. Diese Werte sind aber der gleiche Punkt in  $Y$ . Damit ist gezeigt, dass  $\Phi_t$  wohldefiniert ist.

Wenn wir die Klassenklammern  $[]$  auf der linken Seite in Gleichung (4.18) weglassen, wird aus dieser Gleichung die Definition der Abbildung  $\Phi_t \circ \pi$ , und man sieht anhand der Formeln, dass diese Abbildung stetig ist auf  $S^1 \times [0, t]$  und auf  $S^1 \times [t, 1]$ . Diese Mengen bilden eine abgeschlossene Überdeckung von  $S^1 \times I$ . Also ist  $\Phi_t \circ \pi$  auf ganz  $S^1 \times I$  stetig, und weil  $\pi$  identifizierend ist, heißt das, dass  $\Phi_t$  stetig ist auf  $Y$ .

Jede stetige Abbildung  $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$ , die mit  $\varphi$  kommutiert, bestimmt eine wohldefinierte und stetige Abbildung  $\mu_\alpha: Y \rightarrow Y$  gegeben durch

$$\mu_\alpha\left([(x, s)]\right) := \left[(\alpha(x), s)\right].$$

Die Wohldefiniertheit prüft man anhand der Relation  $\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \alpha$  leicht nach, und die Stetigkeit ist anhand der Koordinatendarstellung offensichtlich. Wenn  $\alpha$  ein Homöomorphismus ist, dann ist auch  $\mu_\alpha$  ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung  $\mu_{\alpha^{-1}}$  (wobei  $\alpha^{-1}$  natürlich auch mit  $\varphi$  kommutiert).

Insbesondere gilt diese Behauptung für  $\alpha = \varphi$ . Anhand der Formeln (4.18) kann man direkt nachrechnen, dass

$$\Phi_{1-t} \circ \Phi_t = \mu_\varphi. \quad (4.19)$$

Weil die rechte Seite bijektiv ist, ist  $\Phi_t$  injektiv und  $\Phi_{1-t}$  surjektiv. Weil Gleichung (4.19) für jedes  $t$  gilt, gilt sie auch mit  $t$  und  $1-t$  vertauscht, so dass  $\Phi_t$  auch surjektiv und somit bijektiv ist. Nach (4.19) ist die Umkehrabbildung  $\mu_\varphi^{-1} \circ \Phi_{1-t}$  und somit stetig. Das heißt,  $\Phi_t$  ist ein Homöomorphismus  $Y \rightarrow Y$ .

Aus (4.18) ist klar, dass  $\Phi_t(Y_t) = Y_0 = Y_1$ . Somit bildet  $\Phi_t$  das Komplement  $Z_t$  homöomorph auf  $Z_0 = Z_1 \cong S^1 \times (0, 1)$  ab, was zeigt, dass  $Z_t$  für jedes  $t$  homöomorph zu  $S^1 \times (0, 1)$  ist, wie behauptet.

Nun beachte man, dass  $Y_{3/4} \cap A = \emptyset$  und dass  $A$  ein Deformationsretrakt von  $Z_{3/4}$  ist, denn der Homöomorphismus  $\Phi_{3/4}$  bildet  $Z_{3/4}$  auf  $Z_0 = S^1 \times (0, 1)$  ab und bildet dabei  $A$  auf  $S^1 \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  ab, wie man an der ersten Zeile von

(4.18) sofort ablesen kann. Entsprechend ist  $Y_{1/4} \cap B = \emptyset$  und  $B$  ist ein Deformationsretrakt von  $Z_{1/4}$ .

Der Homöomorphismus  $\Phi_{3/4}$  bildet  $A \cap B = Y_0 \cup Y_{1/2}$  auf  $Y_{1/4} \cup Y_{3/4}$  ab, und bildet  $Z_{3/4} \cap Z_{1/4}$  auf  $Z_1 \cap Z_{1/2}$  ab.

Unter dem Homöomorphismus zwischen  $Z_1$  und  $S^1 \times (0, 1)$  geht  $Y_{1/4} \cup Y_{3/4}$  auf  $(S^1 \times \{\frac{1}{4}\}) \cup (S^1 \times \{\frac{3}{4}\})$  und  $Z_1 \cap Z_{1/2}$  auf  $(S^1 \times (0, \frac{1}{2})) \cup (S^1 \times (\frac{1}{2}, 1))$ , woran man sofort sieht, dass  $Y_{1/4} \cup Y_{3/4}$  ein Deformationsretrakt von  $Z_1 \cap Z_{1/2}$  ist und somit  $A \cap B$  ein Deformationsretrakt von  $Z_{3/4} \cap Z_{1/4}$  ist.

Die Mengen  $Z_{1/4}$  und  $Z_{3/4}$  sind beide offen und sie überdecken  $Y$ , so dass  $(Y; Z_{3/4}, Z_{1/4})$  eine Mayer-Vietoris Triade ist. Aus Lemma 3.60 b) folgt, dass auch  $(Y; A, B)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist.

Die Unterräume  $A$  und  $B$  haben beide den Homotopietyp eines Kreises und somit auch die Homologie von  $S^1$ . Ihr Durchschnitt  $A \cap B = Y_0 \cup Y_{1/2}$  ist die disjunkte Vereinigung von zwei Kreisen und hat Homologie  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  in Dimensionen 0 und 1 und  $\{0\}$  in allen anderen Dimensionen.

Weil die Homologiegruppen von  $A$ ,  $B$  und  $A \cap B$  ab Dimension 2 alle verschwinden, sieht man aus der Mayer-Vietoris Folge von  $(Y; A, B)$ , dass  $H_n(Y) = \{0\}$  für alle  $n \geq 3$ . Weil  $Y$  offenbar wegweise zusammenhängend ist, ist  $H_0(Y) = \mathbf{Z}$ . Wir müssen nur noch  $H_1$  und  $H_2$  ausrechnen, und der dafür relevante Teil der Mayer-Vietoris Folge ist

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow H_2(Y) \longrightarrow H_1(A \cap B) \xrightarrow{(i'_*, i''_*)} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{j'_* - j''_*} H_1(Y) \\ &\xrightarrow{\beta} H_0(A \cap B) \xrightarrow{(i'_*, i''_*)} H_0(A) \oplus H_0(B) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Zunächst betrachten wir den Pfeil

$$(i'_*, i''_*): H_0(A \cap B) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = H_0(A) \oplus H_0(B).$$

Da  $A$  und  $B$  beide wegweise zusammenhängend sind, bildet  $i'_*$  nach Korollar 4.3 jeden Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(A \cap B)$  identisch auf  $\mathbf{Z} = H_0(A)$  ab, und die entsprechende Aussage gilt auch für  $i''_*$ . In anderen Worten,

$$(i'_*, i''_*)(m, n) = (m + n, m + n).$$

Der Kern dieses Homomorphismus (und das Bild von  $\beta$ ) ist

$$\{(m, n) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \mid n = -m\} \cong \mathbf{Z}. \quad (4.21)$$

Wir können also die untere Zeile in (4.20) ersetzen durch

$$\xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}, \quad (4.22)$$

ohne die erste Zeile und ihre Exaktheit zu verändern.

Wir schauen uns kurz die Konsequenz dieser Vereinfachung an. Wir sehen, dass  $\beta$  surjektiv ist und  $\text{Bild } \beta = \mathbf{Z}$ . Sei  $c \in H_1(Y)$  ein Element mit  $\beta(c) = 1$ .

Sei  $\kappa$  die Abbildung  $j'_* - j''_*$  am Ende der oberen Zeile in (4.20). Dann ist  $\text{Ker } \beta = \text{Bild } \kappa$ . Wir definieren eine Abbildung  $\delta: H_1(Y) \rightarrow \text{Ker } \beta$  durch

$$\delta(x) = x - \beta(x)c$$

Dieser Wert gehört tatsächlich zu  $\text{Ker } \beta$ , weil

$$\beta(x - \beta(x)c) = \beta(x) - \beta(x)\beta(c) = \beta(x) - \beta(x) \cdot 1 = 0.$$

Auf  $\text{Ker } \beta$  ist  $\delta$  offensichtlich die Identität. Außerdem ist  $\delta(c) = c - 1 \cdot c = 0$ .

Man prüft leicht nach, dass  $(\beta, \delta)$  ein Isomorphismus

$$H_1(Y) \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta = \mathbf{Z} \oplus \text{Bild } \kappa$$

ist. Erstens ist die Abbildung injektiv, denn wenn  $\beta(x) = \delta(x) = 0$ , dann ist

$$x = x - \beta(x)c = \delta(x) = 0.$$

Die Abbildung ist auch surjektiv, denn sie bildet  $\text{Ker } \beta$  auf  $\{0\} \oplus \text{Ker } \beta$  ab und bildet die von  $c$  erzeugte Untergruppe von  $H_1(Y)$  auf  $\mathbf{Z} \oplus \{0\}$  ab. Ihr Gesamtbild ist also ganz  $\mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta$ . Damit ist gezeigt, dass  $(\beta, \delta)$  ein Isomorphismus ist und  $H_1(Y) \cong \mathbf{Z} \oplus \text{Bild } \kappa$ .

Wir sind an dieser Stelle natürlich nicht fertig. Dazu müssen wir die Gestalt von  $\text{Bild } \kappa$  bestimmen, und diese wird von der Verklebungsabbildung  $\varphi$  abhängen; wie, erklären wir in den einzelnen Fällen, die wir behandeln.

Wir betrachten jetzt den Pfeil

$$(i'_*, i''_*): H_1(A \cap B) = H_1(Y_0) \oplus H_1(Y_{\frac{1}{2}}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = H_1(A) \oplus H_1(B)$$

in Dimension 1. Um ihn auszurechnen, müssen wir feste Isomorphismen der genannten Homologiegruppen zu  $\mathbf{Z}$  wählen, und das machen wir, indem wir einen festen Isomorphismus  $H_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$  als vorgegeben annehmen und für die genannten Räume  $M = Y_0, Y_{1/2}, A$  oder  $B$  folgende feste Homotopieäquivalenzen  $S^1 \rightarrow M$  wählen, die einen Isomorphismus  $\mathbf{Z} = H_1(S^1) \rightarrow H_1(M)$  bestimmen.

Für jedes  $t \in I$  sei  $h_t: S^1 \rightarrow S^1 \times I$  die Abbildung  $x \mapsto (x, t)$ , und sei  $k_t := \pi \circ h_t: S^1 \rightarrow Y$ ; dies ist eine Einbettung, also ein Homöomorphismus auf sein Bild  $Y_t$ .

Man beachte, dass  $k_0 = k_1 \circ \varphi$  wegen der Verklebungsvorschrift bei der Konstruktion von  $Y$ .

Wir identifizieren  $H_1(Y_0)$  und  $H_1(Y_{1/2})$  mit  $\mathbf{Z}$  durch die Isomorphismen  $H_1(k_t): \mathbf{Z} = H_1(S^1) \longrightarrow H_1(Y_t)$  für  $t = 0$  und  $t = 1/2$ .

Der Kreis  $Y_{1/2}$  ist ein Deformationsretrakt von  $A$  und von  $B$  und wir identifizieren  $H_1(A)$  und  $H_1(B)$  mit  $H_1(Y_{1/2}) \cong \mathbf{Z}$  durch den von der Inklusion induzierten Homologieisomorphismus.

Das bedeutet, dass wir letztendlich  $H_1(A)$  durch  $i'_*(k_{1/2})_*$  mit  $\mathbf{Z}$  identifizieren, und wir identifizieren  $H_1(B)$  mit  $\mathbf{Z}$  durch  $i''_*(k_{1/2})_*$ .

$H_1(Y_{1/2})$  ist auch der rechte Summand  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , so dass auf diesem Summanden  $i'_*$  und  $i''_*$  einfach die Identität sind.

Auf dem linken Summanden  $H_1(Y_0)$ , identifiziert mit  $\mathbf{Z}$  durch  $(k_0)_*$ , betrachten wir zunächst den von der Inklusion nach  $A$  induzierten Homomorphismus  $i'_*$ . Da  $h_0 \simeq h_{1/2}$  als Abbildungen  $S^1 \longrightarrow S^1 \times [0, \frac{1}{2}]$ , ist  $k_0 \simeq k_{1/2}$  als Abbildungen nach  $A$ , oder anders gesagt, wir haben  $i'k_0 \simeq i'k_{1/2}$  und somit ist

$$i'_*(k_0)_* = i'_*(k_{1/2})_*: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(A).$$

Bezüglich der von uns fest gewählten Isomorphismen der Homologiegruppen zu  $\mathbf{Z}$  ist  $i'_*$  auf dem linken Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B)$  also die Identität.

Für die entsprechenden Abbildungen nach  $B$  gilt stattdessen  $h_{1/2} \simeq h_1$  als Abbildungen  $S^1 \longrightarrow S^1 \times [\frac{1}{2}, 1]$ , und deshalb ist  $k_{1/2} \simeq k_1$  als Abbildungen nach  $B$ , oder anders gesagt,  $i''k_{1/2} \simeq i''k_1$ .

Aus diesem Grund ist

$$i''_*(k_0)_* = i''_*(k_1)_*\varphi_* = i''_*(k_{1/2})_*\varphi_*: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(B).$$

Bezüglich der von uns fest gewählten Isomorphismen der Homologiegruppen zu  $\mathbf{Z}$  ist  $i''_*$  auf dem linken Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B)$  also nicht unbedingt die Identität, sondern ist gleich  $\varphi_*: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ .

Zu Teil a): Im Falle des Torus ist  $\varphi_*$  die Identität und deshalb ist auch  $i''_* = \text{id}_{\mathbf{Z}}$  auf dem linken Summanden von  $H_1(A \cap B)$ . In diesem Fall sieht der Ausschnitt (4.20) aus der Mayer-Vietoris Folge mit der Vereinfachung (4.22) so aus:

$$\{0\} \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\kappa} H_1(T^2) \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}$$

wobei  $\iota(m, n) = (m + n, m + n)$ .

$H_2(T^2) \cong \text{Ker } \iota \cong \mathbf{Z}$  (wie der Kern dieser Abbildung  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  aussieht, haben wir in (4.21) schon angegeben).

$\text{Ker } \kappa = \text{Bild } \iota = \{(m, m) \mid m \in \mathbf{Z}\}$ , woraus folgt, dass  $\kappa$  injektiv ist auf  $H_1(A) = \mathbf{Z} \oplus \{0\}$ . Außerdem gilt für jedes  $m \in \mathbf{Z}$ , dass  $\kappa(0, m) = \kappa(-m, 0)$ , weil die Differenz der beiden Zahlenpaare in  $\text{Ker } \kappa$  liegt. Daraus ist klar, dass  $\kappa(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}) = \kappa(\mathbf{Z} \oplus \{0\})$  und dass  $\kappa$  die Gruppe  $\mathbf{Z} \oplus \{0\}$  isomorph auf

Bild  $\kappa = \text{Ker } \beta$  abbildet; diese Untergruppe von  $H_1(T^2)$  ist also isomorph zu  $\mathbf{Z}$ .

Wie auf auf Seite 155 hergeleitet wissen wir damit, dass, wie behauptet,

$$H_1(T^2) \cong \mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

Zu Teil b): Im Falle der Kleinschen Flasche  $K$  ist  $\varphi$  die Spiegelung  $s_1$  und nach Lemma 4.8 ist  $i''_* = \varphi_*$  die Multiplikation mit  $-1$  auf dem linken Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B)$ .

Jetzt sieht der Ausschnitt (4.20) aus der Mayer-Vietoris Folge mit der Vereinfachung (4.22) so aus:

$$\{0\} \longrightarrow H_2(K) \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\kappa} H_1(K) \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}$$

mit  $\lambda(m, n) = (m + n, n - m)$ .

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker } \lambda &= \{ (m, n) \in \mathbf{Z}^2 \mid m + n = 0 \text{ und } n = m \} \\ &= \{ (m, m) \in \mathbf{Z}^2 \mid 2m = 0 \} \cong \{0\}. \end{aligned}$$

Also ist  $H_2(K) \cong \text{Ker } \lambda = \{0\}$ , wie wir behauptet haben.

$\text{Ker } \kappa = \text{Bild } \lambda$  besteht aus allen  $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$  mit  $p \equiv q \pmod{2}$ , denn die Differenz der beiden Koordinaten in  $\lambda(m, n)$  ist  $2m$ , also gerade, und für jedes Paar  $(p, q)$  mit  $p - q$  gerade (sagen wir  $p - q = 2k$ ) erhalten wir  $(p, q)$  als  $\lambda(k, q + k)$ .

Die Abbildung  $\kappa$  induziert einen Isomorphismus

$$\frac{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}}{\text{Ker } \kappa} \longrightarrow \text{Bild } \kappa.$$

Die Abbildung  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ , die  $(p, q)$  auf  $p - q \pmod{2} = p - q + 2\mathbf{Z}$  abbildet, ist surjektiv und hat den gleichen Kern, wie  $\kappa$ , so dass

$$\text{Ker } \beta = \text{Bild } \kappa \cong \frac{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}}{\text{Ker } \kappa} \cong \mathbf{Z}_2.$$

Wie auf auf Seite 155 hergeleitet, wissen wir jetzt also, dass

$$H_1(K) \cong \mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2,$$

wie behauptet.

Unsere Herleitung beschreibt auch die genaue Gestalt der Homomorphismen in der Mayer-Vietoris Folge, was manchmal nützlich zu wissen ist. ■



# Kapitel 5

## Zelluläre Homologie

Im letzten Kapitel haben wir mit den in Kapitel 3 entwickelten Mitteln einige Homologieberechnungen durchgeführt, zum Beispiel für die Sphären beliebiger Dimension und, unter Anwendung der Mayer-Vietoris Folge, für den Torus und die Kleinsche Flasche.

Obwohl die Idee bei den letzten beiden Beispielen recht einfach war — man kann beide Räume in zwei an den Enden miteinander verklebte Zylinder zerlegen und erhält so eine Mayer-Vietoris Triade — verlangte die Detailberechnung genaue Kenntnisse der durch die Verklebung induzierten Homologiehomomorphismen der Inklusionen der verklebten Randkreise in die Zylinder und verursachte doch einen erheblichen Aufwand.

Schon für Räume, die nur geringfügig komplizierter sind als diese, zum Beispiel für die projektiven Räume (die Quotientenräume, die man aus den Sphären erhält, wenn man antipodische Punkte miteinander identifiziert), kann sich dieser Aufwand ins Unermessliche steigern, so dass eine praktikable Berechnung der Homologie alleine mit den Grundmitteln der Eilenberg-Steenrod Axiome zwar nicht unmöglich, aber sehr unangenehm ist.

Die hier genannten topologischen Räume sind aber keine exotischen oder ungewöhnlichen Beispiele. Im Gegenteil, sie sind besonders schön und gehören zu einer großen Klasse von sich wohl verhaltenden Räumen, die auf eine für Homologieberechnungen sehr günstige Weise aufgebaut sind. Dieser Aufbau erlaubt eine vereinfachte Berechnung der Homologie, in der die Kettengruppen, wenn die Räume kompakt sind, sogar endlichen Rang haben und somit sehr viel kleiner sind, als die singulären Kettengruppen.

Die genannten Räume haben auch schöne homotopietheoretische Eigenschaften und bilden die Grundlage und den „Normalfall“ für viele Kernkonstruktionen der modernen algebraischen Topologie, in denen Homotopie und Homologie in enger Verbindung stehen. Auch deshalb lohnt es sich sehr, diese Räume kennen zu lernen.

Die Räume der genannten Klasse werden auf eine geregelte Weise aus Scheiben  $D^n$  verschiedener Dimensionen zusammengebaut, die man die **Zellen** dieser Konstruktion nennt. Aus diesem Grund heißen diese Räume unter anderem auch **Zellenkomplexe**. Ihre Homologie lässt sich mit Hilfe von Kettenkomplexen berechnen, die von den Zellen anstelle der singulären Simplizes frei erzeugt werden, weshalb diese Homologietheorie die **zelluläre Homologie** genannt wird.

Wir werden in diesem Kapitel die zelluläre Homologie entwickeln und zeigen, dass sie für Zellenkomplexe (genauer gesagt, für sich genügend wohl verhaltende Zellenkomplexe) isomorph ist zur singulären Homologie. Im Anschluss wenden wir die zelluläre Homologie in Beispielen an zur Berechnung der Homologiegruppen einiger wichtiger topologischer Räume. Leider erlaubt uns die Zeit und der Umfang des Themas nicht, die *homotopietheoretischen* Eigenschaften der Zellenkomplexe in Detail zu entwickeln.

**Notation 5.1** In diesem Abschnitt werden wir viel mit Scheiben  $D^n$  hantieren, und dabei insbesondere auch mit den offenen Scheiben gegeben durch das Innere der  $D^n$ . Um das deutlich zu kennzeichnen und dabei das Schriftbild möglichst einfach zu halten, führen wir die Notation  $E^n$  ein für die offene  $n$ -Scheibe

$$E^n := \overset{\circ}{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}.$$

**Definition 5.2** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{N}$ . Eine  **$n$ -Zelle** in  $X$  ist ein Unterraum  $e$  von  $X$ , der homöomorph ist zu  $E^n$ .

Die Zahl  $n$  heißt die **Dimension** der Zelle  $e$  und sie ist eindeutig bestimmt, denn  $E^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ , und weil Sphären verschiedener Dimensionen verschiedene Homologiegruppen haben (nach Satz 4.5) können offene Scheiben verschiedener Dimensionen nicht zu ein und derselben Zelle homöomorph sein.

Um die Dimension einer Zelle kenntlich zu machen, hängt man sie manchmal als „Exponent“ an den Namen der Zelle an, d. h., man notiert die Zelle mit  $e^n$  statt mit  $e$  (und entsprechend für andere Zellennamen).

Eine **abgeschlossene  $n$ -Zelle** in  $X$  ist die abgeschlossene Hülle  $\bar{e}$  einer  $n$ -Zelle  $e$ .

Der **Rand**  $\partial e$  (oft auch  $\dot{e}$ ) einer  $n$ -Zelle  $e \subseteq X$  ist definiert als

$$\dot{e} := \partial e := \bar{e} \setminus e.$$

Man beachte, dass das *nicht* das Gleiche ist, wie der Rand im Sinne der mengentheoretischen Topologie von der Teilmenge  $e \subseteq X$ , weil die „offene“ Zelle  $e$  nicht wirklich offen sein muss im Raum  $X$ .



**Beispiel 5.3** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **0-Zelle** in  $X$  ist einfach ein Punkt  $x \in X$ , denn

$$\overset{\circ}{D}^0 = D^0 = \mathbf{R}^0 = \{0\}$$

ist einpunktig.

Wenn  $X$  Hausdorffsch ist, dann ist jede 0-Zelle gleichzeitig eine abgeschlossene 0-Zelle, und der Rand einer 0-Zelle ist leer.

**Definition 5.4** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **Zellenzerlegung** von  $X$  ist eine Familie  $\mathcal{Z}$  von Zellen in  $X$  von beliebiger Dimension, die disjunkt sind und die  $X$  überdecken.

Ein **Zellenkomplex** ist ein Paar  $(X, \mathcal{Z})$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $\mathcal{Z}$  eine Zellenzerlegung von  $X$  ist. Wenn eine feste Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$  gegeben ist, nennen wir aus Bequemlichkeit oft auch den topologischen Raum  $X$  selber einen **Zellenkomplex**.

Ein Zellenkomplex  $(X, \mathcal{Z})$  (oder die zugehörige Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$ ) heißt **endlich**, wenn  $\mathcal{Z}$  nur aus endlich vielen Zellen besteht.

Ein **Unterzellenkomplex** eines Zellenkomplexes  $(X, \mathcal{Z})$  ist ein Unterraum  $A$  von  $X$ , der eine Vereinigung von Zellen von  $\mathcal{Z}$  ist. In diesem Fall ist

$$\mathcal{Z}_A := \mathcal{Z}|A := \{e \in \mathcal{Z} \mid e \subseteq A\}$$

eine Zellenzerlegung von  $A$  und  $(A, \mathcal{Z}_A)$  ist selber ein Zellenkomplex.

Die **Dimension** einer Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $X$  oder eines Zellenkomplexes  $(X, \mathcal{Z})$  ist definiert als das Supremum der Dimensionen der Zellen in  $\mathcal{Z}$ . Sie kann  $\infty$  sein.

Für  $n \in \mathbf{Z}$  definieren wir das  **$n$ -Skelett**  $X^n$  einer Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $X$  oder eines Zellenkomplexes  $(X, \mathcal{Z})$  als die Vereinigung

$$X^n := \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ \dim e \leq n}} e$$

der Zellen von Dimension höchstens  $n$  in der Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$ .

Offensichtlich ist  $X^n$  ein Unterzellenkomplex von  $X$  von Dimension höchstens  $n$ ; seine Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}|X^n$  bezeichnen wir als Abkürzung mit  $\mathcal{Z}_n$ .

Wenn  $(X, \mathcal{Z})$  und  $(Y, \mathcal{Z}')$  zwei Zellenkomplexe sind, so nennen wir eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  **zellulär**, wenn für jedes  $n \in \mathbf{N}$  gilt

$$f(X^n) \subseteq Y^n.$$

Es wird *nicht* verlangt, dass  $f$  Zellen in Zellen abbildet!

**Beispiel 5.5** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein Zellenkomplex und sei  $A \subseteq X$  ein Unterzellenkomplex. Dann ist die Inklusion  $A \hookrightarrow X$  immer zellulär.

**Bemerkung 5.6** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein Zellenkomplex. Dann gilt für die Skelette  $X^n$  von  $X$ :

- a)  $X^n = \emptyset$  wenn  $n < 0$ .
- b)  $X^m \subseteq X^n$  wenn  $m \leq n$ .
- c)  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ .
- d)  $X^n = X$  wenn  $n \geq \dim \mathcal{Z}$ .

Jeder topologische Raum  $X$  besitzt eine „triviale“ und sicher nicht besonders nützliche Zellenzerlegung als die Vereinigung der Einpunktmengen seiner Punkte; diese Zellenzerlegung verrät natürlich nichts über die Geometrie von  $X$  (sondern verschleiert sie).

Um etwas Sinnvolles mit Zellenzerlegungen anfangen zu können, müssen wir solche frivolen Beispiele ausschließen. Wir brauchen eine Kontrolle über die Weise, wie verschiedene Zellen der Zellenzerlegung sich angrenzen und wie sie zueinander liegen. Diese Kontrolle gewinnen wir durch eine zusätzliche Struktur, die die Zellen an ihre Umgebung bindet.

**Definition 5.7** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $e \subseteq X$  eine  $n$ -Zelle in  $X$ . Eine *charakteristische Abbildung* für  $e$  ist eine stetige Abbildung

$$\Phi_e: D^n \longrightarrow X,$$

so dass  $\Phi_e|_{E^n}$  ein Homöomorphismus  $E^n \longrightarrow e$  ist.

Wenn  $\Phi_e$  eine charakteristische Abbildung für die Zelle  $e$  ist, so nennen wir die Abbildung

$$\varphi_e = \Phi_e|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \longrightarrow X$$

die zu  $\Phi_e$  gehörende *Anheftungsabbildung* der Zelle  $e$ .

**Bemerkung 5.8** Sei  $X$  ein Hausdorffscher topologischer Raum und sei  $e$  eine  $n$ -Zelle in  $X$ . Die Zelle  $e$  muss nicht unbedingt eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$  haben, aber wenn sie eine besitzt, so gilt folgendes:

- a)  $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$ .
- b)  $\Phi_e(D^n) = \bar{e}$ .

- c)  $\Phi_e: D^n \longrightarrow \bar{e}$  ist identifizierend.
- d)  $\Phi_e$  und somit auch  $\varphi_e$  sind durch  $\Phi_e|_{E^n}$  eindeutig bestimmt.
- e)  $\partial e = \Phi_e(S^{n-1})$  und ist abgeschlossen in  $X$ .
- f)  $e$  ist offen in  $\bar{e}$ .

*Beweis.* a): Auf jeden Fall ist  $E^n \subseteq \Phi_e^{-1}(e)$ , und wenn die Gleichheit nicht gilt, so gibt es auch einen Punkt  $z$  in  $S^{n-1}$  mit  $\Phi_e(z) \in e$ . Da  $\Phi_e$  ein Homöomorphismus von  $E^n$  auf  $e$  ist, gibt es einen Punkt  $x \in E^n$  mit  $\Phi_e(x) = \Phi_e(z)$ .

Sei  $r \in (0, 1)$  eine Zahl, so dass  $r > |x|$  (hier ist die euklidische Norm gemeint). Sei  $U \subseteq E^n$  die offene Scheibe von Radius  $r$  um  $0 \in \mathbf{R}^n$  und sei  $V := E^n \setminus \bar{D}_r^n$  das Komplement der abgeschlossenen Scheibe von Radius  $r$  um  $0$ . Offensichtlich ist  $S^{n-1} \subseteq \bar{V}$  in  $D^n$ , und deshalb gibt es eine Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  von Punkten in  $V$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z.$$

Weil  $\Phi_e$  auf ganz  $D^n$  stetig ist, folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_e(a_n) = \Phi_e(z) = \Phi_e(x). \quad (5.1)$$

Das gilt zunächst in  $\bar{e}$ , aber weil alle vorkommenden Werte in  $e$  liegen gilt es auch in  $e$ .

Hier haben wir einen Widerspruch, denn weil  $\Phi_e$  ein Homöomorphismus von  $E^n$  auf  $e$  ist (und somit auch injektiv), sind  $\Phi_e(U)$  und  $\Phi_e(V)$  offen in  $e$  und disjunkt. Insbesondere enthält die offene Menge  $\Phi_e(U) \subseteq e$  den Grenzwert  $\Phi_e(x)$ , aber keinen Punkt  $\Phi_e(a_n)$  der eigentlichen Folge. Das widerspricht der Konvergenzbehauptung (5.1).

b): Weil  $D^n = \overline{E^n}$  und  $\Phi_e(E^n) = e$ , ist  $\Phi_e(D^n) \subseteq \bar{e}$ .

Weil  $D^n$  kompakt ist, ist  $\Phi_e(D^n)$  kompakt und da  $X$  Hausdorffsch ist, auch abgeschlossen in  $X$ . Daraus folgt  $\bar{e} \subseteq \Phi_e(D^n)$ .

c):  $\Phi_e$  ist surjektiv auf  $\bar{e}$  nach Teil b), und ist stetig nach Voraussetzung. Es muss nur noch gezeigt werden, dass eine Teilmenge  $A$  von  $\bar{e}$ , deren Urbild unter  $\Phi_e$  abgeschlossen ist, in  $\bar{e}$  abgeschlossen ist.

Aber wenn  $\Phi_e^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $D^n$  ist, ist es auch kompakt. Folglich ist  $\Phi_e(\Phi_e^{-1}(A))$  kompakt, weil  $\Phi_e$  stetig ist, und ist gleich  $A$ , weil  $\Phi_e$  surjektiv ist.

Also ist  $A$  kompakt und somit abgeschlossen im Hausdorffschen Raum  $X$ , deshalb auch in  $\bar{e}$ .

d) folgt sofort aus der Stetigkeit von  $\Phi_e$  und der Tatsache, dass  $D^n = \overline{E^n}$ .

e): Aus Teilen b) und a) folgt sofort, dass  $\partial e = \bar{e} \setminus e = \Phi_e(S^{n-1})$ , und dies ist eine kompakte und somit abgeschlossene Teilmenge des Hausdorffschen Raumes  $X$ .

f):  $e = \bar{e} \setminus \partial e$  ist offen in  $\bar{e}$ , weil  $\partial e$  abgeschlossen ist nach Teil e). ■

Charakteristische Abbildungen, wenn sie existieren, „halten einen Zellenkomplex zusammen“. Ein paar zusätzliche Eigenschaften, die verhindern, dass die Zusammenklebung zu wild wird, reichen aus für viele wichtige Konstruktionen in der algebraischen Topologie, die meisten in der Homotopietheorie, aber auch für die von uns angepeilte vereinfachte Berechnung der Homologie.

**Definition 5.9** Sei  $X$  ein Hausdorffscher topologischer Raum. Eine **CW-Zerlegung** von  $X$  ist eine Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$ , so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- a) Jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  besitzt eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$ .
- b) Für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  gilt  $\partial e \subseteq X^{\dim e - 1}$ .
- c) (Bedingung „C“=**closure-finite**) Für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  ist  $\partial e$  enthalten in einer endlichen Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$ , in anderen Worten,  $\partial e$  trifft nur endlich viele Zellen aus  $\mathcal{Z}$ .
- d) (Bedingung „W“=**weak topology**) Die Topologie von  $X$  ist die **schwache Topologie** erzeugt von den Unterräumen  $\bar{e}$  für  $e \in \mathcal{Z}$ ; sie ist definiert als die Finaltopologie der Familie der Inklusionen der abgeschlossenen Zellen  $\bar{e}$  in  $X$ .

Das bedeutet im Detail, dass eine Teilmenge  $A \subseteq X$  genau dann abgeschlossen ist in  $X$ , wenn  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen ist in  $\bar{e}$  für jede Zelle  $e$  von  $X$ .

Ein **CW-Komplex** ist ein Paar  $(X, \mathcal{Z})$ , wo  $X$  ein Hausdorffscher topologischer Raum ist und  $\mathcal{Z}$  eine CW-Zellenzerlegung von  $X$  ist.

Einen Hausdorffschen topologischen Raum  $X$ , der eine CW-Zerlegung besitzt, nennen wir einen **CW-Raum**.

Wie in der Liste der Eigenschaften schon angedeutet, ist „CW“ eine Abkürzung für „closure-finite in the weak topology“.

**Bemerkung 5.10** Da die charakteristischen Abbildungen der Zellen identifizierend sind, erlaubt Bedingung „W“ in Definition 5.9 folgende äquivalente Formulierung:

Eine Teilmenge  $A$  von  $X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $\Phi_e^{-1}(A)$  abgeschlossen ist in  $D^n$  für jede Zelle  $e$  (wo  $n$  die Dimension von  $e$  ist).

**Bemerkung 5.11** Eine endliche Zellenzerlegung eines topologischen Raumes  $X$  erfüllt automatisch die Bedingungen „C“ und „W“ (letztere weil  $X$  die Vereinigung der *endlich vielen* abgeschlossenen Teilmengen  $\bar{e}$  für  $e \in \mathcal{Z}$  ist).

Also ist ein endlicher CW-Komplex einfach ein Hausdorffscher Zellenkomplex, in dem jede Zelle  $e$ , von Dimension  $n$ , eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$  hat, so dass  $\Phi_e(S^{n-1})$  nur Zellen von Dimension  $< n$  trifft.

Wir wollen gleich einige Beispiele von CW-Komplexen geben, darunter auch CW-Zerlegungen von Quotientenräumen. Für Quotientenräume im Allgemeinen kann der Nachweis, dass sie *Hausdorffsch* sind, manchmal sehr schwierig sein, auch wenn sie tatsächlich diese Eigenschaft haben. Im Falle der beabsichtigten Beispiele können wir diese notwendige Voraussetzung, die jeder CW-Raum erfüllen muss, mit einem einfachen Hilfslemma nachprüfen, das wir deshalb vorweg behandeln.

**Lemma 5.12** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Angenommen, wir können für je zwei Punkte  $x \neq y \in X$  einen Hausdorffraum  $K$  und eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow K$  finden, so dass  $f(x) \neq f(y)$ .*

*Dann ist  $X$  Hausdorffsch.*

*Beweis.* Seien  $x \neq y \in X$ , und sei  $K$  ein Hausdorffraum und  $f: X \rightarrow K$  eine stetige Abbildung mit  $f(x) \neq f(y)$ . Dann gibt es disjunkte offene Mengen  $U$  und  $V$  in  $K$  mit  $f(x) \in U$  und  $f(y) \in V$ .

$U' := f^{-1}(U)$  und  $V' := f^{-1}(V)$  sind dann disjunkte offene Teilmengen von  $X$  mit  $x \in U'$  und  $y \in V'$ .

Also ist  $X$  Hausdorffsch. ■

**Beispiele 5.13** a) Die leere Menge  $\emptyset$  ist ein CW-Raum ohne Zellen (und aus diesem Grund von Dimension  $-\infty!$ ). Alle Skelette sind natürlich auch leer.

Man beachte, dass wegen Bedingung 5.9 b) jeder nichtleere CW-Raum  $X$  auf jeden Fall 0-Zellen haben muss (da Zellen  $e^n$  mit Dimension  $n > 0$  nichtleere Ränder  $\Phi_e(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$  von kleinerer Dimension haben). Also ist  $\emptyset$  der einzige CW-Raum, der ein leeres Skelett nichtnegativer Dimension besitzt.

b) Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann ein nulldimensionaler CW-Raum, wenn  $X$  die diskrete Topologie trägt. Denn 0-Zellen sind Punkte und deshalb ist die einzige 0-dimensionale Zellenzerlegung, die ein Raum haben kann, die Zerlegung in seine einzelnen Punkte. Eine 0-Zelle  $\{x\}$  (für  $x \in X$ ) hat automatisch eine eindeutige charakteristische Abbildung, nämlich die eindeutige Abbildung von  $D^0 = \{0\} \rightarrow \{x\}$ .

Da 0-Zellen leere Ränder haben, sind Bedingungen 5.9 b) und c) auch erfüllt.

Eine nulldimensionale Zellenzerlegung kann also nur dann *keine* CW-Zerlegung sein, wenn der Raum nicht Hausdorffsch ist oder wenn Bedingung W verletzt ist.

Bedingung W ist genau dann erfüllt, wenn eine Menge  $A \subseteq X$  genau dann abgeschlossen ist in  $X$ , wenn  $A \cap \{x\}$  abgeschlossen ist in  $\{x\}$  für jedes  $x \in X$ . Da aber *jede* Teilmenge von  $X$  diese Eigenschaft hat, erfüllt die Zellenzerlegung genau dann Bedingung W, wenn jede Teilmenge von  $X$  abgeschlossen ist oder gleichbedeutend, wenn  $X$  die diskrete Topologie trägt.

In diesem Fall ist  $X$  auch Hausdorffsch und somit ein CW-Raum.

Wenn  $X$  nicht die diskrete Topologie trägt, gilt schon Bedingung W nicht und  $X$  ist also nicht CW.

- c) Jede Sphäre  $S^n$  hat eine CW-Zellenzerlegung mit zwei  $k$ -Zellen in jeder Dimension  $k$  im Bereich  $0 \leq k \leq n$ .

Das sieht man am einfachsten durch Induktion über  $n$ . Es gilt offensichtlich für  $n = 0$ , da  $S^0$  aus zwei Punkten, also aus zwei 0-Zellen besteht, mit der diskreten Topologie.

Ist  $n > 0$ , so hat der Äquator  $S^{n-1}$  von  $S^n$  nach der Induktionsannahme eine CW-Zerlegung mit zwei Zellen in jeder Dimension  $\leq n - 1$ . Die Sphäre  $S^n$  ist die Vereinigung von  $S^{n-1}$  mit den beiden  $n$ -Zellen  $E_+^n$  und  $E_-^n$  (siehe Beispiel 3.61), und die Homöomorphismen von  $D^n$  zu den abgeschlossenen oberen und unteren Halbsphären  $D_+^n$  und  $D_-^n$  liefern charakteristische Abbildungen für diese Zellen, die  $S^{n-1}$  auf den Äquator, also in das  $(n-1)$ -Skelett abbilden. Die ganze Zellenzerlegung ist endlich und erfüllt somit automatisch Bedingungen C und W.

- d) Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  ist  $D^n$  ein CW-Raum mit einer  $n$ -Zelle und mit zwei Zellen in jeder nichtnegativen Dimension  $< n$ . Denn  $S^{n-1}$  ist nach Teil c) ein CW-Komplex von Dimension  $n - 1$  mit zwei Zellen in jeder Dimension  $\leq n - 1$ , und  $D^n \setminus S^{n-1} = E^n$  ist eine  $n$ -Zelle mit  $\text{id}_{D^n}$  als charakteristische Abbildung. Der Rand  $\partial E^n = S^{n-1}$  dieser Zelle ist gleich dem  $n - 1$ -Skelett der Zellenzerlegung, so dass alle erforderlichen Eigenschaften erfüllt sind.
- e) Neben der CW-Zerlegung aus Teil c) hat jede Sphäre  $S^n$  auch eine einfachere CW-Zerlegung mit nur zwei Zellen, einer 0-Zelle gegeben durch den Südpol  $p_-$ , und der  $n$ -Zelle  $S_+^n$ , das Komplement des Südpols,

das zu  $\mathbf{R}^n$  homöomorph ist vermöge der stereographischen Projektion und somit auch zu  $E^n \cong \mathbf{R}^n$  homöomorph ist.

Der Homöomorphismus  $E^n \longrightarrow S_+^n$  erweitert sich zu einer charakteristischen Abbildung  $\Phi_{S_+^n}$ , die den ganzen Rand  $S^{n-1}$  von  $D^n$  auf den Südpol  $p_-$  von  $S^n$  abbildet, und somit sogar ins 0-Skelett. Diese Zellenzerlegung ist automatisch C und W.

- f) Entsprechend erhalten wir für jedes  $n > 0 \in \mathbf{N}$  eine CW-Zerlegung von  $D^n$  mit genau drei Zellen, einer  $n$ -Zelle  $E^n$ , einer  $n-1$ -Zelle  $S_+^{n-1}$  und einer 0-Zelle bestehend aus dem Südpol von  $S^{n-1}$ .

Die charakteristische Abbildung für die Zelle  $E^n$  ist die gleiche wie in Teil d); nur die Zellenzerlegung des  $n-1$ -Skeletts  $S^{n-1} \subseteq D^n$  hat sich geändert.

- g) Sei  $K = \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{C}$  und sei

$$G := \{ z \in K \mid |z| = 1 \}$$

die multiplikative Gruppe der Elemente von Betrag 1 im normierten Körper  $K$ . Wenn  $K = \mathbf{R}$ , so ist  $G = \{\pm 1\} \cong \mathbf{Z}_2$ , und wenn  $K = \mathbf{C}$ , so ist  $G = S^1$ .

Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Auf

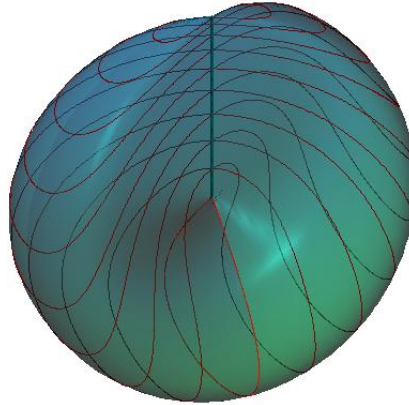
$$S := \{ w = (w_0, \dots, w_n) \in K^{n+1} \mid |w| = 1 \}$$

(diese Menge ist  $S^n$ , wenn  $K = \mathbf{R}$ , und  $S^{2n+1}$ , wenn  $K = \mathbf{C}$ ) definieren wir eine Äquivalenzrelation  $\sim$  durch die Bestimmung:  $w \sim v$  genau dann, wenn es ein  $z \in G$  gibt mit  $v = zw$ .

Der Quotientenraum  $S/\sim$ , der Orbitraum der  $G$ -Operation auf  $S$ , heißt der  ***$n$ -dimensionale projektive Raum***  $KP^n$  über den Körper  $K$ . Wir bezeichnen mit  $\pi: S \longrightarrow KP^n$  die kanonische Projektion auf den Quotienten.

Zur Illustration zeigt Abbildung 5.1 auf der nächsten Seite eine Darstellung des zweidimensionalen reellen projektiven Raumes  $\mathbf{R}P^2$ , der auch die ***reelle projektive Ebene*** genannt wird. Wir wollen die Konstruktion dieser Zeichnung kurz erläutern, bevor wir allgemein auf die Eigenschaften der projektiven Räume weiter eingehen.

Es gibt viele geläufige bildliche Darstellungen der reellen projektiven Ebene und unsere ist nicht die eleganteste, aber man kann an ihr viel-

Abbildung 5.1: Der zweidimensionale reelle projektive Raum  $\mathbf{RP}^2$ 

leicht am einfachsten nachvollziehen, dass sie tatsächlich  $\mathbf{RP}^2$  darstellt.

Nach unserer Definition entsteht die projektive Ebene durch die Identifikation von antipodischen Punkten auf der Sphäre  $S^2$ . Weil jedes Antipodenpaar mindestens einen Punkt aus der abgeschlossenen oberen Halbsphäre  $D_+^2$  enthält, kann man  $\mathbf{RP}^2$  genauso gut als einen Quotienten von  $D_+^2$  erhalten. Punkte auf dem Äquator von  $S^2$  haben Antipoden, die auch auf dem Äquator liegen, und deshalb liegen bei Antipodenpaaren von  $S^2$  entweder *beide* Punkte auf dem Äquator oder *kein* Punkt auf dem Äquator; in letzterem Fall enthält das Antipodenpaar *genau* einen Punkt in der offenen oberen Halbsphäre  $E_+^2$ . Die projektive Ebene entsteht deshalb aus  $D_+^2$ , indem Antipodenpaare auf dem Äquator jeweils zu einem Punkt identifiziert werden und keine anderen Identifikationen vorgenommen werden. Aus der Identifikation auf dem Äquator  $S^1$  entsteht ein  $\mathbf{RP}^1$ , der *auch* ein Kreis ist, und dieser Kreis wird vom Äquator der  $S^2$

zweimal umlaufen als Folge der Antipodenidentifizierung. Wie erläutert ist  $\mathbf{RP}^2 \setminus \mathbf{RP}^1 \cong E_+^2$ .

Leider lässt sich  $\mathbf{RP}^2$  nicht in  $\mathbf{R}^3$  einbetten, sondern nur mit Selbstdurchdringungen in den dreidimensionalen euklidischen Raum abbilden. Die Selbstdurchdringungsstellen bilden die dicke dunkelblaue Linie in der Zeichnung und wir müssen sie auch bei der Erstellung der Zeichnung berücksichtigen. Dazu ersetzen wir die Breitenkreise (parallel zum Äquator) der oberen Halbsphäre durch geschlossene Kurven, die sich an einer Stelle selber kreuzen. Außerdem müssen wir dafür sorgen, dass der Äquator zu einem zweimal umlaufenen Kreis verwandelt wird.

Um die Selbstkreuzungen einzubauen, lassen wir jeden Breitenkreis die Form einer Acht durchlaufen, deren Durchmesser proportional zum Durchmesser des ursprünglichen Breitenkreises ist (deshalb schrumpfen die Achterkurven bei Annäherung an den Nordpol auf einen Punkt zusammen). Aus den Achterkurven ent-



steht zunächst eine sich selbst durchdringende berandete Fläche in Form einer Doppelhaube, in der alle Höhenlinien (bis auf die Spitze, also den „Nordpol“) die Form einer Acht haben; das trifft auch für die Basis (der ursprüngliche Äquator der Sphäre) zu. Um diese Basiskurve zu einem zweimal durchlaufenen Kreis zu verkleben, wie es für die Konstruktion der projektiven Ebene nötig ist, werden die beiden Hälften der Doppelhaube nach unten gebogen, bis die zwei Schlaufen der Basisacht sich treffen und zu einem Kreis verschmelzen; das Ergebnis sehen Sie in der Zeichnung.

Die Konstruktion wird verdeutlicht durch die Kurven, die auf der Fläche sichtbar sind — diese Kurven sind Abbilder von Breitenkreisen der oberen Halbsphäre, nachdem sie das oben beschriebene Verfahren durchlaufen haben. Man kann erkennen, dass es sich um heruntergebogene Achten handelt. Ihre Kreuzungspunkte bilden die dunkelblau gezeichnete Selbstdurchdringungslinie. Die rote Schlaufe, die am Fuße dieser Linie ansetzt, ist das Bild des Äquators, also die eingebettete projektive Gerade  $\mathbf{RP}^1$ , die nichts anderes als ein Kreis ist.

Die Selbstdurchdringungslinie existiert nur in diesem Bild und nicht auf der tatsächlichen Fläche  $\mathbf{RP}^2$ . Ein auf der Fläche „Reisender“, der, sagen wir, von der dem Betrachter zugewendeten vorderen Fläche kommend diese Linie überquert, setzt seine Reise auf der *hinteren* Fläche fort und hat (außer an den Enden der Selbstdurchdringungslinie) keine Möglich-

keit, auf der vorderen Fläche zu bleiben (wenn er nicht umkehrt).

Die reelle projektive Ebene ist eine **nichtorientierbare** Fläche, d. h., sie hat nur eine Seite (das Gleiche gilt für alle geraddimensionalen projektiven Räume). Dies kann man in Abbildung 5.1 leicht nachvollziehen. Stellen wir uns die Fläche etwas verdickt vor, so dass man zumindest lokal eine „Außenseite“ und eine „Innenseite“ unterscheiden kann. Wir wollen einen Reisenden begleiten, der in der Nähe der Selbstdurchdringungslinie seine Reise auf der Außenseite des vorderen Flächenteils beginnt. Nach Überschreitung der Selbstdurchdringungslinie befindet er sich auf der *Innenseite* des hinteren Flächenteils, und von da aus kann er über einen nach unten oder nach „Süden“ führenden Weg schließlich zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren, ohne wieder die Selbstdurchdringungslinie zu überqueren; dabei bleibt er aber ständig auf der lokalen „Innenseite“ der Fläche und erreicht so auch seinen Ausgangspunkt auf der Innenseite und nicht auf der Außenseite, von der er losgegangen ist. Er konnte also, ohne jemals die Fläche zu durchdringen, von einer lokalen Seite zur anderen gelangen, so dass die Fläche global nicht zwei unterscheidbare Seiten hat, sondern nur eine einzige. Dabei beachte man, dass auch an der Selbstdurchdringungslinie die Fläche nicht tatsächlich durchdrungen wird; was im  $\mathbf{R}^3$  so aussieht, wie eine Durchdringung des kreuzenden Teils der Fläche, findet auf der eigentlichen projektiven Ebene nicht statt, denn der „kreuzende“ Teil der Fläche

ist in Wirklichkeit weit weg.

Wie wir schon erwähnt haben, lässt sich die projektive Ebene nicht in den dreidimensionalen Raum einbetten; die Doppelpunkte sind unvermeidbar. Die zu einer Einbettung „nächstbessere“ Darstellung wäre eine **Immersion** — eine Abbildung  $\mathbf{R}P^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , die trotz Doppelpunkten wenigstens eine *lokale* Einbettung ist. Aber unsere Darstellung hat noch nicht einmal diese Eigenschaft (und ist deshalb nicht die „eleganteste“); sie wird verletzt an den Endpunkten der Selbstdurchdringungslinie, weil hier beide sich scheinbar durchdringenden Teile der Fläche auch auf der

echten projektiven Ebene zusammenkommen und somit an diesen Stellen das Abbild einer kleinen lokalen Scheibe der projektiven Ebene in dem Bild keine topologische Scheibe mehr ist. Unsere Darstellung (oder die Fläche, die zurückbleibt, wenn man im unteren Teil eine offene Kreisscheibe entfernt) wird oft eine **Kreuzhaube** genannt, aus leicht nachvollziehbaren Gründen. Es existieren auch Immersionen von  $\mathbf{R}P^2$  nach  $\mathbf{R}^3$  (zum Beispiel die **Boysche Fläche**), die wir hier nicht zeigen, weil man nicht so unmittelbar wie bei der Kreuzhaube einsehen kann, warum diese Fläche den projektiven Raum darstellt.

Nach diesem Exkurs kehren wir zur allgemeinen Theorie zurück.

Die komplexen und reellen projektiven Räume  $KP^n$  sind Hausdorffsche Räume. Nämlich, seien  $x := \pi(x_0, \dots, x_n)$  und  $y := \pi(y_0, \dots, y_n)$  zwei verschiedene Punkte von  $KP^n$ .

Für jedes  $i$  mit  $0 \leq i \leq n$  ist die Abbildung  $\beta_i: S \rightarrow \mathbf{R}$  mit

$$\beta_i(w_0, \dots, w_n) := |w_i|$$

eine stetige Abbildung, die auf jeder  $\sim$ -Äquivalenzklasse konstant ist und somit eine Abbildung  $\tilde{\beta}_i: KP^n \rightarrow \mathbf{R}$  induziert mit  $\tilde{\beta}_i \circ \pi = \beta_i$ . Weil  $\pi$  identifizierend ist, ist  $\tilde{\beta}_i$  auch stetig.

Wenn es ein  $i$  gibt mit  $\tilde{\beta}_i(x) \neq \tilde{\beta}_i(y)$ , können wir sofort Lemma 5.12 anwenden, um disjunkte offene Mengen um  $x$  und  $y$  zu finden.

Wenn es kein solches  $i$  gibt, dann gibt es ein  $j$  mit

$$c := \tilde{\beta}_j(x) = \tilde{\beta}_j(y) \neq 0.$$

Die Abbildung  $\gamma: S \rightarrow \mathbf{C}^{n+1}$  mit

$$\gamma(w_0, \dots, w_n) := \left( \frac{w_0 \bar{w}_j}{c}, \dots, \frac{w_n \bar{w}_j}{c} \right)$$

ist eine stetige Abbildung, die auf jeder  $\sim$ -Äquivalenzklasse konstant ist und somit eine Abbildung  $\tilde{\gamma}: KP^n \rightarrow \mathbf{C}^{n+1}$  induziert mit  $\tilde{\gamma} \circ \pi = \gamma$ . Auch  $\tilde{\gamma}$  ist stetig, weil  $\pi$  identifizierend ist.

Ferner, für die Punkte  $(x_0, \dots, x_n)$  und  $(y_0, \dots, y_n) \in S$  und für  $j$  wie oben sind  $\bar{x}_j/c$  und  $\bar{y}_j/c \in G$ , so dass  $(x_0, \dots, x_n) \sim \gamma(x_0, \dots, x_n) \in S$  und  $(y_0, \dots, y_n) \sim \gamma(y_0, \dots, y_n) \in S$ .

Da  $(x_0, \dots, x_n) \not\sim (y_0, \dots, y_n)$ , muss also

$$\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x_0, \dots, x_n) \neq \tilde{\gamma}(y) = \gamma(y_0, \dots, y_n)$$

sein, und wir haben eine stetige Abbildung in einen Hausdorffraum, die  $x$  und  $y$  trennt. Nach Lemma 5.12 ist  $KP^n$  Hausdorffsch.

Sei  $d$  die Dimension von  $K$  als Vektorraum über  $\mathbf{R}$ , also  $d = 1$  wenn  $K = \mathbf{R}$  und  $d = 2$  wenn  $K = \mathbf{C}$ . Dann ist  $KP^n$  ein  $dn$ -dimensionaler CW-Komplex mit insgesamt  $n + 1$  Zellen, bestehend aus genau einer Zelle  $e_k$  von Dimension  $dk$  für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$ . Diese Zellen und ihre charakteristischen Abbildungen sehen wie folgt aus.

Für jedes  $k$  sei

$$S_k := \{ (w_0, \dots, w_n) \in S \mid w_k \neq 0 \text{ aber } w_l = 0 \text{ für alle } l > k \}$$

und sei  $e_k := \pi(S_k)$ .

Wir zeigen, dass  $e_k$  eine  $dk$ -Zelle ist mit einer charakteristischen Abbildung  $\Phi_k: D^{dk} \longrightarrow KP^n$  gegeben wie folgt. Wir fassen  $D^{dk}$  auf als eine Teilmenge von  $K^k$  und schreiben seine Elemente also nicht als  $dk$ -tupel von reellen Zahlen, sondern als  $k$ -tupel  $x = (x_0, \dots, x_{k-1})$  von Zahlen  $x_i$  im Körper  $K$ , mit  $|x| \leq 1$ . Dann setzen wir

$$\Phi_k(x_0, \dots, x_{k-1}) := \pi\left(x_0, \dots, x_{k-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, 0, \dots, 0\right) \in \bigcup_{l \leq k} e_l.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich stetig und bildet  $S^{dk-1}$  ab in die Vereinigung der  $e_l$  für  $l < k$  und  $E^{dk}$  nach  $e_k$  (Letzteres weil in  $E^{dk}$  gilt  $|x| < 1$ , so dass die  $k$ -te Koordinate  $\sqrt{1 - |x|^2}$  des Tupels in  $S$ , das  $\Phi_k(x_0, \dots, x_{k-1})$  repräsentiert, nicht verschwindet).

Wir müssen nur noch zeigen, dass  $\Phi_k|_{E^{dk}}$  ein Homöomorphismus auf  $e_k$  ist. Natürlich ist auch diese Einschränkung stetig; also müssen wir nur eine stetige Umkehrabbildung  $e_k \longrightarrow E^{dk}$  finden.

Für jedes  $w \in S_k$  gibt es genau ein Element  $v = (v_0, \dots, v_n) \sim w$  in  $S$  mit  $v_k > 0$  (also  $v_k$  reell und positiv). Nämlich,  $v = w/g$  wo  $g := w_k/|w_k| \in G$ ; daraus folgt  $v_k = |w_k|$ .

Das Element  $v$  hängt stetig von  $w$  ab, und deshalb ist auch die Abbildung  $\Psi: S_k \longrightarrow K^k$  mit  $\Psi(w) := (v_0, \dots, v_{k-1})$  eine stetige Abbildung,

mit Werten in  $E^{dk}$  weil  $v_k > 0$ . Weil  $\Psi$  konstant auf den Äquivalenzklassen von  $\sim$  ist, gibt es eine stetige Abbildung  $\psi: e_k \longrightarrow E^{dk}$  mit  $\psi \circ \pi = \Psi$ , und man prüft sofort nach, dass  $\psi$  und  $\Phi_k|_{E^{dk}}$  Umkehrabbildungen zueinander sind.

Damit ist klar, dass die  $e_k$  Zellen von Dimension  $dk$  sind, mit  $\Phi_k$  als charakteristische Abbildung. Da  $S$  offensichtlich die disjunkte Vereinigung der  $S_k$  ist, und die  $S_k$  invariant unter der  $G$ -Operation und somit eine Vereinigung von  $\sim$ -Äquivalenzklassen sind, ist  $KP^n$  die disjunkte Vereinigung der  $e_k$  und sie bilden eine Zellenzerlegung. Aus der Definition von  $\Phi_k$  ist klar, dass  $\partial e_k = \Phi_k(S^{dk-1})$  im  $(dk-1)$ -Skelett der Zellenzerlegung enthalten ist. Die Eigenschaften C und W müssen nicht nachgeprüft werden, weil die Zellenzerlegung endlich ist.

Die Zellen  $e_k$  bilden also, wie behauptet, eine CW-Zerlegung von  $KP^n$ .

- h) Die offene Scheibe  $E^n$  von Dimension  $n$  hat natürlich eine Zellenzerlegung mit nur einer Zelle, aber dies ist keine CW-Zerlegung, da die einzige Zelle keine charakteristische Abbildung hat.

Es gibt allerdings CW-Zerlegungen von  $E^n \cong \mathbf{R}^n$ , aber sie haben notgedrungen *unendlich viele* Zellen, wie wir gleich sehen werden.

- i)  $D^n$  hat eine Zellenzerlegung bestehend aus einer  $n$ -Zelle, nämlich  $E^n$ , und den einzelnen Punkten von  $S^{n-1}$  als 0-Zellen. Jede Zelle hat offenbar eine charakteristische Abbildung (für  $E^n$  ist sie  $\text{id}_{D^n}$ ). Die Ränder aller Zellen sind im 0-Skelett enthalten, und die Zellenzerlegung erfüllt Bedingung W, weil der ganze Raum  $D^n = \overline{E^n}$  selber eine abgeschlossene Zelle ist. Aber diese Zerlegung ist nicht CW, weil die  $n$ -Zelle  $E^n$  Bedingung C verletzt.
- j) Die Teilmenge

$$X := \left\{ t \in \mathbf{R} \mid t = 0 \text{ oder } \frac{1}{t} \in \mathbf{N} \right\}$$

mit der Unterraumtopologie von  $\mathbf{R}$  hat offensichtlich eine Zellenzerlegung durch 0-Zellen (und nur eine solche), aber diese Zerlegung ist keine CW-Zerlegung weil Bedingung W nicht gilt. Würde sie gelten, so wäre  $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$  abgeschlossen in  $X$ , was in der üblichen Topologie nicht der Fall ist.

Da neben der absoluten Homologie von Räumen auch die relative Homologie von Raumpaaren für uns wichtig ist, wollen wir auch den Begriff

eines **CW-Paares** einführen, und dazu brauchen wir den Begriff eines **CW-Unterkomplexes**. Bevor wir die Definition (oder eher, einige äquivalente Definitionen) davon angeben, ist es nützlich, einen kleinen Hilfssatz zu beweisen:

**Lemma 5.14** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  ein Unterraum von  $X$ , der eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$  ist.

Sei  $C \subseteq A$  und für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \subseteq A$  sei  $C \cap \bar{e}$  abgeschlossen in  $\bar{e}$  (oder gleichbedeutend, in  $X$ , denn  $\bar{e}$  ist ja abgeschlossen in  $X$ ).

Dann ist  $C$  abgeschlossen in  $X$  (und somit auch in  $A$ ).

*Beweis.* Sei  $e$  eine beliebige Zelle aus  $\mathcal{Z}$ . Nach Bedingung „C“ trifft  $\bar{e}$  nur endlich viele Zellen aus  $\mathcal{Z}$ . Weil  $C \subseteq A$  und  $A$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$  ist, trifft  $C$  nur Zellen, die in  $A$  enthalten sind. Also ist der Durchschnitt  $C \cap \bar{e}$  enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen Zellen  $e_1, \dots, e_k$  mit  $e_i \subseteq A$ . Wir haben damit

$$C \cap \bar{e} \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_k \subseteq \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k.$$

Es folgt, dass

$$C \cap \bar{e} = (C \cap \bar{e}_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (C \cap \bar{e}_k \cap \bar{e}),$$

und weil nach Voraussetzung die  $C \cap \bar{e}_i$  abgeschlossen sind, ist dies eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  und somit abgeschlossen.

Das heißt,  $C \cap \bar{e}$  ist abgeschlossen für *jede* Zelle  $e$  in  $\mathcal{Z}$  (und nicht nur für die in  $A$  enthaltenen Zellen). Nach Bedingung „W“ ist  $C$  abgeschlossen in  $X$ . ■

**Lemma und Definition 5.15** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$ . Sei  $\mathcal{Z}_A := \{e \in \mathcal{Z} \mid e \subseteq A\}$ . Folgende Bedingungen für  $A$  sind äquivalent:

- a)  $A$  ist abgeschlossen in  $X$ ;
- b) Für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}_A$  ist  $\bar{e} \subseteq A$ ;
- c)  $\mathcal{Z}_A$  ist eine CW-Zerlegung von  $A$ .

Wenn diese Bedingungen für  $A$  gelten, so nennen wir  $(A, \mathcal{Z}_A)$  einen **CW-Unterkomplex** von  $(X, \mathcal{Z})$ , oder wir sagen,  $A$  ist ein **CW-Unterraum** von  $X$ . In diesem Fall nennen wir  $(X, A)$  ein **CW-Paar**.

Wenn  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist, so kann man für die Zellen von  $A$  die gleichen charakteristischen Abbildungen nehmen, die diese Zellen in  $X$  haben.

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b) ist trivial, denn wenn  $A$  abgeschlossen ist, so ist die abgeschlossene Hülle jeder Teilmenge von  $A$  wieder in  $A$  enthalten.

b)  $\Rightarrow$  c): Nach Voraussetzung ist  $A$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$ , also nach Definition von  $\mathcal{Z}_A$  die Vereinigung der Zellen von  $\mathcal{Z}_A$ .

Jede dieser Zellen  $e$  hat in  $X$  eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$  und nach Bemerkung 5.8 b) ist  $\text{Bild } \Phi_e = \bar{e}$  und somit enthalten in  $A$ ; es folgt, dass jedes  $\Phi_e$  für  $e \in \mathcal{Z}_A$  sogar eine Abbildung  $D^n \rightarrow A$  ist, und somit auch eine charakteristische Abbildung für  $e$  als Zelle von  $A$ . Dies beweist übrigens auch die Behauptung über charakteristische Abbildungen am Ende der Aussage des Lemmas.

Weil  $\partial e$  in  $X$  nur Zellen von Dimension kleiner als  $\dim e$  trifft, und davon nach Bedingung „C“ nur endlich viele, gilt das Gleiche automatisch auch in  $A$ .

Und schließlich folgt Bedingung „W“ für  $(A, \mathcal{Z}_A)$  sofort aus Lemma 5.14.

Damit erfüllt  $\mathcal{Z}_A$  alle Bedingungen für eine CW-Zerlegung.

c)  $\Rightarrow$  a): Wenn  $\mathcal{Z}_A$  eine CW-Zerlegung von  $A$  ist, dann hat jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}_A$  eine charakteristische Abbildung  $\Psi_e: D^n \rightarrow A$ , die auch eine charakteristische Abbildung in  $X$  ist und deren Bild also die  $X$ -abgeschlossene Hülle von  $e$  ist und in  $A$  enthalten ist.

Hieraus folgt, dass für jedes  $e \in \mathcal{Z}_A$  gilt  $A \cap \bar{e} = \bar{e}$ , und dies ist natürlich abgeschlossen in  $\bar{e}$ . Aus Lemma 5.14 folgt, dass  $A$  abgeschlossen ist in  $X$ . ■

Kriterium 5.15 b) für einen CW-Unterraum lässt sich etwas einfacher anwenden, als in dem Lemma ersichtlich ist, da es im Prinzip schon in sich trägt, dass  $A$  eine Vereinigung von Zellen ist, und dies nicht separat gefordert werden muss:

**Bemerkung 5.16** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  eine Teilmenge (die nicht unbedingt eine Vereinigung von Zellen sein muss).

Genau dann ist  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$ , wenn  $A$  die abgeschlossene Hülle jeder Zelle aus  $\mathcal{Z}$  enthält, die  $A$  schneidet, oder in anderen Worten, wenn für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap A \neq \emptyset$  gilt  $\bar{e} \subseteq A$ .

*Beweis.* Dass  $A$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$  ist, ist gleichbedeutend damit, dass jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$ , die  $A$  schneidet, ganz in  $A$  enthalten ist. In diesem Fall (der insbesondere gilt, wenn  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist) besteht  $\mathcal{Z}_A$  genau aus den Zellen, die nichtleeren Durchschnitt mit  $A$  haben.

Der Rest ist nun trivial. Wenn  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist, dann gilt nach Bedingung 5.15 b), dass  $\bar{e} \subseteq A$  für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}_A$ , also für jede Zelle  $e$ , die  $A$  schneidet.

In der anderen Richtung, wenn für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap A \neq \emptyset$  gilt  $\bar{e} \subseteq A$ , dann gilt auch  $e \subseteq A$ , so dass  $A$  eine Vereinigung von Zellen ist, und zwar der Zellen  $e$ , die  $A$  schneiden. Für diese Zellen gilt sogar, dass  $\bar{e} \subseteq A$ , so dass 5.15 b) erfüllt ist und  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist. ■

**Bemerkung 5.17** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  ein CW-Unterraum. Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  ist

$$A^n = A \cap X^n.$$

*Beweis.* Weil  $A$  und  $X^n$  Vereinigungen von Zellen von  $X$  sind, ist jede Zelle aus  $\mathcal{Z}$ , die  $A \cap X^n$  schneidet, sowohl in  $A$  wie auch in  $X^n$  enthalten, und somit in  $A \cap X^n$  enthalten. Folglich ist auch  $A \cap X^n$  eine Vereinigung von Zellen, nämlich der Zellen von  $A$  von Dimension  $\leq n$ . Diese Vereinigung ist nach Definition aber  $A^n$ . ■

**Lemma 5.18** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex.

- a)  $X$  und  $\emptyset$  sind CW-Unterräume von  $X$ .
- b) Jedes Skelett  $X^n$  von  $X$  ist ein CW-Unterraum.
- c) Jedes Skelett  $X^n$  ist abgeschlossen in  $X$ .
- d)  $X$  trägt die schwache Topologie bezüglich der Familie seiner Skelette, d. h.,  $A \subseteq X$  ist genau dann abgeschlossen in  $X$ , wenn  $A \cap X^n$  abgeschlossen ist in  $X^n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ .

*Beweis.* Zu a):  $X$  ist eine Vereinigung von Zellen von  $\mathcal{Z}$  und ist abgeschlossen in  $X$ , ist also ein CW-Unterraum nach Bedingung a) in Definition 5.15.

Das Gleiche gilt für  $\emptyset$ .

Zu b):  $X^n$  ist die Vereinigung der Zellen  $e \in \mathcal{Z}$  von Dimension  $\leq n$ , und weil nach Bedingung 5.9 b) die abgeschlossene Hülle  $\bar{e}$  keine Zellen von höherer Dimension als  $n$  schneidet, erfüllt  $X^n$  Bedingung 5.15 b) und ist ein CW-Unterraum von  $X$ .

c) folgt sofort aus b) und aus Bedingung a) in Definition 5.15.

Zu d): Nur die Richtung „dann“ (also die Implikation „ $\Leftarrow$ “) erfordert einen Beweis.

Sei  $A \subseteq X$  mit  $A \cap X^n$  abgeschlossen in  $X^n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ . Sei  $e \in \mathcal{Z}$  und sei  $m := \dim e$ .

Nach Teil c) ist  $\bar{e} \subseteq X^m$  und weil  $A \cap X^m$  abgeschlossen ist in  $X^m$ , ist

$$A \cap \bar{e} = A \cap X^m \cap \bar{e}$$

abgeschlossen in  $\bar{e}$ .

Dies gilt für jede Zelle  $e$  von  $X$ . Aus Bedingung „W“ folgt, dass  $A$  abgeschlossen ist in  $X$ . ■

Mit CW-Unterkomplexen kann man einige wichtige Operationen ausführen.

**Lemma 5.19** *Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $\mathcal{A}$  eine Familie von CW-Unterräumen von  $X$ . Dann sind*

$$A := \bigcap_{Y \in \mathcal{A}} Y \quad \text{und} \quad B := \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$$

*auch CW-Unterräume von  $X$ .*

*Beweis.* Sei  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap A \neq \emptyset$ . Dann ist  $e \cap Y \neq \emptyset$  für jedes  $Y \in \mathcal{A}$  und aus Bemerkung 5.16 folgt, dass  $\bar{e} \subseteq Y$  für jedes  $Y \in \mathcal{A}$  und somit auch  $\bar{e} \subseteq A$ .

Damit können wir umgekehrt aus Bemerkung 5.16 schließen, dass  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist.

Entsprechend, sei  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap B \neq \emptyset$ . Dann gibt es ein  $Y \in \mathcal{A}$  mit  $e \cap Y \neq \emptyset$  und Bemerkung 5.16 besagt, dass

$$\bar{e} \subseteq Y \subseteq B.$$

Wieder aus Bemerkung 5.16 folgt, dass  $B$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist. ■

**Korollar 5.20** *Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $Y \subseteq X$  eine beliebige Teilmenge. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten CW-Unterraum  $B$  von  $X$  mit  $Y \subseteq B$ , den wir mit  $|Y|$  bezeichnen wollen und den wir die **CW-Hülle** von  $Y$  nennen.*

*Ist  $A$  ein beliebiger CW-Unterraum von  $X$  mit  $Y \subseteq A$ , so gilt auch  $|Y| \subseteq A$ .*

*Beweis.*  $|Y|$  ist der Durchschnitt aller CW-Unterräume  $A \subseteq X$  mit  $Y \subseteq A$  (und ist insbesondere in jedem solchen CW-Unterraum enthalten, was die zweite Aussage des Korollars beweist). Nach Lemma 5.19 ist dieser Durchschnitt selber ein CW-Unterraum von  $X$  und ist offensichtlich der kleinste, der  $Y$  enthält. ■



**Lemma 5.21** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex.

- a) Sei  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$ . Dann ist  $|A| = A$ .
- b) Sei  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $||Y|| = |Y|$ .
- c) Seien  $Y \subseteq Z$  Teilmengen von  $X$ . Dann ist  $|Y| \subseteq |Z|$ .
- d) Sei  $\mathcal{A}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ . Dann ist

$$\left| \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y \right| = \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} |Y|.$$

*Beweis.* a) ist klar, denn  $A$  ist ja selber schon ein CW-Unterraum um  $A$  und somit der kleinste.

b) folgt aus a) mit  $|Y|$  in der Rolle von  $A$ .

c) ist trivial, da  $Y \subseteq Z \subseteq |Z| \Rightarrow |Y| \subseteq |Z|$ .

d) „ $\subseteq$ “: Nach Lemma 5.19 ist  $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} |Y|$  ein CW-Unterraum von  $X$  und er enthält jede Teilmenge  $Y \in \mathcal{A}$ , also auch  $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$ , also auch  $|\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y|$ .

„ $\supseteq$ “: Umgekehrt enthält der CW-Unterraum  $|\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y|$  jede Teilmenge  $Y \in \mathcal{A}$  und somit jede der Mengen  $|Y|$ , und deshalb auch  $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} |Y|$ . ■

**Lemma 5.22** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ .

a)

$$|Y| = \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} |e| \quad (5.2)$$

b) Sei  $e \in \mathcal{Z}$ . Dann ist  $|e| = e \cup |\partial e|$ .

c) Sei  $e \in \mathcal{Z}$ . Dann ist  $|e|$  ein endlicher CW-Unterkomplex (enthält also nur endlich viele Zellen).

d) Wenn  $Y$  nur endlich viele Zellen von  $\mathcal{Z}$  trifft, dann ist  $|Y|$  ein endlicher CW-Komplex.

*Beweis.* Zu a): Die rechte Seite von (5.2) ist nach Lemma 5.19 ein CW-Unterraum von  $X$ , den wir kurz  $Y'$  nennen wollen.

Offensichtlich ist

$$Y \subseteq \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} e \subseteq \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} |e| = Y',$$

woraus nach Korollar 5.20 folgt, dass  $|Y| \subseteq Y'$ .

Umgekehrt, wenn  $e \in \mathcal{Z}$  und  $e \cap Y \neq \emptyset$ , so ist  $e \cap |Y| \neq \emptyset$ . Weil  $|Y|$  ein CW-Unterraum ist, haben wir  $e \subseteq |Y|$ . Nach Korollar 5.20 ist dann sogar  $|e| \subseteq |Y|$ . Das zeigt, dass  $Y' \subseteq |Y|$ .

Damit haben wir die Gleichheit.

Zu b): Sei  $e \in \mathcal{Z}$ . Da  $|\partial e|$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist, ist es eine Vereinigung von Zellen und abgeschlossen. Also ist  $e \cup |\partial e|$  eine Vereinigung von Zellen, und da

$$e \cup |\partial e| = e \cup \partial e \cup |\partial e| = \bar{e} \cup |\partial e|,$$

ist  $e \cup |\partial e|$  auch abgeschlossen, also ein CW-Unterraum von  $X$ .

Da  $|e|$  ein  $e$  enthaltender CW-Unterraum von  $X$  ist, ist  $\bar{e} = e \cup \partial e \subseteq |e|$ , woraus folgt  $e \cup |\partial e| \subseteq |e|$ . Weil  $|e|$  der kleinste CW-Unterraum um  $e$  ist, gilt die Gleichheit.

Zu c) und d): Wir beweisen beide Teile gleichzeitig durch Induktion über  $\dim e$  oder über die maximale Dimension der endlich vielen von  $Y$  getroffenen Zellen.

Sobald wir c) für eine bestimmte Dimension  $n$  und alle kleineren bewiesen haben, folgt d) für die gleiche maximale Dimension der getroffenen Zellen mit Hilfe von Teil a).

Wir beginnen mit Dimension 0. Wenn  $e$  eine 0-Zelle ist, so bildet  $e$  selber schon einen CW-Unterkomplex, mit einer Zelle, also mit endlich vielen Zellen. Also gilt Teil c) für Dimension 0 und somit gilt Teil d), wenn die maximale Dimension der endlich vielen getroffenen Zellen 0 ist.

Für den Induktionsschritt sei  $n > 0$  und wir nehmen an, dass c) und d) gelten, wenn alle getroffenen Zellen Dimension  $< n$  haben.

Sei  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $\dim e = n$ . Nach Teil b) ist  $|e| = e \cup |\partial e|$ . Weil die Zellenzerlegung CW ist, trifft  $\partial e$  nur endlich viele Zellen und diese haben Dimension  $< n$ . Nach der Induktionsannahme für Behauptung d) ist  $|\partial e|$  ein endlicher CW-Komplex und  $|e| = e \cup |\partial e|$  ist somit auch endlich, denn es hat nur eine Zelle mehr. Das beweist den Induktionsschritt für Behauptung c) und für d) folgt er, wie schon erklärt, gleich mit.

Durch Induktion erhalten wir c) und d) für alle Dimensionen. ■

**Lemma 5.23** *Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $C \subseteq X$  eine Teilmenge, so dass  $C \cap e$  endlich ist für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$ . Dann ist  $C$  abgeschlossen.*

*Ferner, als Unterraum von  $X$  trägt  $C$  die diskrete Topologie.*

*Beweis.* Da nach Bedingung „C“ jede abgeschlossene Zelle  $\bar{e}$  von  $X$  nur endlich viele Zellen  $e'$  trifft, ist  $C \cap \bar{e}$  endlich für jedes  $e \in \mathcal{Z}$ . Aber endliche Teilmengen eines Hausdorffraumes sind immer abgeschlossen.

Also ist  $C \cap \bar{e}$  abgeschlossen für jedes  $e \in \mathcal{Z}$ , und nach Bedingung „W“ ist  $C$  abgeschlossen.

Da aber auch jede Teilmenge von  $C$  mit jeder Zelle endlichen Durchschnitt hat, gilt der gleiche Schluss auch für jede Teilmenge von  $C$ . Das bedeutet, dass jede Teilmenge von  $C$  abgeschlossen ist in  $X$  und somit auch in  $C$ . In anderen Worten,  $C$  trägt die diskrete Topologie. ■

**Lemma 5.24** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $C \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a)  $C$  ist kompakt;
- b)  $C$  trifft nur endlich viele Zellen;
- c)  $|C|$  ist ein endlicher CW-Unterkomplex von  $X$ ;
- d)  $C$  ist in einem endlichen CW-Unterkomplex von  $X$  enthalten.

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b): Wähle in jeder von  $C$  getroffenen Zelle  $e$  einen Punkt

$$x_e \in C \cap e.$$

Sei  $K$  die Menge der so gewählten Punkte.

Da  $K$  aus jeder Zelle höchstens einen Punkt enthält (denn verschiedene Zellen sind disjunkt), ist  $K$  abgeschlossen und diskret nach Lemma 5.23.

$K$  ist insbesondere eine abgeschlossene Teilmenge von  $C$  und wenn  $C$  kompakt ist, dann ist auch  $K$  kompakt. Aber die einzelnen Punkte von  $K$  bilden eine offene Überdeckung von  $K$  (wegen der diskreten Topologie), die keine echte Teilüberdeckung besitzt. Wenn  $C$  und somit auch  $K$  kompakt ist, muss diese Überdeckung selber schon endlich sein, d. h.,  $K$  ist endlich und  $C$  trifft nur endlich viele Zellen von  $X$ .

b)  $\Rightarrow$  c): Dies ist die Aussage von Lemma 5.22 d).

c)  $\Rightarrow$  d): Klar, denn  $C \subseteq |C|$ .

d)  $\Rightarrow$  a): Sei  $Y$  ein  $C$  enthaltender CW-Unterraum von  $X$  mit endlich vielen Zellen  $e_1, \dots, e_k$ . Da

$$Y = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$$

und da jede abgeschlossene Zelle  $\bar{e}_i$  als stetiges Bild von einem  $D^n$  kompakt ist, ist  $Y$  kompakt. Weil  $C$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $Y$  ist, ist auch  $C$  kompakt. ■

**Korollar 5.25** Jeder CW-Raum mit nur endlich vielen Zellen ist kompakt.

**Korollar 5.26** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbf{N}$  mit  $A \subseteq X^n$ .

*Beweis.* Nach Lemma 5.24 b) trifft  $A$  nur endlich viele Zellen von  $X$ , und wenn  $n$  die größte Dimension dieser Zellen ist, so ist  $A \subseteq X^n$ . ■

Das Wissen um kompakte Teilmengen eines CW-Raumes erlaubt uns noch, einen Satz über Produkte von CW-Komplexen zu beweisen:

**Satz 5.27** Seien  $(X, \mathcal{Z})$  und  $(Y, \mathcal{Z}')$  CW-Komplexe. Dann bildet

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{e \times e' \mid e \in \mathcal{Z} \text{ und } e' \in \mathcal{Z}'\}$$

eine Zellenzerlegung von  $X \times Y$ .

Wenn  $X$  oder  $Y$  lokalkompakt ist, dann ist  $\tilde{\mathcal{Z}}$  eine CW-Zerlegung.

*Beweis.* Für jede  $m$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  und jede  $n$ -Zelle  $e' \in \mathcal{Z}'$  ist

$$e \times e' \cong E^m \times E^n \cong \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n} \cong E^{m+n}$$

eine  $m+n$ -Zelle in  $X \times Y$ , und offensichtlich ist  $X \times Y$  die disjunkte Vereinigung aller solcher Produktzellen, so dass  $\tilde{\mathcal{Z}}$  eine Zellenzerlegung von  $X \times Y$  ist.

Diese Zellenzerlegung hat ohne weitere Voraussetzungen fast alle Eigenschaften einer CW-Zerlegung. Nämlich, wenn  $\Phi_e: D^m \rightarrow X$  eine charakteristische Abbildung für die  $m$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  ist und wenn  $\Phi_{e'}: D^n \rightarrow Y$  eine charakteristische Abbildung für die  $n$ -Zelle  $e' \in \mathcal{Z}'$  ist, so gibt es einen Homöomorphismus  $\varphi: D^{m+n} \rightarrow D^m \times D^n$ , der  $E^{m+n}$  homöomorph auf  $E^m \times E^n$  abbildet und  $S^{m+n-1} = \partial D^{m+n}$  homöomorph auf  $\partial(D^m \times D^n) = (S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1})$  abbildet<sup>1</sup>, und wie man leicht nachprüft, ist  $(\Phi_e \times \Phi_{e'}) \circ \varphi$  eine charakteristische Abbildung für  $e \times e'$ .

Das Bild des Randes

$$((\Phi_e \times \Phi_{e'}) \circ \varphi)(S^{m+n-1}) = (\Phi_e \times \Phi_{e'})((S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1}))$$

ist enthalten in der Vereinigung der Produkte der endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}$  von Dimension  $< m$ , die  $\partial e$  trifft, mit den endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}'$

<sup>1</sup>Dieser Homöomorphismus streckt jeden Radius von  $D^{m+n}$  linear gerade so weit, dass sein äußerer Endpunkt auf dem Rand von  $D^m \times D^n$  zu liegen kommt. In Formeln: wenn wir die Punkte von  $\mathbf{R}^{m+n}$  als Paare  $(x, y)$  mit  $x \in \mathbf{R}^m$  und  $y \in \mathbf{R}^n$  beschreiben, und wenn  $||$  die euklidische Norm bezeichnet, dann ist  $\varphi(0, 0) = (0, 0)$  und für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist

$$\varphi(x, y) = \frac{|(x, y)|}{\max(|x|, |y|)} \cdot (x, y).$$

von Dimension  $\leq n$ , die  $\bar{e}'$  trifft, und der Produkte der endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}$  von Dimension  $\leq m$ , die  $\bar{e}$  trifft, mit den endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}'$  von Dimension  $< n$ , die  $\partial e'$  trifft.

Das ist insgesamt eine Vereinigung von endlich vielen Zellen aus  $\tilde{\mathcal{Z}}$ , jeweils von Dimension  $< m+n$ , und es folgt, wenn wir die jeweilige Dimension  $m+n$  der Produktzelle mit  $k$  bezeichnen, dass der Rand von jeder  $k$ -Zelle von  $\tilde{\mathcal{Z}}$  nur endlich vielen Zellen trifft (so dass Bedingung „C“ gilt), und diese haben alle Dimension  $< k$  (so dass 5.9 b) gilt).

Es bleibt nur noch Bedingung „W“ zu prüfen, und dafür brauchen wir die Voraussetzung, dass  $X$  oder  $Y$  lokalkompakt ist. Nehmen wir an, dass  $Y$  lokalkompakt ist (der Beweis im anderen Fall geht ganz analog).

Sei  $A \subseteq X \times Y$  eine Teilmenge, so dass  $A \cap (\bar{e} \times \bar{e}')$  abgeschlossen ist in

$$\bar{e} \times \bar{e}' = \overline{e \times e'}$$

für jedes  $e \in \mathcal{Z}$  und jedes  $e' \in \mathcal{Z}'$ . Wir werden zeigen, dass  $A$  abgeschlossen ist, und das wird beweisen, dass  $X \times Y$  die schwache Topologie bezüglich der Zellenzerlegung  $\tilde{\mathcal{Z}}$  besitzt.

Sei  $(x, y) \notin A$ . Weil  $Y$  lokalkompakt ist, gibt es eine offene Menge  $W \subseteq Y$  mit  $y \in W$  und  $\bar{W}$  kompakt. Nach Lemma 5.24 d) ist  $\bar{W}$  und somit auch  $W$  in einem endlichen CW-Unterkomplex  $Y'$  von  $Y$  enthalten.

Sei

$$C := \{y' \in Y' \mid (x, y') \in A\}.$$

Da  $\{x\}$  kompakt ist, gibt es auch einen endlichen CW-Unterkomplex  $X' \subseteq X$  mit  $x \in X'$ .

Das Produkt  $X' \times Y'$  hat eine endliche Zellenzerlegung durch Produktzellen, die nach Bemerkung 5.11 automatisch Bedingungen „C“ und „W“ erfüllt. Aus Bedingung „W“ folgt, dass  $A \cap (X' \times Y')$  abgeschlossen ist in  $X' \times Y'$ . Die Abbildung  $i_x: Y' \longrightarrow X' \times Y'$  mit  $i(y') := (x, y')$  ist stetig und deshalb ist  $C = i_x^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $Y'$ .

$Y'$  ist als endlicher CW-Raum kompakt und Hausdorffsch, deshalb auch lokalkompakt Hausdorffsch, und weil  $y$  zu der offenen Menge  $Y' \setminus C$  gehört, gibt es eine offene Teilmenge  $V' \subseteq Y'$  mit  $y \in V' \subseteq \bar{V}' \subseteq Y' \setminus C$ .

Sei  $V := V' \cap W$ . Diese Menge ist offen in  $W \subseteq Y'$ , weil  $V'$  offen in  $Y'$  ist, aber weil  $W$  offen in ganz  $Y$  ist, ist  $V$  auch offen in  $Y$ . Ferner  $\bar{V} \subseteq \bar{V}' \subseteq Y'$  und  $\bar{V} \cap C = \emptyset$  (weil sogar  $\bar{V}' \cap C = \emptyset$ ).

Sei

$$B := \{x' \in X \mid \text{es gibt ein } y' \in \bar{V}' \text{ mit } (x', y') \in A\}.$$

Für jede Zelle  $e$  von  $X$  ist  $|e|$  ein endlicher CW-Unterkomplex von  $X$  nach Lemma 5.22 c). Der Unterraum  $|e| \times Y' \subseteq X \times Y$  hat also eine endliche

Zellenzerlegung durch Produktzellen, die nach Bemerkung 5.11 und nach den am Anfang des jetzigen Beweises nachgeprüften Eigenschaften automatisch eine CW-Zerlegung ist. Sie erfüllt insbesondere Bedingung „W“, und deshalb ist  $A \cap (|e| \times Y')$  abgeschlossen in  $|e| \times Y'$ .

Da  $\bar{e} \times \bar{V}$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $|e| \times Y'$  ist, ist auch

$$A \cap (|e| \times Y') \cap (\bar{e} \times \bar{V}) = A \cap (\bar{e} \times \bar{V})$$

abgeschlossen in  $|e| \times Y'$ , welcher ein endlicher und somit kompakter CW-Komplex ist. Also ist auch  $A \cap (\bar{e} \times \bar{V})$  kompakt

Offenbar ist

$$B \cap \bar{e} = \pi_1(A \cap (\bar{e} \times \bar{V}))$$

(wo  $\pi_1$  die Projektion auf den ersten Faktor ist) und somit ist  $B \cap \bar{e}$  als stetiges Bild einer kompakten Menge auch kompakt und somit abgeschlossen in  $\bar{e}$ . Das gilt für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$ ; also ist  $B$  abgeschlossen in  $X$  nach Bedingung „W“.

Wir haben  $x \notin B$  weil sonst  $\bar{V} \cap C \neq \emptyset$ . Also ist  $U := X \setminus B$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$  und  $V$  ist offen um  $y \in Y$ . Ferner  $(U \times V) \cap A = \emptyset$ , weil für  $x'$  mit  $(\{x'\} \times V) \cap A \neq \emptyset$  gilt, nach Definition, dass  $x' \in B$ , also  $x' \notin U$ .

Da wir eine solche von  $A$  disjunkte offene Menge  $U \times V$  um jedes  $(x, y) \notin A$  finden können, ist  $(X \times Y) \setminus A$  offen und  $A$  abgeschlossen in  $X \times Y$ .

Wir haben Bedingung „W“ bewiesen und  $\tilde{\mathcal{Z}}$  ist eine CW-Zerlegung. ■

Die Voraussetzung in Satz 5.27, dass einer der beiden Faktoren lokal-kompakt sein muss, damit die Produktzellenzerlegung eines Produktes von CW-Räumen wieder eine CW-Zerlegung für die Produkttopologie ist, ist wesentlich. Ohne diese Voraussetzung gilt der Satz nicht, aber wir verzichten auf die Angabe eines Gegenbeispiels, da die sehr technischen Details nichts Wesentliches zum Thema dieser Vorlesung beitragen würden.

Wir wollen jetzt den Turm der Skelette eines CW-Raumes in Bezug auf die Homologie näher untersuchen. Am Ende werden wir daraus eine vereinfachte Homologieberechnungsmöglichkeit gewinnen, mit Hilfe eines neuen Kettenkomplexes, der *wesentlich* kleiner als der singuläre sein wird.

Um dabei gleich von Anfang an die relative Homologie berücksichtigen zu können, formulieren wir folgende Definitionen für CW-Komplexe nicht in ihrer einfachsten Form, sondern in einer Variante, in der ein vorgegebener CW-Unterkomplex  $A$  von allen Konstruktionsdetails „ausgenommen“ wird. Die absolute, einfache Version erhält man mit, in dem man  $A = \emptyset$  setzt.

**Lemma und Definition 5.28** Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Wir bezeichnen die offene gelochte  $n$ -dimensionale Einheitsscheibe  $E^n \setminus \{0\}$  mit  $E_0^n$ . Es gilt

$$H_k(E^n, E_0^n) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.3)$$

*Beweis.* Sei  $D_{1/2}^n := \{x \in E^n \mid |x| \leq \frac{1}{2}\}$  und  $S_{1/2}^{n-1} := \{x \in E^n \mid |x| = \frac{1}{2}\}$ .

Offensichtlich ist  $D_{1/2}^n$  ein starker Deformationsretrakt von  $E^n$  und  $S_{1/2}^{n-1}$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $E_0^n$ . Ferner  $(D_{1/2}^n, S_{1/2}^{n-1}) \cong (D^n, S^{n-1})$ .

Daraus folgt

$$H_*(E^n, E_0^n) \cong H_*(D_{1/2}^n, S_{1/2}^{n-1}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}),$$

und  $H_*(D^n, S^{n-1})$  ist nach Beispiel 4.4 b) und Satz 4.5 wie in (5.3).  $\blacksquare$

**Definition 5.29** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex. Außerdem, sei  $(A, \mathcal{Z}_A)$  ein CW-Unterkomplex von  $(X, \mathcal{Z})$ .

Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  setzen wir

$$X_A^n := X^n \cup A.$$

Wir nennen dies das *relative  $n$ -Skelett von  $X$  modulo  $A$* .

Für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A := \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_A$ , also für jede  $n$ -Zelle, die nicht in  $A$  liegt, sei  $\Phi_e$  ihre charakteristische Abbildung und sei

$$0_e := \Phi_e(0)$$

der „Mittelpunkt“ der Zelle  $e$ . Sei  $e_0 := e \setminus \{0_e\} \cong E_0^n$ .

Wir setzen

$$Z_A^n := \{0_e \mid e \in \mathcal{Z}'_A \text{ und } \dim e = n\}$$

und wir setzen

$$\tilde{X}_A^n := X_A^n \setminus Z_A^n = X_A^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e_0.$$

Wir nennen  $\tilde{X}_A^n$  das *gelochte relative  $n$ -Skelett von  $X$  modulo  $A$* .

**Lemma 5.30** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ .

- a)  $X_A^{n-1}$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $\tilde{X}_A^n$ .
- b)  $(X_A^n, \tilde{X}_A^n, X_A^{n-1})$  ist ein Ausschneidungstripel.

c) Wenn  $k \neq n$ , so ist

$$H_k(X_A^n, X_A^{n-1}) = \{0\}. \quad (5.4)$$

d)

$$H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \cong \bigoplus_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} \mathbf{Z}. \quad (5.5)$$

Wenn  $e$  eine  $n$ -Zelle in  $\mathcal{Z}'_A$  ist und wenn  $\Phi_e: D^n \rightarrow X$  die charakteristische Abbildung der Zelle  $e$  ist, so ist

$$H_n(\Phi_e): H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \quad (5.6)$$

ein Isomorphismus von  $H_n(D^n, S^{n-1}) = \mathbf{Z}$  auf den  $e$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  in (5.5).

*Beweis.* Zu a): Für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  ist  $\Phi_e \times \text{id}_I: D^n \times I \rightarrow \bar{e} \times I$  identifizierend, denn sie ist eine stetige surjektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffschen Raum. (Wenn eine Teilmenge von  $\bar{e} \times I$  ein abgeschlossenes Urbild hat, ist dieses Urbild kompakt. Somit ist die Teilmenge selber als Bild ihres Urbildes auch kompakt und deshalb abgeschlossen. Das zeigt, dass  $\bar{e} \times I$  die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung  $\Phi_e \times \text{id}_I$  trägt.)

Ferner,  $\Phi_e$  bildet  $E^n$  homöomorph auf  $e$  ab und  $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$ .

Hieraus folgt, dass  $\Phi_e^{-1}(\{0_e\}) = \{0\}$ . Also ist  $(\Phi_e \times \text{id}_I)^{-1}(\{0_e\} \times I) = \{0\} \times I$ , und weil diese Mengen abgeschlossen sind ist auch die Abbildung

$$\Phi_e \times \text{id}_I: (D^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow (\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I = (\partial e \cup e_0) \times I$$

identifizierend.

Die Sphäre  $S^{n-1}$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $D^n \setminus \{0\}$ ; eine zum Nachweis geeignete Homotopie  $h: (D^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow D^n \setminus \{0\}$  von  $\text{id}_{D^n \setminus \{0\}}$  zu einer Retraktion  $p: D^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  schiebt die Punkte der gelochten Scheibe radial nach außen bis zur Randsphäre, wobei Punkte auf der Randsphäre überhaupt nicht bewegt werden, so dass  $h$  tatsächlich eine Homotopie rel  $S^{n-1}$  ist.

Für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  können wir eine Homotopie  $H_e: (\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I \rightarrow \bar{e}$  definieren, so dass

$$H_e \circ (\Phi_e \times \text{id}_I) = \Phi_e \circ h. \quad (5.7)$$

Nämlich, auf  $e_0 \times I$  gibt es eine eindeutige solche Abbildung  $H_e$ , weil  $\Phi_e \times \text{id}_I$  ein Homöomorphismus  $E_0^n \times I \rightarrow e_0 \times I$  ist; wir können also (5.7) auflösen und auf  $e_0 \times I$  können wir  $H_e := \Phi_e \circ h \circ (\Phi_e \times \text{id}_I)^{-1}$  setzen.



Für  $(x, t) \in \partial e \times I$  setzen wir  $H_e(x, t) := x$ . Auch dieser Teil von  $H_e$  erfüllt (5.7), weil  $\partial e = \Phi_e(S^{n-1})$  und weil  $h$  eine Homotopie rel  $S^{n-1}$  ist.

Wir erhalten also insgesamt eine wohldefinierte *Abbildung*  $H_e$  auf ganz  $(\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I$ , die (5.7) erfüllt, und diese Abbildung ist stetig, weil die rechte Seite von (5.7) stetig ist und weil  $\Phi_e \times \text{id}_I$  in (5.7) identifizierend ist.  $H_e$  ist also tatsächlich eine Homotopie.

Aus (5.7) und den Eigenschaften von  $h$  prüft man leicht nach, dass  $(H_e)_0$  die Identität auf  $\bar{e} \setminus \{0_e\}$  ist und dass  $(H_e)_1$  eine Retraktion von  $\bar{e} \setminus \{0_e\}$  auf  $\partial e$  ist. Aus der Definition von  $H_e$  folgt, dass  $H_e$  eine Homotopie rel  $\partial e$  ist.

Jetzt definieren wir eine Homotopie

$$H: \tilde{X}_A^n \times I \longrightarrow \tilde{X}_A^n,$$

indem wir auf  $(\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I$  für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  die Homotopie  $H$  als  $H_e$  definieren, und indem wir sie für  $(x, t) \in X_A^{n-1} \times I$  durch die Vorschrift  $H(x, t) := x$  definieren.

Weil die  $H_e$  Homotopien rel  $\partial e$  sind, und weil die offenen punktierten Zellen  $e_0$  disjunkt voneinander und auch disjunkt von  $X_A^{n-1}$  sind, stimmen alle Teildefinitionen an gemeinsamen Stellen überein und  $H$  ist eine wohldefinierte Abbildung auf ganz  $\tilde{X}_A^n \times I$ .

Diese Abbildung ist auch stetig. Das Intervall  $I$  ist ein kompakter CW-Raum und deshalb ist  $X_A^n \times I$  nach Satz 5.27 auch ein CW-Raum, mit Zellen  $e \times \{0\}$ ,  $e \times \{1\}$  und  $e \times (0, 1)$  für jede Zelle  $e$  von  $X_A^n$ , und mit zugehörigen abgeschlossenen Zellen  $\bar{e} \times I$  und darin enthalten  $\bar{e} \times \{0\}$  und  $\bar{e} \times \{1\}$ . Für die  $n$ -Zellen  $e$  ist  $H$  nicht auf ganz  $\bar{e} \times I$  definiert, sondern nur auf der offenen Teilmenge  $(\bar{e} \setminus \{0\}) \times I$ , aber dort ist  $H$  stetig. Und  $H$  ist definiert und stetig auf ganz  $X_A^{n-1} \times I$ .

Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\tilde{X}_A^n$ . Wir wollen zeigen, dass  $V := H^{-1}(U)$  offen ist in  $\tilde{X}_A^n \times I$ . Für jede  $n$ -Zelle  $e$  ist  $V \cap (\bar{e} \times I) = V \cap ((\bar{e} \setminus \{0\}) \times I)$ , da  $H$  nur auf  $(\bar{e} \setminus \{0\}) \times I$  definiert ist. Dort ist  $H$  aber stetig und deshalb ist  $V \cap (\bar{e} \times I) = V \cap ((\bar{e} \setminus \{0\}) \times I)$  offen in  $(\bar{e} \setminus \{0\}) \times I$ , welche wiederum eine offene Teilmenge von  $\bar{e} \times I$  ist. Also ist  $V \cap (\bar{e} \times I)$  auch offen in  $\bar{e} \times I$ . Daraus folgt, dass  $V$  auch die in  $\bar{e} \times I$  enthaltenen abgeschlossenen Zellen  $\bar{e} \times \{0\}$  und  $\bar{e} \times \{1\}$  in relativ offenen Teilmengen schneidet.

Weil  $H$  auf ganz  $X_A^{n-1} \times I$  stetig ist, schneidet  $V$  auch die darin enthaltenen abgeschlossenen Zellen von  $X_A^n \times I$  in relativ offenen Teilmengen. Weil  $X_A^n \times I$  die schwache Topologie bezüglich seiner abgeschlossenen Zellen trägt, ist  $V$  offen in  $X_A^n \times I$  und somit auch in  $\tilde{X}_A^n \times I$ . Das zeigt, dass  $H$  stetig ist.

Nach der Definition von  $H$  und wegen der Eigenschaften der  $H_e$  ist  $H$  eine Homotopie rel  $X_A^{n-1}$  von  $\text{id}_{\tilde{X}_A^n}$  zu einer Retraktion von  $\tilde{X}_A^n$  auf  $X_A^{n-1}$ .

Zu b): Die Behauptung ist klar nach Satz 3.55, denn  $X_A^{n-1}$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $X_A^n$  und ist enthalten im Innern von  $\tilde{X}_A^n$ , da  $\tilde{X}_A^n$

offen ist (das Komplement  $Z_A^n$  von  $\tilde{X}_A^n$  ist nach Lemma 5.23 nämlich abgeschlossen, da es jede Zelle in höchstens einem Punkt trifft).

Zu c) und d): Nach Teil a) ist  $X_A^{n-1} \simeq \tilde{X}_A^n$ . Mit dem Homotopieinvarianzlemma 3.30 b) und mit Ausschneidung erhalten wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_k(X_A^n, X_A^{n-1}) &\cong H_k(X_A^n, \tilde{X}_A^n) \\ &\cong H_k(X_A^n \setminus X_A^{n-1}, \tilde{X}_A^n \setminus X_A^{n-1}) \\ &= H_k\left(\bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e, \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e_0\right) \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$\cong \bigoplus_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} H_k(e, e_0), \quad (5.8b)$$

wobei Gleichung (5.8a) gilt, weil  $X_A^n \setminus X_A^{n-1}$  die Vereinigung der  $n$ -Zellen in  $\mathcal{Z}'_A$  ist, und (5.8b) daraus folgt, weil diese Zellen disjunkt und offen in  $X_A^n \setminus X_A^{n-1}$  sind und die singulären Kettengruppen ihrer Vereinigung die direkte Summe der singulären Kettengruppen der einzelnen Zellen sind. Man vergleiche dazu Bemerkung 4.1; die entsprechende Aussage für die relativen Kettengruppen  $C_k(e, e_0)$  und somit für die relative Homologie erhält man ähnlich wie in Lemma 2.30 d).

Jeder Summand in (5.8b) ist  $\mathbf{Z}$ , wenn  $k = n$ , und  $\{0\}$  sonst, nach Lemma 5.28 und weil das Paar  $(e, e_0)$  homöomorph ist zu  $(E^n, E_0^n)$  vermöge des Homöomorphismus  $\Phi_e$ .

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(E^n, E_0^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(D^n, D^n \setminus \{0\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(D^n, S^{n-1}) \\ H_n(\Phi_e) \downarrow \cong & & H_n(\Phi_e) \downarrow & & \downarrow H_n(\Phi_e) \\ H_n(e, e_0) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X_A^n, \tilde{X}_A^n) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \end{array} \quad (5.9)$$

wo die waagerechten Pfeile durch Inklusionen induziert werden. Einige der waagerechten Pfeile, wie auch der linke senkrechte Pfeil, sind Isomorphismen. Der linke obere waagerechte Pfeil ist ein Ausschneidungsisomorphismus (Ausschneidung von  $S^{n-1}$ ) und die rechten waagerechten Pfeile gehören zu Abbildungen von Raumpaaren, die Homotopieäquivalenzen der Unterräume sind und Identitäten auf den Oberräumen sind, und deshalb nach Lemma 3.30 b) Isomorphismen in Homologie induzieren.

Die durch die Inklusion der Zelle  $e$  nach  $X_A^n$  induzierte Abbildung  $i_*$  unten links ist algebraisch die Inklusion des  $e$ -ten Summanden in die di-

rekte Summe (5.8b). Bis auf die natürlichen Isomorphismen, die im Diagramm sichtbar sind, ist  $i_*$  aber nichts anderes als der rechte senkrechte Pfeil  $H_n(\Phi_e): H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ . Insbesondere ist dieser Pfeil, die Abbildung (5.6), eine Inklusion von  $\mathbf{Z}$  als den  $e$ -ten Summanden von (5.8b) für  $k = n$ . ■

**Definition 5.31** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **Filtrierung** von  $X$  ist eine durch die ganzen Zahlen indizierte Folge  $\mathcal{F} := \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  von Unterräumen von  $X$ , so dass  $X_n \subseteq X_{n+1}$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .

Eine Filtrierung  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  heißt **zellulär**, wenn

- a) für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt  $H_k(X_n, X_{n-1}) = \{0\}$  für alle  $k \neq n$ , und
- b) für jeden singulären Simplex  $\sigma$  in  $X$  gibt es ein  $n \in \mathbf{Z}$  mit  $\text{Bild } \sigma \subseteq X_n$ .

Ein **zellulärer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{F})$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $\mathcal{F}$  eine zelluläre Filtrierung von  $X$  ist. Oft sprechen wir einfach von dem „zellulären Raum  $X$ ,“ wenn die Filtrierung  $\mathcal{F}$  fest vorgegeben ist oder wir sie nicht explizit nennen müssen oder wollen.

Sind  $(X, \mathcal{F})$  und  $(Y, \mathcal{F}')$  zwei zelluläre Räume, so nennen wir eine stetige Abbildung  $f: X \longrightarrow Y$  **zellulär**, wenn für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt  $f(X_n) \subseteq Y_n$ .

**Bemerkung 5.32** Bedingung 5.31 b) impliziert, dass eine zelluläre Filtrierung  $\{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eines Raumes  $X$  den ganzen Raum ausschöpft, d. h., dass

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} X_n.$$

Denn jeder einzelne Punkt von  $X$  ist ein 0-Simplex und liegt somit in einem der  $X_n$ .

**Beispiel 5.33** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ . Dann bilden die Unterkomplexe  $X_A^n$  für  $n \in \mathbf{Z}$  eine zelluläre Filtrierung  $\mathcal{F}_A$  von  $X$ .

Bedingung 5.31 a) ist genau die Aussage von Lemma 5.30 c), und Bedingung 5.31 b) folgt aus Korollar 5.26, denn für jeden singulären  $m$ -Simplex  $\sigma$  ist  $\sigma(\Delta_m)$  eine kompakte Teilmenge von  $X$  und somit gibt es ein  $n \in \mathbf{N}$  mit  $\sigma(\Delta_m) \subseteq X^n \subseteq X_A^n$ .

In der Filtrierung  $\mathcal{F}_A$  beachte man, dass  $X_A^n = A$  für alle  $n < 0$ .

Ist  $(Y, B)$  ein weiterer CW-Raum und  $f: X \longrightarrow Y$  eine stetige Abbildung, so ist für  $f$  der Begriff, zellulär zu sein als Abbildung zwischen Zellenkomplexen im Sinne von Definition 5.4, nicht das Gleiche, wie der Begriff, zellulär

zu sein als Abbildung zwischen zellulären Räumen  $(X, \mathcal{F}_A) \longrightarrow (Y, \mathcal{F}_B)$ . Nur wenn  $A = B = \emptyset$  stimmen beide Begriffe überein.

Eine stetige Abbildung, die zellulär ist als Abbildung zwischen den zellulären Räumen, muss wegen der Bemerkung oben über die Filtrierung in negativen Dimensionen auf jeden Fall  $A$  nach  $B$  abbilden und somit eine Abbildung von Raumpaaren  $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$  sein; sie muss aber die Skelette von  $X$  nicht in die entsprechenden Skelette von  $Y$  abbilden (außer für Zellen in  $X \setminus A$ , die nicht nach  $B$  abgebildet werden).

Allerdings, wenn  $f$  zellulär ist als Abbildung zwischen Zellenkomplexen und wenn  $f$  eine Abbildung von Raumpaaren  $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$  ist, dann ist  $f$  auch zellulär als Abbildung der zellulären Räume  $(X, \mathcal{F}_A) \longrightarrow (Y, \mathcal{F}_B)$ .

Die Eigenschaften einer zellulären Filtrierung sind so gewählt, dass jede Homologiegruppe des ganzen Raumes schon in einer genügend großen Stufe  $X_n$  der Filtrierung berechnet werden kann.

**Satz 5.34** Sei  $(X, \mathcal{F})$  ein zellulärer Raum mit  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ . Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  sei  $i_n$  die Inklusion  $X_n \longrightarrow X$ , und für jedes  $m \leq n \in \mathbf{Z}$  sei  $i_{m,n}$  die Inklusion  $X_m \longrightarrow X_n$  und sei  $j_{m,n}$  die Inklusion  $(X, X_m) \longrightarrow (X, X_n)$ .

Für jede Teilmenge  $C \subseteq X_n$  sei  $i_n^C$  die Inklusion  $(X_n, C) \longrightarrow (X, C)$ .

Sei  $k \in \mathbf{N}$ .

- a) Für  $k > n$  ist  $H_k(X_n)$  unabhängig von  $n$ , d. h., wenn auch  $m < k$ , so ist  $H_k(X_n) \cong H_k(X_m)$ .
- b) Auch für  $k < n$  ist  $H_k(X_n)$  unabhängig von  $n$ .
- c) Für  $k \leq n$  ist  $H_k(X, X_n) = \{0\}$ .
- d) Für  $n$  mit  $k > n + 1$  oder mit  $n < 0$  ist  $H_k(X, X_n)$  unabhängig von  $n$ .
- e)  $H_k(i_n): H_k(X_n) \longrightarrow H_k(X)$  ist ein Isomorphismus für  $k < n$  und ist surjektiv für  $k = n$ .
- f)  $H_k(i_{m,n}): H_k(X_m) \longrightarrow H_k(X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $k < m$  und für  $k > n$ , ist surjektiv für  $k = m$  und ist injektiv für  $k = n$ .
- g)  $H_k(i_n^C): H_k(X_n, C) \longrightarrow H_k(X, C)$  ist ein Isomorphismus wenn  $k < n$  und ist surjektiv wenn  $k = n$ .
- h) Sei  $m \leq n$ . Die Abbildung  $H_k(j_{m,n}): H_k(X, X_m) \longrightarrow H_k(X, X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $k > n + 1$ , aber auch wenn  $m \leq n < 0$ , und  $H_k(j_{m,n})$  ist injektiv, wenn  $k = n + 1$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit Teil f).

Sei  $r \in \mathbf{Z}$ . Um die Notation ein wenig zu vereinfachen schreiben wir  $h_r$  als Kürzel für  $i_{r,r+1}$ . In der langen exakten Homologiefolge

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(X_{r+1}, X_r) \rightarrow H_k(X_r) \xrightarrow{H_k(h_r)} H_k(X_{r+1}) \rightarrow H_k(X_{r+1}, X_r) \rightarrow \cdots$$

des Paares  $(X_{r+1}, X_r)$  sind nach Bedingung 5.31 a) die relativen Gruppen  $H_{k+1}(X_{r+1}, X_r) = \{0\}$  außer für  $k = r$ , und  $H_k(X_{r+1}, X_r) = \{0\}$  außer für  $k = r + 1$ .

Hieraus folgt, dass  $H_k(h_r)$  surjektiv ist für  $r = k$ , injektiv ist für  $r = k - 1$ , und sogar ein Isomorphismus ist für alle anderen  $r$  und  $k$ .

Offensichtlich gilt für alle  $m < n \in \mathbf{Z}$ , dass

$$i_{m,n} = i_{n-1,n} \circ i_{n-2,n-1} \circ \cdots \circ i_{m,m+1} = h_{n-1} \circ h_{n-2} \circ \cdots \circ h_m$$

und somit gilt für jedes  $k$ , dass

$$H_k(i_{m,n}) = H_k(h_{n-1}) \circ H_k(h_{n-2}) \circ \cdots \circ H_k(h_m). \quad (5.10)$$

Die Faktoren  $H_k(h_p)$  in (5.10) sind alle Isomorphismen, wenn unter den Indizes  $p$  mit  $m \leq p \leq n - 1$  weder  $k$  noch  $k - 1$  vorkommt, also wenn  $k < m$  oder wenn  $k - 1 > n - 1$  (d. h., wenn  $k > n$ ). In diesem Fall ist  $H_k(i_{m,n})$  ein Isomorphismus.

Wenn bis auf eine Ausnahme alle Faktoren  $H_k(h_p)$  in (5.10) Isomorphismen sind, dann können wir über die Verknüpfung immer noch etwas sagen. Diese Situation tritt auf, wenn  $k = m$  (dann ist  $H_k(h_m)$  surjektiv, die anderen Faktoren  $H_k(h_p)$  sind Isomorphismen weil  $p > m = k > k - 1$ , und  $H_k(i_{m,n})$  ist also surjektiv) oder wenn  $k = n$  (dann ist  $H_k(h_{n-1})$  injektiv, die anderen Faktoren  $H_k(h_p)$  sind Isomorphismen weil  $p < n - 1 = k - 1 < k$ , und  $H_k(i_{m,n})$  als Verknüpfung dieser Homomorphismen ist injektiv).

Damit haben wir f) bewiesen. Man beachte, dass die Aussage auch für  $m = n$  richtig ist, unabhängig von  $k$  (denn dann ist  $i_{m,n} = \text{id}_{X_m}$ ).

Als Nächstes beweisen wir e).

Sei  $k \leq n$ . Sei  $\gamma \in H_k(X)$  und sei  $c \in C_k(X)$  ein singulärer Zykel mit  $\gamma = [c]$ .

Aus Bedingung 5.31 b) folgt, dass es ein  $m \in \mathbf{Z}$  gibt (das wir natürlich beliebig groß wählen können), so dass jeder singuläre Simplex in  $c$  sein Bild in  $X_m$  hat. Wir wählen ein solches  $m \geq n$ .

Wir schreiben  $c'$  für die Kette  $c$  aufgefasst als Kette in  $C_k(X_m)$ , und wir haben  $c = (i_m)_\#(c')$ . Natürlich hat  $c$  auch in  $C_k(X_m)$  den Rand 0, d. h., auch  $c'$  ist ein Zykel. Wir haben

$$\gamma = [c] = [(i_m)_\#(c')] = H_k(i_m)([c'])$$

und insbesondere ist  $\gamma \in \text{Bild}(H_k(i_m))$ .

Dieses  $m$  kann von der Wahl von  $c$  abhängen, aber wir haben auf jeden Fall eingerichtet, dass  $m \geq n$ . Offensichtlich ist  $i_n = i_m \circ i_{n,m}$ , also gilt auch

$$H_k(i_n) = H_k(i_m) \circ H_k(i_{n,m}), \quad (5.11)$$

und da  $H_k(i_{n,m})$  nach Teil f) surjektiv ist weil  $k \leq n$ , ist  $\text{Bild } H_k(i_n) = \text{Bild } H_k(i_m)$  und insbesondere  $\gamma \in \text{Bild}(H_k(i_n))$ .

Dies gilt für jedes  $\gamma \in H_k(X)$ ; also ist  $H_k(i_n)$  surjektiv wenn  $k \leq n$ .

Nun sei  $k < n$  und sei  $\gamma \in H_k(X_n)$  mit  $H_k(i_n)(\gamma) = 0$ . Sei  $c$  ein Zykel in  $C_k(X_n)$  mit  $\gamma = [c]$ .

$H_k(i_n)(\gamma) = 0$  bedeutet, dass  $(i_n)_\#(c)$  ein Rand ist in  $C_k(X)$ . Es gibt also eine Kette  $b \in C_k(X)$  mit  $(i_n)_\#(c) = \partial b$ .

Wieder folgt aus Bedingung 5.31 b), dass es ein  $m \in \mathbf{Z}$  gibt (das wir natürlich beliebig groß und insbesondere größer als  $n$  wählen können), so dass jeder singuläre Simplex in  $b$  sein Bild in  $X_m$  hat.

Wir schreiben  $b'$  für die Kette  $b$  aufgefasst als Kette in  $C_k(X_m)$ . Es gilt

$$(i_m)_\#(\partial b') = \partial((i_m)_\#(b')) = \partial b = (i_n)_\#(c) = ((i_m)_\# \circ (i_{n,m})_\#)(c).$$

Weil die Abbildung  $i_m$  als Inklusion injektiv ist, ist klar, dass auch  $(i_m)_\#$  injektiv ist und wir können deshalb folgern, dass  $\partial b' = (i_{n,m})_\#(c)$ .

Wir haben also  $H_k(i_{n,m})(\gamma) = [(i_{n,m})_\#(c)] = 0$  und weil  $H_k(i_{n,m})$  nach Teil f) ein Isomorphismus ist (denn  $k < n$ ), ist  $\gamma = 0$ . Dies zeigt, dass  $H_k(i_n)$  injektiv ist für  $n > k$ , also ein Isomorphismus ist, da wir schon wussten, dass es surjektiv ist.

Dies beweist Teil e).

Teile a) und b) folgen sofort aus Teil f), denn wenn  $m \leq n < k$  oder wenn  $k < m \leq n$ , so ist  $H_k(i_{m,n})$  ein Isomorphismus  $H_k(X_m) \rightarrow H_k(X_n)$ .

Teil c) folgt aus Teil e), denn wenn  $k \leq n$ , so enthält die lange exakte Homologiefolge des Paares  $(X, X_n)$  den Abschnitt

$$H_k(X_n) \xrightarrow{H_k(i_n)} H_k(X) \rightarrow H_k(X, X_n) \rightarrow H_{k-1}(X_n) \xrightarrow{H_{k-1}(i_n)} H_{k-1}(X),$$

in dem  $H_k(i_n)$  auf jeden Fall surjektiv und  $H_{k-1}(i_n)$  ein Isomorphismus ist.

Wegen der Exaktheit an den Stellen  $H_k(X)$  und  $H_{k-1}(X_n)$  müssen die beiden mittleren Pfeile die Nullabbildung sein, und somit ist  $H_k(X, X_n)$  (der Kern der rechten mittleren Nullabbildung) gleich  $\{0\}$  (dem Bild der linken mittleren Nullabbildung).

Betrachten wir jetzt Teil g). Als Paar von Abbildungen, also als Morphismus von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ , ist  $i_n^C := (i_n, \text{id}_C)$ .

Dieser  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismus induziert einen Morphismus eines Abschnitts der langen exakten Homologiefolge wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_k(C) & \longrightarrow & H_k(X_n) & \longrightarrow & H_k(X_n, C) & \longrightarrow & H_{k-1}(C) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_n) \\
 \text{id} \downarrow & & H_k(i_n) \downarrow & & H_k(i_n^C) \downarrow & & \text{id} \downarrow & & H_{k-1}(i_n) \downarrow \\
 H_k(C) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, C) & \longrightarrow & H_{k-1}(C) & \longrightarrow & H_{k-1}(X)
 \end{array}$$

Die äußeren vier senkrechten Abbildungen sind alle Isomorphismen wenn  $k < n$ , nach Teil e). Aus dem 5-er Lemma folgt, dass dann auch  $H_k(i_n^C)$  ein Isomorphismus ist.

Wenn  $k = n$ , dann ist  $H_n(i_n)$  noch surjektiv, aber  $H_{n-1}(i_n)$  und natürlich  $\text{id}_{H_{n-1}(C)}$  bleiben Isomorphismen. Anwendung von Lemma 3.10 b) ii) in Bezug auf die rechten vier Spalten im Diagramm zeigt, dass  $H_n(i_n^C)$  surjektiv ist.

Teil h) wird auf ähnliche Weise bewiesen. Als Paar von Abbildungen, also als Morphismus von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ , ist  $j_{m,n} := (\text{id}_X, i_{m,n})$ .

Dieser  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismus induziert einen Morphismus eines Abschnitts der langen exakten Homologiefolgen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_k(X_m) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, X_m) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_m) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\
 \downarrow H_k(i_{m,n}) & & \text{id} \downarrow & & H_k(j_{m,n}) \downarrow & & \downarrow H_{k-1}(i_{m,n}) & & \downarrow \text{id} \\
 H_k(X_n) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, X_n) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_n) & \longrightarrow & H_{k-1}(X)
 \end{array}$$

Die äußeren vier senkrechten Abbildungen sind alle Isomorphismen wenn  $k - 1 > n$ , nach Teil f). Unabhängig von dem Wert von  $k \in \mathbf{N}$  sind sie auch Isomorphismen wenn  $n < 0$ , weil dann immer noch gilt  $k - 1 > n$ , außer eventuell für  $k = 0$ , und in diesem Fall ist zumindest  $H_0(i_{m,n})$  ein Isomorphismus nach Teil f), da  $n < 0$ , und  $H_{-1}(i_{m,n})$  ist die Abbildung  $\{0\} \longrightarrow \{0\}$  und somit auch ein Isomorphismus; die beiden anderen äußeren senkrechten Abbildungen sind Identitäten.

Aus dem 5-er Lemma folgt in den genannten Situationen, dass auch der mittlere senkrechte Pfeil  $H_k(j_{m,n})$  ein Isomorphismus ist.

Wenn  $k = n + 1$  (oder anders gesagt, wenn  $k - 1 = n$ ), so ist  $H_{k-1}(i_{m,n})$  noch injektiv nach Teil f) und alle anderen senkrechten Abbildungen im Diagramm sind noch Isomorphismen. Aus Lemma 3.10 b) i) angewendet auf die linken vier Spalten des Diagramms folgt, dass  $H_k(j_{m,n})$  injektiv ist.

Teil d) folgt, zum Schluss, sofort aus Teil h), denn wenn  $m < n$  Zahlen sind mit  $n + 1 < k$  oder  $n < 0$  (dann erfüllt  $m$  die gleiche Bedingung), so ist  $H_k(j_{m,n})$  ein Isomorphismus  $H_k(X, X_m) \longrightarrow H_k(X, X_n)$ . ■

Für einen zellulären Raum  $X$  können wir  $H_k(X)$  also schon mit der  $k+1$ -ten Filtrierungsstufe genau ausrechnen, und wenn wir beobachten, wie  $H_k(X_n)$  sich mit steigendem  $n$  verhält, so nimmt diese Homologiegruppe bis einschließlich  $n = k - 1$  einen festen „Grundwert“ an, und verändert sich von diesem zum endgültigen Wert  $H_k(X)$  innerhalb von nur zwei Stufen.

Entsprechend ändern sich die relativen Homologiegruppen  $H_k(X, X_n)$  für steigendes  $n$  nur zwischen den Werten  $n = k - 2$  und  $n = k$ .

Dass die  $k$ -te Homologie eines zellulären Raumes in der Nähe der  $k$ -ten Filtrierungsstufe bestimmt wird kann man ausnutzen, um die singuläre Homologie mit Hilfe der Filtrierung auf eine neue einfache Art zu berechnen.

**Definition 5.35** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eine Filtrierung von  $X$ . Wir definieren einen Kettenkomplex

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = (W_*(X), d)$$

wie folgt.

Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  definieren wir die  $n$ -te Kettengruppe von  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  als

$$W_n(X) := H_n(X_n, X_{n-1}).$$

Wir müssen noch den Randoperator konstruieren.

Für jedes  $k \in \mathbf{Z}$  sei

$$j_k: (X_k, \emptyset) \longrightarrow (X_k, X_{k-1})$$

die Inklusion und sei

$$\beta_k: H_k(X_k, X_{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(X_{k-1})$$

der verbindende Homomorphismus aus der langen exakten Homologiefolge des Paares  $(X_k, X_{k-1})$ . Uns interessieren nur die genannten, der Filtrierungsstufe entsprechenden Homologiegruppen, und deshalb vereinbaren wir, dass der Index  $k$  in den Bezeichnungen  $j_k$  und  $\beta_k$  nicht nur die Dimension der Homologiegruppen angibt, sondern auch, zwischen welchen Räumen oder der Homologie welcher Räume oder Raumpaare diese Abbildungen zu verstehen sind. Ändert man den Index, ändern sich die betrachteten Filtrierungsstufen gleich mit.

Die Inklusion  $j_{n-1}: (X_{n-1}, \emptyset) \longrightarrow (X_{n-1}, X_{n-2})$  induziert einen Homomorphismus

$$(j_{n-1})_* = H_{n-1}(j_{n-1}): H_{n-1}(X_{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$$



(der auch in der langen exakten Homologiefolge des Paares  $(X_{n-1}, X_{n-2})$  vorkommt).

Wir definieren den  $n$ -ten Randoperator des Kettenkomplexes  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  als

$$d_n := H_{n-1}(j_{n-1}) \circ \beta_n = (j_{n-1})_* \circ \beta_n.$$

Dies ist tatsächlich ein Homomorphismus

$$W_n(X) = H_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) = W_{n-1}(X).$$

Wir müssen nur noch nachprüfen, dass  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ . Das sieht man am einfachsten in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(X_n, X_{n-1}) & & & & & & \\
 \beta_n \downarrow & \searrow d_n & & & & & \\
 H_{n-1}(X_{n-1}) & \xrightarrow{(j_{n-1})_*} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & H_{n-2}(X_{n-2}) & & \\
 & & \searrow d_{n-1} & & \downarrow (j_{n-2})_* & & \\
 & & & & H_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-3}) & & 
 \end{array}$$

Der Homomorphismus  $d_{n-1} \circ d_n$  schreibt sich als eine Verknüpfung von vier Homomorphismen aus verschiedenen langen exakten Homologiefolgen, die aber insbesondere die Verknüpfung  $\beta_{n-1} \circ (j_{n-1})_*$  der beiden aufeinanderfolgenden Homomorphismen in der mittleren Zeile beinhaltet. Diese Zeile ist ein Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge des Raumpaares  $(X_{n-1}, X_{n-2})$ . Wegen der Exaktheit ist  $\beta_{n-1} \circ (j_{n-1})_* = 0$  und somit auch  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ .

Den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  nennt man den **zellulären Kettenkomplex** des topologischen Raumes  $X$  mit der Filtrierung  $\mathcal{F}$ .

Man beachte, dass auch für den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  die Kettengruppen in negativen Dimensionen  $n$  trivial sind (da sie als die  $n$ -te Homologie eines Raumpaares definiert sind und die singuläre Homologie in negativen Dimensionen verschwindet). Das gilt auch wenn die Filtrierung  $\mathcal{F}$  in negativen Dimensionen nicht trivial oder konstant ist!

**Lemma und Definition 5.36** *Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume.*

*Sei  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eine Filtrierung auf  $X$  und sei  $\mathcal{F}' = \{Y_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eine Filtrierung auf  $Y$ . Sei  $f: X \longrightarrow Y$  eine zelluläre stetige Abbildung, d. h., eine stetige Abbildung, so dass  $f(X_n) \subseteq Y_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .*

*Dann ist  $f$  auch eine stetige Abbildung  $(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow (Y_n, Y_{n-1})$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ . Setze*

$$W_n(f) := H_n(f): W_n(X) = H_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow H_n(Y_n, Y_{n-1}) = W_n(Y).$$

Die Abbildungen  $W_n(f)$  bilden eine Kettenabbildung

$$W_*(f): \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{F}'}$$

*Beweis.* Die Randoperatoren  $d_n$  der beiden zellulären Kettenkomplexe sind Verknüpfungen von Homomorphismen aus den langen exakten Homologiefolgen von Raumpaaren von Filtrierungsstufen von  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$ , und diese Homomorphismen kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen Homologiefolgen mit den  $H_n(f)$ . Deshalb kommutiert auch  $d$  mit  $W_*(f)$ .

Genauer haben wir für jedes  $n$ :

$$\begin{aligned} d_n(Y) \circ W_n(f) &= (j_{n-1}(Y))_* \circ \beta_n(Y) \circ H_n(f) \\ &= (j_{n-1}(Y))_* \circ H_{n-1}(f) \circ \beta_n(X) \\ &= H_{n-1}(f) \circ (j_{n-1}(X))_* \circ \beta_n(X) = W_{n-1}(f) \circ d_n(X) \end{aligned}$$

(wobei die Abbildungen  $H_k(f)$ , die hier erscheinen, auf verschiedenen Räumen und Raumpaaren definiert sind, was wir in der Notation nicht hervorheben). Diese Gleichung besagt, dass  $W_*(f)$  eine Kettenabbildung ist. ■

In Definition 5.35 muss die Filtrierung nicht zellulär sein — den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  erhält man auch ohne diese Voraussetzung. Aber weil die Konstruktion von  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  jeweils nur die speziellen Homologiegruppen  $H_n(X_n, X_{n-1})$  mit einbaut, kann dieser Kettenkomplex nur dann etwas sinnvolles über die singuläre Homologie von  $X$  aussagen, wenn die relative Homologie der Paare  $(X_n, X_{n-1})$  tatsächlich in der  $n$ -ten Dimension konzentriert ist, und das ist insbesondere der Fall, wenn die Filtrierung zellulär ist. Dann kann man mit dem zellulären Kettenkomplex die singuläre Homologie von  $X$  korrekt berechnen.

**Bemerkung und Definition 5.37** Wie man sehr leicht nachprüft, bilden die zellulären Räume und zellulären Abbildungen eine Kategorie **Zell**.

Man sieht auch sofort, dass die Zuordnung des zellulären Kettenkomplexes zu einem zellulären Raum, und der zellulären Kettenabbildung  $W_*(f)$  zu einer zellulären Abbildung  $f$ , einen kovarianten Funktor  $W_*: \mathbf{Zell} \longrightarrow \mathbf{KK}$  bildet, genannt der *zelluläre Kettenkomplexfunktor*.

Das ist trivial, denn für jedes  $k$  ist  $W_k(f) = H_k(f)$  zwischen den Homologiegruppen bestimmter Raumpaare, und  $W_k(f)$  verhält sich richtig für Identitäten und bei Verknüpfung von Abbildungen, weil  $H_k(f)$  dies schon tut.

Genauere Details bleiben dem Leser überlassen.

**Lemma 5.38 (Exaktes Homologiedreieck eines Raumtripels)**

Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel und seien  $\tilde{i}: (A, B) \longrightarrow (X, B)$  und  $\tilde{j}: (X, B) \longrightarrow (X, A)$  die Inklusionen der genannten Raumpaare. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H_*(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_*(X, B) \\ & \nwarrow \tilde{\beta} & \swarrow \tilde{j}_* \\ & H_*(X, A) & \end{array} \quad (5.12)$$

Grad -1

zwischen den graduierten Homologiegruppen der Paare  $(A, B)$ ,  $(X, B)$  und  $(X, A)$ , mit den von den Inklusionen induzierten Grad 0 Homomorphismen  $\tilde{i}_* = H_*(\tilde{i})$  und  $\tilde{j}_* = H_*(\tilde{j})$  und mit einem Grad -1 Homomorphismus

$$\tilde{\beta}: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A, B),$$

den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen und der wie folgt leicht zu konstruieren ist.

Sei  $\gamma \in H_*(X, A)$  und sei  $z \in C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$  ein beliebiger Zykel mit Homologieklassse  $\gamma$ . Nach der Definition von  $C_*(X, A)$  ist  $z$  die Restklasse  $c + C_*(A)$  einer Kette  $c \in C_*(X)$ . Dass  $z$  ein relativer Zykel ist bedeutet, dass  $\partial c$  ein Element des Nenners  $C_*(A) \subseteq C_*(X)$  des Quotienten  $C_*(X, A)$  ist. Als Rand in  $C_*(X)$  ist  $\partial c$  ein Zykel in  $C_*(A)$ , und somit ist  $\partial c + C_*(B)$  ein Zykel in  $C_*(A, B)$ . Es ist

$$\tilde{\beta}(\gamma) = [\partial c + C_*(B)] \in H_*(A, B).$$

Das exakte Dreieck (5.12) heißt das **exakte Homologiedreieck** des topologischen Raumtripels  $(X, A, B)$ .

Wenn  $B = \emptyset$ , so ist das exakte Homologiedreieck des Tripels  $(X, A, B)$  nichts anderes als das exakte Homologiedreieck des Paares  $(X, A)$ .

*Beweis.* Die kurze Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_*(A, B) & \xrightarrow{C_*(\tilde{i})} & C_*(X, B) & \xrightarrow{C_*(\tilde{j})} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \frac{C_*(A)}{C_*(B)} & & \frac{C_*(X)}{C_*(B)} & & \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \end{array} \quad (5.13)$$

ist natürlich, weil die Inklusionen  $\tilde{i}$  und  $\tilde{j}$  offenbar natürliche Transformationen sind zwischen den Funktoren  $\mathbf{Top}^3 \longrightarrow \mathbf{Top}^2$ , die einem Tripel  $(X, A, B)$  die Paare  $(A, B)$ ,  $(X, B)$  und  $(X, A)$  zuordnen, und sie ist exakt, wie wir jetzt kurz nachprüfen.

$C_*(\tilde{i}) = \tilde{i}_\#$  ist injektiv, denn wenn  $c + C_*(B) \in C_*(A, B)$  und wenn

$$\tilde{i}_\#(c + C_*(B)) = 0 \in C_*(X, B),$$

so ist  $c + C_*(B) = 0 \in C_*(X, B)$ , also  $c \in C_*(B)$ , also  $c + C_*(B) = 0$  auch in  $C_*(A, B)$ .

Für eine relative Kette  $c + C_*(B) \in C_*(X, B)$  ist

$$\tilde{j}_\#(c + C_*(B)) = 0 \in C_*(X, A)$$

genau dann, wenn  $c + C_*(A) = 0 \in C_*(X, A)$ , also wenn  $c \in C_*(A) \subseteq C_*(X)$ , und das ist genau dann der Fall, wenn  $c + C_*(B) \in \tilde{i}_\#(C_*(A, B)) \subseteq C_*(X, B)$ . (Für die Richtung „ $\Leftarrow$ “ beachte man, dass wenn  $c + C_*(B) = \tilde{i}_\#(c' + C_*(B))$  für ein Element  $c' \in C_*(A)$ , dann ist  $c - c' \in C_*(B) \subseteq C_*(A)$  und somit ist auch  $c \in C_*(A)$ .)

Das bedeutet, dass die Folge an der Stelle  $C_*(X, B)$  exakt ist.

Und schließlich ist  $\tilde{j}_\#$  surjektiv, denn jede Restklasse  $c + C_*(A) \in C_*(X, A)$  kann man schreiben als  $\tilde{j}_\#(c + C_*(B))$  mit  $c + C_*(B) \in C_*(X, B)$ .

Also ist die kurze exakte Folge von Kettenkomplexen (5.13) exakt und natürlich. Nach Satz 3.14 hat sie ein natürliches exaktes Homologiedreieck (5.12). Wir müssen nur noch zeigen, dass  $\tilde{\beta}$  die angegebene Gestalt hat.

Das folgt sofort aus der Beschreibung des verbindenden Homomorphismus in der Aussage von Satz 3.14. Sei  $\gamma \in H_*(X, A)$  und sei  $z \in C_*(X, A)$  ein beliebiger Zykel mit Homologieklassse  $\gamma$ . Nach der Definition von  $C_*(X, A)$  ist  $z$  die Restklasse  $c + C_*(A)$  einer Kette  $c \in C_*(X)$ . Dass  $c + C_*(A)$  ein relativer Zykel ist bedeutet, dass  $\partial c \in C_*(A)$ .

Wir müssen zunächst ein Urbild von  $z$  unter  $\tilde{j}$  finden; die relative Kette  $c + C_*(B)$  ist ein solches Urbild.

Wir müssen dann den Rand  $\partial c + C_*(B)$  dieses Urbilds bilden; diese Kette liegt automatisch im Bild von  $\tilde{i}$ , und zwar ist sie Bild unter  $\tilde{i}$  einer eindeutig bestimmten Kette von  $C_*(A, B)$ , und diese Kette ist ein relativer Zykel und repräsentiert die Homologieklassse  $\tilde{\beta}(\gamma)$ .

In unserem Fall ist  $\partial c + C_*(B)$  das Bild unter  $\tilde{i}$  der entsprechenden Kette  $\partial c + C_*(B) \in C_*(A, B)$ . Also ist  $\tilde{\beta}(\gamma) = [\partial c + C_*(B)]$ , wie behauptet.

Wenn  $B = \emptyset$ , so verschwinden die Nenner in den Quotienten  $C_*(A, B)$  und  $C_*(X, B)$  und die kurze exakte Folge (5.13) wird zur kurzen exakten Folge (3.14) aus Bemerkung 3.15, der kurzen exakten Kettenkomplexfolge des Raumpaars  $(X, A)$ . Deshalb wird das exakte Homologiedreieck (5.12) in dieser Situation zum exakten Homologiedreieck (3.15) des Paares  $(X, A)$ . ■

**Bemerkung 5.39** Analog zur Situation für Raumpaare (vergleiche Bemerkung 3.17) kann man das exakte Homologiedreieck eines Tripels „abwickeln“ zu einer langen exakten Homologiefolge

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\tilde{j}_*} & H_{n+1}(X, A) & & & & \\
 & & \downarrow \tilde{\beta}_{n+1} & & & & \\
 & & H_n(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_n(X, B) & \xrightarrow{\tilde{j}_*} & H_n(X, A) \\
 & & & & & & \downarrow \tilde{\beta}_n \\
 & & & & & & H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{\tilde{i}_*} \cdots
 \end{array} \quad (5.14)$$

der Homologiegruppen der drei beteiligten Raumpaare in den einzelnen Dimensionen.

Diese exakte Folge heißt die **lange exakte Homologiefolge** des Raumtripels  $(X, A, B)$ .

Neben der expliziten Beschreibung in Lemma 5.38 des verbindenden Homomorphismus  $\tilde{\beta}$  ist folgende Faktorisierung dieses Homomorphismus nützlich.

**Bemerkung 5.40** Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel und sei

$$\tilde{\beta}: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A, B)$$

der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks dieses Tripels.

Sei  $\lambda$  die Inklusion  $A = (A, \emptyset) \longrightarrow (A, B)$  und sei  $\beta: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A)$  der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks des Paares  $(X, A)$ .

Dann ist

$$\tilde{\beta} = H_*(\lambda) \circ \beta. \quad (5.15)$$

*Beweis.* Die Inklusion  $(X, A, \emptyset) \longrightarrow (X, A, B)$  und damit verbunden die Inklusionen  $\lambda: (A, \emptyset) \longrightarrow (A, B)$  und  $\mu: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, B)$  zusammen mit der Identität von  $(X, A)$  induzieren einen Morphismus

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_*(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_*(X, A) & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow \lambda_\# & & \downarrow \mu_\# & & \downarrow \text{id} & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_\#} & C_*(X, B) & \xrightarrow{\tilde{j}_\#} & C_*(X, A) & \longrightarrow & \{0\}
 \end{array}$$

zwischen den kurzen exakten Kettenkomplexfolgen der Tripel  $(X, A, \emptyset)$  und  $(X, A, B)$ , der wiederum wegen der Natürlichkeit einen Morphismus zwischen den exakten Homologiedreiecken der beiden Raumtripel induziert.

Dieser Morphismus der Homologiedreiecke beinhaltet für die Dreiecksseite mit dem verbindenden Homomorphismus ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} C_*(X, A) & \xrightarrow{\beta} & C_*(A) \\ \text{id} \downarrow & & \lambda_* \downarrow \\ C_*(X, A) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & C_*(A, B) \end{array}$$

und die Kommutativität besagt, dass  $\lambda_* \circ \beta = \tilde{\beta}$ . ■

**Satz 5.41** Sei  $(X, \mathcal{F})$  ein zellulärer Raum und sei  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = (W_*(X), d)$  sein zellulärer Kettenkomplex.

Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) \cong H_*(X, X_{-1})$$

(in anderen Worten, eine natürliche Äquivalenz zwischen dem Funktor  $H \circ W_*$  und dem Funktor  $H_* \circ R_{-1}$ , wo für jedes  $p \in \mathbf{Z}$  der Funktor  $R_p: \mathbf{Zell} \rightarrow \mathbf{Top}^2$  gegeben ist durch  $R_p(X, \mathcal{F}) := (X, X_p)$ ).

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbf{Z}$ . Für  $n < 0$  ist nichts zu beweisen, denn in negativen Dimensionen verschwinden schon die Kettengruppen von  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  und  $C_*(X, X_{-1})$  und somit auch die Homologie. Wir können also annehmen, dass  $n \in \mathbf{N}$ .

Wir betrachten die  $n$ -te zelluläre Kettengruppe von  $(X, \mathcal{F})$  und die dort eingehenden und ausgehenden Randoperatoren  $d_{n+1}$  und  $d_n$ , und wir untersuchen diese Abbildungen und ihr Umfeld in der Homologie von  $X$  und seinen Filtrierungsstufen.

Für jedes  $k \in \mathbf{N}$  sei  $\lambda_k$  die Inklusion  $(X_k, \emptyset) \rightarrow (X_k, X_{-1})$  und sei  $\tilde{j}_k$  die Inklusion  $(X_k, X_{-1}) \rightarrow (X_k, X_{k-1})$  (so dass  $j_k = \tilde{j}_k \circ \lambda_k$ ).

Ferner sei  $\tilde{h}_k$  die Inklusion  $(X_k, X_{-1}) \rightarrow (X_{k+1}, X_{-1})$  und sei  $\tilde{i}_k$  die Inklusion  $(X_k, X_{-1}) \rightarrow (X, X_{-1})$ .

Sei

$$\tilde{\beta}_k = H_{k-1}(\lambda_{k-1}) \circ \beta_k: H_k(X_k, X_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X_{k-1}, X_{-1}).$$

Nach Bemerkung 5.40 ist  $\tilde{\beta}_k$  der  $k$ -te verbindende Homomorphismus aus der langen exakten Homologiefolge des Tripels  $(X_k, X_{k-1}, X_{-1})$ .

Für jedes  $k \geq 1 \in \mathbf{N}$  ist

$$d_k = H_{k-1}(j_{k-1}) \circ \beta_k = H_{k-1}(\tilde{j}_{k-1}) \circ H_{k-1}(\lambda_{k-1}) \circ \beta_k = H_{k-1}(\tilde{j}_{k-1}) \circ \tilde{\beta}_k$$

und wir werden fortan mit dieser neuen Faktorisierung von  $d_k$  arbeiten.

Für  $k = 0$  ist  $\tilde{j}_{k-1}$  nicht definiert, aber in diesem Fall brauchen wir kein Analogon zur oben genannten Faktorisierung, denn es ist ohnehin  $d_0 = \mathbf{0}$ .

Als Erstes bemerken wir, dass  $H_k(\tilde{j}_k)$  für jedes  $k \geq 0$  injektiv ist, denn wenn wir den großen Raum  $X$  (und alle Filtrierungsstufen  $X_l$  für  $l > k$ ) durch den neuen Raum  $X' := X_k$  ersetzen, so ist die sich ergebende Filtrierung von  $X'$  immer noch zellulär und  $\tilde{j}_k$  können wir auffassen als die Abbildung  $j_{-1,k-1}$  aus Satz 5.34 für den zellulären Raum  $X' = X_k$ ; nach Teil h) jenes Satzes ist  $H_k(\tilde{j}_k) = H_k(j_{-1,k-1})$  injektiv.

Zweitens ist die Folge

$$H_k(X_k, X_{-1}) \xrightarrow{H_k(\tilde{j}_k)} H_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\tilde{\beta}_k} H_k(X_{k-1}, X_{-1})$$

an der Stelle  $H_k(X_k, X_{k-1})$  exakt, denn dies ist ein Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge des Raumtripels  $(X_k, X_{k-1}, X_{-1})$ .

Drittens:  $H_k(\tilde{i}_{k+1})$  ist für  $k \in \mathbf{N}$  ein Isomorphismus nach Satz 5.34 g), denn  $\tilde{i}_{k+1} = i_{k+1}^C$  für die Teilmenge  $C = X_{-1}$ .

Die Berechnung der Homologie des zellulären Kettenkomplexes  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  lässt sich in folgendem kommutativen Diagramm nachvollziehen:

$$\begin{array}{ccccc}
 W_{n+1}(X) & & & & \\
 \parallel & \searrow d_{n+1} & & & \\
 H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & & & & \\
 \downarrow \tilde{\beta}_{n+1} & & & & \\
 H_n(X_n, X_{-1}) & \xrightarrow{H_n(\tilde{j}_n)} & H_n(X_n, X_{n-1}) = W_n(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_n} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{-1}) \\
 \downarrow (\tilde{h}_n)_* & & & \searrow d_n & \downarrow H_{n-1}(\tilde{j}_{n-1}) \\
 H_n(X_{n+1}, X_{-1}) & & & & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\
 \downarrow & \searrow H_n(\tilde{i}_{n+1}) & & & \parallel \\
 H_n(X_{n+1}, X_n) & \xrightarrow{\cong} & & & W_{n-1}(X) \\
 \parallel & & & & \\
 \{0\} & & H_n(X, X_{-1}) & & 
 \end{array}$$

Hier sind die waagerechten und senkrechten Folgen von Gruppen und Homomorphismen Abschnitte aus den langen exakten Homologiefolgen von Raumtripeln und deshalb exakt (der Homomorphismus  $H_{n-1}(\tilde{j}_{n-1})$  in der rechten senkrechten Folge ist nicht definiert für  $n = 0$  weil  $\tilde{j}_{-1}$  nicht definiert ist, aber wir können ihn durch den Nullhomomorphismus ersetzen, da in dem genannten Fall alle Gruppen in diesem Teil des Diagramms  $\{0\}$  sind).

In der linken Spalte ist  $H_n(X_{n+1}, X_n) = \{0\}$  weil die Filtrierung zellulär ist. Wegen der Exaktheit dieser Spalte ist der Homomorphismus  $(\tilde{h}_n)_*$  surjektiv und somit induziert er einen Isomorphismus

$$\overline{(\tilde{h}_n)_*}: \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Ker}(\tilde{h}_n)_*} = \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow \text{Bild}(\tilde{h}_n)_* = H_n(X_{n+1}, X_{-1}).$$

Verknüpft man diesen mit dem Isomorphismus  $H_n(\tilde{i}_{n+1})$  so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\varphi_n := H_n(\tilde{i}_{n+1}) \circ \overline{(\tilde{h}_n)_*}: \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow H_n(X, X_{-1}). \quad (5.16)$$

Dieser Isomorphismus ist natürlich, da er durch die Anwendung von Funktoren auf Inklusionen von Raumpaaren entsteht, und diese Inklusionen sind natürliche Transformationen zwischen verschiedenen Funktoren  $\mathbf{Zell} \longrightarrow \mathbf{Top}^2$ .

Wir haben schon gesehen, dass  $H_k(\tilde{j}_k)$  injektiv ist für jedes  $k \geq 0$ . Für  $n \geq 1$  folgt daraus und weil  $d_n = H_{n-1}(\tilde{j}_{n-1}) \circ \tilde{\beta}_n$ , dass

$$Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) = \text{Ker } d_n = \text{Ker } \tilde{\beta}_n;$$

das gilt aber auch für  $n = 0$ , da  $d_0 = 0 = \tilde{\beta}_0$ .

Aus der Injektivität folgt auch (für alle  $n \in \mathbf{N}$ ), dass  $H_n(\tilde{j}_n)$  die Untergruppe  $\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1} \subseteq H_n(X_n, X_{-1})$  isomorph auf

$$B_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) = \text{Bild } d_{n+1}$$

abbildet, während es die ganze Gruppe  $H_n(X_n, X_{-1})$  isomorph auf

$$\text{Bild } H_n(\tilde{j}_n) = \text{Ker } \tilde{\beta}_n = Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

abbildet.

Somit induziert  $H_n(\tilde{j}_n)$  einen Isomorphismus der Quotienten

$$\overline{H_n(\tilde{j}_n)}: \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow \frac{Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})}{B_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})} = H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}),$$

und dieser Isomorphismus ist auch natürlich, weil in seine Konstruktion nur die natürlichen Transformationen  $\tilde{j}_n$  und  $\tilde{\beta}_{n+1}$  eingehen, sowie Funktoren auf den Filtrierungsstufen von  $\mathcal{F}$ , die letztendlich Funktoren auf  $\mathbf{Zell}$  sind.

Die Verknüpfung der natürlichen Isomorphismen

$$H_n(X, X_{-1}) \xleftarrow[\cong]{\varphi_n} \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \xrightarrow[\cong]{\overline{H_n(\tilde{j}_n)}} H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$



(das heißt genauer, die Verknüpfung einer dieser Isomorphismen mit der Umkehrabbildung des anderen) liefert einen natürlichen Isomorphismus

$$H_n(X, X_{-1}) \cong H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Korollar und Definition 5.42** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und  $(A, \mathcal{Z}_A)$  ein CW-Unterkomplex von  $(X, \mathcal{Z})$ . Sei  $\mathcal{F}_A$  die durch die relativen  $n$ -Skelette  $X_A^n$  gegebene zelluläre Filtrierung von  $X$ .

Den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A} =: (W_*(X, A), d)$  nennen wir den (relativen) **zellulären Kettenkomplex des CW-Paares**  $(X, A)$ .

Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A}) \cong H_*(X, A).$$

Wenn  $A = \emptyset$  und wenn  $\mathcal{F}$  die durch die Skelette  $X^n$  gegebene Filtrierung von  $X$  ist, so nennen wir den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} =: (W_*(X), d)$  den (absoluten) **zellulären Kettenkomplex des CW-Raumes**  $X$ .

Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) \cong H_*(X).$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt direkt aus Satz 5.41, da

$$X_A^{-1} = X^{-1} \cup A = \emptyset \cup A = A$$

nach Definition 5.29.

Die Aussage für den Fall  $A = \emptyset$  ist nur ein Spezialfall hiervon. ■

Wir wollen dieses neue Werkzeug gleich ausprobieren und einige bisher schwer zu erschließende Homologiegruppen ausrechnen. Eine kleine Vorbereitung wird uns die Arbeit erleichtern.

In Lemma 5.30 d) haben wir die einzelnen zellulären Kettengruppen genau beschrieben. Im folgenden Lemma geben wir noch eine nützliche explizite Beschreibung des zellulären Randoperators.

**Lemma 5.43** a) Sei  $n > 0 \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathcal{Z}$  die CW-Zerlegung von  $D^n$  aus Beispiel 5.13 f). Diese Zerlegung hat genau drei Zellen, eine  $n$ -Zelle  $e_2 := E^n$ , eine  $n-1$ -Zelle  $e_1 := S_+^{n-1}$  und eine 0-Zelle  $e_0$  bestehend aus dem Südpol von  $S^{n-1}$ .

Sei  $\mathcal{W} = (W_*(D^n), d)$  der zelluläre Kettenkomplex des CW-Raumes  $D^n$ .

Sei  $\gamma_n$  ein Erzeugendes der  $n$ -ten zellulären Kettengruppe

$$W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z},$$

und sei  $c_n$  eine Kette in  $C_n(D^n)$ , so dass  $c_n + C_n(S^{n-1})$  ein relativer Zykel in  $C_n(D^n, S^{n-1})$  ist mit  $\gamma_n = [c_n + C_n(S^{n-1})]$ .

Dann ist  $d_n(\gamma_n)$  die von der Kette  $\partial c_n$  repräsentierte Homologieklassse, in folgendem Sinne. Wir unterscheiden zwischen den Fällen  $n = 1$  und  $n > 1$ .

Wenn  $n = 1$ , so sind beide Zellen  $e_0$  und  $e_1$  nulldimensional, und

$$W_0(D^1) = H_0((D^1)^0, (D^1)^{-1}) = H_0(S^0, \emptyset) = H_0(S^0) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z},$$

wobei die Summanden  $\mathbf{Z}$  erzeugt werden von den Klassen der 0-Ketten  $e_0 = \{-1\}$  und  $e_1 = \{1\}$ . Man kann  $c_1$  (nach eventuellem Vorzeichenwechsel wenn erforderlich) so wählen, dass

$$\partial c_1 = e_1 - e_0 \in C_0((D^1)^0, (D^1)^{-1}) = C_0(S^0), \quad (5.17)$$

und es gilt

$$d_1 \gamma_1 = [\partial c_1] = (-1, 1) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = H_0(S^0). \quad (5.18)$$

Wenn  $n > 1$ , so ist  $((D^n)^{n-1}, (D^n)^{n-2}) = (S^{n-1}, \{e_0\})$  und die Inklusion  $j_{n-1}: (S^{n-1}, \emptyset) \longrightarrow (S^{n-1}, \{e_0\})$  induziert einen Isomorphismus

$$H_{n-1}(j_{n-1}): \mathbf{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}). \quad (5.19)$$

Die Homologieklassse  $[\partial c_n]$  erzeugt die linke Gruppe  $H_{n-1}(S^{n-1})$  und wird durch  $H_{n-1}(j_{n-1})$  auf

$$d_n \gamma_n = [\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\})] \quad (5.20)$$

abgebildet, welches die rechte Gruppe  $H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}) = W_{n-1}(D^n)$  erzeugt.

- b) Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ . Sei  $e \in \mathcal{Z}'_A$  eine  $n$ -Zelle von  $\mathcal{Z}$ , die nicht in  $A$  liegt, und sei  $\Phi_e: D^n \longrightarrow X$  eine charakteristische Abbildung der Zelle  $e$ .

Der  $e$ -te Summand von

$$W_n(X, A) = H_n(X^n_A, X^{n-1}_A) \cong \bigoplus_{\substack{\zeta \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim \zeta = n}} \mathbf{Z}$$

wird erzeugt von

$$\gamma_e := H_n(\Phi_e)(\gamma_n) = [c_e + C_n(X_A^{n-1})],$$

wo  $c_e = (\Phi_e)_\#(c_n)$ .

Wir nennen  $c_e$  die **Grundkette** der Zelle  $e$ .

Es gilt

$$d_n(\gamma_e) = [\partial c_e + C_{n-1}(X_A^{n-2})]. \quad (5.21)$$

*Beweis.* a), Fall  $n = 1$ : Sei  $i: S^0 \rightarrow D^1$  die Inklusion. Wir betrachten folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge von  $(D^1, S^0)$ :

$$\{0\} = H_1(D^1) \rightarrow H_1(D^1, S^0) \xrightarrow{\beta_1} H_0(S^0) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{H_0(i)} H_0(D^1) = \mathbf{Z}.$$

Weil  $(D^1)^{-1} = \emptyset$ , ist die Inklusion  $j_0: ((D^1)^0, \emptyset) \rightarrow ((D^1)^0, (D^1)^{-1})$  einfach die Identität, und deshalb ist  $d_1 = H_0(j_0) \circ \beta_1 = \beta_1$ .

Aus der Exaktheit folgt, dass  $\beta_1$  ein Isomorphismus

$$\mathbf{Z} = H_1(D^1, S^0) \rightarrow \text{Bild } \beta_1 = \text{Ker } H_0(i)$$

ist.

Nach Beispiel 4.4 c) ist  $H_0(i)(k, l) = k + l$  und folglich ist

$$\text{Ker } H_0(i) = \{ (k, l) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \mid k + l = 0 \} = \{ (k, -k) \mid k \in \mathbf{Z} \}$$

und dies wird von  $(-1, 1)$  erzeugt.

Wir finden also ein Erzeugendes  $\gamma_1$  von  $H_1(D^1, S^0)$  mit

$$d_1\gamma_1 = \beta_1\gamma_1 = (-1, 1).$$

Nach der Beschreibung von  $\beta_1$  in Korollar 3.16 sehen wir, dass wenn  $c_1 \in C_1(D^1)$  mit  $\gamma_1 = [c_1 + C_1(S^0)]$ , so ist

$$\beta_1\gamma_1 = [\partial c_1] = (-1, 1) = [e_1 - e_0].$$

Da  $B_0(S^0) = \{0\}$ , ist die Projektion  $Z_0(S^0) \rightarrow H_0(S^0)$  injektiv, und aus der Gleichheit der Homologieklassen folgt somit  $\partial c_1 = e_1 - e_0$ .

a), Fall  $n > 1$ : Weil  $\mathcal{Z}$  nur eine  $n$ -Zelle enthält, ist

$$W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}.$$

Wie in der Aussage des Lemmas, sei  $\gamma_n$  ein Erzeugendes von  $H_n(D^n, S^{n-1})$  und sei  $c_n$  eine Kette in  $C_n(D^n)$  mit  $\gamma_n = [c_n + C_n(S^{n-1})]$ .

Für  $n > 1$  ist der verbindende Homomorphismus

$$\beta_n: \mathbf{Z} = W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

ein Isomorphismus, weil die angrenzenden Gruppen  $H_n(D^n)$  und  $H_{n-1}(D^n)$  in der langen exakten Homologiefolge von  $(D^n, S^{n-1})$  beide  $\{0\}$  sind.

Aus einem ähnlichen Grund ist

$$H_{n-1}(j_{n-1}): H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$$

ein Isomorphismus. Der diese Abbildung umgebende Abschnitt aus der langen exakten Homologiefolge von  $(S^{n-1}, \{e_0\})$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \{0\} = H_{n-1}(\{e_0\}) &\rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(j_{n-1})} \\ &H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}) \xrightarrow{\beta} H_{n-2}(\{e_0\}) \xrightarrow{H_{n-2}(i)} H_{n-2}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Für  $n > 1$  ist  $H_{n-1}(\{e_0\})$  immer  $\{0\}$ . Und  $H_{n-2}(\{e_0\})$  ist  $\{0\}$  außer für  $n = 2$ , aber dann ist  $H_{n-2}(i) = H_0(i)$  und  $H_0(i)$  ist injektiv nach Lemma 4.2, da  $\{e_0\}$  wegweise zusammenhängend ist. Da  $\text{Bild } \beta = \text{Ker } H_0(i) = \{0\}$ , ist  $\beta$  auf jeden Fall die Nullabbildung und die Exaktheit der Homologiefolge bedingt, dass  $H_{n-1}(j_{n-1})$  ein Isomorphismus ist.

Nach der Beschreibung von  $\beta_n$  in Korollar 3.16 ist  $\beta_n(\gamma_n) = [\partial c_n]$  und dies erzeugt  $H_{n-1}(S^{n-1})$ , weil  $\beta_n$  ein Isomorphismus ist und  $\gamma_n$  die Gruppe  $H_n(D^n, S^{n-1})$  erzeugt.

$(j_{n-1})_\#$  bildet  $\partial c_n$  nach Definition auf

$$\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\}) \in C_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$$

ab und  $d_n = H_{n-1}(j_{n-1}) \circ \beta_n$  bildet  $\gamma_n$  somit auf  $[\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\})]$  ab. Dies ist ein erzeugendes Element von  $H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$ , weil  $\beta_n$  und  $H_{n-1}(j_{n-1})$  Isomorphismen sind.

b) Nach Lemma 5.30 d) ist  $H_n(\Phi_e)$  ein Isomorphismus von  $H_n(D^n, S^{n-1})$  auf den  $e$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $W_n(X, A) = H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ . Deshalb wird dieser Summand erzeugt von  $\gamma_e := H_n(\Phi_e)(\gamma_n)$ .

$\Phi_e$  ist eine Abbildung  $(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X_A^n, X_A^{n-1})$ , und weil die lange exakte Homologiefolge eines Raumpaars natürlich ist, kommutiert  $H_*(\Phi_e)$  mit  $\beta_n$ , d. h.,

$$\begin{aligned} \beta_n(\gamma_e) &= \beta_n H_n(\Phi_e)(\gamma_n) = H_{n-1}(\Phi_e) \beta_n(\gamma_n) \\ &= H_{n-1}(\Phi_e)[\partial c_n] \\ &= [(\Phi_e)_\#(\partial c_n)] \\ &= [\partial((\Phi_e)_\# c_n)] = [\partial c_e]. \end{aligned}$$

Daraus folgt Gleichung (5.21)

$$d_n(\gamma_e) = H_{n-1}(j_{n-1})\beta_n(\gamma_e) = H_{n-1}(j_{n-1})[\partial c_e] = [\partial c_e + C_{n-1}(X_A^{n-2})].$$

■

**Notation 5.44** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ .

Die graduierte Kettengruppe

$$W_*(X, A) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$$

des zellulären Kettenkomplexes  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A}$  ist eine freie abelsche Gruppe, mit einem Erzeugenden  $\gamma_e$  für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A = \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_A$ .

Um es angenehmer zu machen, in diesem Kettenkomplex zu rechnen, wollen wir eine vereinfachte Notation für Ketten einführen, in dem wir  $W_*(X, A)$  mit der zu ihr isomorphen Gruppe  $F(\mathcal{Z}'_A)$  identifizieren.

Die Identifikation wird vorgenommen vermöge des Isomorphismus, der für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  den gemäß Lemma 5.43 b) gewählten Erzeugenden  $\gamma_e$  des  $e$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $W_*(X, A)$  auf den entsprechenden formalen Erzeugenden  $e$  von  $F(\mathcal{Z}'_A)$  abbildet.

Das bedeutet, das wir fortan zelluläre Ketten als formale Linearkombinationen von *Zellen* schreiben werden, statt wörtlich nach der Definition von  $W_*(X, A)$  als Summen von Homologieklassen aus den homogenen Anteilen  $H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ .

Diese Notation behalten wir auch bei, wenn wir tatsächlich über die Homologieklassen oder über die sie repräsentierenden Ketten in  $C_n(X_A^n, X_A^{n-1})$  oder  $C_n(X_A^n)$  sprechen müssen.

Das heißt, wir benutzen die gleiche Bezeichnung  $e$  für die Zelle  $e$ , für ihre Grundkette  $c_e$  und für die von  $c_e$  bestimmte Homologieklassse  $\gamma_e$ . Aus dem Umfeld wird immer klar sein, welche Bedeutung gemeint ist, und Formeln mit zellulären Ketten werden in dieser vereinfachten Schreibweise viel lesbarer.

Für 1-dimensionale Zellen kann man die Beschreibung des Randoperators aus Lemma 5.43 b) noch präziser machen.

### Bemerkung 5.45

Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$  und sei  $e \in \mathcal{Z}'_A$  eine 1-Zelle. Sei  $\Phi_e: [-1, 1] = D^1 \rightarrow X$  ihre charakteristische Abbildung.

Dann gilt

$$d_1 e = \Phi_e(1) - \Phi_e(-1)$$

(in der vereinfachten Notation 5.44).

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 5.43.

Die Grundkette  $c_e$  der Zelle  $e$  ist  $(\Phi_e)_\#(c_1)$ , wo  $c_1 \in C_1(D^1)$  gewählt ist gemäß Lemma 5.43 a), Fall  $n = 1$ , und zwar so, dass  $[c_1 + C_1(S^0)]$  die Gruppe  $W_1(D^1)$  erzeugt und Formel (5.17) gilt, also in unserer vereinfachten Notation so, dass  $\partial c_1 = e_1 - e_0 := (1) - (-1)$ .

Nach Teil b) von Lemma 5.43 haben wir dann

$$\begin{aligned} d_1 e &= [\partial c_e + C_0(X_A^0)] && \text{nach Formel (5.21)} \\ &= [\partial((\Phi_e)_\#(c_1)) + C_0(X_A^0)] \\ &= [(\Phi_e)_\#(\partial c_1) + C_0(X_A^0)] \\ &= [(\Phi_e)_\#(e_1 - e_0) + C_0(X_A^0)] && \text{nach Formel (5.17)} \\ &= [(\Phi_e)_\#(e_1) - (\Phi_e)_\#(e_0) + C_0(X_A^0)] \\ &= \Phi_e(1) - \Phi_e(-1) && \text{in der vereinfachten Notation.} \end{aligned}$$

■

Um dieses Kapitel zu schließen wollen wir noch mit der zellulären Methode die Homologie der projektiven Räume  $\mathbf{R}P^n$  und  $\mathbf{C}P^n$  berechnen, die in Beispiel 5.13 g) mit ihrer CW-Zerlegung beschrieben wurden. Mit den klassischen Werkzeugen (lange exakte Homologiefolge, Satz von Mayer-Vietoris oder Ausschneidung) ist diese Homologie sehr schwer zu bestimmen.

**Beispiel 5.46** Sei  $n \in \mathbf{N}$  und sei  $k \in \mathbf{Z}$ .

a)

$$H_k(\mathbf{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } 0 \leq k \leq 2n \text{ und } k \text{ gerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b)

$$H_k(\mathbf{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 1 \leq k < n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* a): Laut Beispiel 5.13 g) hat  $\mathbf{C}P^n$  eine CW-Zerlegung mit einer Zelle  $e_m$  von Dimension  $2m$  für jedes  $m$  mit  $0 \leq m \leq n$  (und mit keinen weiteren Zellen).

Es folgt, dass  $W_{2m}(\mathbf{C}P^n) = \mathbf{Z}$  für jedes  $m$  mit  $0 \leq m \leq n$ , und alle anderen zellulären Kettengruppen sind  $\{0\}$ .

Insbesondere sind alle ungeradedimensionalen zellulären Kettengruppen trivial und aus diesem Grund sind alle Randoperatoren  $d_k = 0$ . Deshalb ist  $Z_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) = W_*(\mathbf{C}P^n)$  und  $B_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) = \{0\}$ , also

$$H_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) \cong Z_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) = W_*(\mathbf{C}P^n).$$

Diese graduierte Gruppe ist wie unter a) angegeben.

b): Weil  $\mathbf{R}P^0$  ein Einpunktraum ist (und tatsächlich die angegebene Homologie hat), brauchen wir diesen Fall hier nicht ausführlich zu behandeln und können im weiteren Verlauf annehmen, dass  $n > 0$ .

Laut Beispiel 5.13 g) hat  $\mathbf{R}P^n$  eine CW-Zerlegung mit einer Zelle  $e_k$  von Dimension  $k$  für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$  (und mit keinen weiteren Zellen).

Es folgt, dass  $W_k(\mathbf{R}P^n) = \mathbf{Z}$  für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$ , und alle anderen zellulären Kettengruppen sind  $\{0\}$ .

Um die Homologie ausrechnen zu können, müssen wir noch den zellulären Randoperator bestimmen.

Dazu nehmen wir zur Hilfe einen CW-Raum, dessen Homologie wir schon kennen, und zwar den  $S^n$  mit der CW-Zerlegung aus Beispiel 5.13 c), die zwei Zellen in jeder Dimension  $k$  von 0 bis  $n$  hat. Diese Zellen sind  $E_+^k$  und  $E_-^k$ .

Sei  $\tau_n: S^n \rightarrow S^n$  die Antipodenabbildung mit  $\tau_n(x) = -x$  für jedes  $x \in S^n$ . Diese Abbildung bildet für jedes  $k \leq n$  das Raumpaars  $(\bar{E}_+^k, \partial E_+^k) = (D_+^k, S^{k-1})$  homöomorph auf  $(\bar{E}_-^k, \partial E_-^k) = (D_-^k, S^{k-1})$  ab, und ihre Einschränkung auf  $\partial E_+^k = \partial E_-^k = S^{k-1}$  ist  $\tau_{k-1}$ . Ferner gilt  $\tau_n^2 = \text{id}_{S^n}$ , d. h.,  $\tau_n$  ist ihre eigene Umkehrabbildung.

Insbesondere ist  $H_k(\tau_n): H_k(D_+^k, S^{k-1}) \rightarrow H_k(D_-^k, S^{k-1}) \cong \mathbf{Z}$  ein Isomorphismus, und wir können die Erzeugenden dieser Homologiegruppen (die Summanden von  $W_k(S^n)$  sind) und die Grundketten der  $k$ -Zellen so wählen, dass

$$W_k(\tau_n)(E_+^k) = E_-^k \quad \text{und umgekehrt} \quad (5.22a)$$

und

$$C_k(\tau_n)(c_{E_+^k}) = c_{E_-^k} \quad \text{und umgekehrt.} \quad (5.22b)$$

Die „umgekehrte“ Beziehung gilt jeweils sogar automatisch, weil  $\tau_n^2 = \text{id}_{S^n}$ .

$\mathbf{R}P^n$  ist ein Quotient von  $S^n$  und die Projektion  $\pi: S^n \longrightarrow \mathbf{R}P^n$  identifiziert antipodische Punkte, d. h.,

$$\pi \circ \tau_n = \pi. \quad (5.23)$$

Nach der Definition der Zellen von  $\mathbf{R}P^n$  auf Seite 171 ist

$$e_k = \pi(S^k \setminus S^{k-1}) = \pi(E_+^k \cup E_-^k),$$

und  $\pi$  bildet jede der offenen  $k$ -Zellen  $E_\pm^k$  von  $S^n$  homöomorph auf  $e_k$  ab.

Hieraus folgt erstens, dass  $\pi$  zellulär ist, denn das  $k$ -Skelett  $S^k$  von  $S^n$  wird durch  $\pi$  in das  $k$ -Skelett von  $\mathbf{R}P^n$  abgebildet. Und weil  $\pi$  die offenen  $k$ -Zellen  $E_\pm^k$  homöomorph auf  $e_k$  abbildet, ist  $\pi|D_\pm^k$  eine charakteristische Abbildung für  $e_k$ .

Folglich ist

$$H_k(\pi): H_k(D_\pm^k, S^{k-1}) \longrightarrow H_k(\bar{e}_k, \partial e_k)$$

für jede Wahl des Vorzeichens ein Isomorphismus, und wir können das Erzeugende von

$$H_k(\bar{e}_k, \partial e_k) = H_k(\mathbf{R}P^k, \mathbf{R}P^{k-1}) = W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}$$

so wählen, dass  $e_k = W_k(\pi)(E_+^k)$  (in der vereinfachten Notation 5.44). Wegen (5.22a) und (5.23) gilt dann automatisch auch  $e_k = W_k(\pi)(E_-^k)$ .

Um das bisher Ermittelte kurz zusammenzufassen,  $\pi$  ist eine zelluläre Abbildung und  $W_k(\pi)$  bildet jedes der beiden Erzeugenden von  $W_k(S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  auf das gewählte Erzeugende von  $W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}$  ab. Mit Hilfe dieser Kettenabbildung wollen wir jetzt den Randoperator von  $W_*(\mathbf{R}P^n)$  berechnen.

Betrachten wir zunächst den Randoperator von  $W_*(S^n)$ .

Lemma 5.43 b) besagt, dass  $d_k E_\pm^k$  von der Kette  $\partial c_{E_\pm^k} \in C_{k-1}(S^{k-1})$  repräsentiert wird. Genauer gilt

$$d_k E_\pm^k = (j_{k-1})_*([\partial c_{E_\pm^k}]),$$

wo  $j_{k-1}$  im jetzigen Fall die Inklusion  $(S^{k-1}, \emptyset) \longrightarrow (S^{k-1}, S^{k-2})$  ist.



Weil die Grundketten Bedingung (5.22b) erfüllen, haben wir

$$\begin{aligned}
d_k E_-^k &= (j_{k-1})_*([\partial c_{E_-^k}]) \\
&= (j_{k-1})_*\left(\left[\partial((\tau_n)_\# c_{E_+^k})\right]\right) \\
&= (j_{k-1})_*\left([\partial c_{E_+^k}]\right) \\
&= (j_{k-1})_*\left([\partial c_{E_+^k}]\right) \quad (\text{weil } \tau_n|_{S^{k-1}} = \tau_{k-1}) \\
&= (j_{k-1})_*(\tau_{k-1})_*([\partial c_{E_+^k}]) \\
&= (\tau_{k-1})_*(j_{k-1})_*([\partial c_{E_+^k}]) \\
&= (\tau_{k-1})_*(d_k E_+^k)
\end{aligned}$$

Aber Korollar 4.9 besagt, dass  $(\tau_{k-1})_*$  auf  $H_{k-1}(S^{k-1})$  die Multiplikation mit  $(-1)^k$  ist, und weil  $j_{k-1}$  eine natürliche Transformation ist gilt das Gleiche für  $(\tau_{k-1})_*$  auf  $\text{Bild}(j_{k-1})_* \subseteq H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-2})$ , d. h.,

$$d_k E_-^k = (-1)^k d_k E_+^k \quad (5.24)$$

für jedes  $k$  mit  $1 \leq k \leq n$  (natürlich ist  $d_0 = 0$ ).

Aus (5.24) folgt, dass  $\text{Bild } d_k$  von  $d_k(E_+^k)$  erzeugt wird und dass

$$d_k(E_-^k + (-1)^{k+1} E_+^k) = 0$$

und somit

$$E_-^k + (-1)^{k+1} E_+^k \in Z_k(W_*(S^n)).$$

Insbesondere sind die zellulären Zykelngruppen dieser CW-Zerlegung von  $S^n$  in Dimensionen  $1 \leq k \leq n$  nicht  $\{0\}$ .

Nun ist aber  $d_k \neq 0$  für  $1 \leq k \leq n$ , denn sonst ist  $B_{k-1}(W_*(S^n)) = \{0\}$  und  $H_{k-1}(S^n) \cong Z_{k-1}(W_*(S^n))$ . Für  $1 < k \leq n$  ist das nicht möglich, weil für diese Dimensionen bekanntlich  $H_{k-1}(S^n) = \{0\}$ , aber die Zykelngruppe ist nicht  $\{0\}$ . Für  $k = 1$  ist es nicht möglich, weil dann auf Grund der Tatsache, dass  $d_0 = 0$  ist, gelten würde, dass  $H_0(S^n) \cong Z_0(W_*(S^n)) = W_0(S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ . Wir wissen aber, dass  $H_0(S^n) \cong \mathbf{Z}$ , da  $n > 0$ .

Also ist  $B_{k-1}(W_*(S^n))$  eine nichttriviale zyklische Gruppe, erzeugt von  $d_k(E_+^k)$ .

Für  $1 < k \leq n$  ist  $B_{k-1}(W_*(S^n)) = Z_{k-1}(W_*(S^n))$ , weil  $H_{k-1}(S^n) = \{0\}$ . Somit enthält die Rändergruppe, als Vielfaches des Erzeugenden  $d_k(E_+^k)$ , den Zykel  $E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}$ . Aber dieses Element von  $W_{k-1}(S^n)$  ist Vielfaches nur von  $\pm$  sich selber, woraus folgt, dass

$$d_k(E_+^k) = \pm(E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}) \quad (5.25)$$

wenn  $1 < k \leq n$ . Die Gleichung (5.25) gilt aber auch für  $k = 1$ , denn Bemerkung 5.45 besagt, dass  $d_1(E_+^1) = \pm(E_+^0 - E_-^0)$  (mit Vorzeichen je nachdem in welcher Richtung die charakteristische Abbildung der Zelle  $E_+^1$  den oberen Halbkreis durchläuft).

Betrachten wir jetzt das Bild des Kettenkomplexes  $W_*(S^n)$  unter der Kettenabbildung  $W_*(\pi)$ . Wir schreiben  $d'$  für den Randoperator von  $W_*(\mathbf{R}P^n)$ .

Da wir es so eingerichtet haben, dass  $W_*(\pi)(E_\pm^k) = e_k$ , erhalten wir aus (5.24) und (5.25) für  $1 \leq k \leq n$ , dass

$$\begin{aligned} d'_k(e_k) &= W_*(\pi)(d_k E_+^k) \\ &= \pm W_*(\pi)(E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}) \\ &= \pm(e_{k-1} + (-1)^k e_{k-1}) \end{aligned}$$

oder in anderen Worten,

$$d'_k(e_k) = \begin{cases} \pm 2e_{k-1}, & \text{wenn } k \text{ gerade ist und } 1 < k \leq n; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.26)$$

Und natürlich ist  $d'_k = 0$  in allen Dimensionen  $k < 0$  oder  $> n$ .

Hieraus erhalten wir

$$Z_k(W_*(\mathbf{R}P^n)) = \begin{cases} W_0(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}, & \text{wenn } 1 \leq k \leq n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$B_k(W_*(\mathbf{R}P^n)) = \begin{cases} 2W_k(\mathbf{R}P^n), & \text{wenn } 1 \leq k < n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bedeutet  $2W_k(\mathbf{R}P^n)$  die Untergruppe von  $W_k(\mathbf{R}P^n)$  bestehend aus allen „durch 2 teilbaren“ Elementen (die also 2 mal ein anderes Element sind). Da  $W_k(\mathbf{R}P^n)$  zyklisch ist, sind das in diesem Fall alle geraden Vielfachen des Erzeugenden.

Bildet man den Quotienten  $H_k(\mathbf{R}P^n) = Z_k/B_k$ , so erhält man genau die behauptete Homologie des reellen projektiven Raumes. Die Homologie kann nur in Dimension 0 oder in den ungeraden Dimensionen von 1 bis  $n$  nichttrivial sein, weil in allen anderen Dimensionen schon die zellulären Zykelgruppen  $\{0\}$  sind. In Dimension 0 oder in Dimension  $n$ , wenn dies ungerade ist, sind die Rändergruppen  $\{0\}$  und die Homologie ist also isomorph zur Zykelgruppe, die unendlich zyklisch ist. In den ungeraden Dimensionen  $k$  mit  $1 \leq k < n$  ist

$$H_k(\mathbf{R}P^n) = \frac{W_k(\mathbf{R}P^n)}{2W_k(\mathbf{R}P^n)} \cong \frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_2.$$



Es gibt viele andere Räume, deren Homologie sich bequem mit der zellulären Methode berechnen lässt. Dazu gehören der Torus und die Kleinsche Flasche, deren Homologie wir in Kapitel 4 schon mit Hilfe der Mayer-Vietoris Folge berechnet haben. Beide dieser Räume haben eine CW-Zerlegung mit einer 2-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 0-Zelle und unterscheiden sich nur in der Anheftungsabbildung der 2-Zelle. Die Details überlassen wir dem Leser als eine sinnvolle und nicht schwere Übung.



## Kapitel 6

# Kohomologie und Homologie mit beliebigen Koeffizienten

Wir haben jetzt solide Grundkenntnisse über die singuläre Homologietheorie, haben einige Anwendungen davon gesehen und im letzten Kapitel eine neue, vereinfachte Methode kennen gelernt, um Homologiegruppen zu berechnen.

In diesem Kapitel wollen wir zwei nützliche Abwandlungen und Erweiterungen der Homologietheorie einführen — obwohl sie verschiedenartig sind, gehören sie zusammen in ein Kapitel, weil sie sich nach der gleichen Grundidee konstruieren lassen.

Die erste dieser Erweiterungen betrifft die Koeffizientengruppe der Homologietheorie, wie sie zum Beispiel im ***Dimensionsaxiom*** in Definition 3.56 definiert wurde. Für die singuläre Homologietheorie, wie wir sie konstruiert haben, ist die Koeffizientengruppe  $\mathbf{Z}$ ; das hängt damit zusammen, dass die singulären Kettengruppen die von den singulären Simplizes frei erzeugten  $\mathbf{Z}$ -Module sind, oder anders ausgedrückt, dass singuläre Ketten als beliebige endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen von singulären Simplizes definiert wurden. Wir erinnern daran (Definition 2.7), dass wir die freie additive abelsche Gruppe erzeugt von einer Menge  $X$  als

$$F(X) := \{ f \in \mathbf{Z}^X \mid f(x) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } x \in X \}.$$

definiert hatten und dann in Definition 2.11 die singulären Kettengruppen als

$$C_n(X) := F(S_n(X))$$

erklärt hatten.

Es gibt einen sehr einfachen Weg, eine singuläre Homologietheorie mit einer anderen additiven abelschen Koeffizientengruppe  $G$  zu erhalten: man

muss nur an dieser einleitenden Stelle die Gruppe  $G$  die Rolle von  $\mathbf{Z}$  übernehmen lassen, in dem man in der formalen Darstellung

$$\sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \sigma$$

einer singulären Kette die Koeffizienten  $n_\sigma$  nicht aus  $\mathbf{Z}$ , sondern aus der Gruppe  $G$  nimmt (und wie bisher verlangt, dass nur endlich viele Koeffizienten  $\neq 0$  sind).

Das kann man wie folgt etwas eleganter beschreiben:

**Definition 6.1** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe und sei  $X$  eine Menge.

Wir bezeichnen mit  $G^X$  die Menge aller mengentheoretischen Funktionen  $f: X \rightarrow G$ . Diese Funktionenmenge wird zu einer additiven abelschen Gruppe, wenn wir zwei Funktionen  $f$  und  $g$  addieren, indem wir ihre Werte an jeder Stelle mit der Addition von  $G$  addieren.

Wir setzen

$$F(X; G) := \{ f \in G^X \mid f(x) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } x \in X \}.$$

Offensichtlich ist dies eine Untergruppe von  $G^X$ .

Also ist  $F(X; G)$  eine additive abelsche Gruppe. Sie heißt die **freie abelsche Gruppe erzeugt über  $G$  durch die Menge  $X$** , oder das **freie  $G$ -Modul erzeugt durch die Menge  $X$** .

Für die Elemente von  $F(X)$  benutzen wir auch wie bisher die formale Summenschreibweise: das Element  $f \in F(X)$  notieren wir mit

$$\sum_{x \in X} f(x) \cdot x,$$

wobei die Koeffizienten  $f(x)$  jetzt aus  $G$  kommen und nur endliche viele von ihnen  $\neq 0$  sind.

Wir können für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  die  $n$ -te singuläre Kettengruppe mit Koeffizienten in  $G$  als  $C_n(X; G) := F(S_n(X))$  erklären und auf die gleiche Weise wie in Kapitel 2 die Konstruktion fortsetzen, um die singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $G$  zu erhalten.

Diesen Weg werden wir allerdings nicht gehen, denn obwohl er einleuchtet und problemlos gelingt, würde er von uns verlangen, die gesamte Konstruktion der singulären Homologie und den Nachweis aller Grundeigenschaften noch einmal zu prüfen, um sicher zu gehen, dass alle Behauptungen auch für die Homologie mit  $G$ -Koeffizienten noch gelten und nicht etwa von besonderen Eigenschaften der Koeffizientengruppe  $\mathbf{Z}$  abhängen.

Den gleichen Ziel können wir auf eine viel elegantere und schnellere Art erreichen, nämlich durch die Anwendung eines algebraischen Funktors mit einem wohlbestimmten und günstigen Verhalten auf den singulären Kettenkomplex mit  $\mathbf{Z}$  Koeffizienten. Dieser Funktor  $\otimes G$ , das ***Tensorieren mit der Gruppe  $G$*** , den wir weiter unten erklären werden, verwandelt die gewöhnlichen Kettengruppen in die oben schon erklärten Kettengruppen mit Koeffizienten in  $G$  und liefert deshalb das gleiche Ergebnis, das wir mit der anderen Methode erzielt hätten, aber die intrinsischen Eigenschaften dieses Funktors bewirken, dass wir „automatisch“ wieder eine Homologietheorie im Sinne der Eilenberg-Steenrod Axiome gewinnen, mit Koeffizienten in  $G$ , und darüber hinaus, dass es eine einfache Beziehung (in Form einer natürlichen kurzen exakten Folge) zwischen der  $\mathbf{Z}$ -Homologie und der  $G$ -Homologie gibt, mit deren Hilfe wir die Letztere leicht aus der Ersteren berechnen können.

Es gibt einen weiteren Vorteil dieser Vorgehensweise — mit einer ähnlichen Methode können wir andere Abwandlungen der singulären Homologie erhalten, indem wir anstelle von  $\otimes G$  andere Funktoren (mit ähnlich günstigen Eigenschaften) auf die Kettengruppen anwenden.

Das erlaubt uns, eine *duale* Version der Homologie zu konstruieren, die ***singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in einer additiven abelschen Gruppe  $G$*** .

Eine solche algebraische Dualisierung kennen Sie schon aus den Anfängervorlesungen: ist  $V$  ein Vektorraum über einen Körper  $K$ , so ist sein ***dualer Vektorraum*** erklärt als

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K).$$

Die singuläre Kohomologie entsteht auf ähnliche Weise durch Anwendung des Funktors  $\text{Hom}(\cdot, G) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\cdot, G)$  auf den singulären Kettenkomplex mit  $\mathbf{Z}$ -Koeffizienten. Weil dieser Funktor (anders als der Funktor  $\otimes G$ ) *kontravariant* ist, wird aus dem normalen singulären Randoperator  $\partial$  eine *Grad +1* Abbildung  $\delta$  (genannt der ***Korand***), die aber ansonsten die gleichen Eigenschaften hat, wie der Randoperator, so dass sich wie bisher Homologiegruppen gewinnen lassen, die jetzt wegen der geänderten Pfeilrichtung des Korandes aber die ***Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in  $G$***  genannt werden.

Weil beide hier genannten Varianten der Homologie, so verschieden sie sind, nach der gleichen Grundidee konstruiert werden können, lassen sie sich gut in einem gemeinsamen Kapitel behandeln, wo wir leicht für beide gemeinsam oder zumindest analog aus den Grundeigenschaften der angewendeten Funktoren  $\otimes G$  und  $\text{Hom}(\cdot, G)$  die wesentlichen und bestimmenden Sätze und Berechnungshilfen entwickeln können.

Warum lohnt sich dieser Aufwand? Wir wissen, dass die Homologietheorie nicht alle topologische Fragen beantworten kann — das ist schon klar aus der Tatsache, dass die Homologie homotopieinvariant ist und somit Räume vom gleichen Homotopietyp und homotope Abbildungen nicht unterscheiden kann. Aber die Varianten der Homologietheorie, die wir bisher kennen gelernt haben, sind noch nicht einmal mächtig genug, um manche Fragen zu lösen, die prinzipiell für die Homologietheorie zugänglich sind. Es gibt einige wichtige Probleme, zu deren Lösung neue Varianten erforderlich sind.

Einen Vorgeschmack darauf haben wir in den Kapiteln 4 und 5 in der Berechnung der Homologie der Kleinschen Flasche und der reellen projektiven Räume gesehen. Obwohl die Kleinsche Flasche zweidimensional ist, verschwindet ihre zweidimensionale ganzzahlige Homologie. Obwohl  $\mathbf{R}P^n$  in jeder Dimension  $\leq n$  eine gleichaussehende geometrische Struktur hat, sieht man in der Homologie die Dimension  $n$  nur, wenn  $n$  ungerade ist, und die Dimensionen dazwischen sieht man unterschiedlich, je nachdem, ob sie gerade oder ungerade sind. Diese Besonderheiten verschwinden aber, sobald man  $\mathbf{Z}_2$ -Koeffizienten verwendet.

Auch die singuläre Kohomologie liefert, obwohl sie sich aus der Homologie berechnen lässt, eine zusätzliche algebraische Charakterisierung der zu Grunde liegenden topologischen Struktur, aber ein ganz wesentlicher Vorteil von ihr besteht darin, dass die graduierte Kohomologiegruppe  $H^*(X)$  eines Raumes sogar eine graduierte *Ringstruktur* trägt, und diese Ringstruktur kann topologische Merkmale unterscheiden, die die additive Gruppenstruktur alleine nicht auseinanderhalten kann.

Um das angekündigte Programm effizient und einheitlich durchführen zu können und um die Eigenschaften der neu konstruierten Homologie- und Kohomologietheorien zu entwickeln, müssen wir uns detaillierteres Allgemeinwissen über algebraische Funktoren verschaffen, und wir müssen die in diese Entwicklung eingehenden Funktoren definieren und nachweisen, dass sie die Eigenschaften haben, die wir benötigen. Damit werden wir gleich unten beginnen.

Neben den oben genannten klassischen Funktoren, die Sie aus früheren mathematischen Erfahrungen vielleicht schon gut kennen, gehen für die vereinfachte Berechnung der neuen Homologietheorien zwei weitere Funktoren in die Theorie ein, die aus den Erstgenannten mit homologischen Mitteln gewonnen werden und „abgeleitete Funktoren“ von ihnen genannt werden. Weil hier algebraische Konstruktionen mit den Methoden der Homologietheorie durchgeführt werden, heißt das entsprechende Gebiet, in das wir später einen kleinen Einblick nehmen wollen, *homologische Algebra*.

Die Funktoren, die wir konstruieren wollen, heißen  $\otimes$  (*Tensorprodukt*),  $\text{Hom}$ ,  $\text{Tor}$  und  $\text{Ext}$ , und alle vier sind Funktoren  $\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$ ,



wobei  $\otimes$  und  $\text{Tor}$  in beiden Variablen kovariant sind, und  $\text{Hom}$  und  $\text{Ext}$  in der ersten Variablen kontravariant und in der zweiten Variablen kovariant sind.

Alle vier genannte Funktoren haben, in jeder Variablen einzeln, noch ein weiteres wichtiges Merkmal, das wir zuerst besprechen wollen, um später die interessanten davon abhängenden Eigenschaften nicht für jeden Funktor einzeln beweisen zu müssen.

**Definition 6.2** Eine *präadditive Kategorie*<sup>1</sup> ist eine Kategorie  $\mathcal{A}$  mit folgender Zusatzstruktur:

- a) für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  der Kategorie  $\mathcal{A}$  trägt die Morphismenmenge  $\text{Mor}(A, B)$  die Struktur einer additiven abelschen Gruppe (d. h., für je zwei Morphismen  $f$  und  $g: A \rightarrow B$  ist die Summe  $(f + g): A \rightarrow B$  erklärt und diese Addition von Morphismen erfüllt die Axiome einer abelschen Gruppe);
- b) bezüglich der Addition auf den Morphismenmengen erfüllt die Verknüpfung von Morphismen beide sinnvolle Varianten des Distributivgesetzes.

In anderen Worten, sind  $A, B$  und  $C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  und sind  $f$  und  $g$  Morphismen in  $\text{Mor}(A, B)$  und  $h$  und  $k$  Morphismen in  $\text{Mor}(B, C)$ , so gelten in  $\text{Mor}(A, C)$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} h \circ (f + g) &= (h \circ f) + (h \circ g); \\ (h + k) \circ f &= (h \circ f) + (k \circ f). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Viele der in der algebraischen Topologie vorkommenden und wesentlichen Kategorien algebraischer Ausprägung sind präadditiv, und es ist sehr leicht, Beispiele zu finden, wie folgende Bemerkung zeigt.

**Bemerkung 6.3** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Objekten, die additive abelsche Gruppen sind (eventuell mit zusätzlicher Struktur) und Morphismen, die Gruppenhomomorphismen sind (neben anderen womöglich erforderlichen Eigenschaften).

Seien  $A$  und  $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Für je zwei Morphismen  $f$  und  $g \in \text{Mor}(A, B)$  definieren wir wie üblich eine mengentheoretische Abbildung  $f + g$  von  $A$  nach  $B$  durch

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a) \in B \quad \text{für jedes } a \in A.$$

---

<sup>1</sup>In der älteren Literatur werden präadditive Kategorien manchmal einfach *additive Kategorien* genannt.

Entsprechend definieren wir eine Abbildung  $-f$  von  $A$  nach  $B$  durch

$$(-f)(a) := -(f(a)) \in B \quad \text{für jedes } a \in A.$$

Und wir definieren die **Nullabbildung** von  $A$  nach  $B$  als die konstante Abbildung  $\mathbf{0}$  mit  $\mathbf{0}(a) = 0 \in B$  für jedes  $a \in A$ .

Wir nehmen an, dass für je zwei Morphismen  $f$  und  $g \in \text{Mor}(A, B)$  die Abbildung  $f + g$  auch ein Morphismus der Kategorie  $\mathcal{C}$  ist, ferner dass für jedes  $f \in \text{Mor}(A, B)$  die Abbildung  $-f$  auch ein Morphismus von  $\mathcal{C}$  ist, und schließlich, dass die Nullabbildung ein Morphismus von  $\mathcal{C}$  ist.

Dann wird  $\text{Mor}(A, B)$  mit der Operation  $+$  zu einer additiven abelschen Gruppe, dessen neutrales Element die Nullabbildung ist, und mit  $-f$  als das inverse Element zu  $f$  für jeden Morphismus  $f$ . Ferner ist klar aus der Definition der Addition für Morphismen und der Tatsache, dass jeder einzelne Morphismus von  $\mathcal{C}$  ein Gruppenhomomorphismus zwischen seinem Quell- und seinem Zielobjekt ist, dass die Verknüpfung bezüglich der Addition von Morphismen wie in Definition 6.2 b) das Distributivgesetz erfüllt.

In anderen Worten, mit der hier definierten Addition für Morphismen wird  $\mathcal{C}$  zu einer präadditiven Kategorie.

**Beispiel 6.4** Beispiele von Kategorien mit den in Bemerkung 6.3 genannten Voraussetzungen sind natürlich **AbGp**, aber auch **GAG**<sub>0</sub> (nicht **GAG**, da die Summe von graduierten Homomorphismen verschiedenen Grades nicht mehr graduiert ist), **Ring**, **K-VR** für einen Körper  $K$ , **R-Mod** für einen Ring  $R$ , die Kategorie **KK** der Kettenkomplexe und viele andere. Alle diese Kategorien sind auf die in der Bemerkung beschriebene Weise präadditiv.

Insbesondere können wir in der Kategorie **AbGp** Homomorphismen zwischen zwei festen additiven abelschen Gruppen  $G$  und  $H$  addieren, und die Menge aller Gruppenhomomorphismen  $G \rightarrow H$  bildet eine additive abelsche Gruppe  $\text{Hom}(G, H)$ .

**Definition 6.5** Seien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  präadditive Kategorien.

Ein (ko- oder kontravarianter) Funktor

$$F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

heißt **additiv**, wenn für je zwei Objekte  $G$  und  $H$  von  $\mathcal{A}$  die von  $F$  induzierte Abbildung

$$F: \text{Mor}_{\mathcal{A}}(G, H) \rightarrow \begin{cases} \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(G), F(H)) & (F \text{ kovariant}) \\ \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(H), F(G)) & (F \text{ kontravariant}) \end{cases}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, in anderen Worten, wenn für je zwei Morphismen  $f$  und  $g: G \rightarrow H$  gilt

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Ein (ko-, kontra- oder gemischtvarianter) Funktor von zwei Variablen

$$F: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

heißt **additiv**, wenn  $F$  in jeder Variablen einzeln additiv ist, d. h., wenn für je zwei Paare  $(G, H)$  und  $(K, L) \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \times \text{Ob}(\mathcal{B})$  und für je zwei  $\mathcal{A}$ -Morphismen  $f$  und  $g: G \longrightarrow K$  und je zwei  $\mathcal{B}$ -Morphismen  $h$  und  $k: H \longrightarrow L$  gilt

$$F(f + g, h) = F(f, h) + F(g, h)$$

und

$$F(f, h + k) = F(f, h) + F(f, k).$$

Hier spielt es keine Rolle, ob  $F$  ko- oder kontravariant ist in den einzelnen Variablen; das hat nur einen Einfluss darauf, zwischen welchen Objekten von  $\mathcal{C}$  die von  $F$  zugeordneten Bildmorphismen abbilden.

Wir brauchen im weiteren Verlauf einige Grundeigenschaften von additiven Funktoren, aber um einen sinnvollen Kompromiss zwischen Allgemeinheit und den zeitlichen Einschränkungen einer einsemestrigen Vorlesung zu schließen, werden wir diese *nicht* innerhalb der Kategorientheorie entwickeln (wozu zu viele neue Begriffe definiert werden müssten), sondern nur für die wichtigsten uns schon bekannten Spezialfälle von relevanten Kategorien formulieren und insbesondere für die Kategorie **AbGp**.

**Lemma 6.6** Sei  $F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver Funktor.

- a) Seien  $G$  und  $H$  additive abelsche Gruppen und sei  $\mathbf{0}: G \longrightarrow H$  die Nullabbildung. Dann ist auch  $F(\mathbf{0})$  die Nullabbildung (zwischen den Gruppen  $F(G)$  und  $F(H)$ ).
- b)  $F(\{0\}) = \{0\}$ .

*Beweis.* Zu a): Für je zwei additiven abelschen Gruppen  $G$  und  $H$  ist der Nullhomomorphismus  $\mathbf{0}$  das neutrale Element der additiven abelschen Gruppe  $\text{Hom}(G, H)$ . Weil  $F$  auf den Homomorphismusmengen als ein Gruppenhomomorphismus wirkt, gilt immer  $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Zu b): Aus a) und weil jeder Funktor Identitäten in Identitäten überführt erhalten wir

$$\text{id}_{F(\{0\})} = F(\text{id}_{\{0\}}) = F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Unser Schluss folgt, weil  $\{0\}$  die einzige Gruppe ist, deren Identitätshomomorphismus die Nullabbildung ist. ■

**Lemma 6.7** Sei

$$F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$$

ein additiver Funktor. Dann gibt es für je zwei additive abelsche Gruppen  $G$  und  $H$  einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi: F(G \oplus H) \longrightarrow F(G) \oplus F(H),$$

den wir wie folgt definieren können.

Für jedes Paar  $(G, H)$  von additiven abelschen Gruppen seien  $i_G$  und  $i_H$  die Inklusionen

$$\begin{aligned} i_G: G &\longrightarrow G \oplus H \\ g &\longmapsto (g, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} i_H: H &\longrightarrow G \oplus H \\ h &\longmapsto (0, h) \end{aligned}$$

und seien

$$\pi_G: G \oplus H \longrightarrow G$$

und

$$\pi_H: G \oplus H \longrightarrow H$$

die Projektionen. Diese Homomorphismen sind natürliche Transformationen (zwischen Funktoren  $\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$ ).

Wir setzen

$$\Phi := \begin{cases} i_{F(G)} \circ F(\pi_G) + i_{F(H)} \circ F(\pi_H) & (F \text{ kovariant}) \\ i_{F(G)} \circ F(i_G) + i_{F(H)} \circ F(i_H) & (F \text{ kontravariant}) \end{cases} \quad (6.2)$$

Die Umkehrabbildung von  $\Phi$  nennen wir  $\Psi$  und sie wird gegeben durch

$$\Psi := \begin{cases} F(i_G) \circ \pi_{F(G)} + F(i_H) \circ \pi_{F(H)} & (F \text{ kovariant}) \\ F(\pi_G) \circ \pi_{F(G)} + F(\pi_H) \circ \pi_{F(H)} & (F \text{ kontravariant}) \end{cases} \quad (6.3)$$

*Beweis.* Für jedes Paar  $(A, B)$  von additiven abelschen Gruppen gelten die Relationen

$$\pi_A \circ i_A = \text{id}_A \qquad \pi_B \circ i_B = \text{id}_B \quad (6.4a)$$

$$\pi_A \circ i_B = \mathbf{0} \qquad \pi_B \circ i_A = \mathbf{0} \quad (6.4b)$$

$$i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B = \text{id}_{A \oplus B}. \quad (6.4c)$$

Wir müssen zwei Dinge beweisen: erstens, dass die oben angegebenen Abbildungen  $\Phi$  und  $\Psi$  tatsächlich die behaupteten Gruppen  $F(G \oplus H)$  und  $F(G) \oplus F(H)$  in der richtigen Pfeilrichtung verbinden, und zweitens, dass ihre Verknüpfung in beiden möglichen Reihenfolgen jeweils die Identität liefert.

Der kontravariante Fall unterscheidet sich nicht wesentlich vom kovarianten Fall, außer dass an manchen Stellen die Pfeilrichtung sich umkehrt. Wir wollen es deshalb so einrichten, dass wir für beide Varianzfälle einen einheitlichen Beweis durchführen können, in dem wir für die beteiligten Inklusionen und Projektionen neue, von der Varianz abhängige Namen einführen, die dann in diesem einheitlichen Beweis verwendet werden.

Im kovarianten Fall werden wir  $\alpha$  für  $i$  schreiben und  $\beta$  für  $\pi$ , und im kontravarianten Fall machen wir es gerade umgekehrt und schreiben  $\alpha$  für  $\pi$  und  $\beta$  für  $i$ .

Das bedeutet, dass wenn  $C$  eine der beiden Gruppen  $A$  und  $B$  ist, so ist für beide Varianzen nach Anwendung von  $F$  die Richtung der Bildhomomorphismen einheitlich

$$\begin{aligned} F(\alpha_C): F(C) &\longrightarrow F(A \oplus B) & \text{und} \\ F(\beta_C): F(A \oplus B) &\longrightarrow F(C). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Wir können mit dieser variablen Notation jetzt auch  $\Phi$  und  $\Psi$  auf einheitliche Weise schreiben, und zwar ist

$$\Phi = i_{F(G)} \circ F(\beta_G) + i_{F(H)} \circ F(\beta_H) \quad (6.6)$$

und

$$\Psi = F(\alpha_G) \circ \pi_{F(G)} + F(\alpha_H) \circ \pi_{F(H)}, \quad (6.7)$$

wie man leicht bestätigen kann.

Aus (6.5) und (6.6) ist klar, dass  $\Phi$  in beiden Varianzfällen tatsächlich ein Homomorphismus  $F(G \oplus H) \longrightarrow F(G) \oplus F(H)$  ist, denn der rechte Faktor der Summanden bildet  $F(G \oplus H)$  nach  $F(G)$  oder  $F(H)$  ab, der linke Faktor ist die Inklusion davon nach  $F(G) \oplus F(H)$ .

Entsprechend ist aus (6.5) und (6.7) klar, dass  $\Psi$  in beiden Varianzfällen tatsächlich ein Homomorphismus  $F(G) \oplus F(H) \longrightarrow F(G \oplus H)$  ist, denn der rechte Faktor der Summanden ist die Projektion von  $F(G) \oplus F(H)$  nach  $F(G)$  oder  $F(H)$  und der linke Faktor bildet dies nach  $F(G \oplus H)$  ab.

Durch Anwendung von  $F$  auf die Relationen (6.4) erhalten wir:

$$F(\beta_A) \circ F(\alpha_A) = \text{id}_{F(A)} \quad F(\beta_B) \circ F(\alpha_B) = \text{id}_{F(B)} \quad (6.8a)$$

$$F(\beta_A) \circ F(\alpha_B) = \mathbf{0} \quad F(\beta_B) \circ F(\alpha_A) = \mathbf{0} \quad (6.8b)$$

$$F(\alpha_A) \circ F(\beta_A) + F(\alpha_B) \circ F(\beta_B) = \text{id}_{F(A \oplus B)}. \quad (6.8c)$$

Die rechten Seiten sind wie angegeben, weil  $F$ , wie jeder Funktor, einen Identitätsmorphismus in die Identität des Bildobjekts überführt und weil  $F$  als additiver Funktor Nullhomomorphismen in Nullhomomorphismen überführt, nach Lemma 6.6 a).

Im kovarianten Fall erhalten wir die linken Seiten von (6.8a) und (6.8b), weil  $F$  Verknüpfungen unter *Beibehaltung* ihrer Reihenfolge respektiert, und weil das  $\beta$  im linken Faktor das  $\pi$  aus den linken Faktoren von (6.4a) und (6.4b) bedeutet und das  $\alpha$  im rechten Faktor das  $i$  aus den rechten Faktoren von (6.4a) und (6.4b) bedeutet.

Im kontravarianten Fall erhalten wir aber auch die linken Seiten von (6.8a) und (6.8b), weil jetzt  $F$  Verknüpfungen unter *Vertauschung* ihrer Reihenfolge respektiert aber dafür auch die Bedeutungen von  $\beta$  und  $\alpha$  jetzt vertauscht sind; das  $\beta$  in den linken Faktoren von (6.8a) und (6.8b) entspricht jetzt dem  $i$  in den *rechten* Faktoren von (6.4a) und (6.4b), und das  $\alpha$  in den rechten Faktoren von (6.8a) und (6.8b) entspricht dem  $\pi$  in den *linken* Faktoren von (6.4a) und (6.4b).

Wenn wir  $F$  auf die Summe auf der linken Seite von (6.4c) anwenden, erhalten wir in (6.8c) die Summe der Werte von  $F$  auf den einzelnen Summanden, weil  $F$  additiv ist, und der Wert von  $F$  auf den einzelnen Summanden ist wie in (6.8c) angegeben, weil Funktoren Verknüpfung von Morphismen respektieren, wobei im kovarianten Fall, wo  $F$  die Verknüpfungsreihenfolge erhält,  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in den linken und rechten Faktoren in (6.8c) dem  $i$  bzw.  $\pi$  in den linken und rechten Faktoren in (6.4c) entspricht, und im kontravarianten Fall, wo  $F$  die Verknüpfungsreihenfolge vertauscht, auch die Bedeutung von  $\alpha$  und  $\beta$  entsprechend vertauscht ist.

Wir können jetzt leicht nachprüfen, dass  $\Psi \circ \Phi$  und  $\Phi \circ \Psi$  Identitäten sind.

Wenn wir  $\Psi \circ \Phi$  bilden, erhalten wir aus (6.6) und (6.7) eine Summe von vier Verknüpfungen von jeweils vier Faktoren, deren beide mittlere Faktoren die Form

$$\pi_{F(C)} \circ i_{F(D)} \quad (6.9)$$

haben, wobei jedes von  $C$  und  $D$ , unabhängig voneinander, entweder  $G$  oder  $H$  ist (in den vier Summanden erscheinen die vier möglichen Zuordnungen von  $G$  und  $H$  zu  $C$  und  $D$ ).

Die Verknüpfung (6.9) ist die Identität wenn  $C = D$ , nach (6.4a), und ist  $0$  wenn  $C \neq D$ , nach (6.4b). Also werden die Summanden mit  $C \neq D$  Null und müssen nicht hingeschrieben werden, und in den anderen Summanden ergeben die mittleren Faktoren die Identität, weshalb diese Faktoren weggekürzt werden können. Mit diesen Kürzungen und Vereinfachungen finden

wir

$$\Psi \circ \Phi = F(\alpha_G) \circ F(\beta_G) + F(\alpha_H) \circ F(\beta_H) = \text{id}_{F(G \oplus H)}$$

nach Gleichung (6.8c).

Wenn wir  $\Phi \circ \Psi$  bilden, erhalten wir aus (6.6) und (6.7) eine Summe von vier Verknüpfungen von jeweils vier Faktoren, deren beide mittlere Faktoren die Form

$$F(\beta_C) \circ F(\alpha_D) \quad (6.10)$$

haben, wobei jedes von  $C$  und  $D$ , unabhängig voneinander, entweder  $G$  oder  $H$  ist (in den vier Summanden erscheinen die vier möglichen solchen Zuordnungen).

Die Verknüpfung (6.10) ist die Identität wenn  $C = D$ , nach (6.8a), und ist  $\mathbf{0}$  wenn  $C \neq D$ , nach (6.8b). Also werden die Summanden mit  $C \neq D$  Null und müssen nicht hingeschrieben werden, und in den anderen Summanden ergeben die mittleren Faktoren die Identität, weshalb diese Faktoren wegekürzt werden können. Mit diesen Kürzungen und Vereinfachungen finden wir

$$\Phi \circ \Psi = i_{F(G)} \circ \pi_{F(G)} + i_{F(H)} \circ \pi_{F(H)} = \text{id}_{F(G) \oplus F(H)}$$

nach Gleichung (6.4c) mit  $F(G)$  für  $A$  und  $F(H)$  für  $B$ .

Da die Verknüpfung von  $\Phi$  mit  $\Psi$  in beiden Reihenfolgen die Identität liefert, sind  $\Phi$  und  $\Psi$  Isomorphismen. Und sie sind natürlich, weil  $i_G$ ,  $i_H$ ,  $\pi_G$  und  $\pi_H$  natürliche Transformationen sind, wie auch ihre Verknüpfung in beiden Reihenfolgen mit dem Funktor  $F$ , und weil  $\Phi$  und  $\Psi$  Summen von Verknüpfungen der genannten natürlichen Transformationen sind.

Also sind die in (6.2) und (6.3) angegebenen Homomorphismen  $\Phi$  und  $\Psi$  wie behauptet natürliche Äquivalenzen zwischen den Funktoren  $F(G \oplus H)$  und  $F(G) \oplus F(H)$ . ■

**Bemerkung 6.8** Sei

$$F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$$

ein additiver Funktor. Dann respektiert  $F$  beliebige *endliche* direkte Summen, d. h., wenn  $G_1, G_2, \dots, G_n$  endlich viele additive abelsche Gruppen sind, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$F\left(\bigoplus_{i=1}^n G_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n F(G_i), \quad (6.11)$$

wie durch Induktion leicht aus Lemma 6.7 zu schließen ist.

Für *unendliche* direkte Summen muss eine Beziehung wie in (6.11) *nicht* gelten! Additive Funktoren, die (6.11) auch für direkte Summen mit unendlich vielen Summanden erfüllen, nennt man **stark additiv**.

Die wichtigen Funktoren, die wir in diesem Kapitel einführen wollen, sind alle additiv und vertragen sich deshalb im Sinne von Beziehung (6.11) mit endlichen direkten Summen. Das werden wir ausnutzen zur Berechnung dieser Funktoren, denn in der Mehrzahl werden die uns interessierenden Gruppen endlich erzeugt sein (z.B. sind die Homologiegruppen von kompakten CW-Räumen immer endlich erzeugt, weil schon der zelluläre Kettenkomplex endlich erzeugt ist, da es nur endlich viele Zellen gibt).

Endlich erzeugte abelsche Gruppen sind immer darstellbar als eine endliche direkte Summe von zyklischen Gruppen; das ist die Aussage des berühmten Struktursatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen aus der elementaren Algebra, an den wir gleich erinnern werden. Auf Grund dieses Satzes und der Beziehung (6.11) reduziert sich die Berechnung eines additiven Funktors für endlich erzeugte abelsche Gruppen auf seine Berechnung für zyklische Gruppen.

Bevor wir diesen klassischen Satz in Erinnerung rufen, führen wir noch einige nützliche Gruppeneigenschaften und Begriffe ein, die auch im nicht-endlich erzeugten Fall sinnvoll und für unsere Funktoren relevant sind.

**Bemerkung und Konvention 6.9** Wie die bisherige Diskussion deutlich macht, geht es in diesem Kapitel intensiv um *additive Funktoren* und ihren Eigenschaften, was eine dazu passende Notation erfordert.

Damit wir nicht bei jedem Vorkommen „additive abelsche Gruppe“ sagen müssen, wollen wir die Konvention einführen, dass abelsche Gruppen, wenn nicht ausdrücklich die multiplikative Notation verlangt wird (wie das zum Beispiel bei  $S^1 \subseteq \mathbf{C}$  sinnvoll wäre), immer *additiv* zu schreiben sind, so dass die Gruppenoperation  $+$  heißt, das neutrale Element  $0$  heißt und Inverse mit  $-$  notiert werden.

Natürlich können die Definitionen weiter unten und die in ihnen vorkommenden Begriffe auch auf multiplikative abelsche Gruppen angewendet werden, wenn man den Wortlaut der Definitionen entsprechend in die andere Notation übersetzt.

**Definition 6.10** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe und sei  $a \in G$ .

Wir erinnern an die Definition der **Ordnung** von  $a$ , die wir mit  $\text{Ord } a$  bezeichnen; sie ist die kleinste positive natürliche Zahl  $n$ , so dass  $n \cdot a = 0$ , falls es überhaupt solche positiven natürlichen Zahlen gibt, oder ist  $\infty$ , wenn diese Gleichung nur die Lösung  $n = 0$  hat.

Ein Element  $a \in G$  endlicher Ordnung nennt man ein **Torsionselement**. Das neutrale Element  $0$  ist immer ein Torsionselement, da es Ordnung 1 hat.

$G$  nennt sich eine **Torsionsgruppe**, wenn jedes Element von  $G$  endliche Ordnung hat (die aber nicht beschränkt sein muss!), also wenn jedes Element



ein Torsionselement ist. Hingegen heißt  $G$  **torsionsfrei**, wenn kein Element  $a \neq 0$  endliche Ordnung hat, also wenn 0 das einzige Torsionselement ist.

In jeder Gruppe  $G$  bilden die Torsionselemente eine Untergruppe  $T(G)$ , genannt die **Torsionsuntergruppe** von  $G$ , denn 0 ist ein Torsionselement, und wenn  $a$  die Ordnung  $m$  und  $b$  die Ordnung  $n$  hat, dann ist  $m \cdot (-a) = 0$  und  $(mn) \cdot (a + b) = 0$ , so dass das Inverse eines Torsionselementes wie auch die Summe zweier Torsionselemente auch Torsionselemente sind.

**Bemerkung 6.11** Genau dann ist eine abelsche Gruppe  $G$  eine Torsionsgruppe, wenn  $T(G) = G$ .

Genau dann ist  $G$  torsionsfrei, wenn  $T(G) = \{0\}$ .

**Lemma und Definition 6.12** Seien  $G$  und  $H$  abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus.

Dann ist

$$f(T(G)) \subseteq T(H). \quad (6.12)$$

Insbesondere können wir definieren

$$T(f) := f|_{T(G)}: T(G) \rightarrow T(H).$$

Mit dieser Zuordnung wird der Torsionsanteil zu einem Funktor

$$T: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp},$$

den wir auch den **Torsionsanteil** nennen.

Dieser Funktor ist nicht zu verwechseln mit dem Funktor  $\text{Tor}$ , den wir später definieren werden.

*Beweis.* Wir müssen nur (6.12) beweisen. Diese Beziehung ist aber klar, denn wenn  $a \in T(G)$  und  $n = \text{Ord } a$ , so ist

$$n \cdot f(a) = f(na) = f(0) = 0$$

und  $f(a) \in T(H)$ . ■

**Lemma 6.13** a) Für jede abelsche Gruppe  $G$  ist der Quotient  $G/T(G)$  torsionsfrei.

b) Jede freie abelsche Gruppe ist torsionsfrei.

*Beweis.* Zu a): Sei  $\alpha$  ein Torsionselement von  $G/T(G)$  und sei  $a \in G$  mit  $\alpha = [a]$ . Sei  $n := \text{Ord } \alpha$ . Dann ist  $n\alpha = n[a] = [na] = 0$ , also ist  $na \in T(G)$ .

Somit gibt es eine Zahl  $m > 0 \in \mathbf{N}$  mit  $0 = m(na) = (mn)a$ . Das heißt,  $a$  war schon ein Torsionselement und  $\alpha = [a] = 0$ .

Also ist  $0$  das einzige Torsionselement von  $G/T(G)$  und diese Gruppe ist torsionsfrei.

Zu b): Sei  $G$  eine freie abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Menge  $X$  mit  $G \cong F(X)$ , und es reicht zu zeigen, dass  $F(X)$  torsionsfrei ist.

Aber  $F(X)$  ist eine Untergruppe von  $\mathbf{Z}^X$  und deshalb reicht es zu zeigen, dass die Gruppe  $\mathbf{Z}^X$  torsionsfrei ist.

Das ist sie, weil bekanntlich  $\mathbf{Z}$  torsionsfrei ist. Denn ist  $f: X \rightarrow \mathbf{Z}$  ein Element von  $\mathbf{Z}^X$  und  $nf = 0$  für  $n > 0 \in \mathbf{N}$ , so ist  $n \cdot f(x) = 0$  und somit  $f(x) = 0$  in  $\mathbf{Z}$  für jedes  $x \in X$ . Das heißt,  $\mathbf{0}$  ist das einzige Torsionselement von  $\mathbf{Z}^X$  und die Gruppe  $\mathbf{Z}^X$ , und somit auch  $F(X)$ , ist torsionsfrei. ■

Hier sind einige weitere Beispiele:

**Beispiele 6.14** a) Eine nichttriviale endliche abelsche Gruppe  $G$  ist immer eine Torsionsgruppe.

b) Die Gruppen  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{C}$ , und allgemeiner jeder Oberkörper von  $\mathbf{Q}$ , sind torsionsfrei.

Denn  $\mathbf{Q}$  und seine Oberkörper enthalten  $\mathbf{Z}$  als Unterring, und weil sie Körper (und somit auch Integritätsbereiche) sind, verschwindet kein Produkt eines Elementes  $\neq 0$  mit einer ganzen Zahl  $\neq 0$ .

c) Die multiplikative Gruppe  $S^1 \subseteq \mathbf{C}$ , die zu  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  isomorph ist vermöge der Abbildung  $t \mapsto e^{2\pi it}$ , ist weder torsionsfrei noch eine Torsionsgruppe.

Ihre Torsionsuntergruppe ist die Gruppe im nächsten Beispiel.

d) Die multiplikative Gruppe

$$\begin{aligned} C &:= \{ z \in \mathbf{C} \mid z \text{ ist eine Einheitswurzel} \} \\ &= \{ z \in \mathbf{C} \mid \exists n > 0 \in \mathbf{N} \text{ mit } z^n = 1 \} \\ &= \{ e^{2\pi it} \mid t \in \mathbf{Q} \} \\ &\cong \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}} \end{aligned}$$

ist nach Definition eine Torsionsgruppe.

Wir wollen uns jetzt die Zerlegung einer abelschen Gruppe in die Torsionsuntergruppe und den torsionsfreien Quotienten nach dieser Untergruppe

näher ansehen. Beispiel 6.14 b) zeigt, dass eine torsionsfreie Gruppe nicht unbedingt frei sein muss, denn  $\mathbf{Q}$  ist torsionsfrei aber nicht frei (da jedes Element von  $\mathbf{Q}$  das Doppelte eines anderen Elements ist, was aber für die Erzeugenden einer freien abelschen Gruppe nicht der Fall sein kann).

Außerdem ist die Bildung des torsionsfreien „Anteils“ einer Gruppe als ein Quotient bei weitem nicht so bequem, wie eine Zerlegung der ganzen Gruppe als die direkte Summe der Torsionsuntergruppe und eines torsionsfreien Komplementes.

Wenn die Gruppe endlich erzeugt ist, verschwinden beide Schwierigkeiten, als eine Konsequenz des Struktursatzes für endlich erzeugte abelsche Gruppen (Satz 6.16 unten).

Zunächst eine einfache aber nützliche Tatsache über endliche zyklische Gruppen:

**Lemma 6.15** *Seien  $m$  und  $n$  positive natürliche Zahlen. Wenn  $m$  und  $n$  teilerfremd sind, dann ist*

$$\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_{mn}$$

*und diese zyklische Gruppe wird erzeugt vom Element  $(1, 1) \in \mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$ .*

*Beweis.* Wir berechnen die Ordnung des Elementes  $(1, 1)$ . Für  $k \in \mathbf{N}$  ist

$$k(1, 1) = (k, k) = 0 \in \mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$$

genau dann, wenn  $m \mid k$  und  $n \mid k$ , und das gilt genau dann, wenn  $mn \mid k$ , da  $m$  und  $n$  teilerfremd sind.

Das bedeutet, dass die Elemente  $k(1, 1)$  für  $0 \leq k < mn$  alle verschieden sind, d. h., die von  $(1, 1)$  erzeugte zyklische Untergruppe  $\langle (1, 1) \rangle$  von  $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$  hat mindestens  $mn$  Elemente.

Aber die ganze Gruppe  $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$  hat auch nur  $mn$  Elemente, da sie als Menge gleich  $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$  ist. Also ist  $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n = \langle (1, 1) \rangle$ , und dies ist eine zyklische Gruppe mit  $mn$  Elementen, isomorph zu  $\mathbf{Z}_{mn}$ . ■

Wir brauchen zwei klassische Sätze aus der Theorie der abelschen Gruppen, die wir aber in der Vorlesung nicht beweisen werden, da es sich um bekannte Sätze der Algebra handelt, mit sehr technischen Beweisen, für die wir keine Vorlesungszeit opfern wollen. Damit Sie die Beweise notfalls nachlesen können, präsentieren wir sie in Anhang A.

**Satz 6.16** *Sei  $G$  eine endlich erzeugte additive abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Zahl  $n$  (genannt der **Rang** von  $G$ ) und es gibt (nicht unbedingt verschiedene) natürliche Zahlen  $d_1, d_2, \dots, d_s > 1$ , so dass*

$$G \cong \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{d_s}, \quad (6.13)$$

wobei  $n$  eindeutig bestimmt ist und man die  $d_i$  so wählen kann, dass

$$d_s \mid d_{s-1} \mid \cdots \mid d_1;$$

alternativ kann man die  $d_i$  alle als Primzahlpotenzen wählen; in beiden Fällen sind sie (bis auf Reihenfolge, wenn man sie als Primzahlpotenzen wählt) eindeutig bestimmt.

Die  $d_i$  heißen die **Torsionskoeffizienten** von  $G$ .

Man beachte, dass

$$\mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{d_s}$$

die Torsionsuntergruppe von  $G$  ist.

Wenn  $G$  von  $m$  Elementen erzeugt werden kann, dann ist der Rang höchstens  $m$  und ist gleich  $m$ , nur wenn  $G$  frei ist.

*Beweis.* Siehe Anhang A, Satz A.5. ■

**Korollar 6.17** Eine endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe  $G$  ist frei abelsch von endlichem Rang. Der Rang ist die minimale Anzahl von Elementen, die erforderlich sind, um  $G$  zu erzeugen.

*Beweis.* Wenn  $G$  endlich erzeugt und torsionsfrei ist, so erscheinen die Summanden  $\mathbf{Z}_{d_i}$  in der direkten Summendarstellung (6.13) nicht, und  $G$  ist frei von endlichem Rang, sagen wir  $n$ .

Wenn  $G$  von  $m$  Elementen erzeugt wird, dann besagt Satz 6.16, dass  $n \leq m$ . Aber  $\mathbf{Z}^n$  kann offensichtlich von  $n$  Elementen erzeugt werden; also ist  $n$  die minimale Anzahl von Erzeugenden. ■

**Satz 6.18** Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei abelsch.

*Beweis.* Siehe Anhang A, Satz A.7. ■

Die bisherigen Vorbereitungen werden es uns ermöglichen, die Funktoren, mit deren Konstruktion wir jetzt beginnen werden, sehr schnell zu berechnen. Wir können also jetzt an die Hauptarbeit gehen.

Die ersten beiden Funktoren, die uns interessieren, können wir direkt mit algebraischen Mitteln konstruieren; die beiden anderen werden aus diesen mit Ideen aus der Homologietheorie „abgeleitet“ und heißen deshalb auch **abgeleitete Funktoren**. Zuerst müssen wir aber die Grundfunktoren dazu haben.

Wir beginnen mit dem angenehmeren der beiden Grundfunktoren von zwei Variablen, angenehmer deshalb, weil er in beiden Variablen kovariant ist.

Das **Tensorprodukt** zweier abelscher Gruppen (oder allgemeiner, zweier Moduln über einem kommutativen Ring) ist eine Standardkonstruktion der kommutativen Algebra, der vielen von Ihnen wahrscheinlich schon bekannt ist, zumindest für Vektorräume über einen Körper. Aus diesem Grund und wegen der Enge der Zeit wollen wir die algebraischen Details nicht in der Vorlesung besprechen, sondern in die Anhänge zum Skriptum verbannen. Alles, was für unsere Zwecke über diese Konstruktion wichtig ist, können Sie in Anhang B nachlesen, so dass wir in der Vorlesung mit den algebraisch **topologischen** Anwendungen fortschreiten können.

Wir werden allerdings in der Lage sein müssen, Tensorprodukte zu berechnen, und diese Berechnung können wir schon vorwegnehmen für den häufig anzutreffenden Fall endlich erzeugter abelscher Gruppen:

In Verbindung mit dem Struktursatz 6.16 für endlich erzeugte abelsche Gruppen hat das „Distributivgesetz“ für Tensorprodukte, Lemma B.12 e), zur Folge, dass wir alle Tensorprodukte von endlich erzeugten abelschen Gruppen kennen, sobald wir die Tensorprodukte der zyklischen Gruppen kennen.

Diese sind leicht auszurechnen:

**Beispiele 6.19**    a)

$$\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}.$$

b) Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  ist

$$\mathbf{Z}_n \otimes \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_n.$$

c) Seien  $m$  und  $n$  positive natürliche Zahlen und sei  $d = \text{ggT}(m, n)$ . Dann ist

$$\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_d.$$

*Beweis.* Teile a) und b) folgen sofort aus Lemma B.12 b). Wir widmen uns also Teil c).

Lemma B.12 c) impliziert, dass ein Tensorprodukt  $A \otimes B$  zweier zyklischer Gruppen von einem Einzelement erzeugt wird (nämlich vom Tensorprodukt des Erzeugenden von  $A$  mit dem Erzeugenden von  $B$ ) und somit zyklisch ist. Im jetzigen Fall ist  $1 \otimes 1$  also ein Erzeugendes von  $\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n$ . Wir müssen nur die Ordnung berechnen.

Nach dem Lemma von Bézout lässt sich der größte gemeinsame Teiler  $d$  von  $m$  und  $n$  schreiben in der Form

$$d = am + bn$$

für geeignete ganze Zahlen  $a$  und  $b$ . Wir haben dann

$$\begin{aligned}
 d(1 \otimes 1) &= (am + bn)(1 \otimes 1) \\
 &= am(1 \otimes 1) + bn(1 \otimes 1) \\
 &= a((m \cdot 1) \otimes 1) + b(1 \otimes (n \cdot 1)) && \text{(nach Lemma B.5 e))} \\
 &= a(0 \otimes 1) + b(1 \otimes 0) \\
 &= 0 + 0 = 0. && \text{(nach Lemma B.5 c))}
 \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass  $d$  tatsächlich die Ordnung von  $1 \otimes 1$  ist, d. h., dass kein kleineres Vielfaches von  $1 \otimes 1$  verschwindet.

Dazu betrachte man die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned}
 \rho: \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n &\longrightarrow \mathbf{Z}_d \\
 (k, l) &\longmapsto kl \bmod d
 \end{aligned}$$

(die wohldefiniert ist, weil  $d$  ein Teiler von  $m$  und von  $n$  ist).

Der von ihr durch die universelle Eigenschaft induzierte Homomorphismus  $\bar{\rho}: \mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n \longrightarrow \mathbf{Z}_d$  bildet  $1 \otimes 1$  auf  $\rho(1, 1) = 1 \in \mathbf{Z}_d$  ab, und weil dieses Bildelement Ordnung  $d$  hat, kann  $1 \otimes 1$  keine kleinere Ordnung haben, sondern nur eine Ordnung, die durch  $d$  teilbar ist.

Da aber schon  $d(1 \otimes 1) = 0$ , ist  $d$  genau die Ordnung des Erzeugenden  $1 \otimes 1$  von  $\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n$  und diese Gruppe ist deshalb isomorph zu  $\mathbf{Z}_d$ . Der Homomorphismus  $\bar{\rho}$  ist sogar ein Isomorphismus. ■

Wir werden später weitere nützliche Eigenschaften des Tensorprodukts besprechen, aber zunächst wollen wir einen weiteren „elementaren“ Funktor untersuchen, den wir so wie auch das Tensorprodukt anwenden wollen, um neue Sorten von „Homologiegruppen“ zu konstruieren.

Dieser Funktor ist Ihnen schon wohlbekannt und erfordert daher keine langwierige Konstruktion:

**Definition 6.20** Seien  $G$  und  $H$  additive abelsche Gruppen. Wir setzen

$$\text{Hom}(G, H) := \{ \alpha: G \longrightarrow H \mid \alpha \text{ ist ein Gruppenhomomorphismus} \}.$$

Man beachte, dass  $\text{Hom}(G, H)$  selber eine additive abelsche Gruppe ist, mit der in Bemerkung 6.3 auf die gängige Weise erklärten Addition von Homomorphismen als Gruppenoperation.

Wenn  $K$  und  $L$  zwei weitere additive abelsche Gruppen sind, und wenn  $f: K \longrightarrow G$  und  $g: H \longrightarrow L$  Gruppenhomomorphismen sind, und wenn  $\alpha \in \text{Hom}(G, H)$ , so definieren wir

$$\text{Hom}(f, g)(\alpha) := g \circ \alpha \circ f \in \text{Hom}(K, L). \quad (6.14)$$

Diese Verknüpfung von drei Homomorphismen erfüllt für jeden Faktor das Distributivgesetz in Bezug auf die Addition von Gruppenhomomorphismen. Für den mittleren Faktor bedeutet das, dass  $\text{Hom}(f, g)$  ein Gruppenhomomorphismus  $\text{Hom}(G, H) \longrightarrow \text{Hom}(K, L)$  ist.

Es ist trivial nachzuprüfen, dass diese Zuordnung mit Verknüpfungen der Homomorphismenpaare  $(f, g)$  verträglich ist, und offensichtlich ist

$$\text{Hom}(\text{id}_G, \text{id}_H) = \text{id}_{\text{Hom}(G, H)}.$$

$\text{Hom}$  ist also ein Funktor von zwei Variablen  $\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$ , kontravariant in der ersten Variablen und kovariant in der zweiten.

Für die äußeren Faktoren  $g$  und  $f$  in der Verknüpfung (6.14) bedeutet die Gültigkeit des Distributivgesetzes, dass  $\text{Hom}$  in beiden Variablen additiv ist, also insgesamt ein additiver Funktor von zwei Variablen ist.

**Lemma 6.21** a) Für jede additive abelsche Gruppe  $G$  gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) \cong G.$$

Er identifiziert  $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{Z}, G)$  mit  $\alpha(1) \in G$ .

b) Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe und sei  $n > 0 \in \mathbf{N}$ . Wir definieren die  $n$ -**Torsionsgruppe** von  $G$  als die Untergruppe

$$G^{(n)} := \{ a \in G \mid na = 0 \}.$$

Für jede additive abelsche Gruppe  $G$  gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}(\mathbf{Z}_n, G) \cong G^{(n)}.$$

Er identifiziert  $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{Z}_n, G)$  mit  $\alpha(1) \in G$ , und dieses Element gehört zu  $G^{(n)}$ .

c) Sei  $T$  eine abelsche Torsionsgruppe und  $N$  eine torsionsfreie abelsche Gruppe. Dann ist

$$\text{Hom}(T, N) = \{ 0 \}.$$

*Beweis.* a) Jeder Homomorphismus  $\alpha: \mathbf{Z} \longrightarrow G$  ist eindeutig bestimmt durch den Wert  $\alpha(1)$ , weil 1 die Gruppe  $\mathbf{Z}$  erzeugt, und umgekehrt, für jedes  $a \in G$  definiert

$$\alpha_a(n) := na$$

offensichtlich einen Homomorphismus  $\mathbf{Z} \longrightarrow G$  mit  $\alpha_a(1) = a$ .

Die Zuordnung  $\alpha \mapsto \alpha(1)$  ist also eine Bijektion  $\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) \longrightarrow G$ , und sie ist sogar ein Isomorphismus, da sie mit der Addition in beiden Gruppen verträglich ist.

b) Sei  $a \in G$  und sei  $\alpha: \mathbf{Z} \longrightarrow G$  der (nach Teil a) eindeutige) Homomorphismus mit  $\alpha(1) = a$ . Die Gruppe  $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  ist ein Quotient von  $\mathbf{Z}$ ; sei  $\pi: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_n$  die kanonische Projektion.

Die zyklische Gruppe  $\mathbf{Z}_n$  wird erzeugt vom Element 1, dem Bild von  $1 \in \mathbf{Z}$  unter  $\pi$ , und somit ist jeder Homomorphismus  $\mathbf{Z}_n \longrightarrow G$  eindeutig bestimmt durch seinen Wert auf diesem Element.

Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \\ \mathbf{Z}_n & & \end{array}$$

Genau dann existiert ein (dann eindeutiger) Homomorphismus

$$\bar{\alpha}: \mathbf{Z}_n \longrightarrow G$$

mit  $\bar{\alpha}(1) = a$ , wenn es einen Homomorphismus  $\bar{\alpha}$  gibt mit  $\bar{\alpha} \circ \pi(1) = a = \alpha(1)$ , also genau dann, wenn der gestrichelte Pfeil  $\bar{\alpha}$  im Diagramm so eingefüllt werden kann, dass das Diagramm beim Element  $1 \in \mathbf{Z}$  kommutiert und somit ganz kommutiert, da 1 die zyklische Gruppe  $\mathbf{Z}$  erzeugt.

Aber das Diagramm lässt sich genau dann einfüllen, wenn

$$\text{Ker } \pi = n\mathbf{Z} \subseteq \text{Ker } \alpha,$$

und das ist genau dann der Fall, wenn  $n \in \text{Ker } \alpha$ , also wenn  $\alpha(n) = na = 0$  oder in anderen Worten, wenn  $a \in G^{(n)}$ .

Wie im Fall  $\mathbf{Z}$  ist auch hier die Zuordnung  $\bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha}(1)$  ein injektiver Homomorphismus  $\text{Hom}(\mathbf{Z}_n, G) \longrightarrow G$ , und somit ein Isomorphismus auf ihr Bild. Und wir haben gerade gesehen, dass das Bild die Untergruppe  $G^{(n)}$  ist.

c) folgt sofort aus Bemerkung 6.11 und der Relation (6.12), denn jeder Homomorphismus  $\alpha: T \longrightarrow N$  bildet  $T = T(T)$  nach  $\{0\} = T(N)$  ab. ■

Für zyklische Gruppen ergeben sich aus Lemma 6.21 folgende Werte des Hom-Funktors, mit deren Hilfe man  $\text{Hom}(G, H)$  für jedes Paar von endlich erzeugten abelschen Gruppen ausrechnen kann.

**Beispiele 6.22** Seien  $m$  und  $n$  positive natürliche Zahlen, und sei  $d := \text{ggT}(m, n)$  ihr größter gemeinsamer Teiler. Es gilt



- a)  $\text{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$
- b)  $\text{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_n$
- c)  $\text{Hom}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \{0\}$
- d)  $\text{Hom}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_d$

*Beweis.* a) und b) folgen sofort aus Lemma 6.21 a), und c) ist eine Instanz von Lemma 6.21 c).

d): Nach Lemma 6.21 b) besteht  $\text{Hom}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n)$  aus den  $m$ -Torsionselementen von  $\mathbf{Z}_n$ , und wir müssen also die Gruppe  $\mathbf{Z}_n^{(m)}$  berechnen.

Sei 1 das Erzeugende von  $\mathbf{Z}_n$  und sei  $k \in \mathbf{Z}$ . Dann ist  $m \cdot (k \cdot 1) = 0$  genau dann, wenn  $n \mid mk$ .

Das ist genau dann der Fall, wenn  $(n/d) \mid (m/d)k$  und da  $n/d$  und  $m/d$  teilerfremd sind, ist dies genau dann erfüllt, wenn  $k$  ein Vielfaches von  $n/d$  ist.

Also wird  $\mathbf{Z}_n^{(m)}$  vom Element  $\frac{n}{d} \cdot 1$  in  $\mathbf{Z}_n$  erzeugt, und dieses Element hat offensichtlich Ordnung  $d$ , so dass  $\mathbf{Z}_n^{(m)} \cong \mathbf{Z}_d$ . ■

Wir wollen jetzt durch Anwendung der gerade besprochenen additiven Funktoren  $\otimes$  und  $\text{Hom}$  auf den singulären Kettenkomplex zwei neue Homologievarianten einführen.

**Bemerkung und Konvention 6.23** Wir müssen zuerst durch Einführung einer Konvention ein kleines technisches Problem lösen.

Die Anwendung eines additiven Funktors  $U$  auf einen Kettenkomplex, aufgefasst als ein Diagramm der Gestalt „Folge“, bereitet keine Probleme, denn wie in Bemerkung 1.23 definiert, kann man  $U$  auf *jede* Diagrammkategorie von additiven abelschen Gruppen erweitern. Insbesondere kann man den Funktor  $U$  auf Kettenkomplexe anwenden.

Anders als in der genannten Definition werden wir zur Bequemlichkeit den gleichen Namen  $U$  für den so entstehenden Diagrammfunktor verwenden.

Wenn wir aber einen Kettenkomplex  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  als eine graduierte abelsche Gruppe  $C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n$  auffassen wollen, dürfen wir  $U(C)$  nicht einfach als den Funktor  $U$  angewendet auf die *ganze* Gruppe  $C$  verstehen, denn wenn  $U$  nicht *stark* additiv ist (was in Gegensatz zu  $\otimes$  bei  $\text{Hom}$  der Fall wäre), dann ist  $U(C)$  in diesem direkten Sinn nicht die Summe der  $U(C_n)$  und wir würden nicht die graduierte Darstellung des gleichen Kettenkomplexes erhalten, den wir in der Diagrammgestalt hätten.

Deshalb werden wir folgende Konvention einführen. Ist  $U$  ein additiver Funktor  $\mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  und ist  $G$  eine *graduierte* abelsche Gruppe, so

definieren wir die *graduier*te abelsche Gruppe  $U(G)$  als das Ergebnis der *stufenweisen* Anwendung von  $U$ . Nur für stark additive Funktoren  $U$  ist dies das Gleiche, wie  $U$  angewendet auf ganz  $G$ .

Das heißt, wir erweitern jeden additiven Funktor  $U: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  zu einem (gleichbenannten) Funktor  $U: \mathbf{GAG} \rightarrow \mathbf{GAG}$ , in dem wir per Definition oder per Konvention

$$U\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n\right) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} U(G_n)$$

setzen.

Entsprechend definieren wir die Anwendung von  $U$  auf graduierte Homomorphismen. Wenn  $G$  und  $H$  graduierte abelsche Gruppen sind und wenn  $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n: G \rightarrow H$  ein Grad  $k$  Homomorphismus ist, so setzen wir

$$U(f) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} U(f_n),$$

und dies ist offensichtlich ein Grad  $k$  Homomorphismus  $U(G) \rightarrow U(H)$  (oder ein Grad  $-k$  Homomorphismus  $U(H) \rightarrow U(G)$  im kontravarianten Fall).

Auf diese Weise ist garantiert, dass die Anwendung eines additiven Funktors auf einen Kettenkomplex das „gleiche“ Ergebnis liefert, egal ob wir den Kettenkomplex in Diagrammgestalt oder als graduierte abelsche Gruppe schreiben. Wir müssen uns aber noch vergewissern, dass das Ergebnis überhaupt wirklich ein Kettenkomplex mit der zugehörigen Struktur ist.

**Bemerkung und Definition 6.24** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver Funktor.

Sei  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ein Kettenkomplex. Weil  $U$  additiv ist, ist auch

$$U\mathcal{C} := (U(C), U(\partial))$$

ein Kettenkomplex, denn aus  $\partial \circ \partial = \mathbf{0}$  folgt

$$U(\partial) \circ U(\partial) = U(\partial \circ \partial) = U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

(Damit  $U(\partial)$  Grad  $-1$  hat, müssen wir allerdings im kontravarianten Fall die Graduierung umkehren und  $(U(C))_n := U(C_{-n})$  definieren).

$U$  bildet Kettenabbildungen wieder in Kettenabbildungen ab (weil er kommutative Diagramme wieder in kommutative Diagramme überführt), und er ist offensichtlich additiv.

Also definiert  $U$  einen wohldefinierten additiven Funktor

$$U: \mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{KK}.$$

Wir behalten auch für diesen Funktor den Namen  $U$  bei.

**Bemerkung 6.25** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver Funktor.

Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \varepsilon)$  Kettenkomplexe und seien  $f$  und  $g: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  zwei Kettenabbildungen.

Ist  $\Phi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $g$ , so ist  $U(\Phi)$  eine Kettenhomotopie von  $U(f)$  nach  $U(g)$ . Das gilt auch im Fall, wo  $U$  kontravariant ist.

Dies folgt unmittelbar aus der Additivität von  $U$ .

Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Durch Anwendung der gerade besprochenen Funktoren  $\otimes$  und  $\text{Hom}$  auf den gewöhnlichen singulären Kettenkomplex als erste Variable und  $G$  als zweite Variable werden wir neue Varianten der Homologietheorie „mit Koeffizienten in  $G$ “ erhalten.

Wir brauchen aber vorher noch eine letzte algebraische Vorbereitung, um sicherzustellen, dass die exakten Folgen, die in der bisherigen singulären Homologietheorie vorkamen, auch nach Anwendung dieser Funktoren exakt bleiben (denn wie wir später sehen werden, ist es *nicht* immer der Fall, dass die Anwendung eines additiven Funktors auf eine exakte Folge wieder eine exakte Folge liefert). Nur so wird es möglich sein zu beweisen, dass die Eilenberg-Steenrod Axiome für die neuen Theorien noch gelten.

Trotz des genannten Problems gibt es dennoch spezielle Situationen und *spezielle* kurze exakte Folgen von additiven abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen, deren Bilder unter jedem additiven Funktor wieder exakt sind. Eine sehr nützliche Situation, in der das so ist, wollen wir jetzt beschreiben.

**Lemma und Definition 6.26** Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (6.15)$$

eine kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Folgende Bedingungen sind zueinander äquivalent (die in den Bedingungen genannten Abbildungen sind in Diagramm (6.16) eingetragen):

$$\{0\} \longrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{r} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{s} \end{array} C \longrightarrow \{0\} \quad (6.16)$$

- a) Es gibt einen Homomorphismus  $r: B \longrightarrow A$  mit  $r \circ f = \text{id}_A$ .
- b) Es gibt einen Homomorphismus  $s: C \longrightarrow B$  mit  $g \circ s = \text{id}_C$ .
- c) Es gibt eine Untergruppe  $C' \subseteq B$ , so dass

$$B = f(A) \oplus C'$$

und so dass  $g|_{C'}: C' \longrightarrow C$  ein Isomorphismus ist.

Wenn eine dieser Bedingungen gilt (dann gelten gleich alle), so sagen wir, dass die kurze exakte Folge (6.15) **spaltet**, und wir nennen jede der Abbildungen  $r$  oder  $s$  eine **Spaltung** der Folge.

Für eine spaltende kurze exakte Folge (6.15) gelten alle drei Bedingungen a), b) und c), und man kann sie so erfüllen, also man kann die Abbildungen  $r$  in a) und  $s$  in b) so wählen, dass

$$r \circ s = \mathbf{0}. \quad (6.17)$$

Ferner, in c) kann man  $C'$  so wählen, dass

$$(s \circ g)|_{C'} = \text{id}_{C'}, \quad (6.18)$$

und gleichzeitig so, dass

$$C' = \text{Ker } r = s(C). \quad (6.19)$$

Und schließlich, wann immer  $r$  und  $s$  zueinander passend gewählt wurden, so dass (6.17) erfüllt ist, gilt auch

$$f \circ r + s \circ g = \text{id}_B. \quad (6.20)$$

Das Interessante an einer Spaltung ist natürlich die direkte Summendarstellung in c).

*Beweis.* (b)  $\implies$  (a) : Sei  $s: C \longrightarrow B$  ein Homomorphismus mit  $g \circ s = \text{id}_C$ .

Da die Folge (6.15) exakt ist, ist  $f$  injektiv und somit ein Isomorphismus  $A \longrightarrow f(A)$ . Wir definieren einen Homomorphismus  $\rho: B \longrightarrow B$  durch

$$\rho := \text{id}_B - s \circ g.$$

Man prüft sofort nach, dass

$$g \circ \rho = g \circ (\text{id}_B - s \circ g) = g \circ \text{id}_B - g \circ s \circ g = g - \text{id}_C \circ g = g - g = \mathbf{0}.$$

Also ist  $\text{Bild } \rho \subseteq \text{Ker } g = f(A)$  und wir können  $\rho$  mit der Umkehrabbildung des Isomorphismus  $f: A \longrightarrow f(A)$  verknüpfen.

Wir setzen

$$r := f^{-1} \circ \rho: B \longrightarrow A.$$

Man beachte, dass  $g = \mathbf{0}$  auf  $f(A)$  und somit ist

$$\rho|_{f(A)} = \text{id}_B|_{f(A)} = \text{id}_{f(A)}.$$

Daraus folgt

$$r \circ f = f^{-1} \circ \rho \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_B \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_A,$$

wie gewünscht.

Ferner, wir haben

$$\rho \circ s = (\text{id}_B - s \circ g) \circ s = s - s \circ g \circ s = s - s \circ \text{id}_C = s - s = \mathbf{0},$$

und deshalb gilt

$$r \circ s = f^{-1} \circ \rho \circ s = f^{-1} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

für  $r$  wie oben definiert. In anderen Worten, für diese Wahl von  $r$  ist (6.17) erfüllt.

(a)  $\implies$  (c) : Sei  $r: B \longrightarrow A$  ein Homomorphismus mit  $r \circ f = \text{id}_A$ . Dann ist

$$rf r = \text{id}_A \circ r = r.$$

Setze  $C' := \text{Ker } r$ . Für jedes  $b \in B$  ist

$$b = f(r(b)) + (b - f(r(b)))$$

und der erste Summand ist in  $f(A)$ , der zweite ist in  $C'$  weil

$$r(b - f(r(b))) = r(b) - r(f(r(b))) = r(b) - rf r(b) = r(b) - r(b) = \mathbf{0}.$$

Also ist  $B = f(A) + C'$ . Die Summe ist direkt, weil  $f(A) \cap C' = \{0\}$ , denn wenn  $a \in A$  und  $f(a) \in C'$ , dann ist  $r(f(a)) = 0$ , und weil  $r \circ f = \text{id}_A$  ist  $a = 0$  und somit  $f(a) = 0$ .

Wir haben also  $B = f(A) \oplus C'$ .

Weil  $\text{Ker } g = f(A)$ , ist

$$C = g(B) = g(f(A) + C') = \{0\} + g(C') = g(C'),$$

und  $g$  ist injektiv auf  $C'$ , da

$$\text{Ker } g \cap C' = f(A) \cap C' = \{0\}.$$

Also bildet  $g$  die Untergruppe  $C' \subseteq B$  surjektiv und injektiv, in anderen Worten isomorph auf  $C$  ab.

(c)  $\implies$  (b): Sei  $C'$  eine Untergruppe von  $B$ , so dass

$$B = f(A) \oplus C'$$

und so dass  $g|_{C'}: C' \longrightarrow C$  ein Isomorphismus ist.

Sei  $i: C' \longrightarrow B$  die Inklusion und setze

$$s := i \circ (g|_{C'})^{-1}: C \longrightarrow B.$$

Offensichtlich ist dann

$$g \circ s = g \circ i \circ (g|_{C'})^{-1} = (g|_{C'}) \circ (g|_{C'})^{-1} = \text{id}_C,$$

wie gewünscht.

Wir haben also jetzt gezeigt, dass die drei Bedingungen a), b) und c) zueinander äquivalent sind, und am Ende des Beweises (b)  $\implies$  (a) haben wir gezeigt, dass man zu gegebenem  $s$  die Abbildung  $r$  so wählen kann, dass (6.17) erfüllt ist.

Im Beweis von (a)  $\implies$  (c) wurde  $C' = \text{Ker } r$  gewählt (das ist eine Hälfte von (6.19)), und wir können jetzt zusätzlich annehmen, dass  $r \circ s = \mathbf{0}$ .

Wir zeigen als Nächstes, dass (6.18) für diese Wahl von  $C'$  gilt. Dazu sei  $c' \in C' = \text{Ker } r$  und sei

$$b' = c' - (s \circ g)(c')$$

die Differenz beider Seiten von (6.18).

Wir haben

$$g(b') = g(c') - (g \circ s \circ g)(c') = g(c') - (\text{id}_C \circ g)(c') = g(c') - g(c') = 0,$$

und weil die Folge (6.15) exakt ist, ist  $b' \in \text{Ker } g = \text{Bild } f$  und es gibt ein Element  $a \in A$  mit  $b' = f(a)$ .

Wir haben dann

$$a = r(f(a)) = r(b') = r(c') - (r \circ s \circ g)(c') = 0 - (\mathbf{0} \circ g)(c') = 0$$

und somit ist  $b' = f(0) = 0$ , d. h., beide Seiten von (6.18) sind gleich.

Aus (6.18) folgt  $C' \subseteq \text{Bild } s$ , und wegen (6.17) ist  $\text{Bild } s \subseteq \text{Ker } r = C'$ . Also ist  $\text{Bild } s = C'$  und das beweist die andere Hälfte von (6.19).

Es bleibt noch (6.20) zu beweisen.

Im Beweis benutzen wir die direkte Summendarstellung c) mit zu  $r$  und  $s$  passendem  $C'$ , aber Formel (6.20) hängt nur von  $r$  und  $s$  und (6.17) ab und erwähnt die direkte Summendarstellung und ihre Eigenschaften nicht.

Wir können trotzdem  $C'$  und seine oben genannten schönen Eigenschaften (6.18) und (6.19) als *Hilfsmittel* beim Beweis verwenden, da wir ja immer, ohne  $r$  und  $s$  zu verändern, ein  $C'$  mit diesen Eigenschaften finden können. Das Ergebnis selber hängt aber nicht mehr von der Wahl von  $C'$  ab.

Sei also  $b \in B$  und schreibe  $b$  im Einklang mit der direkten Summendarstellung c) als

$$b = f(a) + c'$$

mit  $a \in A$  und  $c' \in C' = \text{Ker } r$ .

Weil  $r(c') = 0$  und  $g(f(a)) = 0$ , haben wir

$$\begin{aligned} (f \circ r + s \circ g)(b) &= (f \circ r + s \circ g)(f(a) + c') \\ &= (f \circ r)(f(a)) + (s \circ g)(c') \\ &= (f \circ r \circ f)(a) + (s \circ g)(c') \\ &= (f \circ \text{id}_A)(a) + \text{id}_{C'}(c') \\ &= f(a) + c' = b. \end{aligned}$$

Also ist  $f \circ r + s \circ g = \text{id}_B$ , wenn  $r$  und  $s$  im Sinne von (6.17) zueinander passend gewählt werden. ■

**Lemma 6.27** Sei  $F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver kovarianter oder kontravarianter Funktor und sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (6.21)$$

eine spaltende kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Dann ist die Bildfolge

$$\{0\} \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \{0\} \quad (F \text{ kovariant})$$

bzw.

$$\{0\} \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow \{0\} \quad (F \text{ kontravariant})$$

auch exakt.

Ferner, sie spaltet, und  $F(r)$  und  $F(s)$  sind Spaltungen.

*Beweis.* Weil die kurze exakte Folge (6.21) spaltet, gibt es Homomorphismen  $r$  und  $s$  wie in folgendem Diagramm

$$\{0\} \longrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{r} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{s} \end{array} C \longrightarrow \{0\}, \quad (6.22)$$

so dass

$$r \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad g \circ s = \text{id}_C. \quad (6.23a)$$

Bei einer, nach Lemma 6.26 immer möglichen passenden Wahl von  $r$  und  $s$ , und weil die ursprüngliche Folge (6.21) exakt ist, gilt ferner

$$r \circ s = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathbf{0} \quad (6.23b)$$

und schließlich

$$f \circ r + s \circ g = \text{id}_B. \quad (6.23c)$$

Wir wenden jetzt auf alle Gruppen und Homomorphismen und auf das Diagramm (6.22) den Funktor  $F$  an. Weil  $F$  additiv ist, bleiben dabei alle Relationen (6.23) bis auf die Reihenfolge von Verknüpfungen weiter bestehen, denn jeder Funktor bildet Identitäten in Identitäten ab und respektiert Verknüpfung, und additive Funktoren respektieren Summen von Homomorphismen und bilden Nullabbildungen in Nullabbildungen ab.

Im kovarianten Fall bleibt sogar das Aussehen aller Gleichungen (6.23) und des Diagramms (6.22) bis auf die Ersetzung der Gruppen und Homomorphismen durch ihre Bilder unter  $F$  genau erhalten. Im kontravarianten Fall kehrt sich allerdings die Richtung aller Pfeile um und die Reihenfolge der Faktoren in den Verknüpfungen wird vertauscht.

Um den Beweis der Exaktheit der Bildfolge für beide Varianzfälle einheitlich präsentieren zu können, führen wir neue Namen für die Bildobjekte und Bildmorphismen nach Anwendung des Funktors ein, die zu ihrer Funktion und Position in der Bildfolge passen und nicht unbedingt zu ihrer Bezeichnung vor Anwendung des Funktors.

Diese neuen Namen bestehen aus gestrichelte Versionen der ursprünglichen Namen, und zwar im kovarianten Fall ohne Änderung des ursprünglichen Buchstabens, so dass wir  $A'$  für  $F(A)$ ,  $f'$  für  $F(f)$  schreiben, und entsprechend für die anderen vorkommenden Gruppen und Homomorphismen. Im kontravarianten Fall benutzen wir ein analoges Schema aber vertauschen dabei die *ungestrichelten* Buchstabenpaare  $A$  und  $C$ ,  $f$  und  $g$  sowie  $r$  und  $s$ . In anderen Worten, wir schreiben  $A'$  für  $F(C)$  und  $C'$  für  $F(A)$  (aber weiterhin  $B'$  für  $F(B)$ ), und wir schreiben  $f'$  für  $F(g)$ ,  $g'$  für  $F(f)$ ,  $r'$  für  $F(s)$  und  $s'$  für  $F(r)$ .

In beiden Varianzfällen hat dann das Bilddiagramm die genaue Gestalt (6.22), allerdings mit gestrichelten Buchstaben, und die Gleichungen (6.23) bleiben auch mit gestrichelten Buchstaben gültig. Wir benutzen für diese „gestrichelten“ Gleichungen, die nach Anwendung von  $F$  gelten, die gleichen Nummern wie bisher; sie sind so gruppiert, dass die Nummern auch passend bleiben.



Die Exaktheit der Bildfolge lässt sich jetzt unabhängig von der Varianz beweisen. Sie muss an den drei mittleren Stellen nachgeprüft werden.

An der Stelle  $A'$  ist zu zeigen, dass  $f'$  injektiv ist. Das folgt sofort aus der Gleichung  $r'f' = \text{id}_{A'}$  in (6.23a).

An der Stelle  $C'$  ist zu zeigen, dass  $g'$  surjektiv ist. Das folgt sofort aus der Gleichung  $g's' = \text{id}_{C'}$  in (6.23a).

An der Stelle  $B'$  ist zu zeigen, dass  $\text{Ker } g' = \text{Bild } f'$ .

Die Inklusion  $\text{Ker } g' \supseteq \text{Bild } f'$  folgt sofort aus der Gleichung  $g' \circ f' = 0$  in (6.23b).

Für die andere Inklusion, sei  $b' \in \text{Ker } g' \subseteq B'$ . Wegen (6.23c) ist

$$b' = f'r'(b') + s'g'(b') = f'r'(b') + s'(0) = f'r'(b') + 0 = f'r'(b') \in \text{Bild } f',$$

was zu zeigen war.

Auch in der Bildfolge erfüllen die unteren Pfeile die Gleichungen (6.23a), also  $r'f' = \text{id}_{A'}$  und  $g's' = \text{id}_{C'}$ .

Damit ist gesagt, dass die Bildfolge spaltet, und  $r'$  und  $s'$ , also in geeigneter Reihenfolge  $F(r)$  und  $F(s)$ , sind Spaltungen. ■

Schön wäre es also, ein paar Beispiele von spaltenden kurzen exakten Folgen zu haben. Sie sind leicht zu finden:

**Lemma 6.28** *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

*eine kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.*

*Wenn die Gruppe  $C$  frei abelsch ist, dann spaltet die Folge.*

*Beweis.* Sei  $X \subseteq C$  eine Basis von  $C$ . Da der Homomorphismus  $g$  wegen der Exaktheit der Folge surjektiv ist, finden wir für jedes  $x \in X$  ein Element  $b_x \in B$  mit  $g(b_x) = x$ .

Weil  $X$  eine Basis von  $C$  ist, gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus  $s: C \longrightarrow B$  mit  $s(x) = b_x$  für jedes  $x \in X$ .

Der Homomorphismus  $g \circ s: C \longrightarrow C$  hat die Eigenschaft, dass für jedes  $x \in X$  gilt

$$(g \circ s)(x) = g(s(x)) = g(b_x) = x.$$

Es gibt zwischen gegebenen additiven abelschen Gruppen aber nur einen Homomorphismus mit vorgegebenen Werten auf einer Basis, und da auch  $\text{id}_C$  jedes Basiselement in sich abbildet, ist  $g \circ s = \text{id}_C$ .

Also ist  $s$  eine Spaltung der gegebenen kurzen exakten Folge. ■

Hier sind die Anwendungen für Kettenkomplexe, die wir benötigen:

**Definition 6.29** Ein Kettenkomplex  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  heißt **frei**, wenn die graduierte Kettengruppe  $C$  eine freie abelsche Gruppe ist, oder gleichbedeutend, wenn in jeder Dimension  $n \in \mathbf{Z}$  die  $n$ -te Kettengruppe  $C_n$  frei abelsch ist.

Ein Kettenkomplex  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  heißt **azyklisch**, wenn  $H\mathcal{C} = \{0\}$ .

Das ist offensichtlich äquivalent dazu, dass  $\mathcal{C}$  als Folge der Kettengruppen  $C_n$  und der Randhomomorphismen  $\partial_n$  exakt ist.

Man beachte, dass für einen azyklischen Raum  $X$  im Sinne von Definition 3.32 der singuläre Kettenkomplex  $C_*(X)$  nicht ganz azyklisch ist im Sinne der jetzigen Definition für Kettenkomplexe, denn die 0-te Homologie  $H_0(X)$  verschwindet nicht.

**Lemma 6.30** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver Funktor und sei  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ein freier azyklischer Kettenkomplex. Dann ist auch der Kettenkomplex  $U(\mathcal{C})$  azyklisch.

*Beweis.* Dies folgt aus Bemerkung 3.9 und der Tatsache, dass freie kurze exakte Folgen spalten. Hier sind die Details.

Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  sei  $B_n$  die  $n$ -te Rändergruppe von  $\mathcal{C}$  und sei  $Z_n$  die  $n$ -te Zykelngruppe. Weil  $\mathcal{C}$  azyklisch ist, sind diese Gruppen gleich.

Wie in Bemerkung 3.9 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & & B_n & & B_{n-1} & & B_{n-2} \\
 & & = Z_n & & = Z_{n-1} & & = Z_{n-2} \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\}
 \end{array} \tag{6.24}$$

und in diesem Diagramm sind alle kurzen Folgen

$$\begin{array}{ccc}
 & \bullet & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 \bullet & & \bullet \\
 \nearrow & & \searrow \\
 \{0\} & & \{0\}
 \end{array}$$

exakt.

Weil die Gruppen  $B_k = Z_k$  als Untergruppen der freien abelschen Gruppen  $C_k$  auch frei sind, spalten diese kurzen Folgen und sie bleiben somit exakt, wenn wir auf das Diagramm den additiven Funktor  $U$  anwenden.

Wir erhalten dadurch wieder ein kommutatives Diagramm der Gestalt (6.24), wo in der waagerechten Folge der Kettenkomplex  $U(\mathcal{C})$  steht, und wo die schräg ansteigenden und dann schräg abfallenden kurzen Folgen alle exakt sind.

Obwohl die Pfeile ihre Richtung umkehren, wenn  $U$  kontravariant ist, gelten diese Eigenschaften auch im kontravarianten Fall; das Diagramm erhält nur die spiegelbildliche Gestalt und alle Pfeile zeigen nach links, aber wir haben immer noch ein kommutatives Diagramm mit schräg ansteigenden und dann schräg abfallenden kurzen exakten Folgen.

Insbesondere sind im Bilddiagramm nach der Anwendung von  $U$  alle abfallenden Pfeile surjektiv und alle ansteigenden Pfeile sind injektiv, und die waagerechten Pfeile sind die Verknüpfung eines abfallenden Pfeils gefolgt durch einen ansteigenden Pfeil.

Das Bild einer solchen Verknüpfung ist das Bild des ansteigenden Pfeils (weil der abfallende Pfeil surjektiv ist). Der Kern einer solchen Verknüpfung ist der Kern des abfallenden Pfeils (weil der ansteigende Pfeil injektiv ist).

Also ist das Bild eines der waagerechten Pfeile gleich dem Bild des direkt darunter liegenden ansteigenden Pfeils mit der gleichen Zielgruppe. Der Kern des daran anschließenden waagerechten Pfeils ist gleich dem Kern des direkt darunter liegenden abfallenden Pfeils mit der gleichen Quellgruppe. Aber weil die schräg verlaufende kurze Folge an dieser Stelle exakt ist, ist die hier erwähnte Bildgruppe gleich der hier erwähnten Kerngruppe, d. h., die waagerechte Folge ist an jeder Stelle exakt und somit als Kettenkomplex azyklisch. ■

Jetzt können wir die neuen Homologievarianten konstruieren.

**Definition 6.31** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaar, und sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Wir definieren den *singulären Kettenkomplex des Raumpaares  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $G$*  durch

$$C_*(X, A; G) := C_*(X, A) \otimes G. \quad (6.25)$$

In Bemerkung und Definition 6.24 haben wir gerade gesehen, dass dies tatsächlich ein Kettenkomplex ist, mit Randoperator

$$\partial_G := \partial \otimes \text{id}_G = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \partial_n \otimes \text{id}_G. \quad (6.26)$$

Die Homologie dieses Kettenkomplexes wird mit  $H_*(X, A; G)$  bezeichnet und heißt die *singuläre Homologie des Raumpaares  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $G$* .

Eine ähnliche Notation benutzen wir für andere Gruppen, die in der Konstruktion der Homologie vorkommen. So bezeichnet  $Z_*(X, A; G)$  die Zykelngruppe des Kettenkomplexes  $C_*(X, A; G)$  und  $B_*(X, A; G)$  bezeichnet die Rändergruppe dieses Kettenkomplexes.

Wie üblich, wenn  $A = \emptyset$  schreiben wir  $C_*(X; G)$  statt  $C_*(X, \emptyset; G)$ , und wir nennen dies den **singulären Kettenkomplex des Raumes  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** . Entsprechend schreiben wir  $H_*(X; G)$  statt  $H_*(X, \emptyset; G)$ , und wir nennen dies die **singuläre Homologie des Raumes  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** . Und wir schreiben natürlich  $Z_*(X; G)$  statt  $Z_*(X, \emptyset; G)$  und  $B_*(X; G)$  statt  $B_*(X, \emptyset; G)$ .

**Bemerkung 6.32** Singuläre Homologie „mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}$ “ ist die klassische singuläre Homologie über  $\mathbf{Z}$ , denn aus Lemma B.12 b) folgt, dass  $(C_*(X, A; \mathbf{Z}), \partial_{\mathbf{Z}})$  natürlich isomorph ist zum bisherigen singulären Kettenkomplex  $(C_*(X, A), \partial)$ .

Welche Grundeigenschaften hat diese neue Art von Homologie? Wir hoffen zumindest, dass sie eine richtige Homologietheorie ist im Sinne von Definition 3.56, d. h., dass sie die Eilenberg-Steenrod Axiome erfüllt, und zum Glück ist es tatsächlich so. Das lässt sich auch mit relativ wenig Aufwand beweisen, denn es folgt aus allgemeinen funktoriellen Eigenschaften.

**Satz 6.33** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver Funktor.

Für jedes topologische Raumpaars  $(X, A)$  wenden wir  $U$  auf den singulären Kettenkomplex von  $(X, A)$  an und erhalten nach Bemerkung und Definition 6.24 einen neuen Kettenkomplex

$$(C_*^U(X, A), \partial^U) := (U(C_*(X, A)), U(\partial))$$

(wobei wir die Graduierung negieren, also  $C_n^U(X, A)$  als  $U(C_{-n}(X, A))$  definieren, wenn  $U$  kontravariant ist).

Die Homologie dieses Kettenkomplexes bezeichnen wir mit  $H_*^U(X, A)$ .

Der Funktor

$$H_*^U: \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{GAG}$$

ist eine Homologietheorie mit Koeffizienten in  $U(\mathbf{Z})$ , d. h., er erfüllt die Axiome von Eilenberg und Steenrod (mit umgekehrten Pfeilrichtungen im kontravarianten Fall) und für einen Einpunktraum  $P$  gilt

$$H_0^U(P) \cong U(\mathbf{Z})$$

(und  $H_n^U(P) = \{0\}$  für alle  $n \neq 0$ ).

Für das Ausschneidungsaxiom gilt auch für  $H_*^U$  die leicht verstärkte Version, die für die singuläre Homologie (mit  $\mathbf{Z}$ -Koeffizienten) gilt. Genauer, jedes Raumtripel  $(X, A, B)$ , das für die singuläre Homologie ein Ausschneidungstriple ist, ist auch für  $H_*^U$  ein Ausschneidungstriple.

Entsprechend sind singuläre Mayer-Vietoris Triaden auch für  $H_*^U$  Mayer-Vietoris Triaden und in  $H_*^U$  gilt der Satz von Mayer-Vietoris für jede singuläre Mayer-Vietoris Triade  $(X; A, B)$ .

Im kontravarianten Fall sind allerdings die Pfeile umgekehrt in Vergleich zum ursprünglichen Mayer-Vietoris Dreieck (3.58), und das Mayer-Vietoris Dreieck erhält die Form

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^U(A \cap B) & \xleftarrow{H^U(i') \circ \pi_1 + H^U(i'') \circ \pi_2} & H_*^U(A) \oplus H_*^U(B) \\
 & \searrow \beta & \nearrow (H^U(j'), -H^U(j'')) \\
 & H_*^U(X) &
 \end{array} \quad (6.27)$$

wo  $i': A \cap B \rightarrow A$ ,  $i'': A \cap B \rightarrow B$ ,  $j': A \rightarrow X$ , und  $j'': B \rightarrow X$  die Inklusionen sind und die  $\pi_i$  die Projektionen von  $H_*^U(A) \oplus H_*^U(B)$  auf den  $i$ -ten Summanden sind.

**Beweis. Homotopieaxiom:** Seien  $f$  und  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope stetige Abbildungen von Raumpaaren. Nach Satz 3.29 gibt es eine Kettenhomotopie  $\Phi$  von  $f_\#$  nach  $g_\#$ , und nach Bemerkung 6.25 ist dann  $U(\Phi)$  eine Kettenhomotopie von  $U(f_\#)$  nach  $U(g_\#)$ . Also ist

$$H_*^U(f) = H(U(f_\#)) = H(U(g_\#)) = H_*^U(g).$$

**Exaktheitsaxiom:** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaar. Seien  $i: A \rightarrow X$  und  $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen.

Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  spaltet die natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_\#} C_n(X) \xrightarrow{j_\#} C_n(X, A) \rightarrow \{0\},$$

weil  $C_n(X, A)$  frei ist (die relative Kettengruppe ist isomorph zur freien abelschen Gruppe, die von den  $n$ -Simplizes in  $X$ , die nicht ganz in  $A$  liegen, erzeugt wird). Deshalb bleibt für jedes  $n$  diese Folge exakt, wenn wir  $U$  darauf anwenden, und wir erhalten insgesamt wieder eine natürliche kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen

$$\{0\} \longleftrightarrow C_*^U(A) \xleftarrow{U(i_\#)} C_*^U(X) \xleftarrow{U(j_\#)} C_*^U(X, A) \longleftrightarrow \{0\}$$

(Pfeilrichtung entsprechend der Varianz von  $U$ ).

Diese Folge hat ein natürliches exaktes Homologiedreieck

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^U(A) & \xleftarrow{H_*^U(i)} & H_*^U(X) \\
 & \searrow \text{Grad } -1 & \nearrow H_*^U(j) \\
 & H_*^U(X, A) &
 \end{array}$$

$\beta^U$

Der verbindende Homomorphismus  $\beta^U$  in diesem Diagramm ist eine natürliche Transformation und ist für die Homologietheorie  $H_*^U$  die in Definition 3.56 geforderte Grad -1 natürliche Transformation  $\beta$  zwischen  $H_*^U(X, A)$  und  $H_*^U(A, \emptyset)$ .

**Ausschneidungsaxiom:** Sei  $(X; A, B)$  eine Mayer-Vietoris Triade für die singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}$ . Das bedeutet, dass die Inklusion

$$j: C_*(\{A, B\}) \longrightarrow C_*(X)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert. Sei

$$C_*(X; A, B) := \frac{C_*(X)}{C_*(\{A, B\})}.$$

Der Zähler dieses Quotienten ist die von der Menge  $S(X)$  aller singulären Simplizes in  $X$  erzeugte freie abelsche Gruppe, und der Nenner wird frei erzeugt von einer Teilmenge dieser Erzeugendenmenge, nämlich von den Simplizes, die ganz in  $A$  oder ganz in  $B$  liegen. Deshalb ist der Quotient auch frei abelsch und er ist isomorph zur freien abelschen Gruppe erzeugt von den singulären Simplizes, die weder in  $A$  noch in  $B$  enthalten sind.

Wichtig für uns ist nur die Feststellung, dass  $C_*(X; A, B)$  frei ist, denn daraus folgt, dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  die kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_n(\{A, B\}) \xrightarrow{j} C_n(X) \xrightarrow{\pi} C_n(X; A, B) \longrightarrow \{0\} \quad (6.28)$$

spaltet.

Folglich bleibt diese Folge für jedes  $n$  exakt, wenn wir darauf  $U$  anwenden, und die resultierende kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen hat ein natürliches exaktes Homologiedreieck

$$\begin{array}{ccc}
 HUC_*(\{A, B\}) & \xleftarrow{HU(j)} & H_*^U(X) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & HUC_*(X; A, B) &
 \end{array} \quad (6.29)$$

Weil  $j$  einen Isomorphismus in Homologie induziert, folgt aus dem exakten Homologiedreieck der kurzen exakten Folge (6.28) (vor Anwendung von  $U$ !), dass der Kettenkomplex  $C_*(X; A, B)$  azyklisch ist, und wir wissen schon, dass er frei ist. Nach Lemma 6.30 ist auch  $U(C_*(X; A, B))$  azyklisch.

Deshalb ist in (6.29) die Ecke  $HUC_*(X; A, B) = \{0\}$  und der Homomorphismus  $HU(j)$  ist somit ein Isomorphismus. In anderen Worten,  $(X; A, B)$  ist auch für  $H_*^U$  eine Mayer-Vietoris Triade im Sinne von Definition 3.49.

Sei

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\iota} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\kappa} C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \quad (6.30)$$

die natürliche exakte Kettenkomplexfolge der Triade  $(X; A, B)$ , konstruiert in Definition 3.46. Auch diese Folge spaltet, weil  $C_*(\{A, B\})$  frei ist, und sie bleibt deshalb exakt, wenn man  $U$  anwendet.

Weil  $U$  additiv ist, ist die mittlere Gruppe der Bildfolge isomorph zu  $U(C_*(A)) \oplus U(C_*(B))$ ; Lemma 6.7 nennt explizit einen Isomorphismus  $\Phi$  und ihre Umkehrung  $\Psi$ .

Die Abbildung  $\iota$  in (6.30) ist die Summe der von den Inklusionen von  $A \cap B$  nach  $A$  und  $B$  induzierten Kettenabbildungen, verknüpft mit den Inklusionen der Summanden in die direkte Summe, und anhand der Gestalt von  $\Phi$  und unter Verwendung der Additivität von  $U$  überzeugt man sich leicht, dass im kovarianten Fall die gleiche Beschreibung für den Homomorphismus  $U(\iota)$  in der Bildfolge von (6.30) unter  $U$  gilt. Im kontravarianten Fall sind allerdings die Pfeile umgekehrt und  $U(\iota)$  ist die Summe der von den Inklusionen induzierten *Projektionen* der Summanden  $U(C_*(A))$  und  $U(C_*(B))$  nach  $U(C_*(A \cap B))$ , verknüpft mit den vorher auszuführenden Projektionen der direkten Summe  $U(C_*(A)) \oplus U(C_*(B))$  auf diese Summanden, wie man wieder anhand der Gestalt von  $\Psi$  leicht nachprüfen kann.

Die Abbildung  $\kappa$  in (6.30) ist die Differenz der Inklusionen der Summanden  $C_*(A)$  und  $C_*(B)$  nach  $C_*(\{A, B\})$ , verknüpft mit den vorher auszuführenden Projektionen der direkten Summe auf die Summanden. Wieder sieht man im kovarianten Fall leicht, dass die gleiche Beschreibung für den Homomorphismus  $U(\kappa)$  in der Bildfolge gilt. Im kontravarianten Fall sind die Pfeile umgekehrt und  $U(\kappa)$  ist die Differenz der von den Inklusionen induzierten Projektionen von  $U(C_*(\{A, B\}))$  nach  $U(C_*(A))$  und  $U(C_*(B))$ , verknüpft mit den Inklusionen dieser Summanden in die direkte Summe  $U(C_*(A)) \oplus U(C_*(B))$ .

Genau wie im Beweis des Mayer-Vietoris Satzes 3.51 erhält man das exakte Mayer-Vietoris Dreieck der Mayer-Vietoris Triade  $(X; A, B)$  in der Homologietheorie  $H_*^U$  aus der langen exakten Homologiefolge der exakten Bildfolge

von (6.30) unter  $U$ , indem man die Gruppe  $HUC_*(\{A, B\})$  durch  $H_*^U(X)$  mit Hilfe des Isomorphismus  $HU(j)$  ersetzt.

Aus der obigen Beschreibung der Abbildungen in der Bildfolge von (6.30) unter  $U$  im kontravarianten Fall ist auch klar, dass das kontravariante Mayer-Vietoris Dreieck die Gestalt (6.27) erhält.

Schließlich ist jedes singuläre Ausschneidungstripel auch in  $H_*^U$  ein Ausschneidungstripel, denn Lemma 3.54 gilt auch für  $H_*^U$ , mit dem gleichen Beweis. Die einzige neue oder zusätzliche Überlegung, die zum Beweis dieses Lemmas für  $H_*^U$  erforderlich ist, ist die Feststellung, dass nach Anwendung von  $U$  die Zeilen des kommutativen Diagramms (3.61) exakt bleiben, so dass das Bilddiagramm immer noch einen Morphismus von kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen darstellt. Die Zeilen bleiben exakt, weil alle Kettengruppen in diesem Diagramm frei sind und die Zeilen deshalb spalten. Der Rest des Beweises von Lemma 3.54 beruht auf der Anwendung des 5-er Lemmas auf die langen exakten Homologiefolgen der kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen im Diagramm und bleibt unverändert gültig nach der Anwendung von  $U$ , auch wenn im kontravarianten Fall die Pfeile umgekehrt werden.

Wenn nun  $(X, A, B)$  ein singuläres Ausschneidungstripel ist, dann folgt aus der ursprünglichen Version von Lemma 3.54, dass  $(X; A, X \setminus B)$  für die singuläre Homologie eine Mayer-Vietoris Triade ist. Wir haben schon gesehen, dass sie dann auch für  $H_*^U$  eine Mayer-Vietoris Triade ist, und aus Lemma 3.54 für  $H_*^U$  folgt, dass  $(X, A, B)$  für  $H_*^U$  ein Ausschneidungstripel ist.

**Dimensionsaxiom:** Sei  $P = \{p\}$  ein Einpunktraum. Wie wir im Beweis von Satz 3.31 gesehen haben, ist  $C_n(P) = \mathbf{Z}$  für jedes  $n \geq 0$  (und ist  $\{0\}$  für  $n < 0$ ) und  $\partial_n$  ist die Nullabbildung  $\mathbf{0}$  für  $n$  ungerade oder  $n \leq 0$ , und ein Isomorphismus  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  für  $n$  gerade  $> 0$ .

Mit dem Minuszeichen im kontravarianten Fall haben wir

$$C_n^U(P) = U(C_{\pm n}(P)) = U(\mathbf{Z})$$

für jedes  $n \geq 0$  (jedes  $n \leq 0$  im kontravarianten Fall) und  $C_n^U(P) = \{0\}$  sonst, da  $U$  additiv ist. Die oben genannten Eigenschaften von  $\partial_n$  bleiben bei Anwendung eines additiven Funktors erhalten (aber der Index ändert sich im kontravarianten Fall:  $U(\partial_n) = \partial_{1-n}^U$ ).

Also ist im kovarianten Fall  $\partial_n^U = U(\partial_n)$  die Nullabbildung  $\mathbf{0}$  für  $n$  ungerade oder  $n \leq 0$  und ein Isomorphismus  $U(\mathbf{Z}) \rightarrow U(\mathbf{Z})$  für  $n$  gerade  $> 0$ . Das bedeutet, dass in jeder positiven Dimension entweder  $Z_n^U(P) = \{0\}$  oder  $B_n^U(P) = C_n^U(P)$  ist; in beiden Fällen ist  $H_n^U(P) = \{0\}$ . Natürlich gilt das auch in den negativen Dimensionen. Nur in Dimension 0 haben wir  $Z_0^U(P) = C_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$  und  $B_0^U(P) = \{0\}$ , und somit ist  $H_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$ .



Im kontravarianten Fall ist  $\partial_n^U = U(\partial_{1-n})$  die Nullabbildung  $\mathbf{0}$  für  $n$  gerade oder  $n > 0$  und ein Isomorphismus  $U(\mathbf{Z}) \rightarrow U(\mathbf{Z})$  für  $n$  ungerade  $\leq 0$ . Das bedeutet, dass in jeder negativen Dimension entweder  $Z_n^U(P) = \{0\}$  oder  $B_n^U(P) = C_n^U(P)$  ist; in beiden Fällen ist  $H_n^U(P) = \{0\}$ , und natürlich gilt das auch in den positiven Dimensionen. Nur in Dimension 0 haben wir  $Z_0^U(P) = C_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$  und  $B_0^U(P) = \{0\}$ , und somit ist auch im kontravarianten Fall  $H_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$ . ■

**Korollar 6.34** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe.

Der Funktor  $H_*(\quad; G)$ , die singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $G$ , ist eine „Homologietheorie mit Koeffizienten in  $G$ “ im Sinne der Eilenberg-Steenrod Axiome, d. h., sie erfüllt die Axiome aus Definition 3.56, wobei für einen Einpunktraum  $P$  gilt

$$H_0(P; G) \cong G$$

(und  $H_n(P; G) = \{0\}$  für alle  $n \neq 0$ ).

Es gelten die gleichen Verstärkungen der Eilenberg-Steenrod Axiome, die auch für die singuläre Homologie mit  $\mathbf{Z}$ -Koeffizienten gelten, nämlich: Jedes Ausschneidungstripel  $(X, A, B)$  für die singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}$  ist auch ein Ausschneidungstripel für die singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $G$ , und jede singuläre Mayer-Vietoris Triade  $(X; A, B)$  erfüllt die Mayer-Vietoris Eigenschaft aus Definition 3.49 auch mit Koeffizienten in  $G$  und besitzt ein exaktes Mayer-Vietoris Dreieck auch für die Homologie mit Koeffizienten in  $G$ .

*Beweis.*  $\cdot \otimes G$  ist ein additiver kovarianter Funktor  $\mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$ . Das Korollar folgt sofort aus Satz 6.33. Die Koeffizientengruppe im Sinne des Dimensionsaxioms ist  $G$ , weil  $\mathbf{Z} \otimes G \cong G$ . ■

Wir wollen jetzt *noch* eine neue, diesmal kontravariante Homologietheorie einführen, die viele schöne Eigenschaften hat, auf Grund derer sie in der algebraischen Topologie sogar wichtiger ist als die Homologie. Zu diesen schönen Eigenschaften gehört, dass sie anders als die Homologietheorie sogar eine *Ringstruktur* trägt, die ihre Anwendungen wesentlich verstärkt. Es handelt sich um die singuläre **Kohomologie** (mit beliebigen Koeffizienten), und obwohl wir leider in diesem Semester keine Zeit haben werden, um viel auf die Eigenschaften und Vorteile der Kohomologie einzugehen, wollen wir wenigstens die Definition kurz angeben.

Wenn man verstärkt mit kontravarianten Homologietheorien arbeitet, ist es sinnvoll, eine auf sie angepasste Notation und neue Bezeichnungen einzuführen, um den bisher erforderlichen lästigen und umständlichen Umgang

mit ausschließlich nichtpositiven Dimensionen zu umgehen. Die Negierung der Dimensionen war wegen der kontravarianten Pfeilumkehrung nötig, damit in kontravarianten Homologien alle Abbildungen den gleichen Grad haben, wie im kovarianten Fall. Nehmen wir es stattdessen hin, dass der *Grad* der gradändernden Abbildungen  $+1$  statt  $-1$  ist, ist die sonstige Negierung von Dimensionen nicht mehr erforderlich und alles sieht viel glatter und gewohnter aus.

Alle bisherigen Begriffe und Sätze über Kettenkomplexe und ihre Homologie lassen sich sehr leicht in die neue Notation übertragen und finden ihre Entsprechungen in den Definitionen und Aussagen, die nun folgen. Man beachte die Notationskonvention, dass in der „Ko“-Theorie alle Dimensionen als Exponenten, also oben, geschrieben werden, und nicht als Indizes unten.

**Definition 6.35** Ein **Kokettenkomplex**  $\mathcal{C} = (C, \delta)$  ist ein Paar bestehend aus einer graduierten abelschen Gruppe  $C$  zusammen mit einem graduierten Homomorphismus

$$\delta: C \longrightarrow C$$

von Grad  $+1$ , so dass

$$\delta \circ \delta = 0. \quad (6.31)$$

Der Homomorphismus  $\delta$  heißt der **Korandoperator** des Kokettenkomplexes  $\mathcal{C}$ .

Um schon in der Notation Kokettenkomplexe von Kettenkomplexen zu unterscheiden, schreiben wir  $C^n$  (und nicht  $C_n$ ) für den  $n$ -ten homogenen Anteil der graduierten abelschen Gruppe  $C$  und notieren entsprechend den  $n$ -ten homogenen Anteil des Korandoperators mit

$$\delta^n: C^n \longrightarrow C^{n+1}.$$

Seien  $\mathcal{C} = (C, \delta)$  und  $\mathcal{D} = (D, \delta')$  zwei Kokettenkomplexe. Eine **Kokettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist ein Grad 0 Homomorphismus  $f: C \longrightarrow D$ , so dass

$$f \circ \delta = \delta' \circ f. \quad (6.32)$$

Entsprechend der Notationskonvention wird der  $n$ -te homogene Anteil einer Kokettenabbildung mit  $f^n$  bezeichnet, nicht mit  $f_n$ .

Offensichtlich ist die Identität eines Kokettenkomplexes eine Kokettenabbildung und die Verknüpfung von zwei Kokettenabbildungen ist wieder eine

Kokettenabbildung, so dass die Kokettenkomplexe und die Kokettenabbildungen die Objekte und Morphismen einer Kategorie bilden, der **Kategorie KoKK der Kokettenkomplexe und Kokettenabbildungen**.

Ist  $\mathcal{C} = (C, \delta)$  ein Kokettenkomplex, so nennen wir

$$Z(\mathcal{C}) := \text{Ker } \delta$$

die **graduierete Kozykelgruppe** von  $\mathcal{C}$  (und für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  nennen wir  $Z^n(\mathcal{C}) := \text{Ker } \delta^n$  die  **$n$ -te Kozykelgruppe** von  $\mathcal{C}$ ). Ein Element der Kozykelgruppe wird ein **Kozykel** genannt.

Entsprechend nennen wir

$$B(\mathcal{C}) := \text{Bild } \delta$$

die **graduierete Korändergruppe** von  $\mathcal{C}$  (und für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  nennen wir  $B^n(\mathcal{C}) := \text{Bild } \delta^{n-1}$  die  **$n$ -te Korändergruppe** von  $\mathcal{C}$ ). Ein Element der Korändergruppe wird ein **Korand** genannt.

Weil  $\delta \circ \delta = \mathbf{0}$  haben wir

$$B(\mathcal{C}) \subseteq Z(\mathcal{C}) \subseteq C.$$

Den Quotienten

$$H(\mathcal{C}) := \frac{Z(\mathcal{C})}{B(\mathcal{C})} \quad (6.33)$$

nennen wir die **graduierete Kohomologiegruppe** des Kokettenkomplexes  $\mathcal{C}$ , und entsprechend heißt ihr  $n$ -ter homogener Anteil die  **$n$ -te Kohomologiegruppe**

$$H^n(\mathcal{C}) := \frac{Z^n(\mathcal{C})}{B^n(\mathcal{C})}$$

des Kokettenkomplexes  $\mathcal{C}$ . Ist  $\gamma \in Z(\mathcal{C})$  ein Kozykel, so nennen wir ihre Restklasse in  $H(\mathcal{C}) := Z(\mathcal{C})/B(\mathcal{C})$  ihre **Kohomologieklass**e und wir bezeichnen sie wie üblich mit  $[\gamma]$ .

Weil Kokettenabbildungen mit dem Korandoperator kommutieren, bilden sie Kozykeln wieder in Kozykeln ab und Koränder in Koränder. Daraus folgt, dass jede Kokettenabbildung

$$f: \mathcal{C} = (C, \delta) \longrightarrow \mathcal{D} = (D, \delta')$$

einen wohldefinierten Kohomologiemorphismus

$$f^* := H(f): H(\mathcal{C}) \longrightarrow H(\mathcal{D})$$

induziert mit  $f^*([\gamma]) := [f(\gamma)]$  für jeden Kozykel  $\gamma$ . Mit dieser Zuordnung für Morphismen wird die Kohomologie zu einem *kovarianten*<sup>2</sup> Funktor  $\mathbf{KoKK} \longrightarrow \mathbf{GAG}$ .

**Bemerkung 6.36** a) Natürlich sind in Definition 6.35 nicht wirklich neue Begriffe eingeführt worden, sondern nur eine neue Notation für Altbekanntes. Wenn wir  $\square$  als Platzhalter für ein beliebiges Bezeichnungssymbol für Gruppen, Homomorphismen usw. schreiben, so wandelt die Notationsübersetzung  $\square^n \longleftrightarrow \square_{-n}$  (für beliebiges  $n \in \mathbf{Z}$ ) die gesamte Kokettenkomplex- und Kohomologietheorie wörtlich genau in die bekannte Kettenkomplex- und Homologietheorie um und umgekehrt. Somit braucht man auch die hier erwähnten Grundeigenschaften der Kokettenkomplextheorie nicht extra zu überlegen—sie sind einfach Übersetzungen der bekannten Eigenschaften der Kettenkomplextheorie.

Insbesondere ist die gesamte Definition 6.35 im Grunde nichts anderes als eine Neufassung von Definition 2.31 in anderer Notation.

- b) Um die Notation einfach zu halten, schreiben wir für die Kozykelgruppen und die Korändergruppen  $Z(\mathcal{C})$  und  $B(\mathcal{C})$  wie in der Homologietheorie, und den Kohomologiefunktor bezeichnen wir auch mit einem einfachen  $H$ ; der Unterschied ist in der Notation nur sichtbar, wenn es um einzelne homogene Anteile geht, deren Dimension in der Kohomologietheorie dann oben geschrieben wird. Das ist in Anbetracht von Teil a) auch nicht weiter schlimm, denn es handelt sich ja tatsächlich um die Zykelgruppen, Rändergruppen und Homologie des zugehörigen, umgekehrt graduierten Kettenkomplexes. Und bei jeder Anwendung ist ohnehin klar aus dem Grad des (Ko-)Randoperators, ob Homologie oder Kohomologie gemeint ist.

Wen es stört, dass die Notation für die graduierten Gruppen und Abbildungen keinen Hinweis darauf gibt, dass es sich um Kohomologie und nicht um Homologie handelt, der kann sich mit einem hochgesetzten Punkt behelfen, indem er etwa  $Z^*(\mathcal{C})$  statt  $Z(\mathcal{C})$ ,  $B^*(\mathcal{C})$  statt  $B(\mathcal{C})$  und  $H^*$  statt  $H$  schreibt.

- c) Wie wir es für Kettenkomplexe gewohnt sind, kann man auch Kokettenkomplexe als Diagramme der Gestalt Folge auffassen. Die Knoten

---

<sup>2</sup>Nach all dem Gerede von Kontravarianz erwarten Sie hier vielleicht einen kontravarianten Funktor, aber dieser Teil der Konstruktion ist wirklich kovariant. Die Zuordnung der singulären Kokettenkomplexe zu topologischen Raumpaaren, die gleich erklärt wird, ist dafür kontravariant und somit ist die Kohomologie insgesamt tatsächlich ein kontravarianter Funktor  $\mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{GAG}$ .

der Folge sind die Kokettengruppen in den einzelnen Dimensionen, die Kanten sind die homogenen Anteile des Korandoperators und der einzige Unterschied zu einem Kettenkomplexdiagramm besteht darin, dass die Pfeile in Richtung aufsteigender Dimension und nicht in Richtung absteigender Dimension zeigen.

Im Folgenden übertragen wir ohne Beweis und ohne viel Erläuterung andere bekannte und wichtige Definitionen und Sätze aus der Homologietheorie von Kettenkomplexen in die neue Sprache und Situation von Kokettenkomplexen.

**Satz 6.37** Sei

$$\{0\} \longrightarrow (C, \delta) \xrightarrow{f} (D, \delta') \xrightarrow{g} (E, \delta'') \longrightarrow \{0\} \quad (6.34)$$

eine kurze exakte Folge von Kokettenkomplexen und Kokettenabbildungen.

Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H(C) & \xrightarrow{f^*} & H(D) \\ & \swarrow \text{Grad } +1 & \searrow g^* \\ & H(E) & \end{array} \quad (6.35)$$

$\beta$

zwischen den graduerten Kohomologiegruppen der drei Kokettenkomplexe, mit den von den Kokettenabbildungen induzierten Grad 0 Homomorphismen  $f^* = H(f)$  und  $g^* = H(g)$  und mit einem Grad +1 Homomorphismus  $\beta: H(E) \longrightarrow H(C)$ , den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Kohomologiedreiecks nennen wollen, und der (unter Verwendung des Korandoperators statt des Randoperators) auf die gleiche Weise erklärt ist, wie der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen.

*Beweis.* Dies ist die „Kohomologie-Übersetzung“ von Satz 3.14. ■

**Definition 6.38** Seien  $\mathcal{C} = (C, \delta)$  und  $\mathcal{D} = (D, \delta')$  Kokettenkomplexe und seien  $f$  und  $g: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  zwei Kokettenabbildungen.

Eine **Kokettenhomotopie** von  $f$  nach  $g$  ist ein Grad  $-1$  Homomorphismus  $\Psi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ , so dass

$$g - f = \delta' \circ \Psi + \Psi \circ \delta. \quad (6.36)$$

In diesem Fall sagen wir,  $f$  und  $g$  sind **kokettenhomotop** vermöge  $\Psi$  und wir schreiben  $f \simeq_{\Psi} g$  (die gleiche Notation, wie für eine Kettenhomotopie).

Diese Definition ist einfach die Kokettenübersetzung der Definition von **Kettenhomotopie** (Definition 3.18).

**Lemma 6.39** Seien  $\mathcal{C} = (C, \delta)$  und  $\mathcal{D} = (D, \delta')$  Kokettenkomplexe und seien  $f$  und  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Kokettenabbildungen.

- a) Wenn  $f \simeq g$ , dann induzieren  $f$  und  $g$  den gleichen Homomorphismus der Kohomologiegruppen, d. h.,  $f^* = g^*: H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{D})$ .
- b) Kokettenhomotopie  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kokettenabbildungen  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .
- c) Sei  $\mathcal{E} = (E, \delta'')$  ein dritter Kokettenkomplex und seien  $h$  und  $k$  Kokettenabbildungen  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ . Wenn  $f \simeq g$  und  $h \simeq k$ , dann ist  $h \circ f \simeq k \circ g$ .

*Beweis.* Dies ist die „Kokettenübersetzung“ von Lemma 3.19. ■

**Definition 6.40** Seien  $\mathcal{C} = (C, \delta)$  und  $\mathcal{D} = (D, \delta')$  Kokettenkomplexe.

Eine Kokettenabbildung  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt eine **Kokettenhomotopieäquivalenz**, wenn es eine Kokettenabbildung  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt (genannt eine **Kokettenhomotopieinverse** zu  $f$ ), so dass

$$g \circ f \simeq \text{id}_{\mathcal{C}} \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Wenn es eine Kokettenhomotopieäquivalenz  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  gibt, sagen wir, dass  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  **kokettenhomotopieäquivalent** oder **vom gleichen Kokettenhomotopietyp** sind und wir schreiben  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$  (wie für Kettenhomotopieäquivalenz).

Definition 6.40 ist nur die Kokettenübersetzung von Definition 3.20.

In ihrer Struktur ist die Theorie der Kokettenkomplexe, wie wir gesehen haben, nichts anderes als eine Theorie von Kettenkomplexen mit Randoperatoren von Grad +1. Es würde sich also kaum lohnen, diesen Begriff einzuführen, gäbe es nicht natürliche und nützliche Beispiele von Kokettenkomplexen mit ihrer Kohomologie.

So wie die Anwendung des Funktors  $\otimes G$  auf den singulären Kettenkomplex zur singulären Homologietheorie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe  $G$  führt, erhalten wir durch die Anwendung des *kontravarianten* additiven Funktors  $\text{Hom}(\cdot, G)$  eine andere schöne, diesmal kontravariante Verallgemeinerung der klassischen singulären Homologie, die **singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in  $G$** , und in ihrer Konstruktion treten wegen der Kontravarianz als Zwischenstufe nicht Kettenkomplexe auf, sondern Kokettenkomplexe.

**Definition 6.41** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard und sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  definieren wir die  ***$n$ -dimensionale singuläre Kokettengruppe auf  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $G$***  als

$$C^n(X, A; G) = \text{Hom}(C_n(X, A), G) \quad (6.37)$$

und wir definieren den  ***$n$ -ten singulären Korandoperator***

$$\delta^n: C^n(X, A; G) \longrightarrow C^{n+1}(X, A; G)$$

als

$$\delta^n := \text{Hom}(\partial_{n+1}, G), \quad (6.38)$$

was bedeutet: für jede Kokette  $\gamma \in C^n(X, A; G) = \text{Hom}(C_n(X, A), G)$  ist  $\delta^n(\gamma) = \gamma \circ \partial_{n+1} \in \text{Hom}(C_{n+1}(X, A), G) = C^{n+1}(X, A; G)$ .

Wir definieren den ***singulären Kokettenkomplex***

$$\mathcal{C}(X, A; G) := (C^*(X, A; G), \delta)$$

*des Raumpaares  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $G$*  durch

$$C^*(X, A; G) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C^n(X, A; G) \quad (6.39)$$

und

$$\delta := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta^n. \quad (6.40)$$

In anderen Worten,

$$\mathcal{C}(X, A; G) := \text{Hom}(\mathcal{C}(X, A), G)$$

unter Berücksichtigung der Konvention 6.23 über die Anwendung von additiven Funktoren auf graduierte abelsche Gruppen.

In Bemerkung und Definition 6.24 hatten wir gesehen, dass  $\mathcal{C}(X, A; G)$  ein Kettenkomplex ist, wenn wir die Graduierung negieren; wenn wir die Graduierung *nicht* negieren und so belassen wie in (6.37)–(6.40), erhalten wir also einen Kokettenkomplex  $\mathcal{C}(X, A; G)$ .

Die Kohomologiegruppe dieses Kokettenkomplexes wird mit  $H^*(X, A; G)$  bezeichnet und heißt die ***graduierte singuläre Kohomologiegruppe des Raumpaares  $(X, A)$  mit Koeffizienten in  $G$*** .

Eine ähnliche Notation benutzen wir für die anderen Gruppen, die in der Konstruktion der Kohomologie vorkommen. So bezeichnet  $Z^*(X, A; G)$

die Kozykelgruppe des Kokettenkomplexes  $C^*(X, A; G)$  und  $B^*(X, A; G)$  bezeichnet die Korändergruppe.

Wie üblich, wenn  $A = \emptyset$  schreiben wir  $C^*(X; G)$  statt  $C^*(X, \emptyset; G)$ , und wir nennen dies den **singulären Kokettenkomplex des Raumes  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** .

Entsprechend schreiben wir  $H^*(X; G)$  statt  $H^*(X, \emptyset; G)$ , und wir nennen dies die **singuläre Kohomologie des Raumes  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** . Und wir schreiben natürlich  $Z^*(X; G)$  statt  $Z^*(X, \emptyset; G)$  und  $B^*(X; G)$  statt  $B^*(X, \emptyset; G)$ .

**Notation 6.42** Wie bei der Homologie, ist auch für die Kohomologie die Gruppe  $\mathbf{Z}$  die am häufigsten verwendete Koeffizientengruppe.

Für diesen Standardfall benutzt man auch in der Kohomologie die bekannte vereinfachte Notation, d. h., wir schreiben in der Regel  $C^*(X, A)$  als Abkürzung für  $C^*(X, A; \mathbf{Z})$ ,  $H^*(X, A)$  als Abkürzung für  $H^*(X, A; \mathbf{Z})$ , und entsprechend für alle anderen in Definition 6.41 vorkommenden Gruppen.

**Bemerkung 6.43** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe und sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaars. Wie im Beweis des Exaktheitsaxioms in Satz 6.33 schon erläutert, bleibt die natürliche kurze exakte Folge (3.14) von Kettenkomplexen dieses Raumpaars nach Anwendung des Funktors  $\text{Hom}(\cdot, G)$  exakt (weil die ursprüngliche Folge spaltet) und wir erhalten wegen der Umkehrung der Pfeilrichtungen eine **natürliche kurze exakte Folge von Kokettenkomplexen**

$$\{0\} \rightarrow C^*(X, A; G) \xrightarrow{\text{Hom}(\pi, G)} C^*(X; G) \xrightarrow{i^\#} C^*(A; G) \rightarrow \{0\}, \quad (6.41)$$

wo  $\pi$  die Projektion  $C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$  ist und wo  $i$  die Inklusion  $A \rightarrow X$  ist und  $i^\# := \text{Hom}(i_\#, G)$ .

Man beachte, dass hier  $\text{Hom}(\pi, G)$  *injektiv* ist und wir somit  $C^*(X, A; G)$  als *Untergruppe* von  $C^*(X; G)$  auffassen können.

Eine Kokette  $\gamma$  auf  $X$  ist ein auf Ketten definierter  $G$ -wertiger Homomorphismus und  $\gamma$  gehört genau dann zur Untergruppe  $C^*(X, A; G)$ , wenn  $\gamma$  durch  $\pi$  faktorisiert, d. h., wenn  $\gamma$  auf dem Nenner des Quotienten  $C_*(X, A)$ , also auf  $C_*(A)$ , verschwindet.

**Bemerkung und Definition 6.44** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe und  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaars. Der singuläre Kokettenkomplex  $C^*(X, A; G)$  entsteht durch Anwendung des additiven Funktors  $\text{Hom}(\cdot, G)$  auf den singulären Kettenkomplex  $C_*(X, A)$  des Raumpaars. Wie in Bemerkung und Definition 6.24 begründet, bestimmt  $\text{Hom}(\cdot, G)$  einen additiven



kontravarianten Funktor  $\mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{KK}$  oder mit nicht negierter Graduierung einen additiven kontravarianten Funktor  $\mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{KoKK}$ .

$C^*(X, A; G)$  ist die Verknüpfung dieses Funktors mit dem additiven kovarianten Funktor  $C_*: \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{KK}$ , und ist somit insgesamt ein kontravarianter additiver Funktor

$$C^*(\cdot; G): \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{KoKK}.$$

Insbesondere induziert jede stetige Abbildung  $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  zwischen topologischen Raumpaaren zunächst eine Kettenabbildung  $C_*(f) = f_\#: C_*(X, A) \longrightarrow C_*(Y, B)$  und dann nach Anwendung von  $\text{Hom}(\cdot, G)$  eine **Kokettenabbildung**

$$C^*(f; G) := \text{Hom}(f_\#, G): C^*(Y, B; G) \longrightarrow C^*(X, A; G),$$

die wir auch mit  $f^\#$  bezeichnen wollen.

Verknüpfen wir den Funktor  $C^*(\cdot; G)$  mit dem Kohomologiefunktor  $H: \mathbf{KoKK} \longrightarrow \mathbf{GAG}$ , so erhalten wir insgesamt den kontravarianten singulären Kohomologiefunktor

$$H^*(\cdot; G): \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{GAG}$$

mit Koeffizienten in  $G$ . Dies ist die singuläre Kohomologie aus Definition 6.41 und unsere jetzige Herleitung zeigt, dass die singuläre Kohomologie eines Raumpaares mit Koeffizienten in einer gegebenen Gruppe  $G$  wie zu erwarten ein kontravarianter additiver Funktor ist.

**Bemerkung 6.45** Die induzierte Kokettenabbildung einer stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen verhält sich manchmal etwas unerwartet.

Insbesondere, wenn  $G$  eine additive abelsche Gruppe ist und wenn  $A$  ein Unterraum eines topologischen Raumes  $X$  ist und wenn  $i: A \longrightarrow X$  die Inklusion ist, so ist

$$i^\#: C^*(X; G) \longrightarrow C^*(A; G)$$

eine *Einschränkungsabbildung*.

Denn  $i_\#: C_*(A) \longrightarrow C_*(X)$  ist zwar eine Inklusion einer Untergruppe in  $C_*(X)$ , aber wenn wir  $\text{Hom}(\cdot, G)$  anwenden, dann wird daraus als  $i^\#$  die Abbildung, die jeder Kokette  $\gamma: C_n(X) \longrightarrow G$  ihre *Einschränkung* auf die Untergruppe  $C_n(A)$  zuordnet.

In der Notation von Satz 6.33 ist  $H^*(\cdot; G)$  der Funktor  $H_*^{\text{Hom}(\cdot, G)}$  und aus diesem Satz folgen sofort weitere wichtige Eigenschaften der singulären Kohomologie.

**Korollar 6.46** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in  $G$  erfüllt die Eilenberg-Steenrod Axiome in ihrer kontravarianten Version und ist somit eine Kohomologietheorie, also eine „kontravariante Homologietheorie“, im Sinne von Eilenberg und Steenrod, mit Koeffizienten in  $G$ .

Insbesondere besagt das Dimensionsaxiom, dass für einen Einpunktraum  $P$  gilt

$$H^0(P) = G \quad \text{und} \quad H^n(P) = \{0\} \quad \text{für alle } n \neq 0.$$

Das Exaktheitsaxiom gilt in der folgenden kontravarianten Form. Für jedes topologische Raumpaars  $(X, A)$  gibt es ein natürliches exaktes Kohomologiedreieck der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} H^*(A; G) & \xleftarrow{i^*} & H^*(X; G) \\ & \searrow \beta & \nearrow j^* \\ & H^*(X, A; G) & \end{array} \quad (6.42)$$

Grad + 1

wo  $i: A \rightarrow X$  und  $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen sind.

Jedes singuläre Ausschneidungstriplet ist auch für die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in  $G$  ein Ausschneidungstriplet.

Wenn  $(X; A, B)$  eine singuläre Mayer-Vietoris Triade ist, so induziert die Einschränkungabbildung

$$\begin{aligned} C^*(X; G) &\longrightarrow C^*(\{A, B\}, G) := \text{Hom}(C_*(\{A, B\}), G) \\ \gamma &\longmapsto \gamma|_{C_*(\{A, B\})} \end{aligned}$$

einen Isomorphismus in Kohomologie, und wir haben ein natürliches exaktes Mayer-Vietoris Dreieck der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} H^*(A \cap B; G) & \xleftarrow{(i')^* \circ \pi_1 + (i'')^* \circ \pi_2} & H^*(A; G) \oplus H^*(B; G) \\ & \searrow \beta & \nearrow ((j')^*, -(j'')^*) \\ & H^*(X; G) & \end{array} \quad (6.43)$$

Grad + 1

wo  $i': A \cap B \rightarrow A$ ,  $i'': A \cap B \rightarrow B$ ,  $j': A \rightarrow X$ , und  $j'': B \rightarrow X$  die Inklusionen sind und die  $\pi_i$  die Projektionen von  $H^*(A; G) \oplus H^*(B; G)$  auf den  $i$ -ten Summanden sind.

*Beweis.* Dies ist einfach die Aussage von Satz 6.33 für den kontravarianten additiven Funktor  $U := \text{Hom}(\cdot, G)$ .

Für einen Einpunktraum  $P$  hat  $H^0(P; G)$  nach Satz 6.33 und nach Lemma 6.21 a) den Wert  $\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) = G$ . Wie in Bemerkung 6.45 erläutert, induziert für eine Triade  $(X; A, B)$  die Inklusion  $C_*(\{A, B\}) \longrightarrow C_*(X)$  eine Einschränkungsabbildung zwischen den entsprechenden Kokettengruppen mit Koeffizienten in  $G$ . Alle anderen Behauptungen in der Aussage folgen unmittelbar aus Satz 6.33.

Das exakte Kohomologiedreieck (6.42) eines Raumpaars kann man alternativ auch aus Satz 6.37 angewendet auf die kurze exakte Folge (6.41) herleiten. ■

Da die Homologie und die Kohomologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  die Eilenberg-Steenrod Axiome erfüllen, kann man mit Hilfe dieser Axiome wie in den bisherigen Beispielen die Homologie mit anderen Koeffizientengruppen und die Kohomologie vieler der klassischen Räume ausrechnen. Dazu muss man nur die schon einmal gemachten Konstruktionen und Argumente für die neue Theorie wiederholen, was problemlos gehen wird aber natürlich zu ganz anderen Ergebnissen führen kann, weil zwar nicht die topologischen aber die algebraischen Teile der Berechnung sich ändern werden.

Allerdings macht diese Berechnungsmethode, obwohl sie genauso gelingen wird wie bei der Homologie mit  $\mathbf{Z}$ -Koeffizienten, auch genau so viel Arbeit wie bisher. Die sehr umfangreichen Mühen, die wir uns schon gemacht haben, müssten alle wiederholt werden.

So rechnet aber (fast) niemand, denn es gibt eine sehr viel effizientere und *allgemeine* Methode, mit der man aus der schon *bekannten* singulären Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}$  und durch Anwendung von zwei neuen Funktoren  $\text{Tor}$  (für die Homologie) und  $\text{Ext}$  (für die Kohomologie) die neuen Varianten der Homologiegruppen mittels einer spaltenden kurzen exakten Folge berechnen kann.

Für diese schöne und leistungsfähige Methode (die so genannten **Universellen Koeffizientensätze**) braucht man etwas Vorbereitung aus dem Gebiet der **homologischen Algebra**. Auch wenn die Vorlesungszeit dafür nicht reichen wird, erläutern wir die Grundlagen zum Nachlesen im folgenden letzten Kapitel dieses Skriptums.



# Kapitel 7

## Homologische Algebra und der Universelle Koeffizientensatz

In diesem Kapitel wollen wir die am Ende von Kapitel 6 angekündigten „Universelle Koeffizientensätze“ (in zwei Ausprägungen, einmal für die Homologie und einmal für die Kohomologie) beweisen. Wer sich nach diesem Semester weiterbildet in der algebraischen Topologie wird feststellen, dass es sogar eine kostenlose Beigabe gibt, denn mit einer anderen Variante des gleichen Satzes kann man die Homologie von Produkträumen ausrechnen (mit elementaren Mitteln ist das erstaunlich schwierig!).

Bevor wir die Universellen Koeffizientensätze formulieren können, müssen wir die in die universelle Koeffizientenfolge eingehenden algebraischen Funktoren bereitstellen. Einer dieser Funktoren, in jeder Folge, ist der Funktor  $\otimes$  oder  $\text{Hom}$  aus dem letzten Kapitel, der schon für die Definition der neuen Homologievarianten benutzt wurde. Der andere, neue Funktor ( $\text{Tor}$ , passend zu  $\otimes$  und  $\text{Ext}$ , passend zu  $\text{Hom}$ , wird aus der Homologie einer aus dem bekannten Funktor gewonnenen *fast* aber nicht *ganz* exakten Folge gewonnen (wäre diese Folge ganz exakt, wäre ihre Homologie ja trivial) und nennt sich ein ***abgeleiteter Funktor*** des ersten.

Auch diese neuen Funktoren  $\text{Tor}$  und  $\text{Ext}$  sind additive Funktoren

$$\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$$

mit der gleichen Varianz, wie der Funktor, aus dem sie gewonnen werden (also ist  $\text{Tor}$  kovariant und  $\text{Ext}$  ist in der ersten Variablen kontravariant und in der zweiten kovariant).

Wie schon erwähnt, messen die abgeleiteten Funktoren die Nichtexaktheit einer gewissen Folge von Gruppen und Homomorphismen, und diese Folge erhält man, in dem man den unabgeleiteten Funktor auf eine spezielle *exakte* Folge anwendet, wobei die Exaktheit nur teilweise erhalten wird. An den

Stellen, wo sie nicht erhalten bleibt, liefert die dann nichttriviale Homologie den abgeleiteten Funktor.

Wir kennen schon eine Aussage, die uns in die Richtung zur Definition der abgeleiteten Funktoren führen kann: in Lemma B.12 f) in Anhang B wurde bewiesen, dass ein Paar von surjektiven Gruppenhomomorphismen auf dem Tensorprodukt der Gruppen wieder einen surjektiven Homomorphismus induziert. Dies ist ein Fall, wo die Anwendung des Funktors  $\otimes$  auf exakte Folgen der Gestalt

$$B \longrightarrow C \longrightarrow \{0\}$$

die Exaktheit an der Stelle  $C$  bewahrt.

Diese Idee lässt sich sogar erweitern:

**Definition 7.1** Sei  $F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver kovarianter oder kontravarianter Funktor.

Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (7.1)$$

eine kurze exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Wenn wir  $F$  auf diese Folge anwenden, so erhalten wir je nach der Varianz von  $F$  eine Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \{0\} \quad (\text{kovariant}) \\ \{0\} &\longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow \{0\} \quad (\text{kontravariant}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Im Allgemeinen können wir über diese Folge nur sagen, dass wegen der Additivität von  $F$  die äußeren Gruppen tatsächlich  $\{0\}$  sind (Lemma 6.6 b)), und dass die Verknüpfung je zwei aufeinanderfolgender Homomorphismen in (7.2), insbesondere die Verknüpfung  $F(g) \circ F(f)$  oder  $F(f) \circ F(g) = F(g \circ f)$ , die Nullabbildung ist, wegen Lemma 6.6 a) und der Exaktheit der ursprünglichen Folge (7.1).

Exakt muss die Bildfolge (7.2) in der Regel nicht sein!

Wenn sie es aber doch ist, d. h., wenn für jede kurze exakte Folge (7.1) die Folge (7.2) exakt ist, so nennen wir  $F$  einen **exakten Funktor**.

In Abschwächung davon nennen wir  $F$  **links-exakt** (bzw. **rechts-exakt**), wenn die linke bzw. rechte Seite der Bildfolge (7.2) exakt ist, in dem Sinne, dass die Exaktheitsbedingung zumindest an den beiden linken (bzw. beiden rechten) der drei Stellen gilt, an denen es eingehende und abgehende Pfeile gibt. Um das zu verlangen, kann man an der Stelle, an der die Exaktheit nicht mehr gefordert wird, den äußeren Pfeil mit der anhängenden Nullgruppe entfernen und einfach behaupten, dass der Rest noch exakt ist.

In anderen Worten,  $F$  ist **links-exakt** wenn für jede kurze exakte Folge (7.1) von abelschen Gruppen und Homomorphismen die Folge

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) && (F \text{ kovariant}) \\ \{0\} &\longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) && (F \text{ kontravariant}) \end{aligned} \quad (7.3)$$

exakt ist.

$F$  ist **rechts-exakt** wenn für jede kurze exakte Folge (7.1) von abelschen Gruppen und Homomorphismen die Folge

$$\begin{aligned} F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) &\longrightarrow \{0\} && (F \text{ kovariant}) \\ F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) &\longrightarrow \{0\} && (F \text{ kontravariant}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

exakt ist.

Natürlich ist  $F$  genau dann exakt, wenn  $F$  sowohl links- als auch rechts-exakt ist.

**Bemerkung 7.2** Bei der Definition eines links- oder rechts-exakten Funktors spielt eine der beiden Nullgruppen am Ende der Bildfolge keine Rolle mehr, weil an der angrenzenden mittleren Stelle die Exaktheit nicht behauptet wird.

Man darf auch die Voraussetzungen für die definierende Bedingung entsprechend abschwächen (womit die Folgerung etwas verstärkt wird), denn wenn in der ursprünglichen Folge (7.1) die entsprechende Nullgruppe fehlt und man nicht mehr verlangt, dass die Ausgangsfolge an der angrenzenden mittleren Stelle exakt ist, gilt immer noch die gleiche Folgerung über die teilweise Exaktheit der Bildfolge.

Ein additiver kovarianter Funktor  $F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ist also genau dann links-exakt, wenn für jede exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen der Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad (7.5)$$

die Bildfolge

$$\{0\} \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

exakt ist, und  $F$  ist genau dann rechts-exakt, wenn für jede exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen der Gestalt

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (7.6)$$

die Bildfolge

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \{0\}$$

exakt ist.

Entsprechend ist ein additiver *kontravarianter* Funktor

$$F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$$

genau dann links-exakt, wenn für jede exakte Folge der Gestalt (7.6) die Bildfolge

$$\{0\} \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$

exakt ist, und  $F$  ist genau dann rechts-exakt, wenn für jede exakte Folge der Gestalt (7.5) die Bildfolge

$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow \{0\}$$

exakt ist.

*Beweis.* Betrachten wir zunächst die kovarianten rechts-exakten und kontravarianten links-exakten Fälle, wo die Bildfolge an der Stelle  $F(A)$  nicht exakt sein muss.

Sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

exakt, aber  $f$  nicht unbedingt injektiv, d. h.,  $\text{Ker } f$  sei nicht unbedingt  $\{0\}$ . Sei  $\pi: A \longrightarrow A/\text{Ker } f$  die kanonische Projektion.

Dann induziert  $f$  einen Homomorphismus

$$\bar{f}: \frac{A}{\text{Ker } f} \longrightarrow B$$

mit  $\bar{f} \circ \pi = f$ , und es gilt

$$\text{Ker } \bar{f} = \pi(\text{Ker } f) = \{0\} \in \frac{A}{\text{Ker } f},$$

so dass  $\bar{f}$  injektiv ist.



Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \{0\} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \text{Ker } f & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & A & & & & \\
 & \swarrow \pi & \searrow f & & & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & \frac{A}{\text{Ker } f} & \xrightarrow{\bar{f}} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \{0\} & & & & 
 \end{array}$$

in dem die senkrechte und waagerechte Folge kurze exakte Folgen sind.

Nehmen wir zuerst an,  $F$  ist kovariant (und rechts-exakt). Dann ist der in folgendem Diagramm angegebene Teil der waagerechten und senkrechten Bildfolgen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & F(\text{Ker } f) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & F(A) & & & & \\
 & \swarrow F(\pi) & \searrow F(f) & & & & \\
 & & F\left(\frac{A}{\text{Ker } f}\right) & \xrightarrow{F(\bar{f})} & F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \{0\} & & & & 
 \end{array}$$

Im kontravarianten links-exakten Fall ändert sich in diesem Diagramm nur die Richtung der Pfeile! Die gleichnamigen Gruppen und Homomorphismen stehen an den gleichen Stellen im Diagramm, und auch in diesem Fall sind die waagerechte und senkrechte Folge exakt.

Wir haben zu zeigen, dass der schräge Pfeil zusammen mit dem angrenzenden rechten Teil der waagerechten Folge eine exakte Folge bildet, und da wir schon wissen, dass die ganze waagerechte Folge exakt ist, müssen wir die Exaktheit dieser abgeknickten Folge nur an der Stelle  $F(B)$  nachweisen.

Weil aber die senkrechte Folge exakt ist, ist  $F(\pi)$  im kovarianten Fall surjektiv, so dass  $\text{Bild } F(f) = \text{Bild } F(\bar{f}) = \text{Ker } F(g)$  wegen der Exaktheit

der ungeknickten waagerechten Folge, und das ist genau das, was zu zeigen ist.

Im kontravarianten Fall ist  $F(\pi)$  injektiv und wir haben  $\text{Ker } F(f) = \text{Ker } F(\bar{f}) = \text{Bild } F(g)$  wegen der Exaktheit der ungeknickten waagerechten Folge, und wieder ist das die Beziehung, die zu zeigen ist.

Ähnlich aber noch einfacher sind die Fälle, wo  $F$  kovariant und links-exakt oder kontravariant und rechts-exakt ist und die Bildfolge an der Stelle  $F(C)$  nicht exakt sein muss.

Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

exakt, aber  $g$  nicht unbedingt surjektiv, d. h.,  $\text{Bild } g$  sei nicht unbedingt  $C$ . Sei  $i: \text{Bild } g \longrightarrow C$  die Inklusion und sei  $g'$  gleich  $g$  aufgefasst als eine Abbildung  $B \longrightarrow \text{Bild } g$  (die dann nach Definition surjektiv ist).

Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \{0\} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g'} & \text{Bild } g \longrightarrow \{0\} \\
 & & & & \searrow g & & \downarrow i \\
 & & & & & & C \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{Coker } g \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \{0\}
 \end{array}$$

in dem die senkrechte und die waagerechte Folge kurze exakte Folgen sind.

Nehmen wir zuerst an,  $F$  ist kovariant (und links-exakt). Dann ist der in folgendem Diagramm angegebene Teil der waagerechten und senkrechten

Bildfolgen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \{0\} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) & \xrightarrow{F(g')} & F(\text{Bild } g) \\
 & & & \searrow F(g) & & \downarrow F(i) & \\
 & & & & & F(C) & \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & F(\text{Coker } g) & 
 \end{array}$$

Im kontravarianten rechts-exakten Fall ändert sich in diesem Diagramm nur die Richtung der Pfeile. Die gleichnamigen Gruppen und Homomorphismen stehen an den gleichen Stellen im Diagramm, und auch in diesem Fall sind die waagerechte und die senkrechte Folge exakt.

Wir haben zu zeigen, dass der schräge Pfeil zusammen mit dem links angrenzenden Teil der waagerechten Folge eine exakte Folge bildet, und da wir schon wissen, dass die ganze waagerechte Folge exakt ist, müssen wir die Exaktheit dieser abgeknickten Folge nur an der Stelle  $F(B)$  nachweisen.

Weil aber die senkrechte Folge exakt ist, ist  $F(i)$  im kovarianten Fall injektiv, so dass  $\text{Ker } F(g) = \text{Ker } F(g') = \text{Bild } F(f)$  wegen der Exaktheit der ungeknickten waagerechten Folge, und das war es, was zu zeigen war.

Im kontravarianten Fall ist  $F(i)$  surjektiv und wir haben  $\text{Bild } F(g) = \text{Bild } F(g') = \text{Ker } F(f)$  wegen der Exaktheit der ungeknickten waagerechten Folge, und wieder ist das die verlangte Beziehung.

Somit lassen sich die Voraussetzungen für die Anwendung der Halbexaktheit von additiven Funktoren wie behauptet abschwächen. ■

Es ist zwar schade, dass additive Funktoren die Exaktheit von Folgen nicht immer erhalten, aber andererseits können wir gerade deshalb neue Funktoren definieren, die die Nichtexaktheit der Bildfolge messen.

Wir wollen jetzt in Bezug auf Exaktheit den Funktor  $\otimes$  näher untersuchen.

**Notation 7.3** Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien und sei

$$F: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$$

ein Funktor von zwei Variablen.

Für jedes Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  notieren wir mit  $F(X, \cdot)$  oder mit  ${}_X F$  den Funktor  $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ , der jedem Objekt  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{L})$  das Objekt  $F(X, Y) \in$

$\text{Ob}(\mathcal{M})$  zuordnet, und jedem Morphismus  $g$  von  $\mathcal{L}$  den Morphismus  $F(\text{id}_X, g)$  von  $\mathcal{M}$  zuordnet.

Für jedes Objekt  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{L})$  notieren wir mit  $F(\cdot, Y)$  oder mit  $F_Y$  den Funktor  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$ , der jedem Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  das Objekt  $F(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  zuordnet, und jedem Morphismus  $f$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus  $F(f, \text{id}_Y)$  von  $\mathcal{M}$  zuordnet.

Diese Bezeichnungen benennen also den Funktor  $F$  in Abhängigkeit von nur einer der beiden Variablen und werden sich nützlich erweisen bei der Beschreibung der Eigenschaften von  $F$  als Funktor von jeder Variablen einzeln.

**Lemma 7.4** *Der Funktor  $\otimes$  ist in jeder Variablen einzeln rechtsexakt, d. h., für jede additive abelsche Gruppe  $D$  sind die Funktoren  $\cdot \otimes D$  und  $D \otimes \cdot$  rechtsexakte Funktoren  $\mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$ .*

*Beweis.* Wegen der natürlichen Äquivalenz von  $D \otimes E$  zu  $E \otimes D$  aus Lemma B.12 a) hat  $\otimes$  in beiden Variablen die gleichen Eigenschaften, und es reicht zu zeigen, dass für jede additive abelsche Gruppe  $D$  der Funktor  $\cdot \otimes D$  rechtsexakt ist.

Sei also

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (7.7)$$

eine exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Wir müssen zeigen, dass die Folge

$$A \otimes D \xrightarrow{f \otimes \text{id}_D} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes \text{id}_D} C \otimes D \longrightarrow \{0\} \quad (7.8)$$

exakt ist.

Die Exaktheit an der Stelle  $C \otimes D$  folgt sofort aus Lemma B.12 f), da  $g$  und  $\text{id}_D$  surjektiv sind.

Eine Hälfte der Exaktheit an der Stelle  $B \otimes D$  folgt aus der Tatsache, dass

$$(g \otimes \text{id}_D) \circ (f \otimes \text{id}_D) = (g \circ f) \otimes (\text{id}_D \circ \text{id}_D) = \mathbf{0} \otimes \text{id}_D = \mathbf{0}.$$

Deshalb ist

$$\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D) \subseteq \text{Ker}(g \otimes \text{id}_D),$$

und wir müssen nur noch zeigen, dass

$$\text{Ker}(g \otimes \text{id}_D) \subseteq \text{Bild}(f \otimes \text{id}_D).$$

Wir betrachten den Quotienten  $(B \otimes D)/\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)$  und die Projektion  $\pi$  von  $B \otimes D$  auf diesen Quotienten.

Wir konstruieren wie folgt einen Homomorphismus

$$r: C \otimes D \longrightarrow \frac{B \otimes D}{\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)},$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B \otimes D & \xrightarrow{g \otimes \text{id}_D} & C \otimes D \\ \pi \downarrow & \swarrow r & \\ \frac{B \otimes D}{\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)} & & \end{array}$$

kommutiert.

Dazu konstruieren wir zunächst eine bilineare Abbildung

$$\rho: C \times D \longrightarrow \frac{B \otimes D}{\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)}.$$

Für  $c \in C$  und  $d \in D$  sei  $b \in B$  ein beliebiges Urbild von  $c$  unter  $g$  und setze  $\rho(c, d) := \pi(b \otimes d)$ .

Dies ist tatsächlich eine Wohldefinition, denn wenn  $b'$  ein anderes Urbild von  $c$  unter  $g$  ist, so ist  $b - b' \in \text{Ker } g = \text{Bild } f$  und es gibt somit ein  $a \in A$  mit  $b - b' = f(a)$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} (b \otimes d) - (b' \otimes d) &= (b - b') \otimes d \\ &= f(a) \otimes d \\ &= (f \otimes \text{id}_D)(a \otimes d) \in \text{Bild}(f \otimes \text{id}_D) = \text{Ker } \pi, \end{aligned}$$

und deshalb ist  $\pi(b \otimes d) = \pi(b' \otimes d)$ .

Es ist klar, dass  $\rho$  in der zweiten Variablen linear ist, also für festes  $c \in C$  ein Homomorphismus auf  $D$ . Aber  $\rho$  ist auch ein Homomorphismus in der ersten Variablen, denn sei  $d \in D$  und seien  $c_1$  und  $c_2 \in C$ . Wenn  $b_i \in B$  Urbilder der  $c_i$  sind, also Elemente mit  $g(b_i) = c_i$ , so ist  $g(b_1 + b_2) = c_1 + c_2$  und folglich ist

$$\begin{aligned} \rho(c_1 + c_2, d) &:= \pi((b_1 + b_2) \otimes d) \\ &= \pi((b_1 \otimes d) + (b_2 \otimes d)) \\ &= \pi(b_1 \otimes d) + \pi(b_2 \otimes d) \\ &= \rho(b_1, d) + \rho(b_2, d). \end{aligned}$$

Die bilineare Abbildung  $\rho$  induziert einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$r: C \otimes D \longrightarrow \frac{B \otimes D}{\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)},$$

so dass für jedes  $c \in C$  und  $d \in D$  gilt

$$r(c \otimes d) = \rho(c, d).$$

Sei  $b \in B$  und  $d \in D$ . Wir haben dann

$$(r \circ (g \otimes \text{id}_D))(b \otimes d) = r(g(b) \otimes d) = \rho(g(b), d) := \pi(b \otimes d)$$

und somit stimmen  $r \circ (g \otimes \text{id}_D)$  und  $\pi$  auf den erzeugenden Elementen der Form  $b \otimes d$  überein. Folglich ist

$$r \circ (g \otimes \text{id}_D) = \pi$$

auf ganz  $B \otimes D$  wie gewünscht.

Hieraus folgt

$$\text{Ker}(g \otimes \text{id}_D) \subseteq \text{Ker } \pi = \text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)$$

und wir sind fertig. ■

Der Funktor  $\otimes$  ist im Allgemeinen nicht exakt, und dafür wollen wir gleich ein Beispiel geben. Zunächst eine Bemerkung, die erklärt, worauf wir achten müssen:

**Bemerkung 7.5** Ein rechts-exakter Funktor  $F: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$ , der kovariant ist, ist genau dann exakt, wenn für jeden injektiven Homomorphismus  $f: G \rightarrow H$  gilt:  $F(f)$  ist auch injektiv.

Ein kovarianter links-exakter Funktor  $F: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  ist genau dann exakt, wenn für jeden surjektiven Homomorphismus  $g: G \rightarrow H$  gilt:  $F(g)$  ist auch surjektiv.

Ein kontravarianter rechts-exakter Funktor  $F: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  ist genau dann exakt, wenn für jeden surjektiven Homomorphismus  $g: G \rightarrow H$  gilt:  $F(g)$  ist injektiv.

Ein kontravarianter links-exakter Funktor  $F: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  ist genau dann exakt, wenn für jeden injektiven Homomorphismus  $f: G \rightarrow H$  gilt:  $F(f)$  ist surjektiv.

*Beweis.* Zunächst bemerken wir, dass man jeden injektiven Homomorphismus  $f: G \rightarrow H$  als den linken der beiden mittleren Homomorphismen in eine kurze exakte Folge einbetten kann, nämlich in die Folge

$$\{0\} \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\pi} \text{Coker } f \longrightarrow \{0\},$$

und dass man jeden surjektiven Homomorphismus  $g: G \longrightarrow H$  als den rechten der beiden mittleren Homomorphismen in eine kurze exakte Folge einbetten kann, nämlich in die Folge

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker} g \xrightarrow{i} G \xrightarrow{g} H \longrightarrow \{0\}.$$

Ein Funktor  $F: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ist genau dann exakt, wenn er jede kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (7.9)$$

wieder in eine exakte Folge überführt.

Ist der Funktor rechts-exakt, so ist die Bildfolge noch exakt, außer vielleicht an ihrem linken Ende, d. h., wenn der Funktor kovariant ist, außer an der Stelle  $F(A)$ , und wenn der Funktor kontravariant ist, außer an der Stelle  $F(C)$  (wegen der Pfeilenumkehrung).

Der Funktor ist also genau dann exakt, wenn die Bildfolge *auch an dieser Stelle* exakt ist, d. h., im kovarianten Fall, genau dann wenn  $F(f)$  injektiv ist, und im kontravarianten Fall, genau dann wenn  $F(g)$  injektiv ist.

Ist der Funktor links-exakt, so ist die Bildfolge noch exakt, außer vielleicht an ihrem rechten Ende, d. h., wenn der Funktor kovariant ist, außer an der Stelle  $F(C)$ , und wenn der Funktor kontravariant ist, außer an der Stelle  $F(A)$ .

Der Funktor ist also genau dann exakt, wenn die Bildfolge auch an dieser Stelle exakt ist, d. h., im kovarianten Fall, genau dann wenn  $F(g)$  surjektiv ist, und im kontravarianten Fall, genau dann wenn  $F(f)$  surjektiv ist.

Da *jeder* injektiver Homomorphismus als der Homomorphismus  $f$  in einer kurzen exakten Folge (7.9) erscheinen kann und *jeder* surjektiver Homomorphismus als der Homomorphismus  $g$ , ergeben sich genau die in der Aussage angegebenen Bedingungen. ■

**Beispiel 7.6** Sei  $n > 1$  eine natürliche Zahl. Die Multiplikation mit  $n$  ist ein injektiver Homomorphismus  $\mu_n: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ , aber wenn wir darauf den Funktor  $\cdot \otimes \mathbf{Z}_n$  anwenden, erhalten wir die Nullabbildung

$$(\mu_n \otimes \operatorname{id}_{\mathbf{Z}_n}): \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_n \longrightarrow \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_n,$$

denn für jedes  $k \in \mathbf{Z}_n$  ist

$$(\mu_n \otimes \operatorname{id}_{\mathbf{Z}_n})(k) = (\mu_n \otimes \operatorname{id}_{\mathbf{Z}_n})(1 \otimes k) = n \otimes k = n(1 \otimes k) = 1 \otimes nk = 1 \otimes 0 = 0.$$

Da  $\mathbf{Z}_n \neq \{0\}$ , ist  $(\mu_n \otimes \operatorname{id}_{\mathbf{Z}_n})$  nicht injektiv, und folglich ist  $\cdot \otimes \mathbf{Z}_n$  nicht exakt.

Dieses Gegenbeispiel beruht natürlich auf den speziellen Eigenschaften der Gruppe  $\mathbf{Z}_n$ . Für andere spezielle Gruppen  $D$  kann  $\cdot \otimes D$  schon ein exakter Funktor sein.

**Lemma 7.7** *Sei  $F$  eine freie abelsche Gruppe. Dann ist  $\cdot \otimes F$  exakt.  
(Natürlich ist dann  $F \otimes \cdot$  auch ein exakter Funktor.)*

*Beweis.* Sei  $X$  eine Basis von  $F$ . Für jedes  $x \in X$  ist  $\mathbf{Z}x \cong \mathbf{Z}$ , weil  $\{x\}$  linear unabhängig ist, und wir haben

$$F = \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}x \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}.$$

Seien  $A$  und  $B$  additive abelsche Gruppen und sei  $f: A \rightarrow B$  ein injektiver Homomorphismus.

Nach Lemma B.12 b) ist

$$A \otimes \mathbf{Z}x \cong A \otimes \mathbf{Z} \cong A$$

für jedes  $x \in X$ . Unter diesen Isomorphismen entspricht ein Element  $a \in A$  dem Element  $a \otimes 1$  in  $A \otimes \mathbf{Z}$ , bzw. dem Element  $a \otimes x$  in  $A \otimes \mathbf{Z}x$ .

Nach Lemma B.12 e) ist

$$A \otimes F = A \otimes \left( \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}x \right) \cong \bigoplus_{x \in X} (A \otimes \mathbf{Z}x) \cong \bigoplus_{x \in X} A$$

und jedes Element  $\alpha$  von  $A \otimes F$  hat eine eindeutige Darstellung in der rechten direkten Summe und somit auch eine eindeutige Darstellung als eine endliche Summe

$$\alpha = \sum_{x \in X} a_x \otimes x \tag{7.10}$$

mit  $a_x \in A$  und mit nur endlich vielen  $a_x \neq 0$ .

Entsprechende Aussagen gelten für  $B$ .

Für jedes Element  $\alpha \in A \otimes F$  mit der Darstellung (7.10) ist

$$(f \otimes \text{id}_F)(\alpha) = (f \otimes \text{id}_F) \left( \sum_{x \in X} a_x \otimes x \right) = \sum_{x \in X} (f \otimes \text{id}_F)(a_x \otimes x) = \sum_{x \in X} f(a_x) \otimes x$$

und dies ist genau dann 0, wenn  $f(a_x) = 0$  für jedes  $x \in X$ .

Das wiederum gilt genau dann, wenn  $a_x = 0$  für jedes  $x \in X$ , denn  $f$  ist injektiv. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (7.10) sind alle  $a_x$  genau dann 0, wenn  $\alpha = 0$ .

Damit ist gezeigt, dass  $f \otimes \text{id}_F$  injektiv ist.



Da  $\cdot \otimes \text{id}_F$  rechts-exakt und kovariant ist, folgt nun aus Bemerkung 7.5, dass  $\cdot \otimes \text{id}_F$  exakt ist. ■

Auch wenn  $\cdot \otimes D$  nicht exakt ist, lässt sich etwas machen. Wir können nämlich einen neuen Funktor definieren, der misst, wie „inexakt“ der Funktor  $\cdot \otimes D$  ist. Darauf kommen wir später zurück.

Zunächst wollen wir noch das „Exaktheitsverhalten“ des Funktors  $\text{Hom}$  untersuchen. Wir führen zunächst eine bequeme Notation ein, um über die Wirkung von  $\text{Hom}$  auf Morphismen zu sprechen.

**Definition 7.8** Seien  $A, B, C$  und  $D$  abelsche Gruppen. Seien  $f: A \rightarrow B$  und  $h: C \rightarrow D$  Homomorphismen. Die Homomorphismenmengen zwischen zwei der genannten abelschen Gruppen sind selber additive abelsche Gruppen.

Die Verknüpfung mit  $f$  von rechts liefert einen *Gruppenhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \rho_f: \text{Hom}(B, C) &\longrightarrow \text{Hom}(A, C) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned} \quad (7.11a)$$

und die Verknüpfung mit  $h$  von links liefert einen *Gruppenhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \lambda_h: \text{Hom}(B, C) &\longrightarrow \text{Hom}(B, D) \\ g &\mapsto h \circ g \end{aligned} \quad (7.11b)$$

Diese Gruppenhomomorphismen werden wir in Zukunft mit den hier vorgeschlagenen Namen  $\rho_f$  (für die „Rechtsverknüpfung mit  $f$ “) und  $\lambda_h$  (für die „Linksverknüpfung mit  $h$ “) ansprechen.

**Lemma 7.9** Sei  $D$  eine additive abelsche Gruppe. Der kovariante Funktor  $\text{Hom}(D, \cdot)$  und der kontravariante Funktor  $\text{Hom}(\cdot, D)$  sind beide linksexakt.

*Beweis.* Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (7.12)$$

eine kurze exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Für einen beliebigen Homomorphismus  $h: G \rightarrow H$  zwischen abelschen Gruppen  $G$  und  $H$  ist  $\text{Hom}(D, h) = \text{Hom}(\text{id}_D, h) = \lambda_h$ , die in Definition 7.8 betrachtete Verknüpfung mit  $h$  von links (also  $\text{Hom}(D, h)(\alpha) = h \circ \alpha$  für jeden Homomorphismus  $\alpha: D \rightarrow G$ ).

Entsprechend ist  $\text{Hom}(h, D) = \text{Hom}(h, \text{id}_D) = \rho_h$ , die Verknüpfung mit  $h$  von rechts ( $\text{Hom}(h, D)(\beta) = \beta \circ h$  für jeden Homomorphismus  $\beta: H \rightarrow D$ ).

Wir betrachten zuerst den Funktor  $\text{Hom}(D, \cdot)$  und die Folge

$$\{0\} \longrightarrow \text{Hom}(D, A) \xrightarrow{\lambda_f} \text{Hom}(D, B) \xrightarrow{\lambda_g} \text{Hom}(D, C), \quad (7.13)$$

deren Exaktheit wir zu beweisen haben.

Wenn  $\alpha \in \text{Hom}(D, A)$  und  $f \circ \alpha = \mathbf{0}$ , dann ist  $\alpha = \mathbf{0}$ , weil  $f$  injektiv ist. Also ist (7.13) exakt an der Stelle  $\text{Hom}(D, A)$ .

Weil  $g \circ f = \mathbf{0}$  ist auch  $\lambda_g \circ \lambda_f = \mathbf{0}$  und somit  $\text{Bild } \lambda_f \subseteq \text{Ker } \lambda_g$ , und für die Exaktheit an der Stelle  $\text{Hom}(D, B)$  müssen wir nur noch nachprüfen, dass  $\text{Ker } \lambda_g \subseteq \text{Bild } \lambda_f$ .

Sei  $B' := f(A) = \text{Ker } g$ . Weil  $f$  injektiv ist, ist  $f$  als Abbildung  $A \longrightarrow B'$  ein Isomorphismus und besitzt einen Umkehrhomomorphismus  $\varphi: B' \longrightarrow A$  mit  $f \circ \varphi = \text{id}_{B'}$ .

Wenn  $\beta \in \text{Hom}(D, B)$  und  $\lambda_g(\beta) = \mathbf{0}$ , so ist  $\text{Bild } \beta \subseteq \text{Ker } g = B'$  und  $\alpha := \varphi \circ \beta$  ist definiert und ist ein Element von  $\text{Hom}(D, A)$  mit  $\lambda_f(\alpha) = \beta$ , weshalb  $\beta \in \text{Bild } \lambda_f$ .

Damit ist (7.13) auch exakt an der Stelle  $\text{Hom}(D, B)$ , und der Funktor  $\text{Hom}(D, \cdot)$  ist links-exakt.

Nun betrachten wir den kontravarianten Funktor  $\text{Hom}(\cdot, D)$  und die Folge

$$\{0\} \longrightarrow \text{Hom}(C, D) \xrightarrow{\rho_g} \text{Hom}(B, D) \xrightarrow{\rho_f} \text{Hom}(A, D). \quad (7.14)$$

Wenn  $\beta \in \text{Hom}(C, D)$  und  $\beta \circ g = 0$ , dann muss  $\beta$  die Nullabbildung sein weil  $g$  surjektiv ist. Also ist (7.14) exakt an der Stelle  $\text{Hom}(C, D)$ .

Weil  $g \circ f = \mathbf{0}$  ist auch  $\rho_f \circ \rho_g = \mathbf{0}$  und somit  $\text{Bild } \rho_g \subseteq \text{Ker } \rho_f$ , und für die Exaktheit an der Stelle  $\text{Hom}(B, D)$  müssen wir nur noch zeigen, dass  $\text{Ker } \rho_f \subseteq \text{Bild } \rho_g$ .

Sei  $\tilde{B} := \text{Coker } f = B/\text{Bild } f = B/\text{Ker } g$  und sei  $\pi: B \longrightarrow \tilde{B}$  die kanonische Projektion. Weil  $g$  surjektiv ist, induziert  $g$  einen Isomorphismus

$$\bar{g}: \tilde{B} = \frac{B}{\text{Ker } g} \longrightarrow \text{Bild } g = C$$

mit  $\bar{g} \circ \pi = g$ . Sei  $\psi := \bar{g}^{-1}$  der Umkehrhomomorphismus dieses Isomorphismus.

Sei  $\beta \in \text{Hom}(B, D)$  mit  $\rho_f(\beta) = \mathbf{0}$ . Dann ist  $\text{Ker } g = \text{Bild } f \subseteq \text{Ker } \beta$  und  $\beta$  induziert einen Homomorphismus  $\bar{\beta}: \tilde{B} \longrightarrow D$  mit  $\bar{\beta} \circ \pi = \beta$ .

Setze  $\gamma := \bar{\beta} \circ \psi: C \longrightarrow D$ . Dann ist

$$\rho_g(\gamma) = \gamma \circ g = \bar{\beta} \circ \psi \circ \bar{g} \circ \pi = \bar{\beta} \circ \text{id}_{\tilde{B}} \circ \pi = \bar{\beta} \circ \pi = \beta,$$

weshalb  $\beta \in \text{Bild } \rho_g$ .

Damit ist (7.14) auch exakt an der Stelle  $\text{Hom}(B, D)$ , und der Funktor  $\text{Hom}(\cdot, D)$  ist links-exakt. ■

Die Funktoren  $\text{Hom}(D, \cdot)$  und  $\text{Hom}(\cdot, D)$  sind im Allgemeinen nicht exakt. Bevor wir Beispiele geben, wollen wir uns kurz vergewissern, worauf es

ankommt, denn die Exaktheit dieser Funktoren für *spezielle*  $D$  ist eine wichtige Eigenschaft von  $D$ , wichtig genug, dass sie in der Literatur einen eigenen Namen erhält:

**Definition 7.10** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe.

$G$  heißt **projektiv**, wenn jedes Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \longrightarrow \{0\} \\ & \nwarrow \bar{\alpha} & \uparrow \alpha \\ & & G \end{array} \quad (7.15)$$

mit einer exakten Zeile und mit einem beliebigen Gruppenhomomorphismus  $\alpha: G \rightarrow C$  sich durch den gestrichelten Pfeil  $\bar{\alpha}$  zu einem kommutativen Diagramm ergänzen lässt.

In anderen Worten,  $G$  ist **projektiv**, wenn jeder Homomorphismus von  $G$  in das Ziel eines surjektiven Gruppenhomomorphismus  $f$  sich zur Quelle von  $f$  liften lässt, oder noch prägnanter gesagt, wenn für jede additive abelsche Gruppe  $B$  jeder Homomorphismus von  $G$  in einen Quotienten von  $B$  sich nach  $B$  hochheben lässt.

Hierzu gibt es folgenden dualen Begriff:  $G$  heißt eine **injektive Gruppe**, wenn jedes Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow \alpha & \nearrow \bar{\alpha} & \\ & & G & & \end{array} \quad (7.16)$$

mit einer exakten Zeile und mit einem beliebigen Gruppenhomomorphismus  $\alpha: A \rightarrow G$  sich durch den gestrichelten Pfeil  $\bar{\alpha}$  zu einem kommutativen Diagramm ergänzen lässt.

In anderen Worten,  $G$  ist **injektiv**, wenn jeder Homomorphismus von der Quelle eines injektiven Gruppenhomomorphismus  $f$  nach  $G$  sich zum Ziel von  $f$  erweitern lässt, oder noch prägnanter gesagt, wenn für jede additive abelsche Gruppe  $B$  jeder Homomorphismus von einer Untergruppe von  $B$  nach  $G$  sich zu ganz  $B$  erweitern lässt.

**Bemerkung 7.11** Eine additive abelsche Gruppe  $G$  ist projektiv genau dann, wenn für jeden surjektiven Gruppenhomomorphismus  $g: B \rightarrow C$  der Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}(G, g) = \lambda_g: \mathrm{Hom}(G, B) \rightarrow \mathrm{Hom}(G, C)$$

auch surjektiv ist.

Nach Bemerkung 7.5 ist dies genau die Bedingung dafür, dass der der kovariante links-exakte Funktor  $\text{Hom}(G, \cdot)$  exakt ist. Also:  $\text{Hom}(G, \cdot)$  ist genau dann exakt, wenn  $G$  projektiv ist.

Eine additive abelsche Gruppe  $G$  ist injektiv genau dann, wenn für jeden injektiven Gruppenhomomorphismus  $f: A \longrightarrow B$  der Homomorphismus

$$\text{Hom}(f, G) = \rho_f: \text{Hom}(B, G) \longrightarrow \text{Hom}(A, G)$$

surjektiv ist.

Nach Bemerkung 7.5 ist dies genau die Bedingung dafür, dass der der kontravariante links-exakte Funktor  $\text{Hom}(\cdot, G)$  exakt ist. Also:  $\text{Hom}(\cdot, G)$  ist genau dann exakt, wenn  $G$  injektiv ist.

**Lemma 7.12** *Eine additive abelsche Gruppe  $G$  ist genau dann projektiv, wenn sie frei ist.*

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ): Sei  $G$  projektiv und sei  $F := F(G)$  die freie abelsche Gruppe erzeugt von  $G$  als Menge. Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $p: F \longrightarrow G$  mit  $p|_G = \text{id}_G$ , und  $p$  ist natürlich surjektiv.

Weil  $G$  projektiv ist finden wir einen Homomorphismus  $s: G \longrightarrow F$ , so dass  $p \circ s = \text{id}_G$ .

Daraus folgt, dass der Homomorphismus  $s$  injektiv ist und deshalb ein Isomorphismus auf sein Bild ist. Also ist  $G$  isomorph zu einer Untergruppe von  $F$ .

Weil nach Satz 6.18 jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei ist, ist  $G$  frei.

( $\Leftarrow$ ): Sei  $G$  frei und sei  $X$  eine Basis von  $G$ . Sei  $f: B \longrightarrow C$  ein surjektiver Homomorphismus von abelschen Gruppen und sei  $\alpha$  ein Homomorphismus  $G \longrightarrow C$ . Wir müssen einen Homomorphismus  $\bar{\alpha}: G \longrightarrow B$  finden mit der Eigenschaft, dass  $f \circ \bar{\alpha} = \alpha$ .

Weil  $f$  surjektiv ist, finden wir für jedes  $x \in X$  ein Element  $b_x \in B$  mit  $f(b_x) = \alpha(x)$ .

Sei  $\bar{\alpha}: G \longrightarrow B$  der eindeutige Homomorphismus mit  $\bar{\alpha}(x) = b_x$  für jedes  $x \in X$ .

Dann ist  $(f \circ \bar{\alpha})(x) = f(b_x) = \alpha(x)$  für jedes  $x \in X$ , und weil  $X$  die Gruppe  $G$  erzeugt, gilt  $f \circ \bar{\alpha} = \alpha$  auf ganz  $G$ .

Dieses  $\bar{\alpha}$  ist also ein Homomorphismus wie er verlangt wurde. ■

**Beispiele 7.13** Weder  $\text{Hom}(D, \cdot)$  noch  $\text{Hom}(\cdot, D)$  sind im Allgemeinen exakt.

- a) Wenn  $D$  keine freie abelsche Gruppe ist, ist  $D$  nicht projektiv und somit  $\text{Hom}(D, \cdot)$  nicht exakt.
- b) Es gilt  $\text{Hom}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) = \{0\}$ , denn sei  $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z}$  ein Homomorphismus. Wenn  $f \neq 0$ , dann nimmt  $f$  auch positive Werte an; sei  $n$  der *kleinste* positive Wert von  $f$  und sei  $q \in \mathbf{Q}$  mit  $f(q) = n$ . Dann gilt

$$2f\left(\frac{q}{2}\right) = f(q) = n,$$

so dass  $f(q/2) = n/2$  sein muss; dieser Wert, sofern er ganzzahlig ist, wäre positiv und kleiner als den „kleinsten positiven Wert“  $n$ , und ist deshalb nicht möglich. Also kann ein Homomorphismus  $f \in \text{Hom}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  keine anderen Werte als 0 annehmen.

Aus diesem Grund lässt sich zum Beispiel  $\text{id}_{\mathbf{Z}}$  nicht zu einem Gruppenhomomorphismus  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z}$  erweitern.

Folglich ist  $\mathbf{Z}$  keine injektive Gruppe und  $\text{Hom}(\cdot, \mathbf{Z})$  ist nicht exakt (hier nützt es nichts, dass  $\mathbf{Z}$  frei ist!).

Es erscheint einem zunächst als ärgerlich, dass die meisten Funktoren, und insbesondere die wichtigen Funktoren  $\otimes$  und  $\text{Hom}$ , nicht exakt sind. Aber das hat sogar einen Vorteil, denn es bietet die Gelegenheit, neue Funktoren zu definieren, die die Inexaktheit der alten Funktoren „messen“.

Wie soll das gehen? Dazu ordnet man jeder abelschen Gruppe eine *standardisierte* exakte Folge zu und wendet den Funktor an. Man erhält zwar nicht wieder eine exakte Folge, aber zumindest einen Kettenkomplex, und dessen Homologie liefert den neuen „abgeleiteten“ Funktor.

**Definition 7.14** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Eine **freie Resolution** oder zu Deutsch **freie Auflösung** von  $G$  ist eine exakte Folge

$$\dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_1} F_0 := G \longrightarrow \{0\} \quad (7.17)$$

mit  $G$  als rechtestes nichttriviales Folgenglied, in der alle anderen Gruppen  $F_i$  für  $i \geq 1$  frei sind.

Wir bezeichnen solche Folgen mit geschwungenen oder kalligraphischen Buchstaben  $\mathcal{F} = \{F_i\}$ .

Statt zu sagen, die Folge (7.17) ist exakt, kann man gleichbedeutend sagen, sie ist ein **azyklischer Kettenkomplex**, also ein Kettenkomplex  $\mathcal{F}$  mit  $H(\mathcal{F}) = \{0\}$ . Diese Sichtweise ist sinnvoll in Anbetracht der beabsichtigten Anwendung zur Definition von abgeleiteten Funktoren (Definition 7.18 unten).

Jede additive abelsche Gruppe  $G$  besitzt eine freie Auflösung. Dazu sei  $F(G)$ , wie die Notation sagt, die freie abelsche Gruppe erzeugt von der Menge  $G$  als Basis (die Gruppenstruktur von  $G$  geht in die Definition von  $F(G)$  überhaupt nicht ein!).

Die Identität von  $G$  ist eine mengentheoretische Abbildung von der Menge  $G$ , als Basis von  $F(G)$ , in die abelsche Gruppe  $G$ , und es gibt einen eindeutigen und offensichtlich surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi_G: F(G) \longrightarrow G$$

mit  $\pi_G|_G = \text{id}_G$ .

Sei  $R(G) := \text{Ker } \pi_G \subseteq F(G)$  und sei  $i_G: R(G) \longrightarrow F(G)$  die Inklusion. Als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist auch  $R(G)$  frei abelsch.

Die Folge

$$\{0\} \longrightarrow R(G) \xrightarrow{i_G} F(G) \xrightarrow{\pi_G} G \longrightarrow \{0\} \quad (7.18)$$

ist exakt und ist eine freie Auflösung von  $G$ . Wir nennen diese Folge die **standard freie Auflösung** von  $G$  und bezeichnen sie mit  $\mathcal{F}_G$ .

Um mit Hilfe von freien Auflösungen neue algebraische Funktoren konstruieren zu können (und das ist ja unser Vorhaben), müssen wir noch abklären, was passiert, wenn man die Gruppe  $G$  durch eine andere abelsche Gruppe  $H$  ersetzt, und vor allem wie freie Auflösungen sich bezüglich Homomorphismen  $G \longrightarrow H$  verhalten.

**Lemma 7.15** *Seien  $G$  und  $H$  additive abelsche Gruppen und sei*

$$f: G \longrightarrow H$$

*ein Gruppenhomomorphismus.*

*Sei  $\mathcal{G} = \{G_n\}$  eine freie Auflösung von  $G$  und sei  $\mathcal{H} = \{H_n\}$  eine freie Auflösung von  $H$ . Dann erweitert sich  $f$  zu einer Kettenabbildung*

$$\varphi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

*mit  $\varphi_0 = f$ .*

*Je zwei solche Erweiterungen von  $f$  zu Kettenabbildungen sind kettenhomotop, und zwar durch eine Kettenhomotopie  $\Phi$  mit  $\Phi_0 = \mathbf{0}: G_0 \longrightarrow H_1$ .*

*Beweis.* Zunächst beweisen wir die Existenz der Kettenabbildung  $\varphi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$  mit  $\varphi_0 = f$ , indem wir durch Induktion über  $n \in \mathbf{N}$  die homogenen Anteile  $\varphi_n$  von  $\varphi$  konstruieren.

Der Induktionsanfang ist einfach, denn  $\varphi_0$  ist als  $f$  schon vorgegeben. Natürlich können wir auch für alle  $k < 0$  einfach  $\varphi_k = \mathbf{0}$  nehmen, und wir haben bis einschließlich der 0-ten Stufe eine Kettenabbildung.

Wir machen jetzt den Induktionsschritt. Sei  $n \geq 0$  und wir nehmen an, dass für alle  $k \leq n$  die Stufen  $\varphi_k$  einer  $f$  erweiternden Kettenabbildung schon gegeben sind.

Betrachten wir in folgendem Diagramm die Situation im Umfeld der  $n$ -ten Stufe:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{g_{n+2}} & G_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{g_n} & G_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ \cdots & \xrightarrow{h_{n+2}} & H_{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & H_n & \xrightarrow{h_n} & H_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} \cdots \end{array}$$

Alle schon existenten Quadrate kommutieren. Insbesondere ist

$$h_n \circ \varphi_n \circ g_{n+1} = \varphi_{n-1} \circ g_n \circ g_{n+1} = \varphi_{n-1} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

da  $\mathcal{G}$  ein Kettenkomplex ist.

Es folgt, dass  $\text{Bild}(\varphi_n \circ g_{n+1}) \subseteq \text{Ker } h_n = \text{Bild } h_{n+1}$  ist (die letzte Gleichheit gilt, weil  $\mathcal{H}$  exakt ist).

Wenn wir  $h_{n+1}$  und  $\varphi_n \circ g_{n+1}$  als Abbildungen nach  $\text{Bild } h_{n+1}$  betrachten, ist  $h_{n+1}$  surjektiv, und weil  $G_{n+1}$  frei und somit projektiv ist, lässt sich der Homomorphismus  $\varphi_n \circ g_{n+1}$  entlang  $h_{n+1}$  hochheben zu einem Homomorphismus  $\varphi_{n+1}: G_{n+1} \rightarrow H_{n+1}$  mit  $h_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ g_{n+1}$ .

Das ergänzt die Kettenabbildung  $\varphi$  um die  $n+1$ -te Stufe, die nach Konstruktion die Kettenabbildungseigenschaft tatsächlich erfüllt.

Durch Induktion erhalten wir die gesamte Kettenabbildung  $\varphi$ .

Bis auf Kettenhomotopie ist  $\varphi$  eindeutig, denn sei  $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  eine andere Kettenabbildung mit  $\psi_0 = f$ .

Wir konstruieren durch Induktion über  $n \in \mathbf{Z}$  die Stufen

$$\Phi_n: G_n \rightarrow H_{n+1}$$

einer Kettenhomotopie  $\Phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  von  $\varphi$  nach  $\psi$ .

Sie muss für jedes  $n$  erfüllen

$$\psi_n - \varphi_n = h_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ g_n. \quad (7.19)_n$$

Um die Induktion zu beginnen, setzen wir  $\Phi_k = \mathbf{0}$  für jedes  $k \leq 0$ .

Für  $k < 0$  haben wir keine andere Wahl, aber auch für  $k = 0$  gilt  $(7.19)_0$  mit  $\Phi_0 = \mathbf{0}$ , da  $\psi_0 = \varphi_0 = f$  und somit  $\psi_0 - \varphi_0 = \mathbf{0}$ .

Für den Induktionsschritt sei  $n \geq 0$  und wir nehmen an, dass  $\Phi_k$  schon für alle  $k \leq n$  definiert ist und die Beziehungen  $(7.19)_k$  für  $k \leq n$  erfüllt.

Um die Konstruktion zu erklären, wollen wir wieder ein Diagramm angeben, in dem die Situation im Umfeld der Stufe  $n$  zu sehen ist. Damit das Diagramm noch lesbar bleibt, verwenden wir die Kürzel  $\delta_k$  für  $\psi_k - \varphi_k$ .

Wir wollen dann den gestrichelten Pfeil einfüllen in

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{g_{n+3}} & G_{n+2} & \xrightarrow{g_{n+2}} & G_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{g_n} & G_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & \cdots \\
 & & \delta_{n+2} \downarrow & \swarrow \Phi_{n+1} & \delta_{n+1} \downarrow & \swarrow \Phi_n & \delta_n \downarrow & \swarrow \Phi_{n-1} & \delta_{n-1} \downarrow & \swarrow \Phi_{n-2} & \\
 \cdots & \xrightarrow{h_{n+3}} & H_{n+2} & \xrightarrow{h_{n+2}} & H_{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & H_n & \xrightarrow{h_n} & H_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & \cdots
 \end{array}$$

Sei

$$\gamma_{n+1} := \psi_{n+1} - \varphi_{n+1} - \Phi_n \circ g_{n+1} = \delta_{n+1} - \Phi_n \circ g_{n+1},$$

ein Homomorphismus von  $G_{n+1}$  nach  $H_{n+1}$ . Wir haben

$$\begin{aligned}
 h_{n+1} \circ \gamma_{n+1} &= h_{n+1} \circ \delta_{n+1} - h_{n+1} \circ \Phi_n \circ g_{n+1} \\
 &= \delta_n \circ g_{n+1} - h_{n+1} \circ \Phi_n \circ g_{n+1} && (\delta \text{ Kettenabbildung}) \\
 &= (\delta_n - h_{n+1} \circ \Phi_n) \circ g_{n+1} \\
 &= \Phi_{n-1} \circ g_n \circ g_{n+1} && (\text{weil } (7.19)_n \text{ gilt}) \\
 &= \mathbf{0} && (\mathcal{G} \text{ exakt})
 \end{aligned}$$

und weil  $\mathcal{H}$  exakt ist, bildet  $\gamma_{n+1}$  in die Untergruppe  $\text{Ker } h_{n+1} = \text{Bild } h_{n+2}$  von  $H_{n+1}$  ab, auf die  $h_{n+2}$  surjektiv ist.

Weil  $G_{n+1}$  projektiv ist, gibt es einen Homomorphismus

$$\Phi_{n+1}: G_{n+1} \longrightarrow H_{n+2}$$

mit  $h_{n+2} \circ \Phi_{n+1} = \gamma_{n+1}$ . Dies ist Bedingung  $(7.19)_{n+1}$ , und wir haben die Kettenhomotopie  $\Phi$  um eine Stufe erweitert.

Durch Induktion über  $n$  erhalten wir die gesamte Kettenhomotopie  $\Phi$  von  $\varphi$  nach  $\psi$ , und mit  $\Phi_0 = \mathbf{0}$  wie gewünscht.  $\blacksquare$

**Bemerkung und Definition 7.16** In Definition 1.8 hatten wir zu jeder topologischen Kategorie  $\mathcal{K}$  eine entsprechende Homotopiekategorie  $H\mathcal{K}$  definiert, die die gleichen Objekte wie  $\mathcal{K}$  hat, aber deren Morphismen die *Homotopieklassen* der Morphismen von  $\mathcal{K}$  sind. Wie aus den Grundeigenschaften der Homotopietheorie und der Homologietheorie und die Homotopieinvarianz der dort definierten Funktoren klar ist, sind diese Homotopiekategorien der eigentliche Definitionsbereich der Algebra-wertigen Funktoren der algebraischen Topologie.

Ähnlich zu diesen topologischen Homotopiekategorien können wir auch eine Homotopiekategorie **HKK** von *Kettenkomplexen* definieren. Sie hat die



gleichen Objekte wie **KK**, aber für je zwei Kettenkomplexe  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{HKK}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  definiert als die Menge der *Kettenhomotopieklassen* von Kettenabbildungen  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ , mit der offensichtlichen Verknüpfung

$$[g] \circ [f] := [g \circ f]$$

(die nach Lemma 3.19 c) wohldefiniert ist) und der offensichtlichen Identität. Man sieht sofort, dass dies wirklich eine Kategorie ergibt.

Diese Kategorie ist der eigentliche Definitionsbereich des Homologiefunktors für Kettenkomplexe.

Es gilt noch mehr. Wie schon in Bemerkung 6.3 und Beispiel 6.4 erwähnt, haben die Morphismenmengen der Kategorie **KK** eine natürliche Struktur als additive abelsche Gruppen, denn offensichtlich sind die Summe von zwei Kettenabbildungen, das negative einer Kettenabbildung und die Nullabbildung zwischen zwei Kettenkomplexen wieder Kettenabbildungen.

Kettenhomotopie ist verträglich mit der Addition von Kettenabbildungen, d. h., wenn  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \varepsilon)$  Kettenkomplexe sind und wenn  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  und  $\psi_2$  Kettenabbildungen  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  sind mit

$$\varphi_1 \simeq_{\Phi} \varphi_2 \quad \text{und} \quad \psi_1 \simeq_{\Psi} \psi_2,$$

dann ist offensichtlich  $\Phi + \Psi$  eine Kettenhomotopie von  $\varphi_1 + \psi_1$  nach  $\varphi_2 + \psi_2$ .

Deshalb induziert die Addition von Kettenabbildungen eine wohldefinierte Addition von Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen, mit  $[\varphi] + [\psi]$  definiert als  $[\varphi + \psi]$ . Das bedeutet, dass auch die Kategorie **HKK** eine präadditive Kategorie ist, auf der es sinnvoll ist, von additiven Funktoren zu sprechen.

Insbesondere ist die Homologie ein additiver Funktor  $\mathbf{HKK} \longrightarrow \mathbf{GAG}_0$ .

Aus Lemma 7.15 ergibt sich sofort folgende elegante Konstruktion neuer additiver Funktoren:

**Korollar und Definition 7.17** a) Die *standard freie Auflösung* ist ein wohldefinierter Funktor  $\mathcal{F}: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{HKK}$ .

Er ordnet jeder abelschen Gruppe  $G$  die standard freie Auflösung  $\mathcal{F}_G$  zu, und jedem Gruppenhomomorphismus  $f: G \longrightarrow H$  zwischen zwei abelschen Gruppen ordnet er die (unabhängig von der Wahl von  $\varphi$  wohldefinierte!) Kettenhomotopieklasse  $[\varphi]$  einer beliebigen Kettenabbildung  $\varphi: \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{F}_H$  mit  $\varphi_0 = f$  zu.

Dieser Funktor  $\mathcal{F}$  ist additiv.

Im Folgenden sei  $U$  ein fest vorgegebener additiver Funktor  $\mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$ .

- b) In Bemerkung und Definition 6.24 wurde erklärt, wie man aus  $U$  auf einsichtige Weise auch einen wohldefinierten additiven Funktor

$$U: \mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{KK}$$

erhält. Nach Bemerkung 6.25 bleibt Kettenhomotopie unter diesem Funktor erhalten, d. h., die Bilder  $U(f)$  und  $U(g)$  unter  $U$  von kettenhomotopen Kettenabbildungen  $f \simeq g$  sind immer noch kettenhomotop.

Hieraus folgt, dass  $U$  auch einen wohldefinierten und offensichtlich additiven Funktor

$$U: \mathbf{HKK} \longrightarrow \mathbf{HKK}$$

bestimmt, mit  $U([\varphi]) := [U(\varphi)]$  für jede Kettenabbildung  $\varphi$ . Auch für diesen neuen Funktor behalten wir wie bisher den Namen  $U$  bei.

- c) Der Homologiefunktor  $H$  für Kettenkomplexe ist ein wohldefinierter additiver Funktor auch auf der Kategorie  $\mathbf{HKK}$ , und die Verknüpfung  $H \circ U \circ \mathcal{F}$  ist ein wohldefinierter additiver Funktor

$$HU\mathcal{F}: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{GAG}_0.$$

Dieser Funktor hat die gleiche Varianz wie  $U$ .

- d) Ist  $G$  eine additive abelsche Gruppe und ist  $\mathcal{G}$  eine beliebige freie Auflösung von  $G$  (und nicht unbedingt die Standardauflösung), so ist

$$HU\mathcal{F}(G) \cong H(U(\mathcal{G})).$$

Das heißt, wenn man den Funktor  $U$  auf eine freie Auflösung einer abelschen Gruppe  $G$  anwendet, so hängt die Homologie des resultierenden Kettenkomplexes nicht von der Wahl der freien Auflösung ab, sondern nur von der Gruppe  $G$  und dem Funktor  $U$ .

Diese Homologie stellt einen neuen additiven Funktor auf  $\mathbf{AbGp}$  dar, der zwar offiziell über die standard freie Auflösung definiert wird, aber zu dessen Berechnung man eine beliebige freie Auflösung verwenden darf, wann immer sich das als bequemer erweist.

*Beweis.* a):  $\mathcal{F}$  ist ja zunächst nur als eine Zuordnung für Objekte definiert, die jeder abelschen Gruppe die standard freie Auflösung zuordnet.

Aber Lemma 7.15 zeigt, dass jeder Homomorphismus  $f$  von abelschen Gruppen sich zu einer Kettenabbildung der standard freien Auflösung erweitern lässt. Diese ist zwar nicht eindeutig, aber ihre Kettenhomotopieklasse

ist eindeutig bestimmt, und wir erklären sie als den (wohldefinierten) Wert  $\mathcal{F}(f)$  des Funktors  $\mathcal{F}$  für den Morphismus  $f$ .

Die Identität  $\text{id}_G$  einer abelschen Gruppe  $G$  kann man durch die identische Kettenabbildung der standard freien Auflösungen erweitern, so dass  $\mathcal{F}(\text{id}_G)$  der Identitätsmorphimus des Objekts  $\mathcal{F}(G)$  in der Kategorie **HKK** ist.

Entsprechend, wenn  $f: G \longrightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus ist und wenn  $\varphi$  eine Erweiterung von  $f$  zu einer Kettenabbildung der standard freien Auflösungen ist, und wenn  $g: H \longrightarrow K$  ein Gruppenhomomorphismus ist mit Erweiterung  $\psi$  zu einer Kettenabbildung der standard freien Auflösungen, so ist  $\psi \circ \varphi$  eine Kettenabbildung  $\mathcal{F}(G) \longrightarrow \mathcal{F}(K)$ , die den Homomorphismus  $(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0 = g \circ f$  erweitert. Daraus ist klar, dass  $\mathcal{F}$  Verknüpfungen respektiert und alle erforderlichen Eigenschaften eines kovarianten Funktors besitzt.

Auf genau die gleiche Weise sieht man, dass  $\mathcal{F}$  additiv ist, denn um eine Kettenabbildung der standard freien Auflösungen zu erhalten, die eine Summe von zwei Gruppenhomomorphismen erweitert, kann man einfach Kettenabbildungen nehmen, die die einzelnen Homomorphismen erweitern, und sie addieren.

b): Die Aussage dieses Teils des Korollars ist selbsterklärend und gibt explizit an, wie  $U$  für Objekte und Morphismen der Kategorie **HKK** zu definieren ist, und warum dies eine Wohldefinition ist.

Es ist klar aus der Definition der Addition von Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen, dass auch dieser Funktor additiv ist.

c) folgt sofort aus Bemerkung 7.16 (für die einleitende Aussage dieses Teils) und aus Teilen a) und b) oben, denn eine Verknüpfung von additiven Funktoren ist offensichtlich wieder additiv. Da die Funktoren  $H$  und  $\mathcal{F}$  beide kovariant sind, hat  $HU\mathcal{F}$  die gleiche Varianz wie  $U$ .

d): Nach Lemma 7.15 lässt sich  $\text{id}_G$  in beiden Richtungen zu Kettenabbildungen

$$\varphi: \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{G} \quad \text{und} \quad \psi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}_G$$

erweitern.

Die Verknüpfungen in beiden Reihenfolgen

$$\psi \circ \varphi: \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{F}_G \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

sind auch Kettenabbildungen, die  $\text{id}_G$  erweitern, aber hier sind die Quell- und Zielkettenkomplexe gleich und auch die identische Kettenabbildung dieses Kettenkomplexes erweitert  $\text{id}_G$ . Weil nach Lemma 7.15 je zwei Kettenabbildungen zwischen freien Auflösungen einer Gruppe, die in Dimension 0 übereinstimmen, kettenhomotop sind, ist

$$\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_{\mathcal{F}_G} \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{\mathcal{G}}.$$

Diese Beziehungen bleiben nach Bemerkung 6.25 bestehen, wenn man den additiven Funktor  $U$  ansetzt, d. h., es gilt (im kovarianten Fall)

$$U(\psi) \circ U(\varphi) = U(\psi \circ \varphi) \simeq U(\text{id}_{\mathcal{F}_G}) = \text{id}_{U(\mathcal{F}_G)}$$

und

$$U(\varphi) \circ U(\psi) = U(\varphi \circ \psi) \simeq U(\text{id}_{\mathcal{G}}) = \text{id}_{U(\mathcal{G})}.$$

Also sind  $U(\varphi)$  und  $U(\psi)$  Kettenhomotopieäquivalenzen zwischen  $U(\mathcal{F}_G)$  und  $U(\mathcal{G})$ .

Im kontravarianten Fall vertauscht sich zwar die Reihenfolge der Faktoren in den Verknüpfungen, aber auch die Richtung der Kettenabbildungen kehrt sich um, so dass wir den gleichen Schluss erhalten:  $U(\mathcal{F}_G)$  und  $U(\mathcal{G})$  sind vom gleichen Kettenhomotopietyp.

Der Rest folgt aus der Tatsache, dass Kettenhomotopieäquivalenzen Isomorphismen in der Homologie induzieren, d. h., die graduierten Homologiegruppen von Kettenkomplexen vom gleichen Kettenhomotopietyp sind isomorph. ■

Unter gewissen Voraussetzungen auf  $U$  ist nur eine der Homologiegruppen  $H_k(U(\mathcal{G}))$  nichttrivial, aber sie liefert dann einen nützlichen und wichtigen neuen Funktor:

**Bemerkung und Definition 7.18** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  ein *kovariant* *rechts-exakter* oder *kontravariant* *links-exakter* additiver Funktor.

Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe und sei

$$\{0\} \longrightarrow R(G) \xrightarrow{i_G} F(G) \xrightarrow{\pi_G} G \longrightarrow \{0\} \quad (7.20)$$

die standard freie Auflösung  $\mathcal{F}_G$  von  $G$ .

Die Voraussetzung, dass  $U$  kovariant und rechts-exakt oder kontravariant und links-exakt ist, besagt genau, dass  $U(\mathcal{F}_G)$ , die Bildfolge unter  $U$ , exakt ist bis auf die Stelle  $U(R(G))$ . Diese Folge können wir durch Anfügung von  $\{0\}$ -Gruppen in beiden Richtungen zu einem Kettenkomplex fortsetzen, aber diese Fortsetzung ist trivialerweise an den Stellen  $\{0\}$  exakt, so dass auch der resultierende unendlich lange Kettenkomplex nur an der Stelle  $U(R(G))$  inexakt sein kann.

Das bedeutet, dass dieser Kettenkomplex nur an dieser Stelle nichttriviale Homologie hat. Es handelt sich um die Homologie in Dimension  $k_0 := 2$  im kovarianten Fall und die Homologie in Dimension  $k_0 := -2$  im kontravarianten Fall.

Wir nennen den Funktor  $H_{k_0}U\mathcal{F}$ , die einzige nichttriviale Homologiegruppe des Bildkettenkomplexes unter  $U$ , den *ersten abgeleiteten Funktor* von  $U$  und bezeichnen ihn mit  $U'$ .

Er ist ein additiver Funktor von der gleichen Varianz wie  $U$  (weil  $HU\mathcal{F}$  diese Eigenschaften hat).

Man kann diese Homologiegruppe sogar genauer beschreiben.

Im kovarianten Fall hat die Bildfolge die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U(R(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(G) \longrightarrow \{0\} \quad (7.21)$$

und die Rändergruppe an der Stelle  $U(R(G))$  ist offenbar  $\{0\}$ , so dass

$$H_2(U(\mathcal{F}_G)) \cong Z_2(U(\mathcal{F}_G)) = \text{Ker } U(i_G).$$

Das heißt, im kovarianten Fall ist

$$U'(G) = \text{Ker } U(i_G), \quad (7.22)$$

wo  $i_G$  die Inklusion  $R(G) \longrightarrow F(G)$  ist.

Genauso gut kann man  $U'(G)$  berechnen als die zweite Homologiegruppe des Bildes unter  $U$  einer beliebigen freien Auflösung von  $G$ .

Im kontravarianten Fall hat die Bildfolge die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U(G) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(R(G)) \longrightarrow \{0\} \quad (7.23)$$

und die Zykelgruppe an der Stelle  $U(R(G))$  ist die ganze Gruppe  $U(R(G))$ , so dass

$$H_{-2}(U(\mathcal{F}_G)) \cong \frac{U(R(G))}{B_{-2}(U(\mathcal{F}_G))} = \frac{U(R(G))}{\text{Bild } U(i_G)} = \text{Coker } U(i_G).$$

Das heißt, im kontravarianten Fall ist

$$U'(G) = \text{Coker } U(i_G). \quad (7.24)$$

Genauso gut kann man  $U'(G)$  im kontravarianten Fall berechnen als die minus-zweite Homologiegruppe (oder zweite Kohomologiegruppe) des Bildes unter  $U$  einer beliebigen freien Auflösung von  $G$ .

**Lemma 7.19** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ein kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter additiver Funktor und sei  $U'$  sein erster abgeleiteter Funktor.

a) Wenn  $U$  ein exakter Funktor ist, dann ist  $U'$  der triviale Funktor  $\{0\}$ .

b) Wenn  $G$  eine freie abelsche Gruppe ist, dann ist  $U'(G) = \{0\}$ .

*Beweis.* a) ist klar, denn ein exakter Funktor bildet jede freie Auflösung (die ja eine exakte Folge ist) wieder in eine exakte Folge ab, und diese hat triviale Homologie.

b): Wenn  $G$  eine freie abelsche Gruppe ist, dann spaltet die standard freie Auflösung  $\mathcal{F}_G$ , weil freie abelsche Gruppen projektiv sind. Nach Lemma 6.27 ist auch die Bildfolge  $U(\mathcal{F}_G)$  exakt und hat verschwindende Homologie. ■

**Bemerkung 7.20** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  ein kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter additiver Funktor.

Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe und sei

$$\{0\} \longrightarrow R(G) \xrightarrow{i_G} F(G) \xrightarrow{\pi_G} G \longrightarrow \{0\}$$

die standard freie Auflösung  $\mathcal{F}_G$  von  $G$ .

Den Wert  $U'(G)$  des abgeleiteten Funktors  $U'$  erhalten wir im kovarianten Fall als  $\text{Ker } U(i_G)$ , wie wir in Definition 7.18 gesehen haben, und im kontravarianten Fall als  $\text{Coker } U(i_G)$ . Aber auch die *jeweils andere* zu  $U(i_G)$  assoziierte Gruppe, nämlich  $\text{Coker } U(i_G)$  im kovarianten Fall und  $\text{Ker } U(i_G)$  im kontravarianten Fall, hat eine interessante Bedeutung.

Sie ist nämlich isomorph zum Wert  $U(G)$  des *unabgeleiteten* Funktors, wie man aus der an der Stelle  $U(G)$  noch exakten Bildfolge der standard freien Auflösung sofort sieht.

Weil im kovarianten Fall die Folge

$$U(R(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(G) \longrightarrow \{0\}$$

bei  $U(G)$  exakt ist, induziert  $U(\pi_G)$  einen natürlichen Isomorphismus

$$\overline{U(\pi_G)}: \frac{U(F(G))}{\text{Ker } U(\pi_G)} = \frac{U(F(G))}{\text{Bild } U(i_G)} = \text{Coker } U(i_G) \xrightarrow{\cong} U(G),$$

und weil im kontravarianten Fall die Folge

$$\{0\} \longrightarrow U(G) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(R(G))$$

bei  $U(G)$  exakt ist, induziert  $U(\pi_G)$  einen natürlichen Isomorphismus

$$\overline{U(\pi_G)}: U(G) \xrightarrow{\cong} \text{Bild } U(\pi_G) = \text{Ker } U(i_G) \subseteq U(F(G)).$$

Es gibt noch eine andere nützliche Deutung dieser Situation. Wie  $U'(G)$  kann man auch  $U(G)$  als eine Homologiegruppe eines geeigneten Kettenkomplexes auffassen. Dazu entfernen wir die Gruppe  $G = G_0$  aus seinen freien Auflösungen  $\mathcal{G} = \{G_n\}$  und betrachten stattdessen die **gekürzte freie Auflösung**

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{G_n \mid n \geq 1\},$$

in der übrigens nur freie Gruppen vorkommen. Die gekürzte freie Auflösung ist nicht mehr exakt (an der Stelle  $G_1$  und nur an dieser ist sie inexakt), aber sie ist immer noch ein Kettenkomplex.

In einer beliebigen exakten Folge der Gestalt

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

induziert die surjektive Abbildung  $g$  einen Isomorphismus

$$\bar{g}: B/(\text{Ker } g) = B/(\text{Bild } f) = (\text{Ker } 0)/(\text{Bild } f) \longrightarrow C$$

und  $C$  können wir deshalb auffassen als die niedrigste nichttriviale Homologiegruppe der gekürzten Folge

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\},$$

Die Abbildung  $g$  können wir dabei auffassen als die Projektion der niedrigsten Zykelgruppe  $B$  in diese Homologiegruppe.

Ferner, jeder Morphismus

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & \{0\} \end{array} \quad (7.25)$$

von solchen exakten Folgen lässt sich auf die gekürzten Folgen einschränken und die Einschränkung

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \longrightarrow \{0\} \\ \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

ist eine Kettenabbildung  $\varphi$  der gekürzten Folgen, die in der niedrigsten Homologie die ursprüngliche Abbildung  $\varphi_0$  als  $H_1(\varphi)$  induziert. Denn unter

der Identifikation von  $H_1$  mit  $C$  ist  $H_1(\varphi)$  der *eindeutige* Homomorphismus  $C \longrightarrow C'$  mit  $H_1(\varphi) \circ g = g' \circ \varphi_1$ . Weil das rechte Quadrat im ungekürzten Diagramm (7.25) kommutiert, ist  $\varphi_0$  ein solcher Homomorphismus und deshalb gleich  $H_1(\varphi)$ .

Wenden wir diese Bemerkungen auf die gekürzte freie Auflösung an, so sehen wir, dass  $G \cong H_1(\tilde{\mathcal{G}})$ .

Das gilt nach Herleitung unabhängig von der Wahl der freien Auflösung  $\mathcal{G}$ , aber man kann noch mehr dazu sagen.

Für die gekürzten freien Auflösungen gelten nämlich noch alle Aussagen von Lemma 7.15. Insbesondere, wenn  $G$  und  $H$  additive abelsche Gruppen sind mit freien Auflösungen  $\mathcal{G}$  bzw.  $\mathcal{H}$ , so induziert jeder Gruppenhomomorphismus  $f: G \longrightarrow H$  eine Kettenabbildung  $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  mit  $f = H_1(\tilde{\varphi})$ . Man erhält eine solche Kettenabbildung, indem man  $f$  zu einer Kettenabbildung  $\varphi$  der ungekürzten freien Auflösungen erweitert und diese auf die gekürzten freien Auflösungen einschränkt.

Umgekehrt entsteht jede Kettenabbildung  $\tilde{\varphi}$  der gekürzten freien Auflösungen mit  $f = H_1(\tilde{\varphi})$  genau auf diese Weise, denn die genannte Bedingung besagt nichts anderes, als dass  $\tilde{\varphi}$  sich zu einer Kettenabbildung  $\varphi$  der ungekürzten freien Auflösungen erweitert, wenn man  $\varphi_0 = f$  setzt; die Homologiebedingung ist, wie wir gesehen haben, gleichbedeutend damit, dass dann das rechteste, neu hinzugekommene Quadrat kommutiert.

Es gibt also eine Bijektion zwischen den  $f$  ergänzenden Kettenabbildungen der ungekürzten freien Auflösungen und den Kettenabbildungen der gekürzten freien Auflösungen, die in der ersten Homologie die Abbildung  $f$  induzieren.

Je zwei solche Kettenabbildungen der gekürzten freien Auflösungen sind kettenhomotop, denn je zwei  $f$  erweiternde Kettenabbildungen der *ungekürzten* freien Auflösungen sind kettenhomotop nach Lemma 7.15 vermöge einer Kettenhomotopie  $\Phi$  mit  $\Phi_0 = 0$ . Wegen dieser Bedingung ist aber die Einschränkung  $\tilde{\Phi}$  von  $\Phi$  auf die gekürzten freien Auflösungen immer noch eine Kettenhomotopie zwischen den „gekürzten“ Kettenabbildungen.  $\Phi_0$  hat ja als Nullabbildung zu dieser Eigenschaft nichts beigetragen, also geht die Eigenschaft nicht verloren, wenn man  $\Phi_0$  nicht mehr hat.

Zusammenfassend folgt aus diesen Überlegungen, dass, wie für die ungekürzte freie Auflösung in Korollar 7.17, auch die **gekürzte standard freie Auflösung**  $\tilde{\mathcal{F}}$  ein wohldefinierter Funktor  $\mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{HKK}$  ist, und für jeden additiven Funktor  $V: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp}$  ist  $H \circ V \circ \tilde{\mathcal{F}}$  ein wohldefinierter additiver Funktor  $HV\tilde{\mathcal{F}}: \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{GAG}$  mit der gleichen Varianz wie  $V$ .

Ferner, für eine additive abelsche Gruppe  $G$  lässt sich  $HV\tilde{\mathcal{F}}(G)$  auch als  $H(V(\tilde{\mathcal{G}}))$  berechnen für eine *beliebige* gekürzte freie Auflösung  $\tilde{\mathcal{G}}$  von  $G$ .



Kehren wir jetzt wieder zu unserer Ausgangssituation zurück, wo  $U$  ein kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter additiver Funktor  $\mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  war. Wir verwenden im Folgenden die Pluszeichen im kovarianten Fall und die Minuszeichen im kontravarianten Fall.

Wie haben nach wie vor

$$U'(G) = H_{\pm 2} U \tilde{\mathcal{F}}(G) = H_{\pm 2} (U(\tilde{\mathcal{G}}))$$

für jede gekürzte freie Auflösung  $\tilde{\mathcal{G}}$  von  $G$ , denn die Kürzung in Dimension 0 hat keinen Einfluss auf die Homologie in Dimension  $\pm 2$ .

Aber weil die Bildfolgen unter  $U$  der ungekürzten freien Auflösungen immer noch an der Stelle  $G$  exakt sind, gilt für die gekürzten Auflösungen nun

$$U(G) = H_{\pm 1} U \tilde{\mathcal{F}}(G) = H_{\pm 1} (U(\tilde{\mathcal{G}})).$$

Im kovarianten Fall ist das sofort klar aus der obigen Diskussion, aber auch im kontravarianten Fall ist es ganz einfach einzusehen, denn die gekürzte Bildfolge hat die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U(F(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(R(G))$$

und die Rändergruppe in Dimension  $-1$  ist die Nullgruppe  $\{0\}$  und die Homologiegruppe  $H_{-1}(U(\tilde{\mathcal{F}}_G))$  ist somit isomorph zur Zykelgruppe

$$Z_{-1}(U(\tilde{\mathcal{F}}_G)) = \text{Ker } U(i_G) \cong U(G).$$

Wir sollten zum Schluss noch bemerken, dass wir hier die Dimensionen in diesen Folgen konsistent mit unserer Wahl für die ungekürzten freien Auflösungen gewählt haben. In der Literatur werden oft nur die gekürzten Auflösungen für Homologiebetrachtungen benutzt und dann so, dass die Stelle  $F(G)$  die Dimension 0 erhält, so dass alle anderen Aussagen auch mit verschobenen Dimensionen erscheinen. Das ist natürlich nur eine Frage von Konventionen; es gibt keine eindeutig „richtige“ Wahl der Dimensionen.

Wir kennen schon zwei Funktoren, die die Voraussetzung von Definition 7.18 und Bemerkung 7.20 erfüllen.

**Definition 7.21** Sei  $H$  eine additive abelsche Gruppe.

Der Funktor  $\otimes$  ist in beiden Variablen kovariant und rechts-exakt. Der erste abgeleitete Funktor von  $\cdot \otimes H$  heißt

$$\text{Tor}(\cdot, H).$$

Er nennt sich der **Torsionsfunktork** (nicht zu verwechseln mit der Torsionsuntergruppe einer Gruppe!) und ist ein additiver kovarianter Funktor in der ersten Variable.

Der Funktor  $\text{Hom}(\cdot, H)$  ist links-exakt und kontravariant. Sein erster abgeleiteter Funktor heißt

$$\text{Ext}(\cdot, H).$$

Er nennt sich der **Extensionsfunktork** und er ist ein additiver kontravarianter Funktor in der ersten Variablen.

**Lemma 7.22** *Seien  $G$  und  $H$  additive abelsche Gruppen. Die Funktoren  $\text{Tor}(G, H)$  und  $\text{Ext}(G, H)$  sind auch Funktoren in der zweiten Variablen  $H$  und sind in dieser Variablen additiv und kovariant.*

*In anderen Worten,  $\text{Tor}$  und  $\text{Ext}$  sind additive Funktoren in zwei Variablen.*

*Beweis.* Seien  $H$  und  $K$  additive abelsche Gruppen und sei  $h: H \rightarrow K$  ein Gruppenhomomorphismus.

Sei  $U$  einer der Funktoren  $\otimes$  oder  $\text{Hom}$  von zwei Variablen. Dann ist  $U(\cdot, h)$  eine natürliche Transformation von dem Funktor  $U_H = U(\cdot, H)$  zu dem Funktor  $U_K = U(\cdot, K)$ , denn wenn  $A$  und  $B$  zwei additive abelsche Gruppen sind und wenn  $f: A \rightarrow B$  ein Gruppenhomomorphismus ist, so kommutieren offensichtlich die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes H & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_H} & B \otimes H \\ \text{id}_A \otimes h \downarrow & & \downarrow \text{id}_B \otimes h \\ A \otimes K & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_K} & B \otimes K \end{array} \quad (7.26a)$$

und

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B, H) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, H)} & \text{Hom}(A, H) \\ \text{Hom}(B, h) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(A, h) \\ \text{Hom}(B, K) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, K)} & \text{Hom}(A, K) \end{array} \quad (7.26b)$$

Im ersten Diagramm ergeben beide Verknüpfungen entlang den Seiten des Quadrats den Homomorphismus  $f \otimes h$  und im zweiten Diagramm ergeben beide Verknüpfungen entlang den Seiten des Quadrats den Homomorphismus  $\text{Hom}(f, h)$ .

Hieraus folgt, dass für jeden Kettenkomplex  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  der Gruppenhomomorphismus  $h$  eine *Kettenabbildung*

$$U_h: U_H(\mathcal{C}) = U(\mathcal{C}, H) \longrightarrow U_K(\mathcal{C}) = U(\mathcal{C}, K)$$

induziert, und diese induziert für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  wiederum einen Gruppenhomomorphismus

$$H_n(U_h): H_n(U_H(\mathcal{C})) \longrightarrow H_n(U_K(\mathcal{C})).$$

Insbesondere, wenn  $G$  eine additive abelsche Gruppe ist und wenn  $\mathcal{C}$  die standard freie Auflösung von  $G$  ist, so induziert  $h$  einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$U'(G, h): U'(G, H) \longrightarrow U'(G, K).$$

Weil schon  $U$  ein kovarianter additiver Funktor in der zweiten Variablen ist, vererben sich offensichtlich die funktoriellen Eigenschaften bezüglich Identitäten und Verknüpfungen sowie die Additivität bezüglich  $h$  auf die natürliche Transformation  $U_h$  als Kettenabbildung und auf  $H_n(U_h)$  und somit auch auf  $U'(G, \cdot)$ .

Das heißt,  $U' = \text{Tor}$  oder  $\text{Ext}$  ist ein additiver kovarianter Funktor in der zweiten Variablen. ■

**Bemerkung 7.23** Sei  $U$  einer der Funktoren in zwei Variablen  $\otimes$ ,  $\text{Hom}$ ,  $\text{Tor}$  oder  $\text{Ext}$ . Seien  $f: A \rightarrow B$  und  $h: H \rightarrow K$  Homomorphismen zwischen abelschen Gruppen.

Dann kommutieren die von dem Funktor induzierten Homomorphismen  $U(f, \cdot)$  und  $U(\cdot, h)$  miteinander, oder anders gesagt:  $U(f, \cdot)$  ist eine natürliche Transformation  $U(A, \cdot) \longleftrightarrow U(B, \cdot)$  (Pfeilrichtung entsprechend der Varianz) und  $U(\cdot, h)$  ist eine natürliche Transformation  $U(\cdot, H) \longrightarrow U(\cdot, K)$ .

*Beweis.* Zu prüfen ist, dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U(A, H) & \xrightarrow{U(f, H)} & U(B, H) \\ U(A, h) \downarrow & & \downarrow U(B, h) \\ U(A, K) & \xrightarrow{U(f, K)} & U(B, K) \end{array} \quad (7.27a)$$

im kovarianten Fall, und

$$\begin{array}{ccc}
 U(B, H) & \xrightarrow{U(f, H)} & U(A, H) \\
 U(B, h) \downarrow & & \downarrow U(A, h) \\
 U(B, K) & \xrightarrow{U(f, K)} & U(A, K)
 \end{array} \quad (7.27b)$$

im kontravarianten Fall, kommutieren (die hier erwähnte Varianz ist bezüglich der ersten Variablen zu verstehen; die genannten Funktoren sind alle kovariant in der zweiten Variablen).

Für die Funktoren  $\otimes$  und  $\text{Hom}$  spezialisieren sich diese Diagramme zu den Diagrammen (7.26), die offensichtlich kommutieren, wie schon im Beweis von Lemma 7.22 bemerkt wurde.

Die Diagramme (7.26) bleiben kommutativ, wenn man die Gruppen  $A$  und  $B$  durch ihre standard freie Auflösung ersetzt und wenn man  $f$  durch eine Erweiterung zu einer Kettenabbildung dieser Auflösungen ersetzt, und wenn  $U(\cdot, h)$  nun auch eine Kettenabbildung der entstehenden Kettenkomplexe ist und nicht nur ein einzelner Homomorphismus. Die Kommutativität der Quadrate bleibt dann noch erhalten, wenn man zu den einzelnen Homologiegruppen und den induzierten Homomorphismen in Homologie übergeht. Dass ergibt die Kommutativität der Diagramme (7.27) auch für die abgeleiteten Funktoren  $\text{Tor}$  und  $\text{Ext}$ . ■

Da  $\text{Tor}$  aus dem „symmetrischen“ Funktor  $\otimes$  in zwei Variablen abgeleitet wird, ist es nicht überraschend (aber trotzdem nicht trivial zu beweisen), dass auch  $\text{Tor}$  symmetrisch ist.

**Lemma 7.24** *Für additive abelsche Gruppen  $G$  und  $H$  gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\tau': \text{Tor}(G, H) \longrightarrow \text{Tor}(H, G).$$

*Beweis.* Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \{0\} & \longrightarrow & R(G) \otimes R(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes i_H} & R(G) \otimes F(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_H} & R(G) \otimes H \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow i_G \otimes \text{id}_{R(H)} & & \downarrow i_G \otimes \text{id}_{F(H)} & & \downarrow i_G \otimes \text{id}_H \\
 \{0\} & \longrightarrow & F(G) \otimes R(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes i_H} & F(G) \otimes F(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_H} & F(G) \otimes H \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\}
 \end{array}$$

Die Zeilen sind das Ergebnis der Anwendung der Funktoren  $R(G) \otimes \cdot$  und  $F(G) \otimes \cdot$  auf die standard freie Auflösung von  $H$ , und weil  $R(G)$  und  $F(G)$  freie abelsche Gruppen sind, sind diese Tensorfunktoren exakt nach Lemma 7.7, und die Zeilen sind noch kurze exakte Folgen.

Die Spalten des Diagramms sind das Ergebnis der Anwendung der rechts-exakten kovarianten Funktoren  $\cdot \otimes R(H)$ ,  $\cdot \otimes F(H)$  und  $\cdot \otimes H$  auf die gekürzte standard freie Auflösung von  $G$ , und sie sind Kettenkomplexe.

Das ganze Diagramm ist also eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen, und auf Grund von Bemerkung 7.20 hat ihre lange exakte Homologiefolge

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_2(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes R(H)) & \longrightarrow & H_2(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes F(H)) & \longrightarrow & H_2(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes H) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \longrightarrow H_1(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes R(H)) \longrightarrow H_1(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes F(H)) \longrightarrow H_1(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes H) \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \text{Tor}(G, R(H)) & \longrightarrow & \text{Tor}(G, F(H)) & \longrightarrow & \text{Tor}(G, H) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \longrightarrow G \otimes R(H) \longrightarrow G \otimes F(H) \longrightarrow G \otimes H \longrightarrow \{0\}. \end{array} \quad (7.28)$$

Dies können wir noch vereinfachen, denn  $R(H)$  und  $F(H)$  sind freie abelsche Gruppen und das Tensorieren mit ihnen ist ein exakter Funktor. Deshalb folgt aus Lemma 7.19 a), dass

$$\text{Tor}(G, R(H)) = \text{Tor}(G, F(H)) = \{0\}.$$

Außerdem ist  $\otimes$  symmetrisch und wir haben nach Lemma B.12 a) natürliche Isomorphismen zwischen den Tensorprodukten in (7.28) und den Tensorprodukten der gleichen Gruppen, aber mit vertauschten Faktoren. Diese Isomorphismen bilden, weil sie natürlich sind, mit der vereinfachten exakten Folge (7.28) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \text{Tor}(G, H) & \xrightarrow{\beta} & G \otimes R(H) & \xrightarrow{\text{id}_G \otimes i_H} & G \otimes F(H) & \xrightarrow{\text{id}_G \otimes \pi_H} & G \otimes H & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \tau' \downarrow & & \cong \downarrow \tau_3 & & \cong \downarrow \tau_2 & & \cong \downarrow \tau_1 & & \\ \{0\} & \longrightarrow & \text{Tor}(H, G) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & R(H) \otimes G & \xrightarrow{i_H \otimes \text{id}_G} & F(H) \otimes G & \xrightarrow{\pi_H \otimes \text{id}_G} & H \otimes G & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

(zunächst noch ohne den gestrichelten Pfeil  $\tau'$ ).

Die obere Zeile ist die exakte Folge (7.28) und die untere Zeile ist der Kettenkomplex  $\mathcal{F}_H \otimes G$ , exakt gemacht durch die Ergänzung mit dem Wert des abgeleiteten Funktors  $\text{Tor}(H, G) = \text{Ker } i_H \otimes \text{id}_G$  am linken Ende; die Abbildung  $\tilde{\beta}$  ist einfach die Inklusion von  $\text{Ker } i_H \otimes \text{id}_G$  in  $R(H) \otimes G$ .

Wenn man in diesem Diagramm die Tor Terme durch  $\{0\}$  ersetzt, bleiben die Zeilen an ihrem linken Ende zwar nicht exakt, aber sie bleiben Kettenkomplexe und die senkrechten Pfeile  $\tau_i$  (mit  $0$  an der Stelle, wo die Tor Terme waren) bilden eine Kettenabbildung  $\tau$  zwischen diesen Kettenkomplexen. Wegen der Exaktheit der ursprünglichen Zeilen sind die „gestrichelten“ Tor Terme nichts anderes als die zweite Homologie der durch die Streichung entstandenen Kettenkomplexe, und  $H_2(\tau)$  ist ein Homomorphismus  $\tau': \text{Tor}(G, H) \longrightarrow \text{Tor}(G, H)$ , der in dem *ursprünglichen* Diagramm den gestrichelten Pfeil einfüllt, so dass er mit dem Rest des Diagramms kommutiert.

Alle Gruppen und alle Homomorphismen im Kettenkomplexdiagramm sind natürlich, wovon man sich, auch mit Hilfe früherer Aussagen, leicht überzeugen kann. Aus Lemma 1.29 über die Verknüpfung eines Funktors (hier  $H_2$ ) mit einer natürlichen Transformation (hier  $\tau$ ) folgt sofort, dass auch  $\tau'$  eine natürliche Transformation ist. Und das 5-er Lemma angewendet auf das mit  $\tau'$  eingefüllte ursprüngliche Diagramm impliziert, dass  $\tau'$  ein Isomorphismus ist. ■

Zum Schluss berechnen wir noch einige Werte unserer neuen Funktoren.

**Beispiel 7.25** Sei  $F$  eine freie abelsche Gruppe und sei  $G$  eine beliebige abelsche Gruppe. Dann ist

$$\text{Tor}(F, G) \cong \text{Tor}(G, F) \cong \text{Ext}(F, G) = \{0\}.$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus Lemma 7.19. Denn  $\text{Tor}(F, G)$  und  $\text{Ext}(F, G)$  sind  $\{0\}$  nach Teil b) dieses Lemmas, und  $\text{Tor}(G, F) = \{0\}$  wegen der Symmetrie von Tor, oder nach Teil a) des genannten Lemmas, weil Tensorieren mit einer freien Gruppe ein exakter Funktor ist. ■

**Beispiel 7.26** Sei  $n \geq 2 \in \mathbf{N}$  und sei  $G$  eine beliebige additive abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit  $\mu_n^G$  die Multiplikation mit  $n$  in  $G$ , also den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mu_n^G: G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto ng \end{aligned}$$

Dann ist

$$\text{Tor}(\mathbf{Z}_n, G) \cong \text{Tor}(G, \mathbf{Z}_n) \cong G^{(n)} = \text{Ker } \mu_n^G,$$

und

$$\operatorname{Ext}(\mathbf{Z}_n, G) = G_n := \frac{G}{nG} = \operatorname{Coker} \mu_n^G \cong \mathbf{Z}_n \otimes G.$$

*Beweis.*  $\mathbf{Z}_n$  hat eine freie Auflösung der Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_n^{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_n \longrightarrow \{0\}. \quad (7.29)$$

Für die Berechnung von  $\operatorname{Tor}(\mathbf{Z}_n, G)$  tensorieren wir (7.29) mit  $G$  und erhalten eine noch exakte Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z} \otimes G & \xrightarrow{\mu_n^{\mathbf{Z}} \otimes \operatorname{id}_G} & \mathbf{Z} \otimes G & \longrightarrow & \mathbf{Z}_n \otimes G & \longrightarrow & \{0\} \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ G & \xrightarrow{\mu_n^G} & G & & & & \end{array} \quad (7.30)$$

Die Identifizierung zwischen der oberen und der unteren Zeile in diesem Diagramm erhält man aus Lemma B.12 b), woraus auch klar ist, dass die Abbildung  $\mu_n^{\mathbf{Z}} \otimes \operatorname{id}_G$  in der oberen Zeile die Multiplikation mit  $n$  ist und der Abbildung  $\mu_n^G$  in der unteren Zeile entspricht.

$\operatorname{Tor}(\mathbf{Z}_n, G)$  ist definiert als  $\operatorname{Ker}(\mu_n^{\mathbf{Z}} \otimes \operatorname{id}_G) \cong \operatorname{Ker} \mu_n^G = G^{(n)}$ , und dies ist auch  $\operatorname{Tor}(G, \mathbf{Z}_n)$  wegen der Symmetrie von  $\operatorname{Tor}$ .

Weil (7.30) am rechten Ende noch exakt ist, können wir aus diesem Diagramm auch ablesen, dass

$$\mathbf{Z}_n \otimes G \cong \operatorname{Coker} \mu_n^G = G_n. \quad (7.31)$$

Für die Berechnung von  $\operatorname{Ext}(\mathbf{Z}_n, G)$  wenden wir  $\operatorname{Hom}(\cdot, G)$  auf (7.29) an und erhalten als noch exakte Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}_n, G) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, G) & \xrightarrow{\operatorname{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \operatorname{id}_G)} & \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, G) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & G & \xrightarrow{\mu_n^G} & G \end{array}$$

Die Identifikation zwischen der oberen und der unteren Zeile in diesem Diagramm erhält man aus Lemma 6.21 a). Für jedes Element  $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, G)$  und für jedes  $k \in \mathbf{Z}$  ist

$$(\operatorname{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \operatorname{id}_G)(\alpha))(k) = (\alpha \circ \mu_n^{\mathbf{Z}})(k) = \alpha(nk) = n\alpha(k)$$

und deshalb ist  $\operatorname{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \operatorname{id}_G)$  die Multiplikation mit  $n$  und die entsprechende Abbildung in der unteren Zeile ist  $\mu_n^G$ .

$\operatorname{Ext}(\mathbf{Z}_n, G)$  ist definiert als  $\operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \operatorname{id}_G)) \cong \operatorname{Coker} \mu_n^G = G_n$ . ■

Für Paare von zyklische Gruppen gilt also

**Beispiele 7.27** Seien  $m$  und  $n$  positive natürliche Zahlen, und sei  $d := \text{ggT}(m, n)$  ihr größter gemeinsamer Teiler. Es gilt

- a)  $\text{Tor}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \text{Ext}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \{0\}$
- b)  $\text{Tor}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \cong \text{Ext}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) = \{0\}$
- c)  $\text{Tor}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \{0\}$       und       $\text{Ext}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_n$
- d)  $\text{Tor}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_d \cong \text{Ext}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n)$

*Beweis.* a) und b) und die Aussage über Tor in c) folgen alle aus Beispiel 7.25.

Die Aussage über Ext in c) folgt aus Beispiel 7.26. Dieses Beispiel besagt auch, dass  $\text{Tor}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) = \mathbf{Z}_n^{(m)}$  und im Beweis von Beispiel 6.22 d) haben wir schon gesehen, dass  $\mathbf{Z}_n^{(m)} \cong \mathbf{Z}_d$ .

Und schließlich haben wir noch  $\text{Ext}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) = (\mathbf{Z}_n)_m$  nach Beispiel 7.26. Man kann zwar mit nicht allzu viel Mühe direkt ausrechnen, dass dies  $\mathbf{Z}_d$  ist, aber es geht auch einfacher, denn in Beispiel 7.26 haben wir gesehen, dass  $(\mathbf{Z}_n)_m \cong \mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n$  und  $\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_d$  nach Beispiel 6.19 c).

Damit sind alle Behauptungen bewiesen. ■

Mit Hilfe dieser Berechnung für zyklische Gruppen sind wir nun wegen der Additivität in der Lage, Tor und Ext für jedes Paar von endlich erzeugten abelschen Gruppen auszurechnen.

Wir werden gleich sehen, dass diese abgeleiteten Funktoren sehr nützlich sind, um die Homologie von Kettenkomplexen zu berechnen, die durch Anwendung von  $\otimes$  und  $\text{Hom}$  aus den singulären Kettenkomplexen gewonnen werden. Bisher sind uns solche Kettenkomplexe begegnet bei der Konstruktion der singulären Homologie mit anderen Koeffizienten als  $\mathbf{Z}$  und bei der Definition der singulären Kohomologie mit beliebigen Koeffizienten. Sie kommen auch vor bei der Berechnung der Homologie von Produkträumen, obwohl wir in diesem Semester leider nicht die Gelegenheit haben werden, das näher zu erläutern.

Am Ende des letzten Kapitels wurde in Aussicht gestellt, dass man die Homologie- oder Kohomologiegruppen mit einer beliebigen abelschen Koeffizientengruppe  $G$  auch ohne eine mühselige Anwendung der Eilenberg-Steenrod Axiome direkt aus den klassischen singulären Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}$  bestimmen kann. Das geschieht mit Hilfe einer spaltenden kurzen exakten Folge, die so genannte **Künnethfolge**, und der fundamentale Satz, der diese Folge bereitstellt, ist Satz 7.29, direkt nach folgender vorbereitenden Definition.



**Definition 7.28** Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe.

Wir können aus dieser Gruppe unter Beibehaltung der gegebenen direkten Summenzerlegung eine neue graduierte abelsche Gruppe  $G_+$  machen, indem wir nur die Graduierung um eine Stufe verschieben. Wir definieren also

$$G_+ := G$$

als Gruppe, aber für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  setzen wir

$$(G_+)_n := G_{n-1}.$$

Diese Konstruktion erlaubt es manchmal, Homomorphismen, die es eigentlich nicht sind, als Grad 0 Homomorphismen zu betrachten. Sie wird in der Aussage und im Beweis des folgenden Satzes nützlich sein.

**Satz 7.29 (Künneth)** Sei  $U: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  ein additiver, kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter Funktor. Ein solcher Funktor  $U$  besitzt einen abgeleiteten Funktor  $U'$ .

Sei  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ein freier Kettenkomplex.

Dann gibt es eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow U(H\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} H(UC) \xrightarrow[\text{Grad } -1]{\zeta} U'(H\mathcal{C}) \rightarrow \{0\} \quad (7.32a)$$

wenn  $U$  kovariant ist, oder

$$\{0\} \rightarrow U'(H\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{Grad } +1]{\zeta} H'(UC) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} U(H\mathcal{C}) \rightarrow \{0\} \quad (7.32b)$$

wenn  $U$  kontravariant ist, wobei in (7.32b) die unnegierte Graduierung zu verstehen ist (insbesondere ist  $UC$  ein Kokettenkomplex und die mittlere Gruppe  $H'(UC)$  in dieser Zeile ist eine Kohomologiegruppe; alle anderen Instanzen von  $H$  sind Homologiegruppen).

Die zur Varianz von  $U$  passende Folge (7.32) spaltet (aber die Spaltung ist nicht natürlich).

Diese Folge heißt die **Künnethfolge** des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$  bezüglich des Funktors  $U$ .

Weil die Künnethfolge spaltet, gibt es einen (nichtnatürlichen) Isomorphismus

$$H(UC) \cong U(H\mathcal{C}) \oplus U'(H_+\mathcal{C}) \quad (7.33)$$

(wo „ $H_+$ “ im Sinne von Definition 7.28 zu verstehen ist).

*Beweis.* Sei  $Z$  die Zykelgruppe von  $C$  und sei  $B$  die Rändergruppe; als Untergruppen der freien Gruppe  $C$  sind sie freie graduierte abelsche Gruppen. Aus diesen Gruppen und aus der Konstruktion von  $HC$  gewinnen wir einige nützliche spaltende kurze exakte Folgen von Kettenkomplexen.

Auf  $Z$  ist der Randoperator  $\partial \equiv 0$ , denn  $Z$  ist ja definiert als  $\text{Ker } \partial$ , und  $\partial$  ist natürlich auch  $0$  auf der Untergruppe  $B$  von  $Z$ . Das bedeutet aber, dass  $\partial Z \subseteq Z$  und  $\partial B \subseteq B$ , d. h.,  $Z$  und  $B$  sind Unterkettenkomplexe von  $C$ , mit verschwindendem Randoperator. Weil der Randoperator auf ihnen  $0$  ist, sind sie gleich ihrer eigenen Zykelgruppen, ihre Rändergruppen sind  $\{0\}$ , und sie sind somit natürlich isomorph zu ihrer eigenen Homologie.

Sei  $i$  die Inklusion  $i: Z \longrightarrow C$  und sei  $j$  die Inklusion  $j: B \longrightarrow Z$ . Sei  $\pi: Z \longrightarrow HC = Z/B$  die Projektion.

Die Abbildung  $\partial$  ist zunächst definiert als eine Abbildung  $C \longrightarrow C$ , aber ihre Werte liegen alle in der Untergruppe  $B \subseteq Z \subseteq C$ . Je nachdem welchen Definitionsbereich und unabhängig davon welchen Zielbereich wir für diese Abbildung wählen, liefert die gleiche Wertezuordnung insgesamt 9 verschiedene Abbildungen zwischen den Gruppen  $B$ ,  $Z$  und  $C$ ! Die auf  $Z$  oder  $B$  definierten Abbildungen sind aber alle Nullabbildungen; nur die auf  $C$  definierten Varianten können nichttrivial sein.

Wir wollen nicht unnötig pedantisch sein, aber der Rest des Beweises wird etwas klarer, wenn wir für den Definitionsbereich  $C$  zumindest die Zielgruppen  $C$  und  $B$  in der Notation für den Randoperator unterscheiden. Fortan schreiben wir  $\partial$  nur für den Randoperator als Abbildung  $C \longrightarrow C$ , und wir schreiben  $\tilde{\partial}$  für den Randoperator als Abbildung  $C \longrightarrow B$ .

Den Randoperator als Abbildung nach  $Z$  können wir dann mit  $j \circ \tilde{\partial}$  bezeichnen, und es gilt die Beziehung

$$\partial = ij\tilde{\partial}. \quad (7.34)$$

Weil  $Z = \text{Ker } \partial$  und  $B = \text{Bild } \partial$  haben wir eine kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow Z \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\tilde{\partial}} B_+ \longrightarrow \{0\}, \quad (7.35)$$

wo die Verwendung von  $B_+$  statt  $B$  am rechten Ende bewirkt, dass  $\tilde{\partial}$  in dieser Folge den Grad 0 hat. Die Homomorphismen  $i$  und  $\tilde{\partial}$  in (7.35) sind, wie man leicht nachprüft, Kettenabbildungen.

(7.35) ist sogar eine spaltende kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen, da  $B_+$  frei ist (die Spaltung besteht allerdings nicht aus Kettenabbildungen).

Weil  $HC$  definiert ist als  $\text{Coker } j$ , haben wir eine kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{\pi} HC \longrightarrow \{0\}. \quad (7.36)$$

Diese Folge spaltet nicht, aber sie ist eine freie Auflösung von  $HC$ , da  $B$  und  $Z$  frei sind.

Weil die Folge (7.35) spaltet, bleibt sie exakt, wenn wir darauf  $U$  anwenden, und wir erhalten wieder eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$\{0\} \longrightarrow UZ \xrightarrow{U(i)} UC \xrightarrow{U(\tilde{\partial})} UB_+ \longrightarrow \{0\} \quad (7.37a)$$

wenn  $U$  kovariant ist, oder

$$\{0\} \longrightarrow UB_+ \xrightarrow{U(\tilde{\partial})} UC \xrightarrow{U(i)} UZ \longrightarrow \{0\} \quad (7.37b)$$

wenn  $U$  kontravariant ist.

Weil der Randoperator der äußeren Kettenkomplexe  $Z$  und  $B_+$  in (7.35) die Nullabbildung ist und weil  $U$  additiv ist, haben auch die Bildkettenkomplexe oder Bildkokettenkomplexe  $UZ$  und  $UB_+$  die gleiche Eigenschaft: ihr Randoperator ist  $0$ , jede ihrer Ketten oder Koketten ist ein Zykel bzw. ein Kozykel, und sie sind isomorph zu ihrer eigenen Homologiegruppe bzw. Kohomologiegruppe.

Jede Kette oder Kokette in  $UZ$  und  $UB_+$  repräsentiert eine eindeutige Homologie- oder Kohomologiekategorie und jede solche Klasse wird von einer eindeutigen Kette oder Kokette repräsentiert, und aus diesem Grund können wir die Ketten und Koketten mit den Homologieklassen oder Kohomologieklassen identifizieren und brauchen die Klassenklammern  $[ ]$  nicht zu schreiben.

Wir wollen als Nächstes den verbindenden Homomorphismus  $\beta$  des exakten Homologie- oder Kohomologiedreiecks der Folge (7.37) bestimmen.

Wenn  $U$  kovariant ist, so sei  $b$  eine beliebige Kette (=Homologiekategorie) von  $UB_+$  und sei  $c \in UC$  mit  $U(\tilde{\partial})(c) = b$ . Nach Konstruktion des verbindenden Homomorphismus ist  $\beta(b) = z$ , wo  $z \in UZ$  die eindeutig bestimmte Kette ist mit

$$U(i)(z) = U(\partial)(c) = U(ij\tilde{\partial})(c) = (U(i) \circ U(j))(U(\tilde{\partial})(c)) = (U(i) \circ U(j))(b).$$

Weil  $U(i)$  injektiv ist, gilt  $\beta(b) = z = U(j)(b)$  und wir haben also

$$\beta = U(j). \quad (7.38)$$

Wenn  $U$  kontravariant ist, so sei  $z$  eine beliebige Kokette (oder Kohomologiekategorie) von  $UZ$  und sei  $c \in UC$  mit  $U(i)(c) = z$ . Nach Konstruktion des

verbindenden Homomorphismus ist  $\beta(z)$  die eindeutig bestimmte Kokette  $b \in UB_+$  mit

$$U(\tilde{\partial})(b) = U(\partial)(c) = U(ij\tilde{\partial})(c) = (U(\tilde{\partial}) \circ U(j))(U(i)(c)) = (U(\tilde{\partial}) \circ U(j))(z).$$

Weil jetzt  $U(\tilde{\partial})$  injektiv ist, ist  $\beta(z) = b = U(j)(z)$  und auch im kontravarianten Fall gilt (7.38).

Das exakte Homologie- oder Kohomologiedreieck der kurzen exakten Folge (7.37) hat also die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} UZ = H(UZ) & \xleftarrow{HU(i)} & H(UC) \\ & \searrow U(j) & \nearrow HU(\tilde{\partial}) \\ & UB_+ = H(UB_+) & \end{array} \quad (7.39)$$

wo die Pfeile für kovariantes  $U$  im Uhrzeigersinn zeigen und für kontravariantes  $U$  entgegen dem Uhrzeigersinn.

Ein wichtiger Punkt ist noch zu erwähnen: der verbindende Homomorphismus  $\beta$  hat Grad  $\pm 1$ , aber  $j$  ist eigentlich ein Grad 0 Homomorphismus  $B \rightarrow Z$  und somit hat  $U(j)$  eigentlich auch den Grad 0. Im exakten Dreieck (7.39) steht aber nicht die graduierte Gruppe  $UB$ , sondern  $UB_+$ , und als Abbildung  $B_+ \rightarrow Z$  bildet  $j$  den homogenen Anteil  $(B_+)_n := B_{n-1}$  nach  $Z_{n-1}$  ab und hat somit Grad  $-1$ . Wenn  $U$  kovariant ist, hat  $U(j)$  in (7.39) auch Grad  $-1$ , und wenn  $U$  kontravariant ist, Grad  $+1$ , genau wie  $\beta$ , so dass alles passt.

Das exakte Dreieck (7.39) können wir auch als eine lange exakte Folge von Gruppen und Homomorphismen lesen, und diese lange exakte Folge können wir wiederum nach Bemerkung 3.9 in lauter kurze exakte Folgen zerlegen, deren mittlere Gruppe eine der Gruppen aus der langen Folge ist und deren äußeren Gruppen Kerne und Bilder von Homomorphismen der langen Folge sind.

Uns interessieren dabei besonders die kurzen Faktorfolgen, die auf die homogenen Anteile von  $H(UC)$  zentriert sind, und wir können diese Faktorfolgen durch direkte Summenbildung zusammenfassen zu einer kurzen exakten Folge von graduierten abelschen Gruppen und Homomorphismen zentriert auf die ganze Gruppe  $H(UC)$ .

Die äußeren Gruppen dieser kurzen exakten Folge sind das Bild des nach  $H(UC)$  eingehenden Pfeils und das Bild des aus  $H(UC)$  herausgehenden Pfeils in (7.39), aber weil das ganze Dreieck (7.39) exakt ist, kann man diese

Gruppen auch anders beschreiben, denn sie sind auch mit dem der Stelle  $H(UC)$  gegenüberliegenden Pfeil, also mit  $U(j)$ , verbunden.

Für das Bild des aus  $H(UC)$  herausgehenden Pfeils ist das leicht einzusehen, denn das Bild dieses Pfeils ist gleich dem Kern des darauffolgenden Pfeils, also gleich  $\text{Ker } U(j)$ .

Die Beziehung für das Bild des eingehenden Pfeils ist nur ein wenig komplizierter. Um die Notation zu fixieren, betrachten wir ein allgemeines exaktes Dreieck von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & G \\ & \searrow k & \swarrow g \\ & K & \end{array}$$

Der Homomorphismus  $f$  induziert nach dem ersten Isomorphiesatz der Gruppentheorie einen natürlichen Isomorphismus

$$\bar{f}: \frac{F}{\text{Ker } f} = \frac{F}{\text{Bild } k} = \text{Coker } k \longrightarrow \text{Bild } f,$$

und in unserem Fall ist also das Bild des nach  $H(UC)$  eingehenden Pfeils natürlich isomorph (vermöge eines von diesem Pfeil induzierten Homomorphismus) zu  $\text{Coker } U(j)$ .

Wir haben also für beide Varianzfälle eine kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow \text{Coker } U(j) \xrightarrow[\overline{HU(\tilde{\partial})}]{\overline{HU(i)}} H(UC) \xrightarrow[\overline{HU(i)}}{HU(\tilde{\partial})} \text{Ker } U(j) \longrightarrow \{0\}, \quad (7.40)$$

wo die obere Pfeilbelegung für kovariantes  $U$  gilt und die untere Pfeilbelegung gilt, wenn  $U$  kontravariant ist. Wir sollten aber festhalten, dass die mittleren Pfeile in dieser Folge Grad 0 haben (denn sie werden induziert von den Grad 0 Homomorphismen des exakten Dreiecks (7.39)), und das bestimmt, welche homogenen Anteile von  $\text{Ker } U(j)$  und  $\text{Coker } U(j)$  (mit  $j$  als Grad -1 Homomorphismus  $B_+ \longrightarrow Z$ ) durch die Folge (7.40) mit  $H_n(UC)$  verbunden sind.

Wir müssen jetzt nur noch den Kern und den Cokern von  $U(j)$  bestimmen. Dazu wenden wir  $U$  auf die kurze exakte Folge (7.36) an, die eine freie Auflösung von  $HC$  ist. Das Ergebnis ist keine exakte Folge mehr, aber es lässt sich mit dem abgeleiteten Funktor erweitern zur exakten Folge

$$\{0\} \longrightarrow U'HC \longrightarrow UB \xrightarrow{U(j)} UZ \xrightarrow{U(\pi)} UHC \longrightarrow \{0\},$$

wenn  $U$  kovariant und rechts-exakt ist, oder

$$\{0\} \longrightarrow UHC \xrightarrow{U(\pi)} UZ \xrightarrow{U(j)} UB \longrightarrow U'HC \longrightarrow \{0\},$$

wenn  $U$  kontravariant und links-exakt ist. In dieser Folge steht  $UB$  und nicht  $UB_+$  und alle Homomorphismen haben Grad 0.

Um den Bezug zu (7.39) deutlicher zu machen, ersetzen wir  $B$  durch  $B_+$  (so dass das als Abbildung unveränderte  $U(j)$  den Grad  $\pm 1$  erhält) und passen die obige Folge so an, dass alle anderen Pfeile Grad 0 behalten. Nur so können wir sehen, welche homogenen Anteile von  $\text{Ker } U(j)$  und  $\text{Coker } U(j)$  in (7.40) zum homogenen Anteil  $H_n(UC)$  gehören.

Die angepassten Folgen haben die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U'H_+\mathcal{C} \longrightarrow UB_+ \xrightarrow{U(j)} UZ \xrightarrow{U(\pi)} UHC \longrightarrow \{0\}, \quad (7.41a)$$

wenn  $U$  kovariant und rechts-exakt ist, oder

$$\{0\} \longrightarrow UHC \xrightarrow{U(\pi)} UZ \xrightarrow{U(j)} UB_+ \longrightarrow U'H_+\mathcal{C} \longrightarrow \{0\}, \quad (7.41b)$$

wenn  $U$  kontravariant und links-exakt ist.

Im kovarianten Fall sehen wir, dass  $\text{Ker } U(j) = U'(H_+\mathcal{C})$  und  $U(\pi)$  induziert einen Grad 0 Isomorphismus  $\text{Coker } U(j) \cong U(HC)$ . Im kontravarianten Fall ist  $U(\pi)$  ein Grad 0 Isomorphismus  $U(HC) \cong \text{Ker } U(j)$  und  $U'(H_+\mathcal{C}) = \text{Coker } U(j)$ .

Einsetzen in (7.40) liefert die kurzen exakten Folgen (7.32), allerdings mit  $U'(H_+\mathcal{C})$  statt  $U'(HC)$ , dafür aber mit Grad 0 Homomorphismen. Wenn wir das „+“ weglassen, verändert sich der Grad von  $\zeta$  wie angegeben. Damit haben wir die Existenz und die Gestalt (7.32) der Künnethfolge bewiesen.

Wir müssen noch begründen, warum diese Folge natürlich ist.

Der Randoperator eines Kettenkomplexes ist eine natürliche Transformation, weil Kettenkomplexmorphismen, also Kettenabbildungen, nach Definition mit dem Randoperator kommutieren.

$Z$  und  $B$  sind also Kern und Bild einer natürlichen Transformation und, wie man leicht einsieht, somit Funktoren  $\mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{GAG}$ , die einer Kettenabbildung  $f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  ihre Einschränkung auf  $Z$  oder  $B$  zuordnen (in Definition 2.31 f) wurde schon erklärt, dass diese Einschränkung tatsächlich  $Z(\mathcal{C})$  nach  $Z(\mathcal{D})$  bzw.  $B(\mathcal{C})$  nach  $B(\mathcal{D})$  abbildet). Die Inklusionen  $i$  und  $j$  wie auch die Projektion  $\pi: Z \longrightarrow H$  sind offenbar natürliche Transformationen. Da  $\partial$  eine natürliche Transformation ist, ist auch  $\tilde{\partial}$  eine.

Die graduierten Homomorphismen in den kurzen exakten Folgen (7.35) und (7.36) sind also natürliche Transformationen zwischen Funktoren definiert auf  $\mathbf{KK}$ . Somit sind diese exakten Folgen natürlich. Man kann das auch so ausdrücken, dass diese kurzen Folgen funktoriell von  $\mathcal{C}$  abhängen.

Wenn wir auf (7.35) den Funktor  $U$  anwenden, erhalten wir deshalb wieder eine natürliche Folge (7.37), und weil das exakte Homologiedreieck einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen bzw. das exakte Kohomologiedreieck einer kurzen exakten Folge von Kokettenkomplexen natürlich ist, ist schließlich auch das exakte Dreieck (7.39) funktoriell in  $\mathcal{C}$ , und die in ihm vorkommenden Homomorphismen sind natürliche Transformationen.

Weil  $U(j)$  eine natürliche Transformation ist, sind die in der kurzen exakten Folge (7.40) vorkommenden Gruppen  $\text{Ker } U(j)$  und  $\text{Coker } U(j)$  Funktoren von  $\mathcal{C}$ , und die Homomorphismen in dieser Folge sind, wie man leicht einsieht, natürliche Transformationen, so dass die gesamte Folge (7.40) natürlich ist.

Diese Folge unterscheidet sich noch geringfügig von der Folge (7.32), in der anstelle von  $\text{Ker } U(j)$  und  $\text{Coker } U(j)$  die Gruppen  $U(HC)$  und  $U'(HC)$  erscheinen. Diese sind zwar isomorph zu  $\text{Ker } U(j)$  und  $\text{Coker } U(j)$  in geeigneter Reihenfolge, aber formal nicht die gleichen Gruppen. Insbesondere wird das „Standardexemplar“ von  $U'(HC)$  aus der standard freien Auflösung von  $HC$  gewonnen und nicht aus der „exotischen“ freien Auflösung (7.36). Wir müssen also zeigen, dass es *natürliche* Isomorphismen zwischen den hier auftretenden standard und exotischen Repräsentanten von  $U(HC)$  und  $U'(HC)$  gibt.

Das „echte“  $U(HC)$  kommt schon im Bild von (7.36) unter  $U$  vor und somit in der exakten Erweiterung (7.41) dieser Folge, aus der ersichtlich wird, dass die natürliche Transformation  $U(\pi)$  im kontravarianten Fall  $U(HC)$  isomorph auf  $\text{Ker } U(j)$  abbildet und im kovarianten Fall einen Isomorphismus zwischen  $\text{Coker } U(j)$  und  $U(HC)$  induziert, der offenbar auch natürlich ist. Für  $U(HC)$  können wir also den natürlichen Isomorphismus explizit angeben und an seiner expliziten Gestalt erkennen, *dass* er natürlich ist.

Für  $U'(HC)$  sind weitergehende Überlegungen nötig. Wir erinnern dazu an die Aussage von Bemerkung 7.20: Sind  $G$  und  $K$  beliebige additive abelsche Gruppen und sind  $\tilde{G}$  und  $\tilde{K}$  beliebige gekürzte freie Auflösungen von  $G$  bzw.  $K$ , so bestimmt jeder Gruppenhomomorphismus  $f: G \rightarrow K$  eine *bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmte* Kettenabbildung  $\varphi: \tilde{G} \rightarrow \tilde{K}$  mit  $f = H_1(\varphi)$ . Wenden wir auf diese Kettenkomplexe und diese Kettenabbildung den Funktor  $U$  an, so bestimmt  $f$  eine *bis auf Kettenhomotopie oder Kokettenhomotopie eindeutig bestimmte* Kettenabbildung oder Kokettenabbildung  $U(\varphi)$ , die einen *eindeutig bestimmten* Homologie- oder Kohomologiemorphismus  $HU(\varphi)$  induziert. In Dimension 2 ist  $HU(\varphi)$  nach

Definition  $U'(f)$ , wenn  $\tilde{\mathcal{G}}$  und  $\tilde{\mathcal{K}}$  die standard gekürzten freien Auflösungen sind.

In unserer jetzigen Situation ist  $G = HC$  und (7.36) liefert uns eine exotische gekürzte freie Auflösung

$$\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{j} Z \longrightarrow \{0\}$$

von  $HC$ , die wir als  $\tilde{\mathcal{G}}$  nehmen wollen. Bezüglich dieser gekürzten freien Auflösung ist  $H_2(U\tilde{\mathcal{G}})$  im kovarianten Fall genau die in (7.40) vorkommende Gruppe  $\text{Ker } U(j)$  und im kontravarianten Fall ist  $H^2(U\tilde{\mathcal{G}})$  genau die in (7.40) vorkommende Gruppe  $\text{Coker } U(j)$ .

Die „echte“ Gruppe  $U'(HC)$  aus (7.32) erhalten wir als die zweite Homologie oder Kohomologie des  $U$ -Bildes der *standard* gekürzten freien Auflösung  $\tilde{\mathcal{F}}$  von  $HC$ .

Wir haben gerade gesehen, dass  $\text{id}_{HC}$ , erweitert zu einer Kettenabbildung  $\varphi_{\mathcal{C}}: \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ , einen *eindeutig bestimmten* Isomorphismus zwischen  $\text{Ker } U(j)$  oder  $\text{Coker } U(j)$  und  $U'(HC)$  induziert.

Wegen der Eindeutigkeit ist dieser Isomorphismus auch natürlich, denn jede Kettenabbildung  $f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  induziert eine Kettenabbildung  $\psi_e$  zwischen den „exotischen“ gekürzten freien Auflösungen von  $HC$  und  $H\mathcal{D}$  und eine Kettenabbildung  $\psi_s$  zwischen den standard gekürzten freien Auflösungen. Die Verknüpfungen  $\varphi_{\mathcal{D}} \circ \psi_e$  und  $\psi_s \circ \varphi_{\mathcal{C}}$  sind wegen der Eindeutigkeitsaussage kettenhomotop. Deshalb kommutieren die von  $\varphi_{\mathcal{C}}$  bzw.  $\varphi_{\mathcal{D}}$  schließlich induzierten Isomorphismen von  $\text{Ker } U(j)$  oder  $\text{Coker } U(j)$  nach  $U'(HC)$  (bzw. zwischen den entsprechenden Gruppen für den Kettenkomplex  $\mathcal{D}$ ) mit den von  $f$  induzierten Homomorphismen zwischen den Varianten dieser Gruppen für den Kettenkomplex  $\mathcal{C}$  und den Varianten für den Kettenkomplex  $\mathcal{D}$ .

Das bedeutet, dass der Isomorphismus von  $\text{Ker } U(j)$  oder  $\text{Coker } U(j)$  nach  $U'(HC)$  natürlich ist.

Es bleibt zum Schluss noch zu zeigen, dass die Folge (7.32) spaltet. Kehren wir zurück zur kurzen exakten Folge (7.35). Weil die Pfeile in dieser Folge Grad 0 Homomorphismen sind und weil  $B_+$  und somit auch jeder homogene Anteil von  $B_+$  frei ist, spaltet jeder homogene Anteil von (7.35). Also spaltet die ganze Folge durch eine Grad 0 Spaltung (die aber keine Kettenabbildung ist—deshalb wird die Spaltung von (7.32) nicht natürlich sein).

Aus Lemma 6.27 folgt, dass auch die Bildfolge unter  $U$ , die passende der Folgen (7.37), exakt ist und eine Grad 0 Spaltung besitzt.

Im kovarianten Fall haben wir als Spaltung einen Grad 0 Homomorphismus  $s: UB_+ \longrightarrow UC$  mit

$$U(\tilde{\partial}) \circ s = \text{id}_{UB_+}.$$



Hieraus folgt

$$U(\partial) \circ s = U(ij\tilde{\partial}) \circ s = U(i) \circ U(j) \circ U(\tilde{\partial}) \circ s = U(i) \circ U(j).$$

Daraus sehen wir, dass  $U(\partial) \circ s = \mathbf{0}$  auf  $\text{Ker } U(j)$  und  $s$  bildet deshalb Elemente der rechten Gruppe in (7.40), also der rechten Gruppe in (7.32a), in *Zykeln* des Kettenkomplexes  $UC$  ab und induziert somit einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{s}: U'(H_+\mathcal{C}) = \text{Ker } U(j) &\longrightarrow H(UC) \\ b &\longmapsto [s(b)] \end{aligned}$$

mit

$$\zeta \circ \bar{s}(b) = HU(\tilde{\partial})[s(b)] = [U(\tilde{\partial})s(b)] = [b] = b$$

für jedes  $b \in \text{Ker } U(j) \subseteq UB_+ = HUB_+$ .

Der Homomorphismus  $\bar{s}$  ist also eine Spaltung von (7.32) im kovarianten Fall.

Im kontravarianten Fall haben wir als Spaltung einen Grad 0 Homomorphismus  $s: UZ \longrightarrow UC$  mit

$$U(i) \circ s = \text{id}_{UZ}.$$

Hieraus folgt

$$U(\partial) \circ s = U(ij\tilde{\partial}) \circ s = U(\tilde{\partial}) \circ U(j) \circ U(i) \circ s = U(\tilde{\partial}) \circ U(j).$$

Daraus sehen wir wieder, dass  $U(\partial) \circ s = \mathbf{0}$  auf  $\text{Ker } U(j)$  und  $s$  bildet deshalb Elemente der rechten Gruppe in (7.40), also der rechten Gruppe in (7.32b), in *Kozykeln* des Kokettenkomplexes  $UC$  ab und induziert somit einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{s}: U(H\mathcal{C}) = \text{Ker } U(j) &\longrightarrow H(UC) \\ b &\longmapsto [s(b)] \end{aligned}$$

mit

$$\alpha \circ \bar{s}(b) = HU(i)[s(b)] = [U(i)s(b)] = [b] = b$$

für jedes  $b \in \text{Ker } U(j) \subseteq UZ = H \cdot UZ$ .

Dieser Homomorphismus  $\bar{s}$  ist im kontravarianten Fall eine Spaltung von (7.32). ■

Diesen allgemeinen und abstrakten Künnethsatz wollen wir natürlich auf die zwei speziellen Funktoren anwenden, die wir bisher intensiv untersucht haben. Als Ergebnis erhalten wir folgende **Universelle Koeffizientensätze** für die singuläre Homologie und die singuläre Kohomologie.

**Satz 7.30 (Universeller Koeffizientensatz für die Homologie)** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaar und sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Es gibt eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow H_n(X, A) \otimes G \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} H_*(X, A; G) \xrightarrow[\text{Grad } -1]{\zeta} \text{Tor}(H_*(X, A), G) \rightarrow \{0\} \quad (7.42)$$

und sie spaltet (aber nicht natürlich).

Weil sie spaltet, gibt es für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  einen (nichtnatürlichen) Isomorphismus

$$H_n(X, A; G) \cong (H_n(X, A) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G). \quad (7.43)$$

Die Abbildungen  $\alpha$  und  $\zeta$  in (7.42) haben folgende Gestalt: sei  $\gamma \in H_n(X, A)$  und sei  $g \in G$ . Sei  $z \in Z_n(X, A)$  ein Zykel mit  $\gamma = [z]$ . Dann ist  $z \otimes g$  ein Zykel in  $C_n(X, A; G)$  und es ist

$$\alpha(\gamma \otimes g) = [z \otimes g]. \quad (7.44)$$

Sei  $j$  die Inklusion  $B_*(X, A) \rightarrow Z_*(X, A)$  und sei  $\pi$  die Projektion  $Z_*(X, A) \rightarrow H_*(X, A)$ . Dann ist

$$\{0\} \rightarrow B_*(X, A) \xrightarrow{j} Z_*(X, A) \xrightarrow{\pi} H_*(X, A) \rightarrow \{0\} \quad (7.45)$$

eine freie Auflösung von  $H_*(X, A)$ , aus der wir  $\text{Tor}(H_*(X, A), G)$  als eine Untergruppe von  $B_*(X, A) \otimes G$  erhalten.

Sei  $\omega \in H_n(X, A; G)$  und sei  $c \in C_n(X, A; G) = C_n(X, A) \otimes G$  ein Zykel mit  $\omega = [c]$ . Man kann  $c$  schreiben als eine endliche Summe

$$\sum_{i=1}^k c_i \otimes g_i,$$

wo  $c_i \in C_n(X, A)$  und  $g_i \in G$ .

Für jedes  $i$  ist  $\partial c_i \in B_{n-1}(X, A)$ . Sei

$$d := \sum_{i=1}^k \partial c_i \otimes g_i \in B_{n-1}(X, A) \otimes G.$$

Dieses Element gehört zu  $\text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G)$  und es ist

$$\zeta(\omega) = d. \quad (7.46)$$

*Beweis.* Bis auf die Details über das Aussehen von  $\alpha$  und  $\zeta$  ist dies genau die Aussage des Künnethsatzes 7.29 für den Spezialfall  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, A) = (C_*(X, A), \partial)$  und  $U = \cdot \otimes G$ .

Die Künnethfolge (7.32a) nimmt dann die Gestalt der universellen Koeffizientenfolge (7.42) an, denn  $H_*(X, A; G)$ , die mittlere Gruppe in der universellen Koeffizientenfolge, ist nach Definition 6.31 die Homologie des Kettenkomplexes  $C_*(X, A) \otimes G$ , und an rechter Stelle in der universellen Koeffizientenfolge steht der abgeleitete Funktor von  $\cdot \otimes G$  angewendet auf die Homologie von  $C_*(X, A)$ , nämlich  $\text{Tor}(H_*(X, A), G)$ .

Wir müssen nur noch erklären, warum  $\alpha$  und  $\zeta$  so sind wie hier beschrieben. Die universelle Koeffizientenfolge ist, bis auf natürliche Äquivalenzen für die äußeren Gruppen, die kovariante Version der kurzen exakten Folge (7.40) aus dem Beweis von Satz 7.29 und in der Notation jenes Beweises entspricht  $\alpha$  dem Homomorphismus  $\overline{HU(i)}$  und  $\zeta$  dem Homomorphismus  $HU(\tilde{\partial})$ .

Hier ist  $i$  die Inklusion  $Z_*(X, A) \longrightarrow C_*(X, A)$ , und  $U(i)$  ist der Homomorphismus  $i \otimes \text{id}_G$ .

Wir müssen bestimmen, welche Abbildung die Kettenabbildung  $i \otimes \text{id}_G$  in Homologie induziert. Die Kettenabbildung ist definiert auf dem Kettenkomplex  $Z_*(X, A) \otimes G$ , dessen Randoperator identisch  $\mathbf{0}$  ist, so dass jede Kette ein Zykel ist, die Rändergruppe trivial ist, und wir deshalb Ketten mit Homologieklassen identifizieren können und jede Kette ihre eigene Homologieklassse ist.

Das Bild von  $i \otimes \text{id}_G$  besteht nur aus Zykeln von  $C_*(X, A; G)$ , und der Homomorphismus  $H(i \otimes \text{id}_G)$  bildet die Ketten oder gleichbedeutend, die Homologieklassen von  $Z_*(X, A) \otimes G$  ab auf die Homologieklassen dieser Zykeln. In anderen Worten, wenn  $p$  die Projektion  $Z_*(X, A; G) \longrightarrow H_*(X, A; G)$  ist, dann ist  $H(i \otimes \text{id}_G) = p \circ (i \otimes \text{id}_G)$ .

$\overline{HU(i)} = \overline{H(i \otimes \text{id}_G)}$  ist die von diesem Homomorphismus induzierte Abbildung auf  $\text{Coker}(j \otimes \text{id}_G)$ , wo  $j$  die Inklusion  $B_*(X, A) \longrightarrow Z_*(X, A)$  ist, und  $\alpha$  ist die entsprechende Abbildung mit der zu  $\text{Coker}(j \otimes \text{id}_G)$  natürlich isomorphen Gruppe  $H_*(X, A) \otimes G$  als Quelle.

Weil  $\cdot \otimes G$  rechts-exakt ist, ist die aus der exakten Folge (7.45) gewonnene Folge

$$B_*(X, A) \otimes G \xrightarrow{j \otimes \text{id}_G} Z_*(X, A) \otimes G \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}_G} H_*(X, A) \otimes G \longrightarrow \{0\}$$

noch exakt, und die Projektion  $\pi$  induziert den gerade erwähnten natürlichen Isomorphismus

$$\overline{\pi \otimes \text{id}_G}: \text{Coker}(j \otimes \text{id}_G) = \frac{Z_*(X, A) \otimes G}{(j \otimes \text{id}_G)(B_*(X, A) \otimes G)} \longrightarrow H_*(X, A) \otimes G.$$

Das heißt, dass  $\alpha$  die eindeutige Abbildung  $H_*(X, A) \otimes G \longrightarrow H_*(X, A; G)$  ist mit

$$\alpha \circ (\pi \otimes \text{id}_G) = \overline{H(i \otimes \text{id}_G)}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind Abbildungen mit  $\text{Coker}(j \otimes \text{id}_G)$  als Quelle, und man erhält eine *äquivalente* Gleichung, wenn man die (natürlich surjektive) Projektion  $Z_*(X, A) \otimes G \longrightarrow \text{Coker}(j \otimes \text{id}_G)$  beiden Seiten vorschaltet.

Dann sieht man, dass  $\alpha$  die eindeutige Abbildung  $H_*(X, A) \otimes G \longrightarrow H_*(X, A; G)$  ist mit

$$\alpha \circ (\pi \otimes \text{id}_G) = H(i \otimes \text{id}_G).$$

Das bedeutet, dass für ein Erzeugendes  $[z] \otimes g = \pi(z) \otimes g$  von  $H_*(X, A) \otimes G$  (mit  $z \in Z_*(X, A)$ ) gilt  $\alpha([z] \otimes g) = [i(z) \otimes g] = [z \otimes g] \in H_*(X, A; G)$ , wie behauptet.

Der Homomorphismus  $\zeta$  entspricht in der Folge (7.40) dem Homomorphismus  $HU(\tilde{\partial})$ , wobei  $\tilde{\partial}$  die gleiche Abbildung wie der normale Randoperator  $\partial$  ist, nur aufgefasst mit der Rändergruppe, hier  $B_*(X, A)$ , als Zielgruppe. Bei der Angabe der Werte dieser Abbildung dürfen wir deshalb  $\partial$  anstelle von  $\tilde{\partial}$  schreiben, und in (7.40) haben wir aber  $\zeta = H(\partial \otimes \text{id}_G)$  als Abbildung nach  $\text{Ker } U(j) \subseteq UB$  aufzufassen, also als Abbildung

$$H_*(X, A; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_*(X, A), G) = \text{Ker}(j \otimes \text{id}_G) \subseteq B \otimes G.$$

Wie oben  $Z_*(X, A) \otimes G$  ist  $B_*(X, A) \otimes G$  ein Kettenkomplex mit verschwindendem Randoperator, in dem jede Kette gleichzeitig ihre eigene Homologiekategorie ist. Folglich hat  $H(\partial \otimes \text{id}_G): H_*(X, A; G) \longrightarrow B_*(X, A) \otimes G$  die Gestalt, dass für jede Homologiekategorie  $\omega \in H_*(X, A; G)$  und für jeden Zykel  $c \in C_*(X, A; G) = C_*(X, A) \otimes G$  mit  $\omega = [c]$  gilt

$$H(\partial \otimes \text{id}_G)(\omega) = (\partial \otimes \text{id}_G)(c) \in B_*(X, A) \otimes G.$$

Die Kette  $(\partial \otimes \text{id}_G)(c)$  ist die in der Satzaussage definierte Kette  $d$ , die wir gleichzeitig als Kette in  $B_*(X, A) \otimes G$ , in  $Z_*(X, A) \otimes G$  oder in  $C_*(X, A) \otimes G$  betrachten können. Zwar ist es schon aus dem Beweis von Satz 7.29 klar, dass diese Kette zur Untergruppe  $\text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G) \subseteq B_*(X, A) \otimes G$  gehören muss, aber weil das etwas schwer aus jenem Beweis herauszufiltern ist, wollen wir diese Behauptung für unseren jetzigen Spezialfall direkt begründen.

Um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen, reservieren wir den Namen  $d$  für die in der Aussage definierte Kette mit diesem Namen in  $B_*(X, A) \otimes G$ . Der gleiche Ausdruck, aufgefasst als Kette in  $Z_*(X, A) \otimes G$ , ist dann  $(j \otimes \text{id}_G)(d)$ , und der gleiche Ausdruck, aufgefasst als Kette in  $C_*(X, A) \otimes G$ , ist  $(ij \otimes \text{id}_G)(d) = ((i \otimes \text{id}_G) \circ (j \otimes \text{id}_G))(d)$ .

In  $C_*(X, A) \otimes G$  ist diese Kette  $((i \otimes \text{id}_G) \circ (j \otimes \text{id}_G))(d) = 0$ , denn  $c$  war ja ein Zykel von  $C_*(X, A; G)$  und  $d$  ist sein Rand. Weil die Folge

$$\{0\} \longrightarrow Z_*(X, A) \xrightarrow{i} C_*(X, A) \xrightarrow{\partial} B_*(X, A) \longrightarrow \{0\}$$

spaltet (da  $B_*(X, A)$  frei ist), bleibt sie exakt nach Anwendung von  $\cdot \otimes G$  und insbesondere ist  $(i \otimes \text{id}_G)$  noch injektiv, so dass schon  $(j \otimes \text{id}_G)(d) = 0$ .

In  $B_*(X, A) \otimes G$  muss  $d$  nicht 0 sein! Aber es liegt auf jeden Fall in  $\text{Ker}(j \otimes \text{id}_G) = \text{Tor}(H_*(X, A), G)$ , wie in der Satzaussage behauptet, und ist als Element dieser Untergruppe der Wert von  $\zeta(\omega) = H(\partial \otimes \text{id}_G)(\omega) = (\partial \otimes \text{id}_G)(c)$ . ■

**Satz 7.31 (Universeller Koeffizientensatz für die Kohomologie)** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard und sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Es gibt eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow \text{Ext}(H_*(X, A), G) \xrightarrow[\text{Grad } 1]{\zeta} H^*(X, A; G) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} \text{Hom}(H_*(X, A), G) \rightarrow \{0\} \quad (7.47)$$

und sie spaltet (aber nicht natürlich).

Weil sie spaltet, gibt es für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  einen (nichtnatürlichen) Isomorphismus

$$H^n(X, A; G) \cong \text{Hom}(H_n(X, A), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), G). \quad (7.48)$$

Die Abbildungen  $\zeta$  und  $\alpha$  in (7.47) haben folgende Gestalt:

Sei  $\theta \in \text{Ext}(H_*(X, A), G)$ . Sei  $j$  die Inklusion  $B_*(X, A) \longrightarrow Z_*(X, A)$ . Sie induziert einen Homomorphismus

$$\text{Hom}(j, G): \text{Hom}(Z_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Hom}(B_*(X, A), G)$$

und  $\text{Ext}(H_*(X, A), G)$  ist definiert als der Cokern dieser Abbildung, also ein Quotient von  $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$ .

Sei  $p: \text{Hom}(B_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Ext}(H_*(X, A), G)$  die Projektion. Wähle ein Element  $\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$  mit  $\theta = p(\omega)$ .

Dann ist

$$\omega \circ \partial: C_*(X, A) \longrightarrow G$$

ein Kozykel von  $C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$  und

$$\zeta(\theta) = [\omega \circ \partial]. \quad (7.49)$$

Für die Abbildung  $\alpha$ , sei  $\gamma \in H^*(X, A; G)$  und sei  $\xi$  ein Kozykel in  $C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$  mit  $\gamma = [\xi]$ .

Sei  $\pi$  die Projektion

$$Z_*(X, A) \longrightarrow H_*(X, A) = \frac{Z_*(X, A)}{B_*(X, A)}.$$

Weil  $\xi$  ein Kozykel ist, verschwindet  $\xi$  auf  $B_*(X, A)$  und somit induziert  $\xi|_{Z_*(X, A)}$  einen wohldefinierten Homomorphismus  $\Xi: H_*(X, A) \longrightarrow G$  mit  $\Xi \circ \pi = \xi$  auf  $Z_*(X, A)$ . Es ist

$$\alpha(\gamma) = \Xi \in \text{Hom}(H_*(X, A), G). \quad (7.50)$$

*Beweis.* Bis auf die Details über das Aussehen von  $\zeta$  und  $\alpha$  ist dies genau die Aussage des Künnethsatzes 7.29 für den Spezialfall  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, A) = (C_*(X, A), \partial)$  und  $U = \text{Hom}(\cdot, G)$ .

Die Künnethfolge (7.32b) nimmt dann die Gestalt der universellen Koeffizientenfolge (7.47) an, denn  $H^*(X, A; G)$ , die mittlere Gruppe in der universellen Koeffizientenfolge, ist nach Definition 6.41 die graduierte Kohomologiegruppe des Kokettenkomplexes  $\text{Hom}(C_*(X, A), G)$ , und an der linken Stelle in der universellen Koeffizientenfolge steht der abgeleitete Funktor von  $\text{Hom}(\cdot, G)$  angewendet auf die Homologie von  $C_*(X, A)$ , nämlich  $\text{Ext}(H_*(X, A), G)$ .

Wir müssen nur noch erklären, warum  $\zeta$  und  $\alpha$  so sind wie hier beschrieben. Die universelle Koeffizientenfolge ist, bis auf natürliche Äquivalenzen für die äußeren Gruppen, die kontravariante Version der kurzen exakten Folge (7.40) aus dem Beweis von Satz 7.29 und in der Notation jenes Beweises entspricht  $\zeta$  dem Homomorphismus  $\overline{HU(\tilde{\partial})}$  und  $\alpha$  dem Homomorphismus  $HU(i)$ .

Hier ist  $i$  die Inklusion  $Z_*(X, A) \longrightarrow C_*(X, A)$ , und  $U(i)$  ist der Homomorphismus  $\text{Hom}(i, G)$ , die Verknüpfung von rechts mit  $i$  oder in einfacherer Sprache, die Einschränkung einer Kokette aus  $\text{Hom}(C_*(X, A), G)$  auf  $Z_*(X, A)$ .

Wie in der Satzaussage erklärt, ist  $\text{Ext}((H_*(X, A), G)$  definiert als der Cokern von

$$\text{Hom}(j, G): \text{Hom}(Z_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Hom}(B_*(X, A), G)$$

und ist ein Quotient von  $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$ .

Der Homomorphismus  $\zeta$  entspricht in der Folge (7.40) dem Homomorphismus von diesem Quotienten nach

$$H^*(X, A; G) = H\left(\text{Hom}(C_*(X, A), G)\right),$$

der von  $HU(\tilde{\partial})$  induziert wird, wobei  $\tilde{\partial}$  die gleiche Abbildung wie der normale Randoperator  $\partial$  ist, nur aufgefasst mit der Rändergruppe  $B_*(X, A)$  als Zielgruppe (wenn wir dies berücksichtigen, dürfen wir auch  $\partial$  statt  $\tilde{\partial}$  schreiben). In der universellen Koeffizientenfolge wird

$$\zeta: \text{Ext}(H_*(X, A), G) \longrightarrow H_*(X, A; G)$$

deshalb von

$$H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G)): \text{Hom}(B_*(X, A), G) \longrightarrow H^*(X, A; G)$$

induziert.

Wir müssen zunächst erklären, was dieser Kohomologiemorphismus genau ist. Die graduierte Gruppe  $B_*(X, A)$  ist ein Kettenkomplex, dessen Randoperator  $\mathbf{0}$  ist. Deshalb ist  $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$  ein Kokettenkomplex mit verschwindendem Korandoperator, und aus diesem Grund ist jede Kokette ein Kozykel und da  $\mathbf{0}$  der einzige Korand ist, besteht jede Kohomologieklassse aus einem einzigen Kozykel—es gibt eine Bijektion zwischen Koketten und Kohomologieklassen und  $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$  ist seine eigene Kohomologiegruppe.

Die Kokettenabbildung

$$\text{Hom}(\partial, \text{id}_G): \text{Hom}(B_*(X, A), G) \longrightarrow C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$$

ist die Verknüpfung von rechts mit  $\partial$ . Sie bildet jede Kokette

$$\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$$

auf  $\omega \circ \partial$  ab. Eine Kokette  $\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$  ist gleichzeitig eine Kohomologieklassse, und  $H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G))$  bildet die Kohomologieklassse  $\omega$  ab auf die Kohomologieklassse der Bildkokette (die automatisch ein Kozykel ist), also auf  $[\omega \circ \partial]$ .

Der Homomorphismus  $\zeta$  wird in dem Sinne von  $H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G))$  induziert, dass

$$\zeta \circ p = H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G)).$$

Ist also  $\theta \in \text{Ext}(H_*(X, A), G)$  und ist  $\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$  ein Element mit  $\theta = p(\omega)$ , so ist

$$\zeta(\theta) = H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G))(\omega) = [\omega \circ \partial],$$

wie in (7.49) behauptet.

Aus dem Beweis von Satz 7.29 kann man ablesen, dass der Homomorphismus  $\alpha$  die Verknüpfung der Abbildung

$$H(\text{Hom}(i, G)): H^*(X, A; G) \longrightarrow \text{Ker}(\text{Hom}(j, G))$$

aus (7.40) und der Umkehrung des von  $\text{Hom}(\pi, G)$  gegebenen Isomorphismus

$$\text{Hom}(H_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Ker}(\text{Hom}(j, G))$$

ist.

$\text{Hom}(i, G)$  ist eine Kokettenabbildung

$$C^*(X, A; G) \longrightarrow \text{Hom}(Z_*(X, A), G),$$

wobei der Zielkokettenkomplex  $\text{Hom}(Z_*(X, A), G)$  einen trivialen Korandoperator hat (und somit mit seiner eigenen Kohomologiegruppe identifiziert werden kann), weil schon der Kettenkomplex  $Z_*(X, A)$  einen trivialen Randoperator hat.

Sei  $\gamma \in H^*(X, A; G)$  und sei  $\xi \in C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$  ein Kozykel mit  $\gamma = [\xi]$ .

Der Homomorphismus  $\text{Hom}(i, G)$  bildet  $\xi$  auf  $\xi \circ i = \xi|Z_*(X, A)$  ab und  $H(\text{Hom}(i, G))$  bildet also  $\gamma$  auf die Kohomologieklassse von  $\xi|Z_*(X, A)$  ab, die wir aber mit der Kokette  $\xi|Z_*(X, A) \in \text{Hom}(Z_*(X, A), G)$  identifizieren können.

Diese Kokette liegt in  $\text{Ker}(\text{Hom}(j, G))$ , denn weil  $\xi$  ein Kozykel von  $C^*(X, A; G)$  ist, gilt  $\delta\xi = \xi \circ \partial = 0$  und somit

$$(\xi|Z_*(X, A)) \circ j = \xi \circ i \circ j = \xi|B_*(X, A) = \mathbf{0}.$$

Weil  $\xi|B_*(X, A) = \mathbf{0}$ , induziert  $\xi|Z_*(X, A)$  einen wohldefinierten Homomorphismus  $\Xi: H_*(X, A) \longrightarrow G$  mit  $\Xi \circ \pi = \xi|Z_*(X, A)$ .

Wir haben also

$$\text{Hom}(\pi, G)(\Xi) = \Xi \circ \pi = \xi|Z_*(X, A) = H(\text{Hom}(i, G))(\gamma)$$

und nach der obigen Beschreibung von  $\alpha$  ist  $\alpha(\gamma) = \Xi \in \text{Hom}(H_*(X, A), G)$ , wie in (7.50) behauptet. ■

Mit Hilfe der universellen Koeffizientensätze ist es uns jetzt ein Leichtes, mit beliebigen Koeffizienten die Homologiegruppen und Kohomologiegruppen der topologischen Räume auszurechnen, deren singuläre  $\mathbf{Z}$ -Homologie wir bisher bestimmt haben. Zum Abschluss präsentieren wir also eine Reihe von fast trivialen Beispielen:



**Beispiele 7.32** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Dann ist

a)

$$H_k(S^0; G) \cong \begin{cases} G \oplus G, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.51)$$

b)

$$H_k(S^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.52)$$

c)

$$H_k(T^2; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G, & \text{wenn } k = 1; \\ G, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.53)$$

d)

$$H_k(K; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G_2, & \text{wenn } k = 1; \\ G^{(2)}, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.54)$$

e)

$$H_k(\mathbf{C}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } 0 \leq k \leq 2n \text{ und } k \text{ gerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.55)$$

f)

$$H_k(\mathbf{R}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G_2, & \text{wenn } 1 \leq k < n, k \text{ ungerade;} \\ G^{(2)}, & \text{wenn } 1 < k \leq n, k \text{ gerade;} \\ G, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.56)$$

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Gleichung (7.43) in der Aussage des Universellen Koeffizientensatzes 7.30, wenn man folgende Punkte bedenkt.

Die Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}$  der aufgeführten Räume wurde in Beispiel 4.4 a), Satz 4.5, Beispiel 4.17 und Beispiel 5.46 berechnet und erweist

sich in allen Fällen als eine endliche direkte Summe von Summanden  $\mathbf{Z}$  oder  $\mathbf{Z}_2$ .

Bei dem Summanden  $H_n(X) \otimes G$  in Gleichung (7.43) für die  $n$ -te Homologie mit Koeffizienten in  $G$  gehen Summanden  $\mathbf{Z}$  der ganzzahligen Homologie in  $\mathbf{Z} \otimes G = G$  über und Summanden  $\mathbf{Z}_2$  gehen in  $\mathbf{Z}_2 \otimes G = G_2$  über (siehe dazu Beispiel 7.26).

Der Summand  $\text{Tor}(H_{n-1}(X), G)$  liefert zusätzliche Beiträge nur für die nichtfreien Summanden  $\mathbf{Z}_2$  der  $\mathbf{Z}$ -Homologie von  $X$ , da  $\text{Tor}$  mit einer freien Gruppe  $\{0\}$  ist. Hingegen ist  $\text{Tor}(\mathbf{Z}_2, G) = G^{(2)}$  nach Beispiel 7.26 und wir erhalten also für jeden Summanden  $\mathbf{Z}_2$  in der  $\mathbf{Z}$ -Homologie einen zusätzlichen Beitrag  $G^{(2)}$  in der *nächsthöheren Dimension* in der Homologie mit Koeffizienten in  $G$ .

Anwendung dieser Bemerkungen auf die schon berechnete  $\mathbf{Z}$ -Homologie der aufgeführten Räume liefert sofort die hier angegebene  $G$ -Homologie. ■

**Beispiele 7.33** Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Dann ist

a)

$$H^k(S^0; G) \cong \begin{cases} G \oplus G, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.57)$$

b)

$$H^k(S^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.58)$$

c)

$$H^k(T^2; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G, & \text{wenn } k = 1; \\ G, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.59)$$

d)

$$H^k(K; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G^{(2)}, & \text{wenn } k = 1; \\ G_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.60)$$

e)

$$H^k(\mathbf{C}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } 0 \leq k \leq 2n \text{ und } k \text{ gerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.61)$$

f)

$$H^k(\mathbf{R}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G^{(2)}, & \text{wenn } 1 \leq k < n, k \text{ ungerade;} \\ G_2, & \text{wenn } 1 < k \leq n, k \text{ gerade;} \\ G, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.62)$$

*Beweis.* Der Beweis ähnelt dem Beweis der Beispiele 7.32. Die Behauptungen folgen sofort aus Gleichung (7.48) in der Aussage des Universellen Koeffizientensatzes 7.31, wenn man folgende Punkte bedenkt.

Die Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}$  der aufgeführten Räume wurde in Beispiel 4.4 a), Satz 4.5, Beispiel 4.17 und Beispiel 5.46 berechnet und erweist sich, wie wir gesehen haben, in allen Fällen als eine endliche direkte Summe von Summanden  $\mathbf{Z}$  oder  $\mathbf{Z}_2$ .

Bei dem Summanden  $\text{Hom}(H_n(X), G)$  in Gleichung (7.48) für die  $n$ -te Kohomologie mit Koeffizienten in  $G$  gehen Summanden  $\mathbf{Z}$  der ganzzahligen Homologie in  $\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) = G$  über und Summanden  $\mathbf{Z}_2$  gehen in  $\text{Hom}(\mathbf{Z}_2, G) = G^{(2)}$  über (siehe dazu Lemma 6.21 a) und b)).

Der Summand  $\text{Ext}(H_{n-1}(X), G)$  liefert zusätzliche Beiträge nur für die nichtfreien Summanden  $\mathbf{Z}_2$  der  $\mathbf{Z}$ -Homologie von  $X$ , da  $\text{Ext}(\mathbf{Z}, G) = \{0\}$  nach Beispiel 7.25. Hingegen ist  $\text{Ext}(\mathbf{Z}_2, G) = G_2$  nach Beispiel 7.26 und wir erhalten also für jeden Summanden  $\mathbf{Z}_2$  in der  $\mathbf{Z}$ -Homologie einen zusätzlichen Beitrag  $G_2$  in der *nächsthöheren Dimension* in der Kohomologie mit Koeffizienten in  $G$ .

Anwendung dieser Bemerkungen auf die  $\mathbf{Z}$ -Homologie der aufgeführten Räume liefert sofort die hier angegebene Kohomologie. ■

Es wird ihnen vielleicht aufgefallen sein, dass für die hier aufgeführten Räume die Homologie mit Koeffizienten in  $G$  und die Kohomologie mit Koeffizienten in  $G$  sich nur dadurch unterscheiden, dass Summanden  $G_2$  in der Homologie zu Summanden  $G^{(2)}$  in der Kohomologie werden und umgekehrt. Das liegt einfach an dem verschiedenen Verhalten der Funktoren  $\otimes$  und  $\text{Hom}$ ,  $\text{Tor}$  und  $\text{Ext}$  auf einem Gruppenpaar, in dem die erste Gruppe  $\mathbf{Z}_2$  ist.

Für den Spezialfall  $G = \mathbf{Z}_2$  ist  $2G = 2\mathbf{Z}_2 = \{0\}$ , woraus folgt, dass

$$(\mathbf{Z}_2)_2 = \mathbf{Z}_2 = (\mathbf{Z}_2)^{(2)}. \quad (7.63)$$

Wegen der gerade gemachten Beobachtung unterscheiden sich also in  $\mathbf{Z}_2$ -Koeffizienten die Homologie und die Kohomologie der in Beispielen 7.32 und 7.33 behandelten Räume überhaupt nicht.

Wir erhalten aus (7.63) für die  $\mathbf{Z}_2$ -Homologie und Kohomologie der Räume aus diesen Beispielen folgende gemeinsamen Werte.

**Korollar 7.34** *Sei  $G$  eine additive abelsche Gruppe. Dann ist*

a)

$$H^k(S^0; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(S^0; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.64)$$

b)

$$H^k(S^n; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(S^n; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.65)$$

c)

$$H^k(T^2; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(T^2; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.66)$$

d)

$$H^k(K; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(K; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.67)$$

e)

$$H^k(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 0 \leq k \leq 2n, k \text{ gerade;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.68)$$

f)

$$H^k(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 0 \leq k \leq n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.69)$$

Zu guter Letzt halten wir noch fest, wie die Kohomologie dieser Räume mit  $\mathbf{Z}$ -Koeffizienten aussieht. Es verschwinden aus den Angaben in den Beispielen 7.33 die Beiträge  $G^{(2)}$ , weil  $\mathbf{Z}$  als torsionsfreie Gruppe keine nicht-trivialen Elemente von Ordnung 2 hat. Wir erhalten:

**Beispiele 7.35** a)

$$H^k(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.70)$$

b)

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.71)$$

c)

$$H^k(T^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.72)$$

d)

$$H^k(K) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.73)$$

e)

$$H^k(\mathbf{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } 0 \leq k \leq 2n \text{ und } k \text{ gerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.74)$$

f)

$$H^k(\mathbf{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 1 < k \leq n, k \text{ gerade;} \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.75)$$



# Anhang A

## Klassische Sätze über additive abelsche Gruppen

Der Zweck dieses Anhangs ist die Präsentation der Beweise der klassischen Sätze A.5 und A.7 unten; es handelt sich um den „Struktursatz für endlich erzeugte additive abelsche Gruppen“ und dem Satz, dass jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei abelsch ist.

Die Beweise dieser Sätze sind technisch etwas kompliziert, aber der Teil des Arguments, der das meiste Fingerspitzengefühl erfordert, bildet einen gemeinsamen Kern für einige Beweise in diesem Abschnitt. Wir wollen ihn deshalb vorweg als einen kleinen Hilfssatz (Hilfssatz A.4 unten) präsentieren, um Argumente nicht wiederholen zu müssen.

Zunächst erinnern wir an ein paar wohlbekannte Grundbegriffe und Tatsachen über freie abelsche Gruppen.

**Definition A.1** Sei  $F$  eine abelsche Gruppe. Eine Teilmenge  $B \subseteq F$  heißt eine **Basis** von  $F$ , wenn jedes Element  $x$  von  $F$  sich auf *eindeutige* Weise schreiben lässt als eine endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von Elementen aus  $B$ , d. h., in der Form

$$x = \sum_{b \in B} n_b b, \quad (\text{A.1})$$

wo die  $n_b$  ganze Zahlen sind und nur endlich viele von ihnen  $\neq 0$  sind.

Wenn  $B$  eine Basis von  $F$  ist, dann ist  $F \cong F(B)$ , denn die Elemente von  $F(B)$  haben nach Lemma 2.10 a) auch eine eindeutige Darstellung der Form (A.1), und das liefert eine Bijektion zwischen  $F$  und  $F(B)$ , die offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus (und somit Isomorphismus) ist.

Eine abelsche Gruppe  $F$  heißt **frei abelsch**, wenn sie eine Basis besitzt.

Eine Teilmenge  $B$  einer abelschen Gruppe  $G$  heißt  **$\mathbf{Z}$ -linear unabhängig** oder einfach **linear unabhängig**, wenn das Element  $x = 0$  von  $G$  sich nur

mit allen Koeffizienten  $n_b = 0$  in der Gestalt (A.1) darstellen lässt. Das ist gleichbedeutend damit, dass  $B$  eine Basis der von  $B$  erzeugten Untergruppe von  $G$  bildet.

Insbesondere ist eine Teilmenge von  $F$  genau dann eine Basis, wenn sie  $F$  erzeugt und linear unabhängig ist.

**Beispiel A.2** Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Offensichtlich ist  $\mathbf{Z}^n$  eine freie abelsche Gruppe; die Standardvektorraumbasis  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  von  $\mathbf{R}^n$  bildet auch eine Basis von  $\mathbf{Z}^n$  als additive abelsche Gruppe.

**Bemerkung und Definition A.3** Sei  $F$  eine freie abelsche Gruppe, die eine endliche Basis  $X$  mit  $n$  Elementen besitzt. Dann hat jede Basis von  $F$  genau  $n$  Elemente, und keine  $\mathbf{Z}$ -linear unabhängige Teilmenge von  $F$  hat mehr als  $n$  Elemente.

Die wohldefinierte Zahl  $n$  heißt der **Rang** von  $F$ .

*Beweis.* Offensichtlich ist  $F \cong F(X)$  isomorph zu  $\mathbf{Z}^n$ ; die Abbildung, die jedes Element von  $F$  auf das  $n$ -Tupel seiner Koordinaten in der Schreibweise (A.1) abbildet, ist ein Isomorphismus.

Sei  $U$  eine  $\mathbf{Z}$ -linear unabhängige Teilmenge von  $F$ . Unter dem Isomorphismus zwischen  $F$  und  $\mathbf{Z}^n$  entspricht  $U$  einer  $\mathbf{Z}$ -linear unabhängigen Teilmenge  $B$  von  $\mathbf{Z}^n$  mit der gleichen Kardinalität wie  $U$ .

Diese Teilmenge ist auch  $\mathbf{Q}$ -linear unabhängig in  $\mathbf{Q}^n$ , denn jede Darstellung  $0 = \sum_{b \in B} q_b b$  des Nullelements als  $\mathbf{Q}$ -Linearkombination der Elemente von  $B$ , in der nicht alle Koeffizienten 0 sind, kann man mit dem Produkt der Nenner der Koeffizienten multiplizieren und man erhält eine Darstellung von 0 als Linearkombination mit Koeffizienten aus  $\mathbf{Z}$ , die nicht alle verschwinden, in Widerspruche dazu, dass  $B$  über  $\mathbf{Z}$  linear unabhängig ist.

Weil  $B$  im  $n$ -dimensionalen  $\mathbf{Q}$ -Vektorraum  $\mathbf{Q}^n$  im Sinne der Vektorraumtheorie linear unabhängig ist, hat  $B$  (und somit auch  $U$ ) höchstens  $n$  Elemente. Das beweist die zweite Aussage der Bemerkung.

Die erste folgt sofort, weil jede Basis linear unabhängig ist. Wenn es eine Basis mit  $n$  Elementen gibt, kann es keine andere Basis  $Y$  mit mehr Elementen geben. Daraus folgt, wenn es endliche Basen gibt, dass jede Basis endlich ist und in Anbetracht dessen, dass *keine* Basis mehr Elemente als eine andere haben kann, also, dass alle Basen gleichmächtig sind. ■

**Hilfssatz A.4** Sei  $G$  eine endlich erzeugte additive abelsche Gruppe, und  $G$  lasse sich von  $m$  Elementen erzeugen. Dann wird auch jede Untergruppe  $H \subseteq G$  von höchstens  $m$  Elementen erzeugt.



Man kann sogar eine Erzeugendenmenge  $Y := \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  von  $G$  und Zahlen  $u_1, u_2, \dots, u_k > 0 \in \mathbf{N}$  finden (für ein geeignetes  $k \leq m$ ), so dass  $H$  von den Elementen  $u_i y_i$  für  $i = 1, \dots, k$  erzeugt wird.

Wenn  $G$  frei abelsch von Rang  $m$  ist, kann man  $Y$  als eine Basis von  $G$  wählen. In diesem Fall bilden die  $u_i y_i$  für  $1 \leq i \leq k$  eine Basis von  $H$  und somit ist auch  $H$  frei abelsch.

*Beweis.* Sei

$$X := \{g_i \mid 1 \leq i \leq m\} \subseteq G$$

eine endliche,  $m$ -elementige Teilmenge von  $G$ , die  $G$  erzeugt; wenn  $G$  frei abelsch von Rang  $m$  ist, wähle man  $X$  als eine Basis.

$G$  ist ein Quotient von der freien abelschen Gruppe  $F(X)$  und im folgenden Beweis werden wir den „Nenner“ dieses Quotienten näher untersuchen. Um aber Missverständnisse über die Bedeutung der Elemente  $g_i$  zu vermeiden, werden wir nicht direkt mit  $F(X)$  arbeiten, sondern mit der zu ihr isomorphen freien abelschen Gruppe  $\mathbf{Z}^m$ .

Die Elemente von  $\mathbf{Z}^m$  sind  $m$ -Tupel

$$a = (a_1, \dots, a_m)$$

von ganzen Zahlen, und für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq m$  haben wir die Projektion

$$\begin{aligned} \pi_i: \mathbf{Z}^m &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ a &\longmapsto a_i. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir eine Projektion  $p: \mathbf{Z}^m \longrightarrow G$  gegeben durch

$$p(a_1, \dots, a_m) := \sum_{i=1}^m a_i g_i.$$

Die Projektion  $p$  ist surjektiv, weil die  $g_i$  eine Erzeugendenmenge von  $G$  bilden. Wenn  $G$  frei abelsch von Rang  $m$  ist, ist  $p$  offensichtlich ein Isomorphismus, weil in diesem Fall die  $g_i$  so gewählt wurden, dass sie eine Basis von  $G$  bilden.

Sei  $A := p^{-1}(H) \subseteq \mathbf{Z}^m$ . Wir werden zeigen, dass es eine Basis  $b_1, \dots, b_m$  von  $\mathbf{Z}^m$  gibt und eine Basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  von  $A$  (mit  $k \leq m$ ), so dass jedes  $\alpha_i$  ein Vielfaches des entsprechenden Basiselementes  $b_i$  von  $\mathbf{Z}^m$  ist.

Für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq m+1$  setzen wir

$$N_i := \bigcap_{j < i} \text{Ker } \pi_j \quad \text{und} \quad A_i = A \cap N_i. \quad (\text{A.2})$$

Offensichtlich ist

$$A = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_m \supseteq A_{m+1} = \{0\}.$$

Für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq m$  betrachten wir in  $\mathbf{Z}$  die Untergruppe

$$U_i := \pi_i(A_i).$$

Wenn  $U_i \neq \{0\}$  ist, wird diese Gruppe erzeugt von ihrem kleinsten positiven Element  $u_i$ , und wir wählen ein Element  $\alpha_i \in A_i$  mit

$$\pi_i(\alpha_i) = u_i. \quad (\text{A.3})$$

Wenn  $U_i = \{0\}$ , setzen wir  $u_i = \infty$  und  $\alpha_i = 0$ .

So gewählt, erfüllen die  $\alpha_i$  leider noch nicht die gewünschten Eigenschaften; diese erreichen wir nur, wenn wir bei der Auswahl etwas Sorgfalt walten lassen, also wenn wir diese Konstruktion unter geeigneten Bedingungen durchführen. Dafür gilt folgender Maßstab.

Für jedes Element  $a = (a_1, \dots, a_m)$  von  $\mathbf{Z}^m$  setzen wir

$$|a| := \sum_{j=1}^m |\pi_j(a)|.$$

Die oben erläuterte Konstruktion der  $\alpha_i$  unter Verwendung der Daten  $u_i$  bewerten wir mit einer „Kennzahl“, genauer mit einem  $2m$ -Tupel von Zahlen

$$\mu := (u_1, |\alpha_1|, u_2, |\alpha_2|, \dots, u_m, |\alpha_m|) \in (\mathbf{N} \cup \{\infty\})^{2m}.$$

Dieses Tupel  $\mu$  ändert sich, wenn man die  $\alpha_i$  (immer noch unter Erfüllung der Voraussetzung  $\pi_i(\alpha_i) = u_i$ ) anders wählt, oder wenn man einen Koordinatenwechsel, also einen Basiswechsel auf  $\mathbf{Z}^m$  durchführt und die Definition der  $u_i$  und die Wahl der  $\alpha_i$  in den neuen Koordinaten vornimmt. Denn die Werte dieser Daten sind natürlich koordinatenabhängig.

Wir wählen neue Koordinaten auf  $\mathbf{Z}^m$  (bezüglich einer Basis  $b_1, \dots, b_m$ , die nach Bemerkung A.3 aus genau  $m$  Elementen bestehen muss), und in diesen Koordinaten wählen wir die Elemente  $\alpha_i \in A_i$  im Einklang mit (A.3) so, dass das „Kennelement“  $\mu$  minimal wird in der lexikographischen Ordnung auf  $(\mathbf{N} \cup \{\infty\})^{2m}$ , d. h., minimal unter den Ergebnissen, die mit allen möglichen Basen von  $\mathbf{Z}^m$  und allen erlaubten Wahlen der  $\alpha_i$  zu erzielen sind.

Zur Erinnerung: in der lexikographischen Ordnung ist ein Tupel genau dann kleiner als ein anderes, wenn die früheste Koordinate, bei der sich die Tupel unterscheiden, beim ersten Tupel kleiner ist als beim zweiten; die Größe späterer Koordinaten spielt dann beim Vergleich keine Rolle mehr.

Wenn die Konstruktion der  $\alpha_i$  auf eine nach dem genannten Maßstab günstigste Weise vorgenommen wurde, dann, so behaupten wir, gilt

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_m \quad (\text{A.4})$$

und es gilt

$$\alpha_i = u_i b_i \quad (\text{A.5})$$

für alle  $i$ , für die  $u_i$  endlich ist (wenn  $u_i = \infty$  ist ja  $\alpha_i = 0$ ).

Zunächst bemerken wir, dass es für kein Element  $a \in A_i$  einen Index  $j$  gibt mit

$$0 < \pi_j(a) < u_i, \quad (\text{A.6})$$

denn weil  $A_i \subseteq N_i$  müsste ein solches  $j \geq i$  sein. Für  $j = i$  ist eine solche Beziehung nach der Definition von  $u_i$  nicht möglich. Angenommen, es gäbe eine Beziehung (A.6) mit  $j > i$ . Eine Vertauschung der  $i$ -ten und  $j$ -ten Koordinate würde  $u_k$  und  $|\alpha_k|$  für  $k < i$  nicht ändern (nur die Reihenfolge der Koordinaten der  $\alpha_k$  ändert sich, nicht die Summe ihrer Beträge), aber in den neuen Koordinaten wäre das neue  $u_i$  auf jeden Fall kleiner als bisher, in Widerspruch zur Minimalität von  $\mu$  in der lexikographischen Ordnung.

Also kann die Situation (A.6) niemals vorkommen. Daraus folgt aber insbesondere, dass  $u_j \geq u_i$  für alle  $j > i$ . Das ist die Aussage von (A.4).

Wenn (A.5) nicht gilt, so gibt es ein kleinstes  $i$ , für das diese Bedingung verletzt ist (und natürlich ist  $u_i$  dann endlich).

Nach der Wahl der  $\alpha_i$  gilt immer  $\pi_i(\alpha_i) = u_i$  und  $\pi_j(\alpha_i) = 0$  für alle  $j < i$  (da  $\alpha_i \in N_i$ ). Wenn also (A.5) für  $i$  nicht gilt, so gibt es ein  $j > i$  mit

$$c := \pi_j(\alpha_i) \neq 0.$$

Auf Grund der Unmöglichkeit der Beziehung (A.6) muss

$$|c| \geq u_i \quad (\text{A.7})$$

sein, denn sonst würde  $\alpha_i$  oder  $-\alpha_i$  die Beziehung (A.6) erfüllen.

Man schreibe

$$c = qu_i + r,$$

wo  $q \in \mathbf{Z}$  und  $0 \leq r < u_i$  (Division mit Rest). Wir ändern die Basis von  $\mathbf{Z}^m$ , in dem wir  $b_i$  ersetzen durch

$$b'_i := b_i + qb_j$$

und alle anderen Basiselemente beibehalten.

Dies liefert tatsächlich eine Basis, denn die Matrix des Homomorphismus, der die alte Basis in die neuen Basiselemente abbildet, hat Einsen auf der

Diagonalen und nur eine Eintragung außerhalb der Diagonalen; ihre Determinante ist deshalb 1, und weil 1 eine Einheit in  $\mathbf{Z}$  ist, ist diese Matrix und somit auch der von ihr beschriebene Homomorphismus umkehrbar. Das heißt, dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus und bildet die alte Basis wieder auf eine Basis ab.

Wir haben

$$u_i b_i + c b_j = u_i b_i + u_i q b_j + r b_j = u_i b'_i + r b_j$$

und alle hier nicht vorkommende Basiselemente und der in ihrem Erzeugnis liegende Anteil von  $\alpha_i$  sind unverändert geblieben. Bezüglich der neuen Basis gilt also  $\pi_i(\alpha_i) = u_i^{\text{alt}}$  (immer noch) und  $\pi_j(\alpha_i) = r < u_i^{\text{alt}}$ . Alle anderen Koordinaten von  $\alpha_i$  sind unverändert, wie auch alle  $u_k$  und  $\alpha_k$  für  $k < i$  (da nach der Wahl von  $i$  diese  $\alpha_k$  Bedingung (A.5) erfüllen und somit nach wie vor reine Vielfache von  $b_k$  sind und  $b_i$  und  $b_j$  nicht involvieren).

In den neuen Koordinaten ist  $u_i^{\text{neu}}$  auf jeden Fall nicht größer geworden, aber wegen der Minimalität von  $\mu$  kann es auch nicht kleiner geworden sein, so dass  $u_i^{\text{neu}} = u_i^{\text{alt}}$ .

Da  $u_i$  unverändert ist, erfüllt das alte Element  $\alpha_i$  immer noch (A.3).

Aber in den neuen Koordinaten und mit dem gleichen  $\alpha_i$  ist nun  $\mu$  kleiner geworden, weil

$$|\pi_j^{\text{neu}}(\alpha_i)| = r < u_i \leq |c| = |\pi_j^{\text{alt}}(\alpha_i)|$$

und weil alle anderen Koordinaten von  $\alpha_i$  gleich geblieben sind. Wir haben also doch einen Widerspruch zur Minimalität von  $\mu$ .

Somit gilt tatsächlich  $\pi_j(\alpha_i) = 0$  für alle  $j \neq i$ , und (A.5) gilt.

Die  $\alpha_i \neq 0$  sind als nichtverschwindende Vielfache der Basiselemente  $b_i$  offenbar linear unabhängig.

Und sie erzeugen  $A$ . Dazu bemerken wir, dass für jedes  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) gilt

$$A_i = A_{i+1} + \mathbf{Z}\alpha_i \tag{A.8}$$

Nämlich, sei  $a \in A_i$ . Wenn  $a$  nicht ohnehin schon Element von  $A_{i+1}$  ist, dann ist  $\pi_i(a) \neq 0 \in U_i$  und diese Untergruppe von  $\mathbf{Z}$  wird von  $u_i = \pi_i(\alpha_i)$  erzeugt. Es gibt somit eine Zahl  $c \in \mathbf{Z}$  mit  $\pi_i(a) = \pi_i(c\alpha_i)$ . Daraus folgt  $b := a - c\alpha_i \in A_i \cap \text{Ker } \pi_i = A_{i+1}$ , also

$$a = b + c\alpha_i \in A_{i+1} + \mathbf{Z}\alpha_i.$$

Das beweist (A.8).

Durch eine Rückwärtsinduktion von  $m+1$  nach 1 folgt daraus, dass jedes  $A_i$  von den  $\alpha_j$  mit  $j \geq i$  erzeugt wird (der Induktionsanfang bei  $i = m+1$  ist trivial, da  $A_{m+1} = \{0\}$ ). Für  $i = 1$  besagt die so durch Induktion bewiesene

Aussage, dass  $A = A_1$  von allen  $\alpha_j$  erzeugt wird (aber die  $\alpha_j$ , die Null sind, tragen dazu natürlich nichts bei).

Somit bilden die  $\alpha_i \neq 0$  eine Basis von  $A$ .

Da die Projektion  $p: \mathbf{Z}^m \rightarrow G$  surjektiv war und  $A = p^{-1}(H)$  ist, ist die Einschränkung  $p|_A: A \rightarrow H$  auch surjektiv.

Die Elemente  $b_i$  bilden eine Basis von  $\mathbf{Z}^m$  und die Elemente  $\alpha_i = u_i b_i$  für  $u_i < \infty$  bilden eine Basis von  $A$ . Ist  $k$  die Anzahl der Indizes, für die  $u_i < \infty$ , dann handelt es sich bei den entsprechenden Indizes gerade um die *ersten*  $k$  Indizes, da die  $u_i$  nach (A.4) eine monoton steigende Folge bilden.

Die Bilder dieser Elemente unter  $p$  erzeugen also die Bildgruppen, d. h., die Elemente  $y_i := p(b_i)$  für  $1 \leq i \leq m$  bilden eine Erzeugendenmenge von  $G$  mit der Eigenschaft, dass die Elemente  $u_i y_i = p(u_i b_i) = p(\alpha_i)$  für  $1 \leq i \leq k$  die Untergruppe  $H = p(A)$  erzeugen.

Wenn  $G$  frei abelsch von Rang  $m$  war, war  $p$  ein Isomorphismus, woraus folgt, dass die  $y_i$  sogar eine Basis von  $G$  bilden. Und die  $u_i y_i$  für  $i \leq k$  sind offenbar linear unabhängig (da die  $y_i$  es sind) und bilden also eine Basis der von ihnen erzeugten Gruppe  $H$ . ■

**Satz A.5** Sei  $G$  eine endlich erzeugte additive abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Zahl  $n$  (genannt der **Rang** von  $G$ ) und es gibt (nicht unbedingt verschiedene) natürliche Zahlen  $d_1, d_2, \dots, d_s > 1$ , so dass

$$G \cong \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_{d_s}, \quad (\text{A.9})$$

wobei  $n$  eindeutig bestimmt ist, und man die  $d_i$  so wählen kann, dass

$$d_s \mid d_{s-1} \mid \dots \mid d_1;$$

alternativ kann man sie alle als Primzahlpotenzen wählen; in beiden Fällen sind die  $d_i$  (bis auf Reihenfolge, wenn man sie als Primzahlpotenzen wählt) eindeutig bestimmt.

Die  $d_i$  heißen die **Torsionskoeffizienten** von  $G$ .

Man beachte, dass

$$\mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_{d_s}$$

die Torsionsuntergruppe von  $G$  ist.

Wenn  $G$  von  $m$  Elementen erzeugt werden kann, dann ist der Rang höchstens  $m$  und ist gleich  $m$ , nur wenn  $G$  frei ist (und von Rang  $m$  auch im Sinne von Bemerkung A.3).

*Beweis.* Sei

$$X := \{ g_i \mid 1 \leq i \leq m \} \subseteq G$$

eine endliche Teilmenge von  $G$ , die  $G$  erzeugt, und sei  $m$  die Anzahl der Elemente von  $X$ .

Nach Lemma 2.10 b) gibt es einen eindeutigen Homomorphismus

$$p: F(X) \longrightarrow G,$$

der die Basis  $X$  von  $F(X)$  identisch auf die erzeugende Teilmenge  $X \subseteq G$  abbildet. Diese Abbildung ist surjektiv, weil ihr Bild eine Erzeugendenmenge von  $G$  enthält.

Sei  $A := \text{Ker } p \subseteq F(X)$ . Weil der Homomorphismus  $p$  surjektiv ist, induziert er einen Isomorphismus

$$\frac{F(X)}{A} \cong G.$$

Die Gruppe  $F(X)$  ist frei abelsch von Rang  $m$ . Aus Hilfssatz A.4 folgt, dass es eine Basis  $y_1, \dots, y_m$  von  $F(X)$  gibt und eine Basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  von  $A$  (mit  $k \leq m$ ), so dass jedes  $\alpha_i$  ein positives Vielfaches  $u_i y_i$  des entsprechenden Basiselementes  $y_i$  von  $F(X)$  ist. Dadurch folgt (wie in Lemma 2.30 d)), dass

$$\begin{aligned} G &\cong \frac{F(X)}{A} = \frac{\bigoplus_{i=1}^m \mathbf{Z} y_i}{\bigoplus_{i=1}^k u_i \mathbf{Z} y_i} \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^k \frac{\mathbf{Z}}{u_i \mathbf{Z}} \oplus \bigoplus_{i=k+1}^m \mathbf{Z} \\ &= \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z}_{u_i} \oplus \mathbf{Z}^{m-k} \end{aligned}$$

und dass  $G$  somit eine direkte Summe von zyklischen Gruppen ist.

Dies ist eine Darstellung wie in (A.9), mit  $n = m - k$ , aber ohne die dort genannten Eigenschaften für die Ordnungen der endlichen zyklischen Gruppen. Deren Summe ist aber offenbar die Torsionsuntergruppe von  $G$ .

Man beachte, dass der Rang  $n$  des freien Anteils  $\leq m$  ist und dass  $n = m$  nur, wenn  $k = 0$ ; in diesem Fall ist  $G \cong \mathbf{Z}^n$  und ist frei von Rang  $n$  im Sinne von Bemerkung A.3, wie am Ende der Aussage des Lemmas behauptet.

Eventuelle endliche Summanden mit  $u_i = 1$  oben kann man weglassen, weil  $\mathbf{Z}_1 = \{0\}$ .

Wenn  $u_i > 1$ , so kann man  $u_i$  auf eindeutige Weise schreiben als ein Produkt von teilerfremden Primzahlpotenzen, und auf Grund von Lemma 6.15 läßt sich der Summand  $\mathbf{Z}_{u_i}$  zerlegen als die direkte Summe der zyklischen Gruppen mit diesen Primzahlpotenzordnungen. Das liefert die Variante der

Darstellung (A.9), in der die  $d_i$  Primzahlpotenzen sind. Die Summanden dieser Zerlegung von  $T(G)$  nennen wir seine **Primzahlpotenzsummanden**.

Bevor wir die andere Art von Zerlegung in zyklische Summanden behandeln, zeigen wir zunächst, dass die Zerlegung von  $T(G)$  in Primzahlpotenzsummanden eindeutig ist.

Die *Summe* der Primzahlpotenzsummanden ist eindeutig, weil sie die Torsionsuntergruppe von  $G$  ist. Für jede Primzahl  $p$  und jede natürliche Zahl  $d \geq 1$  sei

$$T_{p^d}(G) = \{ a \in G \mid p^d a = 0 \}$$

und sei  $\tau_{p,d}$  die Ordnung dieser Untergruppe von  $T(G)$ . Diese Zahlen kann man direkt aus  $G$  oder  $T(G)$  bestimmen, ohne eine Zerlegung in Primzahlpotenzsummanden zu kennen.

Offensichtlich gilt  $\{0\} = T_1(G) \subseteq T_p(G) \subseteq T_{p^2}(G) \subseteq \dots$  und somit haben wir  $1 = \tau_{p,0} \mid \tau_{p,1} \mid \tau_{p,2} \mid \dots$ .

Auch die Gruppe  $T_{p^d}(G)$  ist eine direkte Summe von zyklischen Gruppen von Ordnungen, die Potenzen der Primzahl  $p$  sind; als Summanden können wir die vollen Primzahlpotenzsummanden von  $T(G)$  nehmen, deren Ordnung  $p^d$  teilt, und zyklische Untergruppen von Ordnung  $p^d$  der weiteren Primzahlpotenzsummanden von  $T(G)$ , deren Ordnung eine Potenz  $p^r$  mit  $r > d$  ist.

Die Ordnung  $\tau_{p,d}$  ist das Produkt der Ordnungen dieser zyklischen Summanden von  $T_{p^d}(G)$ , und daraus ist klar, dass der Quotient  $\tau_{p,d+1}/\tau_{p,d}$  eine Potenz  $p^u$  von  $p$  ist, wobei  $u$  die Anzahl der Primzahlpotenzsummanden von  $T(G)$  von Ordnung  $p^r$  ist, für die  $r > d$  (denn genau für solche Primzahlpotenzsummanden von  $T(G)$  hat  $T_{p^d}(G)$  einen Summanden von Ordnung  $p^d$ , der in  $T_{p^{d+1}}(G)$  durch einen Summanden von Ordnung  $p^{d+1}$  ersetzt wird; alle anderen Summanden bleiben unverändert).

Anhand dieser Daten läßt sich eindeutig bestimmen, welche Ordnungen die Primzahlpotenzsummanden von  $T(G)$  genau haben. Nur die Reihenfolge in der Aufzählung der Summanden ist natürlich nicht festgelegt.

Um aus dieser Darstellung die andere Variante zu erhalten, schreibe man eine Liste aller vorkommenden Primzahlpotenzen hin, jede so oft in der Liste vertreten, wie sie auch unter den Ordnungen der Primzahlpotenzsummanden tatsächlich vorkommt. Dann bestimmt man zu jeder vertretenen Primzahl die höchste Potenz, die in der Liste steht, wählt einen zyklischen Summanden von dieser Primzahlpotenzordnung, und bildet deren direkte Summe.

Nach Lemma 6.15 ist das Ergebnis wieder eine zyklische Gruppe, deren Ordnung  $d_1$  das Produkt der Ordnungen der zusammengefassten Summanden ist. Die verbrauchten Primzahlpotenzen streicht man aus der Liste und wiederholt das Verfahren mit der reduzierten Liste. Dieses Verfahren setzt man fort, bis alle Eintragungen aus der Liste verbraucht sind.

Man erhält so eine endliche Folge von zyklischen Gruppen  $\mathbf{Z}_{d_i}$ , wo aber für  $j > i$  die Primzahlpotenzen, die als Faktoren von  $d_j$  noch verfügbar sind, für jede Primzahl  $p$  höchstens so groß sind wie die Potenz von  $p$ , die als Faktor von  $d_i$  auftritt (denn die höchsten Potenzen werden ja zuerst verbraucht). Aus diesem Grund gilt  $d_j \mid d_i$  wenn  $j > i$ .

Eine Darstellung dieser Art kann nur auf die oben beschriebene Weise aus der Zerlegung in Primzahlpotenzsummanden entstehen, denn die  $\mathbf{Z}_{d_j}$  lassen sich nach Lemma 6.15 als eine direkte Summe von Primzahlpotenzsummanden von teilerfremden Ordnungen schreiben (die also zu verschiedenen Primzahlen gehören), und auf diese Weise kann man die Zerlegung in Primzahlpotenzsummanden zurückgewinnen. Genauer: man gewinnt so *eine* Zerlegung in Primzahlpotenzsummanden, aber es muss die ursprüngliche sein, weil sie eindeutig ist.

Wenn nun eine der zyklischen Gruppen  $\mathbf{Z}_{d_j}$  einen Primzahlpotenzsummanden von Ordnung  $p^r$  hat, so muss wegen der Teilerbedingung jedes  $\mathbf{Z}_{d_i}$  mit  $i < j$  einen Primzahlpotenzsummanden haben, deren Ordnung eine *mindestens so hohe* Potenz von  $p$  ist. Da die Primzahlpotenzsummanden der  $\mathbf{Z}_{d_i}$  zusammen genommen alle Primzahlpotenzsummanden von  $T(G)$  ergeben, müssen die  $\mathbf{Z}_{d_i}$  für die kleinsten Werte von  $i$  aus den Primzahlpotenzsummanden von  $T(G)$  zu den höchsten Potenzen jeder Primzahl zusammengesetzt sein; das ist genau die Konstruktion, die oben beschrieben wurde.

Aus diesem Grund ist auch die Darstellung mit zyklischen Summanden von sich teilenden Ordnungen eindeutig.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Rang  $n$  eindeutig ist.

Die Gruppe  $G$  bestimmt eindeutig die Faktorgruppe  $G/T(G)$ , und diese ist eine freie Gruppe isomorph zu  $\mathbf{Z}^n$  und somit von Rang  $n$  im Sinne von Bemerkung A.3. Dieser Rang ist eindeutig bestimmt, und somit kann  $G/T(G)$  nicht zu  $\mathbf{Z}^{n'}$  mit einem anderen Wert  $n' \neq n$  isomorph sein. Deshalb ist der Rang im Sinne des gegenwärtigen Satzes (der auch für endlich erzeugte abelsche Gruppen mit nichttrivialem Torsionsanteil erklärt ist!) gleichfalls eindeutig bestimmt. ■

**Korollar A.6**    a) *Eine endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe  $G$  ist frei abelsch von endlichem Rang.*

b) *Sei  $G$  eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang  $m$ .*

i) *Der Rang  $m$  ist die minimale Anzahl von Elementen, die erforderlich sind, um  $G$  zu erzeugen.*

ii) *Jede  $m$ -elementige Erzeugendenmenge von  $G$  ist eine Basis.*



*Beweis.* Zu a): Wenn  $G$  endlich erzeugt und torsionsfrei ist, so erscheinen die Summanden  $\mathbf{Z}_{d_i}$  in der direkten Summendarstellung (A.9) aus Satz A.5 nicht, und  $G$  ist frei abelsch von endlichem Rang.

Zu b) i) Der letzte Satz in der Behauptung von Satz A.5 besagt, dass jede Erzeugendenmenge mindestens  $\text{Rang } G$  viele Elemente haben muss. Aber eine freie abelsche Gruppe von Rang  $n$  besitzt eine Basis mit  $n$  Elementen, die die Gruppe erzeugt; also ist der Rang *gleich* der minimalen Anzahl von Erzeugenden.

Zu b) ii) Sei  $B := \{b_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  eine Basis von  $G$  und sei  $X := \{g_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  eine  $m$ -elementige Teilmenge von  $G$ , die  $G$  erzeugt.

Nach Lemma 2.10 b) gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus  $f: G \rightarrow G$ , so dass  $f(b_i) = g_i$  für jedes  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Weil diese Werte die Gruppe  $G$  erzeugen, ist  $f$  surjektiv.

Wenn  $X$  keine Basis ist, dann ist  $X$  nicht  $\mathbf{Z}$ -linear unabhängig und  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ . Weil  $f$  surjektiv ist, induziert  $f$  einen Isomorphismus

$$\frac{G}{\text{Ker } f} \cong G.$$

Nach Hilfssatz A.4 gibt es eine Basis  $Y := \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  von  $G$  und Zahlen  $u_1, u_2, \dots, u_k > 0 \in \mathbf{N}$  (für ein geeignetes  $k \leq m$ ), so dass die Elemente  $u_i y_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) eine Basis von  $\text{Ker } f$  bilden.

Weil  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ , ist  $k \geq 1$ , und  $G/\text{Ker } f$  ist eine direkte Summe von  $m$  zyklischen Gruppen, von denen  $k$  Stück endliche zyklische Gruppen  $\mathbf{Z}_{u_i}$  sind und nur die restlichen  $m - k$  Stück  $\mathbf{Z}$  sind.

Das würde nach Satz A.5 bedeuten, dass  $\text{Rang } G = m - k < m$ , in Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist  $X$  doch eine Basis, wie behauptet.

■

**Satz A.7** *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei abelsch.*

*Beweis.* Für endlich erzeugte Gruppen wurde die Aussage in Hilfssatz A.4 schon bewiesen, wo auch eine besonders schöne Form für die Basis der Untergruppe erreicht werden konnte. Für den allgemeinen Fall ist ein Argument mit Hilfe des Zornschen Lemmas erforderlich, den wir unabhängig führen, ohne Verwendung des schon bekannten Spezialfalls.

Sei  $G$  eine freie abelsche Gruppe und sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Sei  $B$  eine Basis von  $G$ .

Für jede Teilmenge  $A \subseteq B$  sei  $G_A$  die von  $A$  erzeugte Untergruppe von  $G$  (die frei abelsch ist, weil  $A$  als Teilmenge einer Basis linear unabhängig ist) und sei  $H_A := H \cap G_A$ .

Wir betrachten die Familie

$$\mathcal{A} := \{ (A, X) \mid A \subseteq B \text{ und } X \text{ ist eine Basis von } H_A \}$$

mit der partiellen Ordnung

$$(A, X) \leq (C, Y) : \Longleftrightarrow A \subseteq C \text{ und } X \subseteq Y.$$

Die Familie  $\mathcal{A}$  ist nicht leer, denn  $G_\emptyset = H_\emptyset = \{0\}$  und deshalb ist  $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{A}$ .

Sei  $\mathcal{T}$  eine total geordnete Teilfamilie von  $\mathcal{A}$ . Wir behaupten, dass

$$(U, Z) := \left( \bigcup_{(A,X) \in \mathcal{T}} A, \bigcup_{(A,X) \in \mathcal{T}} X \right)$$

zu  $\mathcal{A}$  gehört (und dann natürlich eine obere Schranke von  $\mathcal{T}$  darstellt).

Nach Konstruktion ist  $U \subseteq B$ .

Jedes Element  $z \in Z$  gehört zu  $X$  für ein geeignetes Paar  $(A, X) \in \mathcal{T}$ , und weil  $X$  eine Basis von  $H_A$  ist, gehört  $z$  zu  $H_A \subseteq H_U$ . Also ist  $Z \subseteq H_U$ .

Wenn

$$\sum_{i=1}^k n_i q_i \tag{A.10}$$

eine  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von Elementen aus  $U$  oder aus  $Z$  ist, dann liegt jedes der  $q_i$  in  $A_i$  oder in  $X_i$  für ein Paar  $(A_i, X_i) \in \mathcal{T}$ , und weil  $\mathcal{T}$  total geordnet ist, gibt es unter den endlich vielen Paaren  $(A_i, X_i)$  ( $1 \leq i \leq k$ ) ein größtes Paar  $(A, X)$ , so dass alle  $q_i$  in  $A$  beziehungsweise in  $X$  liegen.

Jedes Element  $h \in H_U = H \cap G_U$  schreibt sich, da  $h \in G_U$ , als eine Linearkombination (A.10) mit  $q_i \in U$ , und weil es nach dem vorigen Absatz ein Paar  $(A, X) \in \mathcal{T}$  gibt, so dass alle  $q_i \in A$ , gehört  $h$  zu  $H \cap G_A = H_A$  und lässt sich deshalb auch als eine Linearkombination von Elementen von  $X \subseteq Z$  schreiben. Das zeigt, dass  $Z$  die ganze Gruppe  $H_U$  erzeugt.

Für jede Linearkombination (A.10) von verschiedenen Elementen  $q_i \in Z$  gibt es nach dem vorletzten Absatz ein Paar  $(A, X) \in \mathcal{T}$ , so dass alle  $q_i \in X$ . Wenn die Summe der Linearkombination 0 ist, dann müssen alle  $n_i = 0$  sein, weil  $X$  nach Voraussetzung linear unabhängig ist. Es folgt, dass ganz  $Z$  linear unabhängig ist.

Damit haben wir gezeigt, dass  $Z$  eine Basis von  $H_U$  ist, und somit, wie behauptet, dass  $(U, Z) \in \mathcal{A}$  und  $\mathcal{T}$  eine obere Schranke hat.

Nach dem Zornschen Lemma besitzt  $\mathcal{A}$  ein maximales Element  $(C, Y)$ . Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $C = B$ .

Wenn dies nicht der Fall ist, wähle man ein Element  $d \in B \setminus C$  und setze

$$D := C \cup \{d\}.$$

Jedes Element von  $G$  schreibt sich eindeutig als eine  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von Elementen von  $B$  und für jedes  $b \in B$  haben wir einen surjektiven Homomorphismus  $\pi_b: G \rightarrow \mathbf{Z}$ , die jedem Element  $g \in G$  seinen Koeffizienten auf dem Basiselement  $b$  in dieser eindeutigen Linearkombination zuordnet.

Die Koeffizienten, die die Elemente von  $H_D$  auf dem Basiselement  $d$  haben, bilden eine Untergruppe

$$K := \pi_d(H_D)$$

von  $\mathbf{Z}$ .

Falls diese Untergruppe  $\{0\}$  ist, ist  $H_D = H \cap G_D \subseteq G_C$ , woraus folgt, dass  $H_D = H_D \cap G_C = H \cap G_D \cap G_C = H \cap G_C = H_C$ . Da  $Y$  eine Basis von  $H_C$  ist, ist es auch eine Basis von  $H_D$  und  $(D, Y) \in \mathcal{A}$ . Das ist unmöglich weil  $(C, Y) < (D, Y)$ , aber  $(C, Y)$  maximal in  $\mathcal{A}$  war.

Also ist  $K \neq \{0\}$ , und  $K$  wird erzeugt von seinem kleinsten positiven Element  $r$ . Man wähle ein Element  $z \in H_D$  mit  $\pi_D d(z) = r$ .

Wir behaupten, dass  $Z := Y \cup \{z\}$  eine Basis von  $H_D$  bildet.

Diese Menge ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination aus  $Z$ , die Null ergibt, Koeffizienten 0 auf  $z$  haben muss, weil dies das einzige Element von  $Z$  ist, für das der Wert von  $\pi_d$  ungleich 0 ist. Übrig bleibt eine Linearkombination von Elementen von  $Y$ , deren Summe Null ist, und weil  $Y$  linear unabhängig ist müssen auch alle anderen Koeffizienten 0 sein.

Die Menge  $Z$  erzeugt  $H_D$ . Dazu sei  $h \in H_D$ . Dann ist  $\pi_d(h)$  ein Vielfaches  $cr$  von dem Erzeugenden  $r = \pi_d(z)$  von  $K$ . Folglich ist  $\pi_d(h - cz) = 0$  und somit liegt  $h - cz \in H_C$  und ist deshalb eine Linearkombination von Elementen von  $Y$ . Insgesamt ist  $h = (h - cz) + cz$  also eine Linearkombination von Elementen von  $Y$  zusammen mit  $z$ , liegt also im Erzeugnis von  $Y \cup \{z\} = Z$ .

Wir haben gezeigt, dass  $Z$  eine Basis von  $H_D$  ist, was bedeutet, dass  $(D, Z) \in \mathcal{A}$ . Weil nach Konstruktion  $(C, Y) < (D, Z)$ , ist  $(C, Y)$  wieder nicht maximal in  $\mathcal{A}$ , in Widerspruch zu seiner Wahl.

Folglich gilt  $C = B$  und  $Y$  ist eine Basis von

$$H_C = H_B = H \cap G_B = H \cap G = H.$$

Die Gruppe  $H$  hat also eine Basis und ist frei abelsch. ■



# Anhang B

## Das Tensorprodukt

In diesem Anhang wollen wir an die Konstruktion des *Tensorproduktes* erinnern. Es handelt sich um einen in jeder Variablen kovarianten Funktor zweier oder mehrerer Variablen, der in einer allgemeinen Variante für Moduln über einen Ring  $R$  erklärt ist, wobei für Anwendungen in der linearen Algebra der Ring ein Körper ist und die Moduln somit Vektorräume; in dieser Form kommt der Funktor auch in den Anfängervorlesungen oft vor.

Wir wollen in dem beschränkten Umfang dieser einführenden Vorlesung *Algebraische Topologie* diesen Funktor anwenden zwischen Kettengruppen eines Kettenkomplexes und einer abelschen „Koeffizientengruppe“, in anderen Worten, in der Hauptsache zwischen abelschen Gruppen (obwohl der allgemeinere Fall auch in der algebraischen Topologie durchaus Sinn macht).

Aus Vereinfachungsgründen werden wir deshalb in diesem Anhang davon ausgehen, dass wir es nur mit dem Ring  $\mathbf{Z}$  zu tun haben, und die Konstruktion speziell für  $\mathbf{Z}$ -Moduln, also für abelsche Gruppen, erklären.

Dabei empfiehlt es sich, nicht mit einer direkten Konstruktion zu beginnen, sondern mit den Anwendungen des Funktors im Visier ihn zunächst über eine so genannte *universelle Eigenschaft* zu definieren. Diesen vielleicht ungewohnten Zugang wollen wir kurz motivieren.

**Bemerkung B.1** Sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $W$  ein Unterraum von  $V$ . Wir können dann den Quotientenvektorraum  $V/W$  konstruieren, und wir wissen, wie dieser Raum aufgebaut ist. Seien Elemente sind nicht Elemente von irgendwelchen anderen bekannten Vektorräumen, sondern Restklassen von  $W$  in  $V$ , also Teilmengen von  $V$ , die Äquivalenzklassen einer gewissen Äquivalenzrelation sind. Für diese Klassen werden dann auch noch Vektorraumoperationen, eine Addition und eine skalare Multiplikation, erklärt.

Diese Definitionen sind nicht sehr kompliziert aber trotzdem nicht ganz

angenehm in der Anwendung und etwas belastend für die intuitive Vorstellung. Vor allem sind die Details dieser Konstruktion völlig irrelevant für die Verwendung von Quotienten und sie verschleiern gerade deren wesentlichen Merkmale und Eigenschaften, auch wenn die Konstruktionsdetails technisch nötig sind, um diese Eigenschaften zu realisieren.

Es verhält sich genau so wie bei jedem anderen technischen Gerät — ohne einen Motor kann ein Auto nicht fahren, aber den Fahrer interessieren eigentlich die Fahreigenschaften, Komfort und Geschwindigkeit des Autos, und nicht die Konstruktionsdetails des Motors oder die Nietstellen am Fahrzeugrahmen, auch wenn die Fahreigenschaften nur durch diese technischen Merkmale zu realisieren sind.

Wichtig an Quotientenräumen ist, dass sie lineare Abbildungen auf  $V$  beschreiben, die auf  $W$  verschwinden (und für die deshalb die innere Struktur von  $W$  gar nicht sichtbar ist). Der Quotientenraum ist versehen mit einer kanonischen Projektion  $\pi: V \rightarrow V/W$ , die auf  $W$  verschwindet, und jede andere lineare Abbildung  $f: V \rightarrow U$  in einen dritten Vektorraum  $U$ , die auf  $W$  verschwindet, faktorisiert eindeutig durch  $\pi$ , d. h., es gibt eine eindeutige lineare Abbildung  $\bar{f}: V/W \rightarrow U$  mit  $f = \bar{f} \circ \pi$ .

Diese sogenannte „universelle Eigenschaft“ des Quotienten charakterisiert ihn eindeutig, und schwierige Fragen über den Quotientenraum (z. B., der Nachweis, dass eine gewisse Restklasse  $\gamma$  nicht 0 ist), lassen sich oft viel einfacher über die universelle Eigenschaft beantworten (z. B., in dem man sie benutzt, um eine lineare Abbildung  $\bar{f}$  zu konstruieren mit  $\bar{f}(\gamma) \neq 0$ ), als direkt über die technische Konstruktion des Quotienten als Menge von Restklassen.

Aus diesem Grund werden wir bei der nun folgenden Konstruktion des neuen Funktors **Tensorprodukt** zunächst nur durch eine universelle Eigenschaft beschreiben, welchen Zweck das Tensorprodukt hat.

Auch das Tensorprodukt hat natürlich eine technische Konstruktion (deren Sinn man aber erst erkennt, wenn man die charakterisierende Eigenschaft des Tensorprodukts verstanden hat), und diese Konstruktion müssen wir irgendwann erläutern als Nachweis, dass es überhaupt Tensorprodukte gibt. Aber die technischen Details sind zweiträngig, und wir werden sie auch so behandeln.

Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts hat mit folgendem aus der linearen Algebra bekanntem Begriff zu tun.

**Definition B.2** Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  abelsche Gruppen. Eine Abbildung

$$f: A \times B \rightarrow C$$

heißt **bilinear** oder genauer  **$\mathbf{Z}$ -bilinear**, wenn  $f$ , die ja eine Abbildung in zwei Variablen ist, in jeder Variablen *einzel*n ein Gruppenhomomorphismus ist, d. h., wenn für  $a, a' \in A$  und für  $b, b' \in B$  gilt

$$f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b) \quad (\text{B.1a})$$

und

$$f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b'). \quad (\text{B.1b})$$

**Bemerkung B.3** Seien  $A, B$  und  $C$  abelsche Gruppen. Sei

$$f: A \times B \longrightarrow C$$

eine  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung.

Wenn  $C'$  eine abelsche Gruppe ist und wenn  $g: C \longrightarrow C'$  ein Gruppenhomomorphismus ist, dann ist

$$g \circ f: A \times B \longrightarrow C'$$

wieder bilinear.

Wenn  $A'$  und  $B'$  abelsche Gruppen sind und wenn  $h: A' \longrightarrow A$  und  $k: B' \longrightarrow B$  zwei Gruppenhomomorphismen sind, dann ist

$$f \circ (h \times k): A' \times B' \longrightarrow C$$

wieder eine  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung (wo

$$(h \times k)(a', b') := (h(a'), k(b')) \in A \times B$$

für alle  $a \in A'$  und  $b \in B'$ ).

In beiden Fällen ist der Nachweis trivial und durch direktes Nachrechnen möglich.

**Definition B.4** Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen. Ein **Tensorprodukt** von  $A$  und  $B$  (über den Ring  $\mathbf{Z}$ ) ist eine abelsche Gruppe

$$A \otimes B$$

zusammen mit einer  $\mathbf{Z}$ -bilinearen Abbildung

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes B,$$

(die wir die **charakteristische bilineare Abbildung** des Tensorprodukts nennen wollen) so dass es für jede **Z**-bilineare Abbildung

$$f: A \times B \longrightarrow C$$

in eine beliebige abelsche Gruppe  $C$  einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$\bar{f}: A \otimes B \longrightarrow C$$

gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & C \\ \mu \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A \otimes B & & \end{array} \quad (\text{B.2})$$

kommutiert, d. h., so dass  $\bar{f} \circ \mu = f$ .

Das klassische Beispiel einer **Z**-bilinearen Abbildung ist die Multiplikation in einem kommutativen Ring oder die Skalarmultiplikation zwischen einem Körper und einem Vektorraum über diesen Körper. Deshalb kann man sich die Abbildung  $\mu$  auch als eine Art Multiplikation denken. Aus diesem Grund ist es üblich, für  $a \in A$  und  $b \in B$  die Notation

$$a \otimes b := \mu(a, b) \quad (\text{B.3})$$

für die Bildelemente der charakteristischen bilinearen Abbildung  $\mu$  zu verwenden.

Um ein bisschen Gefühl dafür zu bekommen, wollen wir einige Grundeigenschaften des Tensorprodukts herleiten, bevor wir durch eine explizite Konstruktion den Nachweis antreten, dass ein solcher Modul mit der bilinearen Abbildung  $\mu$  tatsächlich immer existiert.

**Lemma B.5** *Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen. Sei  $A \otimes B$  ein Tensorprodukt von  $A$  und  $B$  und sei*

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes B$$

*die charakteristische bilineare Abbildung. Dann gilt:*

a) *Für alle  $a$  und  $a' \in A$  und für alle  $b \in B$  ist*

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$$

b) *Für alle  $a \in A$  und für alle  $b$  und  $b' \in B$  ist*

$$a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$$



c) Für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  ist

$$0 \otimes b = 0 = a \otimes 0.$$

d) Für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  ist

$$(-a) \otimes b = -(a \otimes b) = a \otimes (-b).$$

e) Für alle  $a \in A$  und  $b \in B$  und für jede Zahl  $n \in \mathbf{Z}$  ist

$$(na) \otimes b = n(a \otimes b) = a \otimes (nb).$$

f) Jedes Element von  $A \otimes B$  ist eine endliche Summe von Elementen der Gestalt  $a \otimes b$ .

*Beweis.* a) und b) drücken einfach die Tatsache aus, dass  $\mu$  bilinear ist.

Teil c) folgt sofort aus den aus a) und b) herzuleitenden Gleichungen

$$0 \otimes b = (0 + 0) \otimes b = 0 \otimes b + 0 \otimes b$$

und

$$a \otimes 0 = a \otimes (0 + 0) = a \otimes 0 + a \otimes 0$$

Teil d) lässt sich über folgende Gleichungen aus den vorhergehenden drei Teilen schließen:

$$a \otimes b + (-a) \otimes b = (a + (-a)) \otimes b = 0 \otimes b = 0$$

$$a \otimes b + a \otimes (-b) = a \otimes (b + (-b)) = a \otimes 0 = 0$$

Teil e) folgt sehr einfach durch Induktion aus a) und b), zusammen mit c) und d) wenn  $n \leq 0$ .

f): Es reicht zu zeigen, dass  $A \otimes B$  von Bild  $\mu$  erzeugt wird, denn dann ist jedes Element von  $A \otimes B$  eine endliche Kombination von Summen und Differenzen von Elementen der Form  $a \otimes b$ , und weil nach Teil d) das Negative eines Elements  $a \otimes b$  wieder diese Form hat, lässt sich eine endliche Kombination von Summen und Differenzen dieser Elemente auch als eine reine Summe solcher Elemente schreiben.

Sei  $C$  die von  $\mu(A \times B)$  erzeugte Untergruppe von  $A \otimes B$ . Dann können wir  $\mu$  auch als eine bilineare Abbildung  $\mu': A \times B \longrightarrow C$  auffassen, und

nach der Definition des Tensorproduktes gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus  $\bar{\mu}': A \otimes B \longrightarrow C$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\mu'} & C \\ \mu \downarrow & \nearrow \bar{\mu}' & \\ A \otimes B & & \end{array}$$

kommutiert, also so dass

$$\bar{\mu}' \circ \mu = \mu'. \quad (\text{B.4})$$

Sei  $i: C \longrightarrow A \otimes B$  die Inklusion (so dass  $\mu = i \circ \mu'$ ). Wir wenden die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes jetzt auf die charakteristische bilineare Abbildung  $\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes B$  an.

Nach (B.4) ist  $i \circ \bar{\mu}'$  ein Gruppenhomomorphismus  $A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$  mit  $i \circ \bar{\mu}' \circ \mu = i \circ \mu' = \mu$ , und  $\text{Bild}(i \circ \bar{\mu}') = C$ .

Aber auch  $\text{id}_{A \otimes B}$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $A \otimes B \longrightarrow A \otimes B$  mit  $\text{id}_{A \otimes B} \circ \mu = \mu$ , und das Bild von  $\text{id}_{A \otimes B}$  ist natürlich ganz  $A \otimes B$ .

Wegen der Eindeutigkeit des Homomorphismus  $\bar{f}$ , der als schräg nach oben verlaufender Pfeil das Diagramm (B.2) ergänzt, ist  $i \circ \bar{\mu}' = \text{id}_{A \otimes B}$  und beide Abbildungen haben das gleiche Bild.

Es folgt  $C = A \otimes B$ , d. h., Bild  $\mu$  erzeugt ganz  $A \otimes B$ . ■

**Bemerkung B.6 (Warnung!)** Die Elemente  $a \otimes b$  erzeugen nur  $A \otimes B$ . Nicht jedes Element von  $A \otimes B$  hat diese einfache Form, auch wenn die Notation dazu verführt, sich das einzubilden.

Hier ist ein Gegenbeispiel: Sei  $A := \mathbf{Z}[X]$  der Polynomring über  $\mathbf{Z}$  in einem Unbekannten  $X$ , und sei  $B := \mathbf{Z}[Y]$  der Polynomring über  $\mathbf{Z}$  in einem anderen Unbekannten  $Y$ , beide Ringe jetzt aufgefasst nur als additive abelsche Gruppen.

Sei  $C := \mathbf{Z}[X, Y]$  der Polynomring über  $\mathbf{Z}$  in zwei Unbekannten  $X$  und  $Y$ . Man kann  $A$  und  $B$  als Untergruppen von  $C$  auffassen.

Sei  $f: A \times B \longrightarrow C$  die auf  $A \times B$  eingeschränkte Ringmultiplikation von  $\mathbf{Z}[X, Y]$ , eine  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung. Das heißt, für  $p = p(X) \in \mathbf{Z}[X]$  und  $q = q(Y) \in \mathbf{Z}[Y]$  setzen wir

$$f(p, q) = p(X)q(Y) \in \mathbf{Z}[X, Y].$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes induziert  $f$  einen Gruppenhomomorphismus  $\bar{f}: \mathbf{Z}[X] \otimes \mathbf{Z}[Y] \longrightarrow \mathbf{Z}[X, Y]$  mit

$$\bar{f}(p \otimes q) = f(p, q) = p(X)q(Y)$$

für jedes  $p = p(X) \in \mathbf{Z}[X]$  und  $q = q(Y) \in \mathbf{Z}[Y]$ .

Der Homomorphismus  $\bar{f}$  bildet jedes Element von  $A \otimes B$  der Form  $a \otimes b$  also in ein Polynom in  $\mathbf{Z}[X, Y]$  ab, dass sich schreiben lässt als Produkt eines Polynoms nur in  $X$  mit einem Polynom nur in  $Y$ .

Man rechnet sofort nach, dass

$$\bar{f}(X \otimes 1 + 1 \otimes Y) = X + Y,$$

und dieses Polynom lässt sich nicht faktorisieren als Produkt eines Polynoms nur in  $X$  mit einem Polynom nur in  $Y$ , denn weil  $\text{Grad}(X + Y) = 1$  und weil der Grad von Polynomen sich bei Multiplikation additiv verhält, müsste bei einem solchen Produkt einer der Faktoren Grad 1 haben und der andere Grad 0, also eine Konstante in  $\mathbf{Z}$  sein. Deshalb kann in dem Produkt nur einer der Unbekannten  $X$  oder  $Y$  erscheinen und das Produkt kann nicht  $X + Y$  sein.

Es folgt, dass das Element  $X \otimes 1 + 1 \otimes Y \in A \otimes B$  nicht umgeschrieben werden kann als ein einzelnes Element der Form  $a \otimes b$ .

Obwohl die charakteristische  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung nicht surjektiv sein muss, reicht es für viele Zwecke, dass ihr Bild den Tensorproduktmodul erzeugt. Insbesondere kann man  $\mu$  aus Verknüpfungsgleichungen „wegkürzen“:

**Korollar B.7** Seien  $A, B$  und  $C$  abelsche Gruppen. Sei  $A \otimes B$  ein Tensorprodukt von  $A$  und  $B$  und sei

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes B$$

die charakteristische bilineare Abbildung.

Wenn  $f$  und  $g: A \otimes B \longrightarrow C$  Gruppenhomomorphismen sind und wenn  $f \circ \mu = g \circ \mu$ , dann ist  $f = g$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi: A \times B \longrightarrow C$  die  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung  $\varphi = f \circ \mu = g \circ \mu$ . Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts besagt, dass es einen *eindeutigen* Homomorphismus  $\bar{\varphi}: A \otimes B \longrightarrow C$  gibt mit  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \mu$ , und deshalb muss  $f = g$  sein. ■

**Bemerkung B.8** Sie werden sehr bald feststellen, dass das Rechnen in Tensorprodukten etwas undurchsichtig ist und dass man oft schlecht erkennen kann, wann zwei verschiedene Ausdrücke in den Elementen  $a \otimes b$  das gleiche Element von  $A \otimes B$  darstellen oder nicht. Deshalb hier ein paar aufmunternde Worte und Vorschläge, wie man dabei am besten vorgeht.

Zu zeigen, *dass* zwei Elemente von  $A \otimes B$  gleich sind (obwohl sie verschieden hingeschrieben wurden) ist meistens sehr leicht, und erfordert nur eine geradlinige Anwendung der Rechenregeln B.5 a)– d).

Schwierig ist immer der Nachweis, dass zwei Elemente *verschieden* sind und dass zwei Ausdrücke *nicht* durch Anwendung der genannten Regeln ineinander überführt werden können. Das probateste Hilfsmittel dazu ist der Trick, der auch im Beispiel in Bemerkung B.6 angewendet wurde: man konstruiert einen Homomorphismus von  $A \otimes B$  in eine dritte Gruppe  $C$ , der auf beiden Elementen verschiedene Werte annimmt, und diesen Homomorphismus selber konstruiert man am einfachsten durch Angabe einer ihn erzeugenden bilinearen Abbildung  $A \times B \longrightarrow C$ .

**Lemma B.9** *Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen.*

*Wenn das Tensorprodukt  $A \otimes B$  im Sinne von Definition B.4 existiert, dann ist es eindeutig bestimmt bis auf einen Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* Seien  $C$  und  $D$  abelsche Gruppen, die in der Rolle von  $A \otimes B$  die universelle Eigenschaft aus Definition B.4 erfüllen, und seien

$$\mu: A \times B \longrightarrow C \quad \text{und} \quad \nu: A \times B \longrightarrow D$$

die charakteristischen bilinearen Abbildungen der Tensorprodukte  $C$  und  $D$ .

Weil  $C$  ein Tensorprodukt ist und weil  $\nu$  bilinear ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus  $\varphi = \bar{\nu}: C \longrightarrow D$  mit

$$\varphi \circ \mu = \nu. \tag{B.5}$$

Weil  $D$  ein Tensorprodukt ist und weil  $\mu$  bilinear ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus  $\psi = \bar{\mu}: D \longrightarrow C$  mit

$$\psi \circ \nu = \mu. \tag{B.6}$$

Statt  $\mu$  und  $\nu$  auf diese Weise miteinander in Verbindung zu bringen, können wir jede von ihnen mit sich selber vergleichen. Die Abbildung  $\mu$  ist nicht nur die charakteristische bilineare Abbildung des Tensorproduktes  $C$ , sondern schlicht und einfach eine  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung  $A \times B \longrightarrow C$ , und aus (B.5) und (B.6) folgt, dass  $\psi \circ \varphi$  ein Homomorphismus  $C \longrightarrow C$  ist mit

$$\psi \circ \varphi \circ \mu = \mu.$$

Nach Korollar B.7 kann man  $\mu$  wegekürzen und wir haben

$$\psi \circ \varphi = \text{id}_C.$$

Auf die gleiche Weise, mit den Rollen von  $C$  und  $D$  vertauscht, zeigt man

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_D.$$

Es folgt, dass  $\varphi$  und  $\psi$  zueinander inverse Isomorphismen sind. ■

**Lemma B.10** *Wenn für je zwei abelsche Gruppen  $A$  und  $B$  das Tensorprodukt  $A \otimes B$  im Sinne von Definition B.4 existiert (was wir gleich in Lemma B.11 beweisen werden), dann ist  $\otimes$  ein additiver Funktor*

$$\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{AbGp},$$

*der in beiden Variablen kovariant ist.*

*Ferner ist die charakteristische  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung*

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes B$$

*eine natürliche Transformation (in dem Sinne, dass  $\mu$  mit Morphismen von  $\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp}$  und den von ihnen induzierten Homomorphismen der Tensorprodukte auf die naheliegende Weise kommutiert, wie in Gleichung (B.7) unten angegeben).*

*Beweis.* Die Objektzuordnung des nachzuweisenden Funktors ist nach Voraussetzung gegeben, und wir müssen nur die zugehörige Zuordnung von Morphismen zu Morphismen konstruieren und zeigen, dass sie die erforderlichen Eigenschaften hat.

Seien  $(A, B)$  und  $(C, D)$  Objekte von  $\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp}$  und sei

$$(f, g) \in \text{Hom}(A, C) \times \text{Hom}(B, D),$$

also  $f$  sei ein Homomorphismus  $A \longrightarrow C$  und  $g$  sei ein Homomorphismus  $B \longrightarrow D$ . Sie induzieren eine mengentheoretische Abbildung

$$f \times g: A \times B \longrightarrow C \times D$$

mit  $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$ , und  $\times$  ist offensichtlich ein in beiden Variablen kovarianter Funktor  $\mathbf{AbGp} \times \mathbf{AbGp} \longrightarrow \mathbf{Men}$ .

Seien  $\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes B$  und  $\nu: C \times D \longrightarrow C \otimes D$  die charakteristischen  $\mathbf{Z}$ -bilinearen Abbildungen.

Nach Bemerkung B.3 ist  $\nu \circ (f \times g): A \times B \longrightarrow C \otimes D$  eine  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung, und sie induziert wegen der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$f \otimes g: A \otimes B \longrightarrow C \otimes D$$

mit

$$(f \otimes g) \circ \mu = \nu \circ (f \times g). \quad (\text{B.7})$$

Diese Abbildung nehmen wir als  $\otimes(f, g)$  (aber wir benutzen dafür in der Regel die bequemere Notation  $f \otimes g$ ). Diese Zuordnung ist in beiden Variablen kovariant.

Seien  $G$  und  $H$  weitere abelsche Gruppen und seien  $h: C \rightarrow G$  und  $k: D \rightarrow H$  Morphismen der Kategorie  $\mathbf{AbGp}$ , also Gruppenhomomorphismen. Sei

$$\lambda: G \times H \rightarrow G \otimes H$$

die charakteristische  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung.

Dann ist  $(h \otimes k) \circ (f \otimes g)$  ein Homomorphismus  $A \otimes B \rightarrow G \otimes H$ , und sie erfüllt

$$(h \otimes k) \circ (f \otimes g) \circ \mu = (h \otimes k) \circ \nu \circ (f \times g) = \lambda \circ (h \times k) \circ (f \times g) = \lambda \circ (hf \times kg).$$

Daraus folgt aus Eindeutigkeitsgründen

$$(h \otimes k) \circ (f \otimes g) = hf \otimes kg, \quad (\text{B.8})$$

also ist die Morphismuszusammenfassung von  $\otimes$  verträglich mit Verknüpfung.

Wenn  $A = C$  und  $B = D$  und wenn  $f = \text{id}_A$  und  $g = \text{id}_B$ , so ist  $\text{id}_{A \otimes B}: A \otimes B \rightarrow A \otimes B$  ein Homomorphismus mit

$$\text{id}_{A \otimes B} \circ \mu = \mu = \mu \circ \text{id}_{A \times B} = \mu \circ (\text{id}_A \times \text{id}_B)$$

und nach Definition haben wir somit

$$\text{id}_A \otimes \text{id}_B = \text{id}_{A \otimes B}. \quad (\text{B.9})$$

Damit sind alle funktoriellen Eigenschaften nachgewiesen.

Nebenbei beweist Gleichung (B.7) die Natürlichkeit der charakteristischen bilinearen Abbildung.

Die Additivität ist noch zu zeigen.

Dazu seien  $f': A \rightarrow C$  und  $g': B \rightarrow D$  weitere Homomorphismen. Aus

$$(f \otimes g) \circ \mu = \nu \circ (f \times g) \quad \text{und} \quad (f' \otimes g) \circ \mu = \nu \circ (f' \times g)$$

folgt

$$\begin{aligned} ((f \otimes g) + (f' \otimes g)) \circ \mu &= (f \otimes g) \circ \mu + (f' \otimes g) \circ \mu \\ &= \nu \circ (f \times g) + \nu \circ (f' \times g) \\ &= \nu \circ ((f + f') \times g) \quad (\text{weil } \nu \text{ bilinear ist}) \end{aligned}$$

und das bedeutet nach Definition, dass

$$(f + f') \otimes g = (f \otimes g) + (f' \otimes g).$$

Auf ähnliche Weise zeigt man

$$f \otimes (g + g') = (f \otimes g) + (f \otimes g').$$

Somit ist  $\otimes$  in jeder Variablen einzeln additiv, also im Sinne von Definition 6.5 als Funktor von zwei Variablen additiv. ■

Jetzt wissen wir schon ziemlich gut, was wir mit der Einführung des Tensorproduktes gewinnen, auch wenn wir noch nicht alle Eigenschaften dieses Funktors kennen. Aber vorerst haben wir nur Luftschlösser gebaut, denn für die Definition des Tensorproduktfunktors sind wir nur von einer *gewünschten* universellen Eigenschaft ausgegangen. Es bleibt noch zu zeigen, dass es *tatsächlich* Tensorprodukte gibt, d. h., eine Objektzuordnung für diesen Funktor, die die universelle Eigenschaft mit „realen“ abelschen Gruppen realisiert:

**Lemma B.11** *Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen. Dann existiert ein Tensorprodukt  $A \otimes B$ .*

*Beweis.* Sei  $F := F(A \times B)$  die von der Menge  $A \times B$  erzeugte freie abelsche Gruppe; sie enthält  $A \times B$  als eine Teilmenge.

Sei  $N$  die Untergruppe von  $F$ , die erzeugt wird von den Elementen der Gestalten

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b) \quad (\text{für } a \text{ und } a' \in A, b \in B) \quad (\text{B.10a})$$

$$(a, b + b') - (a, b) - (a, b') \quad (\text{für } a \in A \text{ und } b, b' \in B). \quad (\text{B.10b})$$

Wir setzen

$$A \otimes B := \frac{F}{N}. \quad (\text{B.11})$$

Sei  $f: A \times B \rightarrow C$  eine beliebige mengentheoretische Abbildung. Es lässt sich  $f$  nach Lemma 2.10 b) zu einem Gruppenhomomorphismus  $\varphi: F \rightarrow C$  erweitern, und jeder Homomorphismus  $F \rightarrow C$  ist eindeutig bestimmt durch seine Einschränkung auf  $A \times B$ .

Genau dann ist  $f$  bilinear, wenn die Gleichungen (B.1) erfüllt sind, in anderen Worten, wenn für alle  $a$  und  $a' \in A$  und  $b$  und  $b' \in B$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f(a + a', b) - f(a, b) - f(a', b) \\ &= \varphi(a + a', b) - \varphi(a, b) - \varphi(a', b) = \varphi((a + a', b) - (a, b) - (a', b)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= f(a, b + b') - f(a, b) - f(a, b') \\ &= \varphi(a, b + b') - \varphi(a, b) - \varphi(a, b') = \varphi((a, b + b') - (a, b) - (a, b')). \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  genau dann bilinear, wenn seine Erweiterung  $\varphi$  auf den Erzeugenden von  $N$  verschwindet, oder gleichbedeutend, wenn  $\varphi|N = 0$ .

Jetzt sei  $\pi: F \longrightarrow F/N = A \otimes B$  die kanonische Projektion und setze

$$\mu = \pi|(A \times B): A \times B \longrightarrow A \otimes B. \quad (\text{B.12})$$

Weil  $\pi$  die Projektion auf einen Quotienten nach  $N$  ist, verschwindet  $\pi$  auf  $N$  und wie oben begründet bedeutet das, dass  $\mu$  eine  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung  $A \times B \longrightarrow A \otimes B$  ist.

Wir zeigen jetzt, dass  $\mu$  die universelle Eigenschaft aus Definition B.4 erfüllt und dass somit  $F/N$  ein Tensorprodukt von  $A$  und  $B$  ist mit  $\mu$  als charakteristische bilineare Abbildung.

Dazu sei  $C$  eine abelsche Gruppe und sei  $f: A \times B \longrightarrow C$  eine  $\mathbf{Z}$ -bilineare Abbildung. Die *mengentheoretische* Abbildung  $f$  erweitert sich eindeutig zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: F \longrightarrow C,$$

der wegen der Bilinearität von  $f$ , wie oben erläutert, auf  $N$  verschwindet. Deshalb induziert  $\varphi$  einen eindeutigen Homomorphismus  $\bar{\varphi}: F/N \longrightarrow C$  mit

$$\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi.$$

Nach Einschränkung auf  $A \times B \subseteq F$  erhalten wir daraus

$$\bar{\varphi} \circ \mu = \bar{\varphi} \circ \pi|(A \times B) = \varphi|(A \times B) = f.$$

Wir können also  $\bar{\varphi}$  als den von der universellen Eigenschaft verlangten Homomorphismus

$$\bar{f}: A \otimes B \longrightarrow C$$

nehmen mit

$$\bar{f} \circ \mu = f. \quad (\text{B.13})$$

Dieser Homomorphismus ist auch eindeutig, denn sei  $\bar{f}$  ein beliebiger Homomorphismus  $A \otimes B \longrightarrow C$ , der (B.13) erfüllt. Weil beide Seiten von (B.13) sich *eindeutig* zu  $F$  erweitern, gilt

$$\bar{f} \circ \pi = \varphi$$



auf ganz  $F$ .

Wir haben also  $\bar{f} \circ \pi = \bar{\varphi} \circ \pi$ . Da  $\pi$  surjektiv ist, ist  $\bar{f} = \bar{\varphi}$  und es gibt nur einen Homomorphismus  $\bar{f}$  mit der Eigenschaft (B.13). ■

Die explizite Konstruktion aus Lemma B.11 *dürfen* wir natürlich benutzen, um weitere Eigenschaften von Tensorprodukten herzuleiten oder zu beweisen, aber wir *müssen* es nicht. Das Lemma versichert uns einfach, dass das Universum, über das wir reden, nicht leer ist, aber die Details dieser Konstruktion haben nichts mit dem „Wesen“ des Tensorprodukts zu tun und es ist viel eleganter und befriedigender, in Beweisen die universelle Eigenschaft einzusetzen.

Hier noch ein paar wichtige, obwohl einfache, Grundeigenschaften und Beispiele.

**Lemma B.12** a) Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$A \otimes B \cong B \otimes A,$$

der für jedes  $a \in A$  und  $b \in B$  das Erzeugende  $a \otimes b \in A \otimes B$  auf  $b \otimes a \in B \otimes A$  abbildet (und sich zu einem Homomorphismus auf ganz  $A \otimes B$  fortsetzt).

b) Sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Es gibt natürliche Isomorphismen

$$A \otimes \mathbf{Z} \cong A \cong \mathbf{Z} \otimes A.$$

Diese Isomorphismen bilden  $a \otimes n \in A \otimes \mathbf{Z}$  oder  $n \otimes a \in \mathbf{Z} \otimes A$  auf das Element  $na \in A$  ab (und setzen sich zu Homomorphismen fort auf den ganzen Gruppen  $A \otimes \mathbf{Z}$  bzw.  $\mathbf{Z} \otimes A$ ).

c) Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen, und die Teilmenge  $X \subseteq A$  erzeuge  $A$  als abelsche Gruppe, die Teilmenge  $Y \subseteq B$  erzeuge  $B$ .

Dann ist

$$X \otimes Y := \{ x \otimes y \mid x \in X \text{ und } y \in Y \}$$

eine Erzeugendenmenge für  $A \otimes B$ .

d) Seien  $A$  und  $B$  freie abelsche Gruppen, und sei  $X \subseteq A$  eine Basis für  $A$  und  $Y \subseteq B$  eine Basis für  $B$ .

Dann ist  $A \otimes B$  auch eine freie abelsche Gruppe und hat

$$X \otimes Y := \{ x \otimes y \mid x \in X \text{ und } y \in Y \}$$

als eine Basis.

- e) Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen, und es gebe direkte Summenzerlegungen

$$A = \bigoplus_{\kappa \in K} A_{\kappa} \quad \text{und} \quad B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_{\lambda}.$$

Dann ist

$$A \otimes B \cong \bigoplus_{\kappa \in K} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A_{\kappa} \otimes B_{\lambda}).$$

Für endliche Indexmengen  $K$  und  $\Lambda$  wäre dies eine sofortige Konsequenz von Lemma 6.7, aber die Aussage gilt für beliebige direkte Summenzerlegungen, auch wenn sie unendlich vielen Summanden haben.

In anderen Worten, der Funktor  $\otimes$  ist in jeder Variablen **stark additiv** (siehe Bemerkung 6.8).

- f) Seien  $A$  und  $A'$ ,  $B$  und  $B'$  abelsche Gruppen und seien  $f: A \rightarrow A'$  und  $g: B \rightarrow B'$  Homomorphismen.

Wenn  $f$  und  $g$  surjektiv sind, dann ist auch  $(f \otimes g): A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$  surjektiv.

*Beweis.* a): Seien  $\tau: A \times B \rightarrow B \times A$  und  $\tau': B \times A \rightarrow A \times B$  die Koordinatenvertauschungen  $\tau(a, b) := (b, a)$  und  $\tau'(b, a) := (a, b)$ , die Umkehrabbildungen zueinander sind.

Weil Bilinearität eine symmetrische Bedingung in beiden Variablen ist, bleiben bilineare Abbildungen bilinear, wenn man zuerst Koordinaten vertauscht. Insbesondere gilt für die charakteristischen  $\mathbf{Z}$ -bilinearen Abbildungen  $\mu: A \times B \rightarrow A \otimes B$  und  $\nu: B \times A \rightarrow B \otimes A$ , dass auch

$$\nu \circ \tau: A \times B \rightarrow B \otimes A$$

und

$$\mu \circ \tau': B \times A \rightarrow A \otimes B$$

bilineare Abbildungen sind. Wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts induzieren sie eindeutig bestimmte Homomorphismen

$$\bar{\tau}: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$$

und

$$\bar{\tau}': B \otimes A \rightarrow A \otimes B$$

mit  $\bar{\tau} \circ \mu = \nu \circ \tau$  und  $\bar{\tau}' \circ \nu = \mu \circ \tau'$ .

Hieraus folgt schon, dass

$$\bar{\tau}(a \otimes b) = \bar{\tau} \circ \mu(a, b) = \nu \circ \tau(a, b) = \nu(b, a) = b \otimes a$$

und entsprechend  $\bar{\tau}'(b \otimes a) = a \otimes b$ . Anhand dieser Gleichungen lässt sich auch sehr leicht nachprüfen, dass  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}'$  natürlich sind; es reicht dabei, Elemente der Form  $a \otimes b$  zu betrachten, weil diese die Tensorproduktmoduln erzeugen.

Ferner haben wir

$$\bar{\tau}' \circ \bar{\tau} \circ \mu = \bar{\tau}' \circ \nu \circ \tau = \mu \circ \tau' \circ \tau = \mu.$$

Nach Korollar B.7 können wir  $\mu$  wegstreichen und es gilt  $\bar{\tau}'\bar{\tau} = \text{id}_{A \otimes B}$ . Entsprechend ist  $\bar{\tau}\bar{\tau}' = \text{id}_{B \otimes A}$ , und  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}'$  sind Isomorphismen.

b): Wegen a) reicht es,  $A$  mit  $\mathbf{Z} \otimes A$  zu vergleichen. Die skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \lambda_A: \mathbf{Z} \times A &\longrightarrow A \\ (n, a) &\longmapsto na \end{aligned}$$

ist  $\mathbf{Z}$ -bilinear und induziert wegen der universellen Eigenschaft einen eindeutigen Homomorphismus  $\bar{\lambda}_A: \mathbf{Z} \otimes A \longrightarrow A$  mit  $\bar{\lambda}_A(n \otimes a) = \lambda_A(n, a) = na$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  und  $a \in A$ .

Diese Abbildung ist offensichtlich auch natürlich, d. h., wenn  $B$  eine abelsche Gruppe ist und  $f: A \longrightarrow B$  ein Homomorphismus ist, dann ist

$$f \circ \bar{\lambda}_A = \bar{\lambda}_B \circ (\text{id} \otimes f)$$

(für Erzeugende  $n \otimes a$  von  $\mathbf{Z} \otimes A$  besagt dies nämlich nichts anderes als  $f(na) = nf(a)$ , was für jeden Homomorphismus additiver abelscher Gruppen gilt).

Auf Grund von Lemma B.5 b) (die Bilinearität von  $\otimes$ , speziell bezüglich der zweiten Variablen) ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_A: A &\longrightarrow \mathbf{Z} \otimes A \\ a &\longmapsto 1 \otimes a \end{aligned}$$

ein Homomorphismus, und wegen Lemma B.5 e) ist sie eine Umkehrabbildung zu  $\bar{\lambda}_A$ , so dass  $\bar{\lambda}_A$  ein Isomorphismus ist.

c): Sei  $a \in A$  und  $b \in B$ . Dann ist  $a$  eine endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von Elementen  $x_i \in X$  und  $b$  ist eine endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von Elementen  $y_j \in Y$ . Wegen Lemma B.5 a), b) und e) kann man  $a \otimes b$  umschreiben als eine endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination der  $x_i \otimes y_j$ .

Da aber  $A \otimes B$  von den Elementen der Form  $a \otimes b$  erzeugt wird, kann man jedes Element von  $A \otimes B$  als eine endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination aus  $X \otimes Y$  schreiben und diese Menge erzeugt  $A \otimes B$ .

d): In Teil c) haben wir schon gesehen, dass  $X \otimes Y$  eine Erzeugendenmenge für  $A \otimes B$  ist.

Wir müssen nur noch zeigen, dass die  $x \otimes y \in X \otimes Y$  linear unabhängig sind. Dazu sei

$$\sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} n_{xy} x \otimes y = 0, \quad (\text{B.14})$$

wo nur endlich viele Koeffizienten  $n_{xy} \in \mathbf{Z}$  auf der linken Seite  $\neq 0$  sind.

Für jedes  $x_0 \in X$  gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus  $x_0^*: A \rightarrow \mathbf{Z}$ , so dass  $x_0^*(x_0) = 1$  und  $x_0^*(x) = 0$  für jedes andere Element  $x$  von  $X$ .

Entsprechend, für jedes  $y_0 \in Y$  gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $y_0^*: B \rightarrow \mathbf{Z}$ , so dass  $y_0^*(y_0) = 1$  und  $y_0^*(y) = 0$  für jedes andere Element  $y$  von  $Y$ .

Sei  $\bar{\lambda}_{\mathbf{Z}}$  der Isomorphismus  $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  aus Teil b), mit  $\bar{\lambda}_{\mathbf{Z}}(m \otimes n) = mn$ . Für die Elemente  $x \otimes y \in X \otimes Y$  ist dann

$$(\bar{\lambda}_{\mathbf{Z}} \circ (x_0^* \otimes y_0^*))(x \otimes y) = x_0^*(x)y_0^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = x_0 \text{ und } y = y_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wendet man den Homomorphismus  $\bar{\lambda}_{\mathbf{Z}} \circ (x_0^* \otimes y_0^*)$  auf die linke Seite von (B.14) an, so erhält man folglich  $n_{x_0 y_0}$  als Wert, aber weil die rechte Seite 0 ist, muss dieser Wert 0 sein für jedes  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$ , d. h., die Linearkombination in (B.14) hat nur Koeffizienten 0, was zu zeigen war.

e): Es reicht zu zeigen, dass für eine abelsche Gruppe  $A$  und eine beliebige Familie  $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  von abelschen Gruppen  $B_\lambda$  gilt

$$A \otimes \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes B_\lambda), \quad (\text{B.15})$$

denn diese Tatsache gilt dann wegen Teil a) auch mit vertauschten Faktoren, und beide Versionen hintereinander angewendet ergeben die zu beweisende Behauptung.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: A \times \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) &\longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes B_\lambda) \\ (a, \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda) &\longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a \otimes b_\lambda \end{aligned}$$

(wobei in den Summationen natürlich nur endlich viele  $b_\lambda \neq 0$  sind) ist offensichtlich  $\mathbf{Z}$ -bilinear, und induziert einen eindeutigen Homomorphismus

$$\varphi: A \otimes \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes B_\lambda)$$

mit

$$\varphi \left( a \otimes \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a \otimes b_\lambda$$

für jede Wahl von  $a \in A$  und von den  $b_\lambda \in B_\lambda$ , so dass nur endlich viele ungleich 0 sind.

Eine Umkehrabbildung zu  $\varphi$  ist leicht anzugeben. Für jedes  $\mu \in \Lambda$  haben wir die Inklusion  $i_\mu: B_\mu \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ . Sei

$$\psi: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes B_\lambda) \longrightarrow A \otimes \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)$$

der eindeutige Homomorphismus, der für jedes  $\mu \in \Lambda$  auf dem  $\mu$ -ten Summanden des Definitionsbereichs, also auf  $A \otimes B_\mu$ , durch  $\text{id}_A \otimes i_\mu$  gegeben ist.

Aus Teil c) folgt, dass beide Seiten von (B.15) von den Elementen  $a \otimes b_\lambda$ , wo  $a \in A$  und  $b_\lambda$  aus einem der  $B_\lambda$  ist, erzeugt werden.

Aus den Definitionen von  $\varphi$  und  $\psi$  ist klar, dass für solche Elemente gilt  $(\psi \circ \varphi)(a \otimes b_\lambda) = a \otimes b_\lambda$  und  $(\varphi \circ \psi)(a \otimes b_\lambda) = a \otimes b_\lambda$ . Weil die genannten Elemente die ganzen Gruppen erzeugen, sind  $\psi \circ \varphi$  und  $\varphi \circ \psi$  jeweils die Identität, und somit sind  $\varphi$  und  $\psi$  zueinander inverse Isomorphismen.

f): Die Abbildung  $f \otimes g$  ist ein Homomorphismus, und weil  $f$  und  $g$  surjektiv sind, enthält  $\text{Bild}(f \otimes g)$  alle Elemente der Form  $a' \otimes b'$  mit  $a' \in A'$  und  $b' \in B'$ , und somit die von ihnen erzeugte Untergruppe.

Da diese ganz  $A' \otimes B'$  ist, ist  $f \otimes g$  surjektiv. ■

