

Skriptum zur Vorlesung  
**Algebraische Topologie**

Prof. Dr. Gordon Wassermann

Wintersemester 2007-08



# Inhaltsverzeichnis

Was ist Algebraische Topologie?	v
1 Kategorien und Funktoren	1
2 Singuläre Homologie	43
3 Die Eilenberg-Steenrod Axiome	81
4 Berechnungen und Anwendungen	143
5 Zelluläre Homologie	161



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Kobordismen . . . . .	9
1.2	Verknüpfung von Kobordismen . . . . .	9
1.3	Eine Kragenumgebung, homöomorph zu $M \times I$ . . . . .	9
2.1	Die ersten vier Standardsimplizes. . . . .	48
2.2	Die Seiten der Standardsimplizes. . . . .	56
3.1	Die Simplizes im Standardprisma $P_1$ . . . . .	104
3.2	Die drei Summanden im Prisma $P_2$ . . . . .	104
3.3	Die baryzentrische Unterteilung des Standardsimplexes. . . . .	116
4.1	Räume, die man aus einem Kreiszyylinder kleben kann. . . . .	155



# Was ist Algebraische Topologie?

Bis auf elementare Grundkenntnisse und Grunddefinitionen aus der Anfängervorlesung *Analysis* machen Studenten meistens den ersten näheren Kontakt mit der Topologie in einer Vorlesung *Topologie I* oder *Einführung in die Topologie* wie die, die ich im Sommersemester 2007 gelesen habe. Dort lernt man die Blickweise der Topologie kennen und die Gegenstände, mit denen sie sich beschäftigt, nämlich topologische Räume und stetige Abbildungen zwischen ihnen, und man erhält eine Einführung in die so genannte **mengen-theoretische Topologie**, wo es um Grundkonstruktionen mit topologischen Räumen geht und um wichtige Grundeigenschaften, wie Kompaktheit und Zusammenhang, die sich alleine mit topologischen Mitteln und mit Bezugnahme auf die Familie der offenen (oder gleichwertig, der abgeschlossenen) Mengen der topologischen Struktur definieren lassen.

Man erfährt aber auch sehr schnell, dass Beweise innerhalb dieser Struktur sehr schwierig und knifflig werden können. Auch grundlegende Fragen wie die Existenz von stetigen Abbildungen zwischen bestimmten Räumen oder mit gegebenen Eigenschaften, oder die Frage, ob zwei topologische Räume die gleiche Struktur haben (also **homöomorph** sind), lassen sich kaum mit „hauseigenen“ Mitteln behandeln, auch wenn „topologische“ Begriffe wie Kompaktheit und Zusammenhang einen gewissen Beitrag dazu leisten können. Man sehnt sich nach besseren und leistungsfähigeren Werkzeugen, als die, die die „reine“ Topologie selber bieten kann.

Die Homotopie ist ein solches Werkzeug, und ihre Definition ist nicht zu abstrakt und lässt sich auf sehr einleuchtende und natürliche Weise aus dem Begriff eines Weges entwickeln, der sich ohnehin bei der Untersuchung von Zusammenhangseigenschaften aufdrängt. Deshalb wird die Homotopie meist schon in der einführenden Vorlesung kurz behandelt (wie es in meiner Vorlesung *Topologie I* auch der Fall war), und auch wenn das nicht geschieht, ist sie im Allgemeinen der erste Begriff aus der algebraischen Topologie, dem der angehende Topologe begegnet.

Als Werkzeug für die Klassifikation von topologischen Räumen erweist sich die Homotopie sofort als nützlich, denn die sehr naheliegende Betrachtung

tung von Homotopien von Wegen (oder genauer, von Schleifen, also von „Rundwegen“ mit einem festen Start- und Endpunkt) charakterisiert geometrische Eigenschaften eines topologischen Raumes („Löcher“ und ähnliche Gebilde), die sonst sehr schwer sind, geometrisch genau zu beschreiben.

Die Operation der „Verkettung“ oder Hintereinanderreihung von Wegen definiert sogar mit wenig zusätzlichem Aufwand eine Gruppenstruktur auf der Menge der Homotopieklassen von Schleifen und man erhält so die **Fundamentalgruppe**. Auch diese Konstruktion ist einfach genug, dass man sie in einer ersten Vorlesung über Topologie behandeln kann.

Mit Hilfe der Fundamentalgruppe kann man Klassifikationsfragen und Fragen nach der Existenz von stetigen Abbildungen *algebraisch* angehen, denn homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen und stetige Abbildungen bestimmen Homomorphismen der Fundamentalgruppen, die sich (bezüglich Verknüpfung, Identität usw.) ähnlich verhalten, wie die ursprünglichen topologischen Abbildungen. Auch einige andere interessante, aber mit Mitteln aus der mengentheoretischen Topologie praktisch unerreichbare Sätze wie der Brouwersche Fixpunktsatz (für die zweidimensionale Scheibe) oder der so genannten **Fundamentalsatz der Algebra** über die Existenz von komplexen Wurzeln eines beliebigen nichtkonstanten komplexen Polynoms, um nur zwei Beispiele zu nennen, lassen sich schon mit der Fundamentalgruppe beweisen. So erfährt man schnell, wie nützlich eine solche Übersetzung von Topologie in Algebra sein kann.

Die Fundamentalgruppe kann man als ein erstes „Testmuster“ für die Grundideen der algebraischen Topologie betrachten. Darauf aufbauend gibt es auch *höhere* Homotopiegruppen (die Fundamentalgruppe wird deshalb oft die **erste Homotopiegruppe** genannt) und Homotopiegruppen für *Paare* aus einem Raum und einem Unterraum, die eine feinere Unterscheidung ermöglichen und die in gewissen nützlichen Beziehungen zueinander stehen. Leider können diese Homotopiegruppen aber oft sehr schwer zu berechnen sein.

Zum Glück haben Topologen auch andere Konstruktionen erfunden, die Ähnliches leisten, wie die Homotopiegruppen, aber oft viel leichter zu berechnen sind. Inzwischen gibt es ein riesiges Arsenal solcher Hilfsmittel und Konstruktionen und sehr geeignete (allerdings auch sehr abstrakte) mathematische Werkzeuge, um diese Konstruktionen zu beschreiben, zu vereinheitlichen, und zu verallgemeinern.

Der Ausgangspunkt dieser Entwicklung ist die allgemeine Idee, Topologie zu vereinfachen und handhabbarer zu machen, indem man sie durch Algebra ersetzt; dies ist ein *klassischer* Gedanke, für die schon die Zuordnung der Jacobimatrix zu einer differenzierbaren Abbildung Pate gestanden haben könnte.

Auch die anderen Konstruktionen der algebraischen Topologie liefern *algebraische* Objekte (Gruppen und Ringe), die aus der topologischen Struktur gewonnen werden können und sie (mit ein wenig Detailverlust) beschreiben und charakterisieren. Zu stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen gehören entsprechende Homomorphismen dieser algebraischen Objekte, zu Homöomorphismen gehören algebraische Isomorphismen. Wenn man die algebraischen Objekte einmal berechnet hat (und das ist der schwierigste Teil der Anwendung, wenngleich es dafür gute Methoden und Hilfsmittel gibt), ist es ein Kinderspiel, durch einen algebraischen und somit oft sehr einfachen Vergleich zum Beispiel zu zeigen, dass zwei Räume nicht homöomorph sein können oder dass es zwischen ihnen stetige Abbildungen mit gewissen Eigenschaften nicht geben kann.

Der vordergründige Inhalt und die Intention der algebraischen Topologie sind also, dass sie topologische Fragen auf einfache und einheitliche Weise löst, indem sie sie in algebraische Fragen verwandelt, die viel einfacher sind, als die ursprünglichen topologischen (wie diese Verwandlung vorgenommen wird, werde ich gleich kurz skizzieren).

Dies ist aber nur eine oberflächliche Beschreibung der algebraischen Topologie und trifft noch nicht den Kern, denn sie unterstreicht nicht die sonstige große Bedeutung der algebraischen Topologie für die Mathematik, ihre Faszination und ihre Schönheit.

Neben der Tatsache, dass sie für viele wichtige topologische Grundfragen das einzig vorhandene effektive Werkzeug bildet, lassen sich ihre Methoden und Grundgedanken auch in anderen Gebieten der Mathematik sehr produktiv anwenden. So sind die anderen Spezialgebiete der Topologie gar nicht erforschbar ohne algebraisch topologische Methoden, und dort, wo die Topologie in anderen Gebieten der Mathematik in Erscheinung tritt, trägt dieses Erscheinungsbild fast immer algebraisch topologische Züge oder man benutzt in diesen Gebieten Strukturen, die von denen der algebraischen Topologie inspiriert wurden, mit ihnen nahe verwandt sind, ähnliche Eigenschaften haben und nach ähnlichen Ideen aufgebaut sind.

Grundkenntnisse über allgemeine Topologie braucht zwar jeder Mathematiker, aber Grundkenntnisse zumindest über Teile der algebraischen Topologie sind noch wichtiger, wenn man in irgendein Gebiet der Mathematik tiefer eindringen will, denn an vielen Stellen erscheinen Argumente, die Mittel aus der algebraischen Topologie verwenden oder zumindest nachmachen.

Darüber hinaus besteht die algebraische Topologie auch aus sehr schöner Mathematik, deren Faszination gerade darin liegt, dass in ihr Strukturen und Methoden aus verschiedenen in ihren Grundzügen einander völlig fremden Gebieten der Mathematik ein elegantes Zusammenspiel eingehen, das nicht nur sehr fruchtbar ist, sondern auch die erstaunliche und immer wie-

der an den unerwartetsten Stellen zu Tage tretende Einheit der Mathematik unterstreicht.

Die moderne algebraische Topologie (außerhalb des Rahmens dieser Vorlesung) geht noch weiter, indem sie es ermöglicht, fast jede mathematische Theorie mit algebraisch-topologischen Methoden und Ideen auszustatten. Unsere vordergründige Unterteilung der Mathematik in vielfältige scheinbar kaum verwandte Einzelgebiete wie Algebra, Geometrie, Analysis, Kombinatorik ist eigentlich eine Fiktion und die Mathematik führt uns das immer wieder vor Augen — insbesondere auch in der algebraischen Topologie in ihrer modernen Ausprägung.

Die jetzige Vorlesung ist eine einsemestrige *Einführungsvorlesung* in die algebraische Topologie und kann deshalb leider nicht alle Aspekte berühren, die oben erwähnt wurden. Es geht vielmehr darum, die verständlichsten Grundideen und Konstruktionen kennen zu lernen, auf die die heutige algebraische Topologie aufbaut. Das ist schon wichtig, denn moderne algebraische Topologie ist äußerst abstrakt geworden (gerade daraus bezieht sie ihre Leistungsfähigkeit). Aus diesem Grund kann sie kaum verstanden werden, wenn man nicht die konkreten klassischen Konstruktionen kennt, von denen sie ausgegangen ist und auf die man die Vorstellung stützen kann, wenn man die abstrakteren Ausprägungen später lernt.

Wie sehen die klassischen Strukturen und Konstruktionen der algebraischen Topologie aus? Wie funktionieren sie? Sie bestehen, wie gesagt, aus einer Übersetzung von Geometrie in Algebra, aber wie spiegelt sich die topologische Struktur in ihnen wieder?

Sehr vereinfachend formuliert versucht die algebraische Topologie „Löcher“ in topologischen Räumen sichtbar zu machen und sie versucht durch „Invarianten“ zu charakterisieren, wann und wo in einem Raum ein Loch vorhanden ist (z.B., in dem Raum, der entsteht, wenn man aus  $\mathbf{R}^n$  einige Punkte entfernt, die Stellen, wo Punkte herausgenommen wurden — weil diese Stellen gar nicht zu dem betrachteten Raum gehören, sind sie nicht unmittelbar erkennbar), oder wann der Raum gewissermaßen ein außer sich liegendes Gebiet irgendwie umschließt, wie das beim Kreis oder der Sphäre, aber auch beim Torus (Reifenschlauch) der Fall ist. Ursprünglich, im 19. Jahrhundert, waren diese Invarianten einfach Zahlen, die aus einer Betrachtung der Geometrie gewonnen wurden, aber die geometrischen Konstruktionen, die diese Zahlen lieferten, ließen sich leicht zur Definition von Gruppen verwenden und diese geben wegen ihrer komplizierteren Struktur eine detailliertere und genauere Charakterisierung der Geometrie.

Die „einfachste“ dieser Konstruktionen ist die der Homotopiegruppen, über die wir ja einleitend schon gesprochen haben. Wegen der allgemeinen großen Schwierigkeit, die Homotopiegruppen zu berechnen, wollen wir in die-

ser Vorlesung die sehr mageren Kenntnisse darüber aus der *Topologie I* nicht weiter ausbauen, sondern die begrenzte Zeit für andere Themen verwenden.

Wer sich aber für algebraische Topologie über das hinaus interessiert, was in einer einsemestrigen Einführungsvorlesung untergebracht werden kann, muss sein Wissen über Homotopietheorie erweitern. Der Homotopiebegriff ist sicher der wichtigste Begriff in der algebraischen Topologie überhaupt, aus mehreren Gründen.

Auch die nicht direkt durch Homotopie definierten Gruppen- und Ringzuordnungen der algebraischen Topologie sind nicht ganz losgelöst vom Homotopiebegriff. Diese Zuordnungen bringen eine wesentliche Erleichterung bei der Behandlung von topologischen Fragen, aber dafür muss man etwas bezahlen. Man erreicht sie letztendlich dadurch, dass feine geometrische Details verwischt werden, dass man also die topologische Struktur verschwommen sieht, was sie viel einfacher aussehen lässt. Und diese Verwischung geschieht durch Homotopie — alle Konstruktionen der algebraischen Topologie sind Homotopieinvarianten, und können weder homotope Abbildungen noch Räume vom gleichen Homotopietyp voneinander unterscheiden.

Deshalb wird der Homotopiebegriff und Überlegungen, in denen er eine Rolle spielt, uns weiterhin beschäftigen — nur die Homotopiegruppen wollen wir nicht weiter verfolgen.

Ein nicht ganz so offensichtlicher zweiter Grund, warum die Homotopie und speziell Homotopiemengen von Abbildungen zwischen Räumen (und somit auch die Homotopiegruppen) doch eine zentrale Rolle in der algebraischen Topologie spielen, ist die Tatsache, dass auch die anderen Konstruktionen der algebraischen Topologie sich doch, auch wenn sie so nicht entstanden sind, mit Konstruktionen der Homotopietheorie erzeugen lassen. Die Konstruktionen, von denen hier die Rede ist, lassen sich sehr allgemein gestalten, so dass man viele Fragestellungen und Theorien, die beim ersten Blick mit algebraischer Topologie nichts zu tun haben scheinen, auf einheitliche Weise algebraisch topologisch beschreiben und behandeln kann.

Mit Homotopiegruppen erfasst man Löcher, in dem man versucht, sie in einer sich zusammenziehenden Schlinge zu „fangen“. Eine anderer Konstruktionsart für algebraische Zuordnungen, die sich **Homologietheorie** nennt, ist viel abstrakter, als die der Homotopiegruppen.

Hier geht es darum, den Raum auszufüllen mit einfachen Bausteinen. Beim Wort „Baustein“ denkt man zuerst an einen Quader, oder in zwei Dimensionen entsprechend an ein Rechteck, und in höheren Dimensionen an ähnliche Gebilde, aber die mathematische Beschreibung wird wesentlich einfacher, wenn wir wirklich *möglichst simple* Bausteine verwenden, also Dreiecke statt Vierecke, als einfachste dreidimensionale Bausteine Tetraeder statt Quader, und so weiter. Bausteine dieser einfachen Form heißen sinn-

vollerweise *Simplizes* (und einer davon wird ein *Simplex* genannt). Ein  $n$ -dimensionaler Simplex ist einfach die komplexe Hülle von  $n + 1$  affin unabhängiger Punkte im euklidischen Raum, und er hat eine Oberfläche oder einen Rand, der aus den konvexen Hüllen von jeweils  $n$  dieser  $n + 1$  Eckpunkte besteht, also einen Rand, der aus gewissen  $n - 1$ -dimensionalen Simplizes zusammengesetzt ist. Dieser Rand sieht insgesamt aus wie eine Sphäre und ist selber „randlos“.

Wie werden Löcher in der Homologietheorie erkannt? Dort wo *kein* Loch ist, kann man einen Simplex hinstellen, und der Rand dieses Simplexes ist ein Konglomerat von Simplizes, das selber keinen Rand hat (so etwas nennt man einen *Zykel*). Wenn ein Loch vorhanden ist, so kann man sich einen Simplex denken, der mit seinem Innern das Loch überdeckt, und der selber (wegen des Lochs, das er berührt) nicht ganz im Raum enthalten ist, dessen Rand aber im Raum liegt, da nur das Innere des gedachten Simplexes das Loch abdeckt.

In dem Raum gibt es diesen Simplex natürlich nicht, aber er hinterlässt trotzdem eine Spur, die man in dem Raum sehen kann, nämlich seinen Rand, der wie jeder andere Rand ein Zykel ist. Dieser Zykel unterscheidet sich aber von anderen Zykeln im Raum dadurch, dass man *innerhalb* des Raumes nichts finden kann, dessen Rand er ist; er ist mehr oder weniger Rand des *Lochs*.

Auf dieses Skelett einer Konstruktion packen wir nun ein bisschen Fleisch, um daraus einen gut funktionierenden Mechanismus zu machen. Da der Rand eines Simplexes aus mehreren Simplizes besteht, reicht die Betrachtung einzelner Simplizes ohnehin nicht aus, und wir betrachten deshalb allgemein Kombinationen aus Simplizes. Irgendwie müssen wir beschreiben, wie diese zueinander liegen und wie sie miteinander verklebt sind, aber statt dies auf geometrische Art umständlich zu beschreiben, lassen wir uns von unserer Faulheit zu einem faulen aber sehr wirkungsvollen Trick verleiten: wir addieren sie rein formal miteinander, betrachten also *formale Summen* oder *formale Linearkombinationen* von Simplizes (diese nennen wir *Ketten*). Auf diese Weise erhalten wir automatisch eine algebraische Struktur geschenkt; die Ketten bilden per Definition eine additive abelsche Gruppe. Die Vorzeichen in den Summen beschreiben, mit welchem Drehsinn die einzelnen Simplizes miteinander verklebt sind, und der Rand eines Simplexes lässt sich schreiben als eine alternierende Summe der in ihm enthaltenen niederdimensionalen Simplizes, die die Seiten des ursprünglichen Simplexes sind. Diese Zuordnung erweitert sich linear zu einem Gruppenhomomorphismus, dem Randoperator, der jeder Kette ihren Rand zuordnet. Randlose Ketten, d.h., Ketten, deren Rand 0 ist, heißen Zykeln und jeder Rand ist insbesondere ein Zykel, aber nicht jeder Zykel ist ein Rand.

Die Zykeln einer gewissen Dimension  $n$ , als Kern des Randoperators, und

die Ränder der Dimension  $n$ , als Bild des Randoperators, bilden jeweils eine Untergruppe der  $n$ -dimensionalen Kettengruppe, wobei die Randgruppe selber eine Untergruppe der Zykelgruppe ist, weil jeder Rand automatisch ein Zykel ist. Der Quotient der Zykelgruppe nach der Randgruppe heißt die  $n$ -te **Homologiegruppe** des Raumes, und ihre nichttrivialen Elemente entsprechen nicht berandenden Zykeln und somit „nicht auffüllbare Löcher“ im topologischen Raum.

Es gibt verschiedene Varianten dieser Konstruktion, je nachdem ob man den Raum vorher auf starre Weise in Simplizes zerlegt hat, die auf eine feste Art miteinander verklebt sind (**simpliziale Homologie**), oder ob man ohne weitere Einschränkungen nur stetige aber womöglich ausgeartete Bilder von Simplizes in dem Raum betrachtet (**singuläre Homologie**), oder ob man andere spezielle Zerlegungen der Räume vornimmt (z.B., die **zellulären** Kettengruppen, die eine vereinfachte Berechnung der Homologie für eine spezielle aber sehr weit verbreitete Klasse von Räumen erlauben, die man **CW-Komplexe** nennt). Je nachdem erhält man andere Kettengruppen, Zykelgruppen und Randgruppen, aber die Homologiegruppen als Quotienten der Zykelgruppen nach den Randgruppen sind immer gleich. Sie hängen nicht von diesen Details ab und beschreiben wirklich die Topologie des Raumes und nicht nur Eigenheiten der Konstruktion.

In der Vorlesung werden wir übrigens der singulären Homologie den Vorzug geben. Zwar hat die simpliziale Homologie den Vorteil, intuitiv zugänglicher und auf eine greifbarere und direktere Art berechenbar zu sein, aber sie ist nicht für alle Räume definiert und sie erfordert zur Anwendung eine Vorarbeit, nämlich die Anbringung eines simplizialen Gitters in dem Raum, aus dem die Gruppen gewonnen werden. Der Nachweis, dass die Gruppen nicht von der Wahl dieses Gitters abhängen, ist sehr technisch, deshalb auch nicht sonderlich interessant, und kostet unnötig Zeit. Alle Varianten der Homologie haben einen gewissen Katalog von gemeinsamen Grundeigenschaften, die wir auf jeden Fall behandeln müssen, und diese können als Werkzeuge eingesetzt werden, um die singulären Homologiegruppen mit kaum mehr Aufwand zu berechnen, als im simplizialen Fall. Und die singuläre Homologie ist für alle topologischen Räume unmittelbar erklärt und erfordert keine später behindernde Hilfsstruktur, die aus der fertigen Konstruktion durch einen Invarianzbeweis mühsam wieder „herausgespült“ werden muss.

So viel zu dieser Art von Gruppenkonstruktion in der algebraischen Topologie. Die wichtigen Merkmale der Homologiegruppen sind: Erfassung von Löchern durch das Scheitern eines Versuchs, sie mit Simplizes auszufüllen; relativ komplizierte und umständliche Konstruktion der Homologiegruppen aber dafür relativ einfache Gruppen, die nach Konstruktion automatisch abelsch sind; Existenz einer Reihe von leistungsfähigen Standardmethoden für die

Berechnung und deshalb relativ problemlose Berechenbarkeit der Homologiegruppen.

Obwohl sich die singuläre Homologie mit Hilfe der „Axiome“ der Homologietheorie, also einiger allgemeiner Beziehungen zwischen den Homologiegruppen verwandter Räume, mit etwas Übung gut berechnen lässt, sind die Kettengruppen, aus denen sie gewonnen wird, für alle bis auf die einfachsten Räume *riesig* und der Umgang mit ihnen deshalb manchmal unangenehm. Für eine große und sehr häufig anzutreffende Klasse von Räumen, die fast alle im Alltagsleben vorkommende topologische Räume umschließt, lässt sich die Homologie auf eine vereinfachte Art mit kleinen, bei kompakten Räumen sogar endlich erzeugten Kettengruppen gewinnen. Diese Räume werden aus euklidischen Scheiben oder Bällen  $D^n$  verschiedener Dimensionen zusammengeklebt und heißen **CW-Komplexe**. Die Scheiben, aus denen sie zusammengebaut sind, werden **Zellen** genannt und erzeugen formal die **zellulären Kettengruppen**, aus denen man die (ganz normalen) Homologiegruppen berechnen kann. Hier handelt es sich *nicht* um eine neue Art von Homologie, sondern nur um eine neue Art, die singuläre Homologie zu berechnen!

Die CW-Komplexe spielen auch wegen ihrer homotopietheoretischen Eigenschaften eine wichtige Rolle in der algebraischen Topologie. Sie und die aus ihnen gewonnene zelluläre Homologie behandeln wir am Ende des Semesters.

Leider reicht die Zeit im Semester nicht für weitere Themen. Zu diesen hätten unter anderem gehört die Homologie mit nichtganzzahligen Koeffizienten, bei der, grob gesagt, die singulären Kettengruppen nicht aus  $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen von Simplizes bestehen, wie es in diesem Skriptum gemacht wird, sondern aus Linearkombinationen mit Koeffizienten in einer anderen abelschen Gruppe  $G$ . Die eleganteste und einfachste Konstruktion dieser Kettengruppen besteht darin, das Tensorprodukt der „normalen“ Kettengruppen mit  $G$  zu bilden. Die Homologie mit anderen Koeffizienten liefert manchmal Information in Fällen, wo die  $\mathbf{Z}$ -Homologie verschwindet.

Zu dem genannten Thema gehören auch **universelle Koeffizientensätze**, die eine einfache Beziehung zwischen den normalen Homologiegruppen und den Homologiegruppen mit Koeffizienten in einer Gruppe  $G$  aufstellen. Schon zu deren Formulierung wäre eine umfangreiche Vorbereitung mit Grundkenntnissen aus der so genannten **homologischen Algebra** erforderlich gewesen.

Einen weiteren wichtigen Themenkomplex, auf den nicht eingegangen werden kann, bildet die duale Version der Homologietheorie, d. h., die **Kohomologie**. Ein Raum hat in jeder nichtnegativen Dimension eine Homologiegruppe, und das Gleiche gilt für die Kohomologie. Die Kohomologiegruppen lassen sich auch einfach (wieder mit einem „universellen Koeffizientensatz“)

aus den Homologiegruppen berechnen. Sie liefern aber trotzdem eine wesentlich neue Struktur, denn anders als bei der Homologie bildet die Gesamtheit der Kohomologiegruppen eines Raumes (über alle Dimensionen) einen *Ring*, d. h., die Kohomologie hat auch eine multiplikative Struktur und ist deshalb leistungsfähiger als die Homologie alleine.

Zu diesen hier nicht behandelten Fragestellungen kann der interessierte Leser sich im Skriptum zu meiner zweisemestrigen Vorlesung *Algebraische Topologie* aus dem Jahr 2002/03 informieren.

Da die algebraische Topologie zwei Gebiete der Mathematik berührt (Topologie und Algebra) und eine Zuordnung von algebraischen Objekten zu topologischen Objekten beinhaltet, ist es sinnvoll, eine eigene Sprache zu entwickeln, um über solche Zuordnungen zwischen verschiedenartigen Gebieten der Mathematik präzise und einfach reden zu können. Diese Sprache gibt es seit einiger Zeit — sie nennt sich **Kategorientheorie** und bringt für Mathematik, die die Grenzen zwischen Fachgebieten sprengt, einen ähnlichen Nutzen wie die Sprache der Mengenlehre für die Mathematik insgesamt.

Sie ist mehr als nur ein Hilfsmittel; auch die oben umrissenen sehr geometrischen Konstruktionen der „klassischen“ algebraischen Topologie werden heute oft mit kategorientheoretischen Konstruktionen beschrieben, weil sie sich dann sofort für alle möglichen mathematischen Strukturen verallgemeinern lassen. Die Kategorientheorie hat sich praktisch zur Muttersprache algebraischer Topologen entwickelt — ohne sie ist moderne algebraische Topologie nicht machbar.

Da wir nun „professionell“ algebraische Topologie lernen und beschreiben wollen (auch wenn wir thematisch bei den klassischen Konstruktionen bleiben) ist es sinnvoll, wenn wir uns die Mühe machen, vorher diese nützliche Sprache zu lernen, und das werden wir im ersten thematischen Abschnitt dieses Skriptums tun. Danach folgt die Konstruktion der singulären Homologiegruppen, die Beschreibung ihrer Eigenschaften und die Erläuterung der ersten und einfachsten Berechnungsmethoden für sie. Anschließend besprechen wir kurz einige einfache Anwendungen (damit Sie sehen, dass es tatsächlich welche gibt). Das Semester schließt, wie schon erwähnt, mit CW-Komplexen und zellulärer Homologie.

Zum Schluss führe ich noch eine kurze Literaturliste auf; für das Verständnis der Vorlesung und der Übungen reicht aber die Vorlesungsmitschrift voll aus!

## Literatur

- [1] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1994.
- [2] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 119. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1988, korrigierter 4. Druckausgabe, 1998.
- [3] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics series. The University of Chicago Press, Chicago-London, 1999. Die klassische algebraische Topologie (einschließlich der Homotopietheorie), so präsentiert und ergänzt, dass der Übergang zur modernen Sichtweise in der algebraischen Topologie gut vorbereitet und erleichtert wird.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Port Melbourne-Madrid-Cape Town, 2002. Kann kostenlos von <http://www.math.cornell.edu/~hatcher> heruntergeladen werden.
- [5] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, Nachdruck der 2. Auflage (1980), 1995.
- [6] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966, Nachdruck als Taschenbuch bei Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1. Auflage 1981, korrigierter 3. Druck, 1995. Ein Klassiker, der den Stoff der Vorlesung vollständig und ausführlich abdeckt.
- [7] James W. Vick. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2. Auflage, 1994.

# Kapitel 1

## Kategorien und Funktoren

In der algebraischen Topologie geht es darum, topologische Fragen zu beantworten, in dem man sie in algebraische Fragen verwandelt, die wesentlich leichter durch Berechnungen zu entscheiden sind, als die ursprünglichen geometrischen Fragen. Diese Erleichterung erhält man nicht ganz kostenlos, denn bei dieser Umwandlung geht ein Teil der geometrischen Information verloren — die Algebra erfasst nur die sehr groben Merkmale, die durch Homotopien nicht verändert werden. Aber es lohnt sich auf jeden Fall, diesen Preis zu zahlen, denn die Fragen, um die es geht, sind mit rein topologischen Methoden oft überhaupt nicht lösbar.

Dies bedeutet, dass wir in dieser Vorlesung ständig dabei sein werden, topologischen Dingen (Räumen, stetigen Abbildungen) entsprechende algebraische Dinge (Gruppen oder Ringe, Homomorphismen) zuzuordnen und aus dieser Zuordnung Rückschlüsse zu ziehen; das geht aber nur, wenn die Zuordnung nicht ganz willkürlich ist und das Wort *entsprechend* auch mit einem gewissen Inhalt gefüllt ist, dahingehend, dass topologische Eigenschaften oder Besonderheiten sich in ähnlichen algebraischen Eigenschaften oder Besonderheiten widerspiegeln.

Wir werden nicht nur *eine* solche Übersetzung Topologie  $\longrightarrow$  Algebra anwenden, sondern mehrere verschiedene und mehrere Varianten von jeder Sorte. Auch anderswo in der Mathematik kann es nützlich sein, eine Struktur in eine andere und eventuell ganz andersartige Struktur zu verwandeln, um damit Fragen leichter beantworten zu können oder um eine bekannte Konstruktion auf neue Gebiete zu verallgemeinern (etwas, was gerade mit den Ideen und Begriffen der algebraischen Topologie sehr oft gemacht wird!), und auch da sollen Rückschlüsse aus dieser Übersetzung möglich sein, so dass die Art der Übersetzung gewisse allgemeine Regeln erfüllen sollte und erfüllen wird.

Weil wir diese Methode nicht nur einmal für einen bestimmten Zweck,

sondern intensiv und ständig und in allen möglichen Varianten anwenden werden, wobei immer die gleichen Grundeigenschaften gelten, die es erst ermöglichen, aus der Übersetzung Rückschlüsse für die ursprüngliche Situation zu ziehen, bedeutet es eine wesentliche Hilfe, wenn wir dafür eine eigene Sprache einführen (in die diese immer gleichen Grundeigenschaften gewissermaßen schon eingebaut sind).

Weil es in der Natur der gerade beschriebenen Sache liegt, dass diese Sprache sehr allgemein anwendbar sein muss, ist sie auch sehr abstrakt und deshalb nicht für jeden leicht zu verstehen und zu erlernen. Trotzdem lohnt sich die Mühe, sie sich anzueignen, und das gleich zu Beginn der Vorlesung, denn es lässt sich mit ihr sehr effizient über die komplizierten Konstruktionen der algebraischen Topologie und ihre Wechselbeziehungen reden. Definitionsgemäß kann man mit dieser Sprache über jedes beliebige Gebiet der Mathematik gut reden, aber ihre Heimat, auch historisch, ist die algebraische Topologie.

Die Fachsprache, die man braucht, um über Übertragungen zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik oder verschiedenen Arten von mathematischer Struktur zu reden, ist die Sprache der **Kategorien** und **Funktoren**. In diesem ersten Abschnitt der Vorlesung wollen wir nicht Experten darüber werden, sondern nur das unerlässliche Basiswissen über **Kategorientheorie** lernen, das wir im weiteren Verlauf der Vorlesung benötigen. Es handelt sich um die wichtigsten Grunddefinitionen und nur ganz wenige allgemeine Eigenschaften.

Zum besseren Verständnis des abstrakten Stoffes werden wir es durch viele Beispiele aus verschiedenen Gebieten der Mathematik illustrieren, darunter natürlich aus dem winzigen Teil der algebraischen Topologie, den wir schon kennen, der Homotopietheorie mit der Konstruktion der Fundamentalgruppe.

Eine **Kategorie** ist ein mathematischer Begriff, der eine mathematische Struktur modellieren soll. Damit ist gemeint eine bestimmte *Art* mathematischer Struktur mitsamt den Struktur erhaltenden Abbildungen (wie etwa Gruppen oder abelsche Gruppen und Homomorphismen, oder topologische Räume und stetige Abbildungen, usw.) und nicht eine bestimmte Instanz dieser Art. Allerdings ist diese Intention zwar die Motivation für folgende Definition, was sich leicht nachvollziehen lässt, aber sie wird in der Definition nicht offen genannt; die Definition ist bewusst so formuliert, dass auch „exotische“ und sehr abstrakte Anwendungen möglich sind und durchaus ihren Nutzen haben.

**Definition 1.1 (Kategorie)** Eine **Kategorie**  $\mathcal{K}$  besteht aus folgenden Bestandteilen:

- a) Eine Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , deren Elemente die **Objekte** von  $\mathcal{K}$  heißen;

- b) für je zwei Elemente von  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , also für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{K}$  eine (eventuell auch leere) Menge  $\text{Mor}(A, B)$ , deren Elemente die **Morphismen von  $A$  nach  $B$**  heißen.  $A$  heißt das **Quellobjekt** und  $B$  das **Zielobjekt** eines solchen Morphismus.

Es soll ferner gelten, dass die Morphismenmengen  $\text{Mor}(A, B)$  für verschiedene Objektpaare  $(A, B)$  zueinander disjunkt sind, d. h., dass das Quell- und das Zielobjekt eines Morphismus eindeutig bestimmt sind;

- c) für je drei Objekte  $A, B$  und  $C$  von  $\mathcal{K}$  eine Abbildung

$$\circ: \text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, C),$$

genannt die **Verknüpfungsabbildung** oder die **Verknüpfung**, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind (hier schreiben wir die Verknüpfung in Infix-Notation, wie man es üblicherweise tut, also statt  $\circ(g, f)$  schreiben wir  $g \circ f$ ):

- i)  $\circ$  ist assoziativ, d. h., wenn  $A, B, C$  und  $D \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und wenn  $f \in \text{Mor}(A, B)$ ,  $g \in \text{Mor}(B, C)$  und  $h \in \text{Mor}(C, D)$ , dann ist  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ;
- ii) für jedes Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  existiert ein Morphismus  $\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ , genannt der **Identitätsmorphismus von  $A$**  oder die **Identität von  $A$** , so dass für jedes Objekt  $B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und für jeden Morphismus  $g \in \text{Mor}(A, B)$  gilt  $g \circ \text{id}_A = g$ , und für jedes Objekt  $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und für jeden Morphismus  $h \in \text{Mor}(C, A)$  gilt  $\text{id}_A \circ h = h$ .

**Bemerkung 1.2** Der Identitätsmorphismus eines Objektes  $A$  ist offenbar eindeutig bestimmt, denn wenn  $i$  und  $i'$  zwei Morphismen in  $\text{Mor}(A, A)$  sind, die die Eigenschaft 1.1 c ii) der Identität haben, so gilt  $i = i \circ i'$  (weil  $i'$  eine Identität ist) und  $i \circ i' = i'$  (weil  $i$  eine Identität ist), also  $i = i'$ .

**Bemerkung 1.3** a) Dieser Begriff wurde erfunden, um eine mathematische Theorie oder eine mathematische Struktur zu modellieren und somit selber für mathematische Untersuchungen zugänglich zu machen, und es ist nicht sehr schwer zu verstehen, welche Bestandteile des Kategorienbegriffs welchen Merkmalen einer mathematischen Struktur entsprechen, hier einmal am Beispiel der Gruppentheorie erläutert: die *Objekte* der Kategorie sind normalerweise die Struktur tragenden Mengen, die in der Theorie vorkommen (in der Gruppentheorie also die Gruppen) und wenn  $A$  und  $B$  zwei Objekte der Kategorie sind, dann sind

die *Morphismen* von  $A$  nach  $B$  normalerweise die Struktur erhaltenden Abbildungen zwischen diesen Mengen, also im Falle der Gruppentheorie die Gruppenhomomorphismen von der Gruppe  $A$  in die Gruppe  $B$ . Die Verknüpfung der Kategorie ist normalerweise auch nichts anderes als die übliche Verknüpfung von Abbildungen und erfüllt deshalb automatisch die Eigenschaften aus Definition 1.1 Teil c).

- b) Wichtig ist es, das Wort *normalerweise* in Teil a) nicht zu übersehen. Nirgendwo in der Definition von *Kategorie* wird verlangt, dass Objekte wirklich Mengen sein müssen und dass Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen sein müssen. Die Objekte können irgendwelche mathematischen Gegenstände sein und müssen nicht unbedingt Mengen, geschweige denn Mengen mit Struktur sein (außer in dem Sinne, dass alle mathematischen Gegenstände sich als Mengen definieren lassen). Die Morphismen müssen, sogar wenn die Objekte Mengen sind, nicht Abbildungen zwischen diesen Mengen oder überhaupt Abbildungen sein. Und die Verknüpfungsabbildung muss nicht identisch mit der Verknüpfung von Abbildungen sein. Nicht nur sind solche „exotische“ Kategorien durchaus erlaubt, sie haben sogar nützliche Anwendungen und kommen gar nicht so selten vor. Beispiele werden wir gleich präsentieren.
- c) Die „normale“ Situation aus Teil a) ist dennoch die häufigste, und da jede Struktur auf Mengen sich als isomorphes Abbild auf jede andere Menge der gleichen Mächtigkeit übertragen lässt, gibt es in solchen Kategorien mindest so viele verschiedene Objekte, wie es Mengen einer gegebenen Mächtigkeit gibt. Ausser im Falle der leeren Menge ist diese Anzahl so groß, dass ohne Widersprüche in der Mengenlehre heraufzubeschwören die Gesamtheit der Objekte einer solchen Kategorie gar nicht selber eine Menge sein darf, sondern nur eine Klasse (also eine Ansammlung von Mengen, die aber nicht selber als Element einer anderen Menge in Erscheinung treten darf). Deshalb wird in Definition 1.1 a)  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  auch explizit als Klasse und nicht als Menge vorausgesetzt. Die *Morphismen* zwischen zwei Objekten bilden aber tatsächlich immer eine *Menge*, und nicht nur eine Klasse.
- d) Es kann aber durchaus vorkommen, dass die Objekte einer Kategorie wirklich eine Menge bilden. Solche Kategorien nennt man ***kleine Kategorien***.
- e) Es mag ein bisschen pedantisch klingen, in 1.1 b) zu verlangen, dass die Morphismenmengen alle disjunkt sein müssen, aber es wird in unseren

Anwendungen in der Tat so sein, dass die Eigenschaften von stetigen Abbildungen (wichtige Morphismen für uns) in Bezug auf die algebraische Topologie sehr stark davon abhängen, welchen Quellraum und insbesondere auch welchen Zielraum sie haben.

Wir werden in den Beispielen, die wir unten bringen, aber nicht immer streng auf Erfüllung dieser Bedingung achten, weil sonst die Definitionen einiger Beispiele durch technische und nicht wesentlich inhaltliche Einzelheiten sehr unverständlich werden. Da wo die Bedingung aber scheinbar verletzt ist, muss man nur die angegebenen Morphismenmengen  $\text{Mor}(A, B)$  ersetzen durch  $\text{Mor}(A, B) \times \{A\} \times \{B\}$ , um sie disjunkt zu machen (und natürlich muss man die Definition der Verknüpfung entsprechend anpassen, was aber die anderen verlangten Eigenschaften nicht zerstört).

**Notation 1.4** a) Weil die Situation in Bemerkung 1.3 a) so häufig vorkommt, benutzt man oft einen gewohnteren Namen für die Morphismenmengen, nämlich  $\text{Hom}(A, B)$  statt  $\text{Mor}(A, B)$ .

b) Statt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  schreibt man oft einfach  $A \in \mathcal{K}$ .

c) Statt  $f \in \text{Mor}(A, B)$  schreibt man oft  $f: A \longrightarrow B$ . Wichtig ist es, in Erinnerung zu halten, dass  $f$  trotzdem nicht eine Abbildung sein muss!

d) Wir werden es sehr oft mit mehreren Kategorien gleichzeitig zu tun haben, manchmal auch in Situationen, wo gewisse Objekte sowohl zu der einen als auch zu einer anderen Kategorie gehören können. In diesen Fällen schreiben wir  $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  statt einfach  $\text{Mor}(A, B)$ , um genau zu kennzeichnen, in welcher Kategorie wir die Morphismen betrachten.

e) Eine manchmal verwendete noch einfachere Notation für die Morphismenmengen, die automatisch den Namen der Kategorie in sich trägt, besteht darin,  $\mathcal{K}(A, B)$  für  $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  zu schreiben.

Um ein Gefühl für den Begriff der Kategorie zu bekommen und auch die (nützlichen und weniger nützlichen) exotischen Varianten kennen zu lernen, betrachten wir folgende

**Beispiele 1.5** a) Die Kategorie **Meng** der Mengen und Mengenabbildungen.  $\text{Ob}(\mathbf{Meng})$  ist die Klasse aller Mengen, und für je zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{Meng}}(A, B)$  die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen  $A \longrightarrow B$ .

- b) Die Kategorie  $\mathbf{Gp}$  der Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Die Objekte von  $\mathbf{Gp}$  sind alle Gruppen und für je zwei Gruppen  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{Gp}}(A, B)$  die Menge aller Gruppenhomomorphismen  $A \rightarrow B$ .
- c) Die Kategorie  $\mathbf{AbGp}$  der *abelschen* Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Die Objekte von  $\mathbf{AbGp}$  sind alle abelschen Gruppen und für je zwei abelsche Gruppen  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{AbGp}}(A, B)$  die Menge aller Gruppenhomomorphismen  $A \rightarrow B$ . Man beachte, dass  $A$  und  $B$  auch Objekte der Kategorie  $\mathbf{Gp}$  sind, und  $\text{Mor}(A, B)$  ist in beiden Kategorien die gleiche Menge; nur die Klassen der Objekte unterscheiden sich.
- d) Die Kategorie  $\mathbf{Top}$  der topologischen Räume und stetigen Abbildungen. Die Objekte von  $\mathbf{Top}$  sind alle topologischen Räume und für je zwei Räume  $A$  und  $B$  ist  $\text{Mor}_{\mathbf{Top}}(A, B)$  die Menge aller stetigen Abbildungen  $A \rightarrow B$ .
- e) Wer die vorangegangenen Beispiele verstanden hat, braucht keine explizite Definition mehr der ähnlich aufgebauten Kategorie  $\mathbf{Ring}$  aller Ringe, der Kategorie  $\mathbf{KR1}$  aller kommutativen Ringe mit 1, der Kategorie  $\mathbf{Körp}$  aller Körper, der Kategorie  $K\text{-VR}$  aller Vektorräume über einen gegebenen Körper  $K$ , der Kategorie  $\mathbf{DMf}$  aller differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, usw.
- f) Wir definieren eine nicht ganz so klassische Kategorie  $\Delta$ , die einige Anwendungen in der algebraischen Topologie hat (allerdings führen diese Anwendungen aus dem Themenbereich dieser Vorlesung heraus). Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$  hat diese Kategorie ein Objekt

$$\mathbf{n} := \{0, 1, \dots, n\},$$

die Menge der natürlichen Zahlen  $\leq n$ , die wir als eine geordnete Menge mit der üblichen Ordnung von  $\mathbf{N}$  betrachten.

Für je zwei Objekte  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{n} \in \text{Ob}(\Delta)$  setzen wir  $\text{Mor}_{\Delta}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  gleich der Menge aller ordnungserhaltenden, also (nicht unbedingt streng) monoton steigenden Abbildungen  $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$ .

Die Verknüpfung von Morphismen ist die normale Verknüpfung von Abbildungen, wobei die Eigenschaft monoton steigend zu sein offensichtlich erhalten bleibt (so dass diese Verknüpfung tatsächlich Morphismen der Kategorie  $\Delta$  liefert). Als Identitätsmorphismen können wir die Identitätsabbildungen der Mengen  $\mathbf{n}$  nehmen, die ja ordnungserhaltend sind.

Bisher haben wir nur ganz normale Beispiele genannt, der Sorte wie in Bemerkung 1.3 a) (Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen), auch wenn das letzte Beispiel ein bisschen ungewöhnlich war. Hier nun einige andersartige:

- g) Wir definieren wie folgt eine Kategorie **Teil**, die das Teilverhältnis zwischen den natürlichen Zahlen gewissermaßen modelliert. Wir setzen  $\text{Ob}(\mathbf{Teil})$  als die Menge  $\mathbf{N}_+$  der positiven natürlichen Zahlen, und für je zwei Elemente  $a$  und  $b$  von  $\text{Ob}(\mathbf{Teil})$  setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathbf{Teil}}(a, b) := \{p \in \mathbf{N}_+ \mid ap \text{ teilt } b\}.$$

(Diese Morphismenmenge ist natürlich nichtleer genau dann, wenn  $a$  ein Teiler von  $b$  ist.) Die Verknüpfungsabbildung definieren wir einfach als das Produkt, d. h., wenn  $a, b$  und  $c$  Objekte von **Teil** sind und wenn  $p \in \text{Mor}(a, b)$  (d. h.,  $ap$  teilt  $b$ ) und  $q \in \text{Mor}(b, c)$  (d. h.,  $bq$  teilt  $c$ ), so setzen wir  $q \circ p := pq \in \text{Mor}(a, c)$  und stellen sofort fest, dass dies tatsächlich ein Morphismus von  $a$  nach  $c$  ist, denn  $ap \mid b$  und deshalb gilt  $apq \mid bq \mid c$ , also  $a(pq) \mid c$  (wir benutzen hier die übliche Notation „ $x \mid y$ “ für „ $x$  teilt  $y$ “).

Die Eigenschaften i) und ii) aus Teil c) von Definition 1.1 sind offensichtlich erfüllt: i) gilt, weil die Multiplikation von Zahlen assoziativ ist, und ii) gilt offenbar mit  $\text{id}_a := 1 \in \text{Mor}(a, a)$  für jedes Objekt  $a$  von **Teil**.

Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass die hier definierten Morphismenmengen entgegen Bedingung 1.1 b) nicht disjunkt sind, aber das ist kein wesentliches Problem, denn sie lassen sich wie in Bemerkung 1.3 e) erläutern leicht disjunkt machen, ohne die anderen wichtigen Eigenschaften zu zerstören (aber dennoch zum Schaden der Klarheit der Definition, weshalb wir auf die Ausführung verzichtet haben).

- h) Sei  $G$  eine fest gewählte Gruppe. Wir definieren eine Kategorie  $\mathcal{G}$  mit genau einem Objekt  $*$ , so dass  $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$  ist und die Verknüpfung die Gruppenmultiplikation ist; sie ist assoziativ und das neutrale Element  $e \in G$  ist der Identitätsmorphimus.
- i) Sei  $K$  eine beliebige Klasse. Wir definieren eine Kategorie  $\mathcal{K}$ , indem wir  $\text{Ob}(\mathcal{K}) = K$  setzen und für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{K}$  die Morphismenmenge  $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  als eine einelementige Menge wählen, dessen Element wir mit  $f_{AB}$  bezeichnen; diese Elemente wählen wir alle verschieden, damit die Morphismenmengen disjunkt werden. Die Verknüpfung lässt sich nur auf eine Weise definieren, nämlich  $f_{BC} \circ f_{AB} = f_{AC}$ . Dies erfüllt offensichtlich die Bedingungen aus Definition 1.1 c).

- j) Als Beispiel einer nützlichen exotischen Kategorie betrachten wir  $\mathbf{Kob}_n$ , die *Kobordismuskategorie* in einer gegebenen Dimension  $n$ . Die Objekte von  $\mathbf{Kob}_n$  sind  $n$ -dimensionale kompakte unberandete differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ein Morphismus zwischen zwei solcher Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  ist eine Homöomorphieklasse (bei festem Rand) von  $n + 1$ -dimensionalen kompakten berandeten Mannigfaltigkeiten  $P$ , deren Rand aus  $M \amalg N := M \overset{D}{\cup} N$ , der topologischen Summe von  $M$  und  $N$ , besteht (auch hier berufen wir uns auf Bemerkung 1.3 e) um nicht auf die Frage eingehen zu müssen, ob diese Morphismenmengen disjunkt sind).

Die Verknüpfung zweier Morphismen  $P: M \rightarrow N$  und  $Q: N \rightarrow K$  wird erhalten durch Zusammenkleben von  $P$  und  $Q$  entlang der gemeinsamen Randkomponente  $N$  (wodurch  $N$  nicht mehr zum Rand des Ergebnisses gehört, sondern jetzt nur  $M \cup K$ ). Der Identitätsmorphismus von  $M$  ist die Homöomorphieklasse von  $M \times I$  (wo  $I$  das Intervall  $[0, 1]$  ist). Ein Satz der Differentialtopologie besagt, dass eine Randkomponente  $M$  einer Mannigfaltigkeit  $P$  eine sogenannte *Kragen-umgebung* in  $P$  besitzt, eine Umgebung, die homöomorph ist zu  $M \times I$ . Deshalb fungiert  $M \times I$  tatsächlich als Identitätselement — wenn man in  $P$  eine zu  $M \times I$  homöomorphe Umgebung von  $M$  findet, heißt das, dass Ankleben von  $M \times I$  an die Randkomponente  $M$  von  $P$  eine zu  $P$  homöomorphe Mannigfaltigkeit ergibt, also die Verknüpfung mit dem Morphismus  $M \times I$  ändert den Homöomorphietyp der Mannigfaltigkeit  $P$  nicht.

Die Kobordismuskategorie hat Anwendungen in der Differentialtopologie.

Hier noch einige zumindest zu einem gewissen Grad „exotische“ Kategorien, die für uns in dieser Vorlesung sehr wichtig sein werden. Es handelt sich um kleine Abwandlungen der topologischen Kategorie, die auf die Konstruktion und die Eigenschaften der Homotopiegruppen und der Homologiegruppen angepasst sind. In allen Fällen muss Bemerkung 1.3 e) angewendet werden, um die Disjunktheit der Morphismenmengen einzurichten; wir gehen bei den einzelnen Beispielen nicht mehr explizit darauf ein.

- k) Die Kategorie  $\mathbf{Top}_*$  der *punktierten topologischen Räume*. Die Objekte von  $\mathbf{Top}_*$  sind Paare  $(X, p)$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $p$  ein Punkt von  $X$  (man nennt ihn den *ausgezeichneten Punkt* oder den *Basispunkt* des punktierten Raumes  $(X, p)$ ). Die Morphismen-

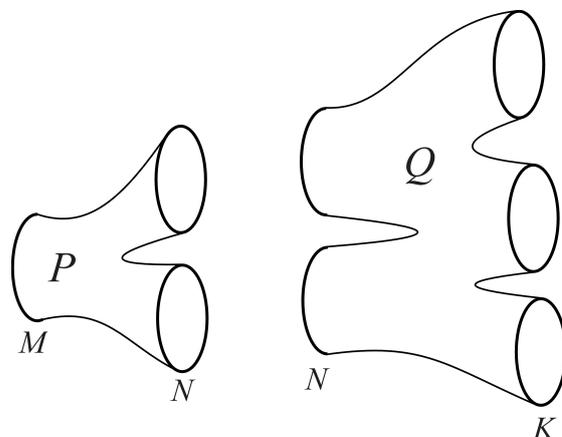


Abbildung 1.1: Kobordismen

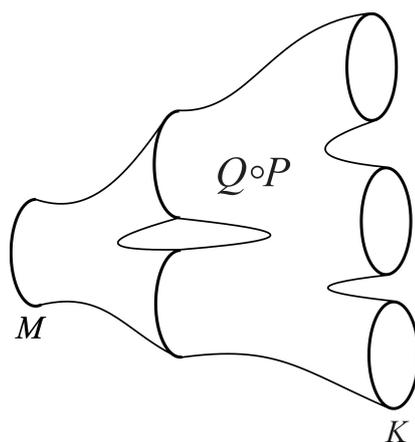


Abbildung 1.2: Verknüpfung von Kobordismen

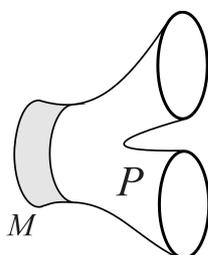


Abbildung 1.3: Eine Kragenumgebung, homöomorph zu  $M \times I$

men  $(X, p) \longrightarrow (Y, q)$  sind die stetigen Abbildungen  $f: X \longrightarrow Y$ , so dass  $f(p) = q$ . Die Verknüpfung ist die normale Verknüpfung von Abbildungen und respektiert automatisch die ausgezeichneten Punkte. Der Identitätsmorphismus von  $(X, p)$  ist die normale Identität von  $X$  (die  $p$  ja nach  $p$  abbildet). Offensichtlich erfüllt diese Struktur alle Eigenschaften von Definition 1.1. Da der ausgezeichnete Punkt in die Struktur eingebaut ist, ist diese Kategorie geeignet für Konstruktionen, die von einem vorher ausgewählten Punkt ausgehen, wie es für die Fundamentalgruppe und die anderen Homotopiegruppen der Fall ist. Eine feste Wahl eines Grundpunktes wird in  $\mathbf{Top}_*$  automatisch mitgeliefert.

Weil in Anwendungen dieser Kategorie der ausgezeichnete Punkt tatsächlich eine besondere Rolle spielt, ist es üblich, ihn mit  $*$  zu bezeichnen, und man kann die ausgezeichneten Punkte verschiedener Objekte der Kategorie durch einen Index unterscheiden, der den topologischen Raum nennt, oder auf eine sonstige Art die Zeichen unterscheiden:  $(X, *_X)$  und  $(Y, *_Y)$ , oder  $(X, *)$  und  $(X', *)'$ , zum Beispiel.

- l) Die Kategorie  $\mathbf{Top}^2$  der *topologischen Raumpaare*. Die Objekte von  $\mathbf{Top}^2$  sind Paare  $(X, A)$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $A \subseteq X$  ein Unterraum von  $X$  ist. Die Morphismen  $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$  sind die stetigen Abbildungen  $f: X \longrightarrow Y$ , so dass  $f(A) \subseteq B$ , die Verknüpfung ist wieder die normale Verknüpfung von Abbildungen und der Identitätsmorphismus von  $(X, A)$  ist wieder die normale Identität von  $X$ , die automatisch  $A$  in sich abbildet. Die Eigenschaften von Definition 1.1 sind wieder trivialerweise erfüllt.

Auch für die Objekte dieser Kategorie lassen sich Homologie- und Kohomologiegruppen definieren, und es gibt eine nützliche Beziehung zwischen diesen Gruppen und den Homologiegruppen oder Kohomologiegruppen der einzelnen Räume  $X$  und  $A$  im Paar  $(X, A)$ , die für die Berechnung dieser Gruppen eingesetzt werden kann.

- m) Beispiel l) lässt sich verallgemeinern zu einer Kategorie  $\mathbf{Top}^n$  für beliebiges  $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ . Die Objekte von  $\mathbf{Top}^n$  sind  $n$ -Tupel  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  von topologischen Räumen, so dass  $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n$ , und ein Morphismus  $f: (X_1, X_2, \dots, X_n) \longrightarrow (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  ist einfach eine stetige Abbildung  $f: X_1 \longrightarrow Y_1$ , so dass für jedes  $k$  mit  $1 \leq k \leq n$  gilt  $f(X_k) \subseteq Y_k$ . Tatsächlich benutzen werden wir diese Verallgemeinerung nur ganz selten und nur noch für den Fall  $n = 3$ ; die entsprechende Kategorie  $\mathbf{Top}^3$  nennt sich die Kategorie der topologischen *Raumtripel*.

- n) Beispiel m) hat eine Variante  $\mathbf{Top}^{[n]}$ , die sich auch für jedes  $n$  definieren lässt aber praktisch nur für den Fall  $n = 3$  tatsächlich benutzt wird. Hier sind die Objekte zwar auch  $n$ -Tupel  $(X, A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$  von topologischen Räumen, wo die  $A_i$  alle Unterräume von  $X$  sind, aber diesmal müssen die  $A_i$  nicht ineinander verschachtelt sein, sondern es wird stattdessen verlangt, dass sie  $X$  überdecken, d. h., die  $A_i$  sind beliebige Unterräume von  $X$ , so dass  $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ . Die Morphismen  $(X, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) \rightarrow (Y, B_1, B_2, \dots, B_{n-1})$  sind wieder stetige Abbildungen  $f: (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ , so dass  $f(A_i) \subseteq B_i$  für alle  $i$ .

Im einzig wichtigen Fall  $n = 3$  nennt man die Objekte dieser Kategorie **Triaden**, und um in der Notation gleich zu kennzeichnen, dass es sich um eine Triade handelt, ersetzt man das erste Komma in der Auflistung durch ein Semikolon, d. h., man notiert Triaden als  $(X; A_1, A_2)$  oder  $(X; A, B)$ . Auch die Triaden kommen eigentlich nur an einer bestimmten Stelle in der Homologietheorie vor.

Durch ähnliche Konstruktionen kann man noch ganz viele andere Varianten der Kategorie  $\mathbf{Top}$  konstruieren, zum Beispiel die Kategorie  $\mathbf{Top}_*^2$  der punktierten Raumpaare, die in der Homotopietheorie benutzt wird und bei der Konstruktion der Homotopiegruppen von Raumpaaren verwendet wird. Wir wollen nicht näher darauf eingehen, denn die oben genannten Beispiele reichen schon für die Zwecke dieser Vorlesung. Aber auch die hier nur flüchtig erwähnten und nicht ausführlich behandelten Fälle sind keine Spielereien und werden tatsächlich intensiv verwendet in der algebraischen Topologie.

Wegen ihrer Wichtigkeit für unsere Zwecke werden wir uns oft auf die oben genannten Varianten der Kategorie  $\mathbf{Top}$  berufen, und besonders in diesem Abschnitt werden wir uns manchmal auf *alle* genannten Varianten von  $\mathbf{Top}$  auf einmal beziehen wollen. Dazu werden wir sie dann einfach die *topologischen Kategorien* nennen.

In den Beispielen 1.5 k)–n) haben wir gesehen, dass man aus bekannten Kategorien durch Abwandlungen leicht neue nützliche Kategorien gewinnen kann. Hier sind noch weitere und nicht so spezielle, sondern ganz allgemein anwendbare Konstruktionen.

**Definition 1.6** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie.

- a) Wir konstruieren eine neue Kategorie  $\mathcal{K}^-$ , genannt die **duale Kategorie** zu  $\mathcal{K}$ , wie folgt: Wir setzen  $\text{Ob}(\mathcal{K}^-) := \text{Ob}(\mathcal{K})$ , aber für je zwei

Objekte  $A$  und  $B$  setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}^-}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A)$$

und wir kehren entsprechend die Reihenfolge der Verknüpfung um. Das heißt, für  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}^-}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A)$  und für  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}^-}(B, C) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(C, B)$  definieren wir

$$g \circ_{\mathcal{K}^-} f := f \circ_{\mathcal{K}} g.$$

Die Verknüpfung auf der rechten Seite ist in  $\mathcal{K}$  tatsächlich definiert und alle gewünschten Eigenschaften der Verknüpfung in  $\mathcal{K}^-$  folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften in  $\mathcal{K}$ .

Für jedes Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}^-) = \text{Ob}(\mathcal{K})$  ist  $\text{Mor}(A, A)$  die gleiche Menge in  $\mathcal{K}^-$  wie in  $\mathcal{K}$ , und  $\text{id}_A$  ist der gleiche Morphismus in beiden Kategorien.

Diese Konstruktion behält das Grundgerüst der alten Kategorie bei und macht im Wesentlichen nichts anderes, als die „Pfeilrichtung“ der Morphismen umzukehren.

Für  $\mathcal{K}^-$  wird manchmal auch  $\mathcal{K}^{\text{op}}$  geschrieben (**op** für „opposite“).

- b) Eine **Kongruenz** auf  $\mathcal{K}$  ist eine Klasse  $\sim$  von Äquivalenzrelationen, die für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{K}$  genau eine Äquivalenzrelation auf  $\text{Mor}(A, B)$  enthält (die wir auch mit  $\sim$  bezeichnen), so dass wenn  $A, B$ , und  $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und wenn  $f \sim f' \in \text{Mor}(A, B)$  und  $g \sim g' \in \text{Mor}(B, C)$ , dann gilt auch

$$g \circ f \sim g' \circ f' \in \text{Mor}(A, C). \quad (1.1)$$

Die  $\sim$ -Äquivalenzklasse eines Morphismus  $f$  bezeichnen wir mit  $[f]$  und wir nennen sie die **Kongruenzklasse** von  $f$ . Wenn  $\sim$  eine Kongruenz ist, dann können wir eine wohldefinierte Verknüpfung  $\circ$  für Kongruenzklassen von Morphismen definieren durch die Vorschrift

$$[g] \circ [f] := [g \circ f]. \quad (1.2)$$

Dies erlaubt die Konstruktion einer neuen Kategorie  $\mathcal{K}' := \mathcal{K}/\sim$  durch folgende Festlegungen. Wir setzen  $\text{Ob}(\mathcal{K}') := \text{Ob}(\mathcal{K})$ . Für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  dieser Kategorien setzen wir  $\text{Mor}_{\mathcal{K}'}(A, B)$  gleich der Menge  $\text{Mor}(A, B)/\sim$  der  $\sim$ -Äquivalenzklassen auf  $\text{Mor}(A, B)$ . Die Verknüpfung von solchen Äquivalenzklassen definieren wir wie in Gleichung (1.2) und man prüft sofort nach, dass diese Verknüpfung assoziativ ist und dass für jedes Objekt  $A$  die Klasse  $[\text{id}_A]$  ein Identitätsmorphimus für die Kategorie  $\mathcal{K}'$  ist.

Diese neue Kategorie  $\mathcal{K}' := \mathcal{K}/\sim$  heißt die **Quotientenkategorie** von  $\mathcal{K}$  nach der Kongruenz  $\sim$ . Die Morphismenmengen von einer Quotientenkategorie notiert man oft mit  $[A, B]$  statt  $\text{Mor}(A, B)$ .

Eine schöne und sehr wichtige Instanz dieser Konstruktion besprechen wir gleich in Definition 1.8 unten.

- c) Sei  $\mathcal{L}$  eine weitere Kategorie. Wir können die **Produktkategorie**  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  von  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  wie folgt definieren. Die Objekte von  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  sind Paare  $(A, B)$ , wo  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  und  $B \in \text{Ob}(\mathcal{L})$ . Sind  $(A, B)$  und  $(C, D)$  Objekte von  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ , so setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}((A, B), (C, D)) := \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{L}}(B, D),$$

d. h., die Morphismen der Produktkategorie sind Paare von Morphismen der einzelnen Kategorien. Die Verknüpfung wird „koordinatenweise“ erklärt:

$$(h, k) \circ_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} (f, g) := (h \circ_{\mathcal{K}} f, k \circ_{\mathcal{L}} g).$$

Man prüft sehr leicht nach, dass alle erforderlichen Eigenschaften erfüllt sind.

- d) Die verschiedenen Abwandlungen der Kategorie **Top**, die wir in Beispiele 1.5 eingeführt haben, kann man auf entsprechende Weise auf jede Kategorie  $\mathcal{K}$  anwenden, deren Objekte Mengen sind und deren Morphismen Abbildungen sind. Da für uns aber nur die auf **Top** basierenden Varianten von Bedeutung sind, wollen wir nicht näher darauf eingehen.

**Beispiel 1.7** Sei  $K$  ein Körper und sei  $\mathcal{V} := \mathbf{VR}_0$  die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über  $K$  und der  $K$ -linearen Abbildungen.

Die duale Kategorie  $\mathcal{V}^-$  hat die gleichen Vektorräume als Objekte, aber im Wesentlichen die Morphismen der *dualen* Vektorräume, denn es gibt wegen der Voraussetzung der endlichen Dimension eine bijektive Beziehung zwischen linearen Abbildungen und den zu ihnen dualen linearen Abbildungen der Dualräume. (Natürlich verstecken die Wörter „im Wesentlichen“ die Details dieser Bijektion.)

Für die Bildung von Quotienten nach einer Kongruenz gibt es ein sehr passendes Beispiel. Wie wir in der Einleitung gesagt haben, und wie wir es am Beispiel der Fundamentalgruppe schon kennen, hängen die meisten Konstruktionen der algebraischen Topologie eigentlich nicht von den Objekten und Morphismen der oben genannten Varianten von **Top** ab, sondern nur

von ihren Homotopieklassen. Das können wir mit Kongruenz und der kategorientheoretischen Konstruktion des Quotienten nach einer Kongruenz sehr schön festhalten.

**Definition 1.8** Wir erinnern kurz an die Definition einer **Homotopie** in der Kategorie **Top**.

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und seien  $f$  und  $g: X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen. Eine **Homotopie** von  $f$  nach  $g$  ist eine stetige Abbildung

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

(wo  $I = [0, 1]$  das Einheitsintervall in  $\mathbf{R}$  ist), so dass für jedes  $x \in X$  gilt

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(x, 1) = g(x). \quad (1.3)$$

Wenn es eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  gibt, so schreiben wir  $f \simeq g$ . Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, wie wir aus der *Einführung in die Topologie* wissen (siehe Lemma und Definition 6.5 im Skriptum zu jener Vorlesung).

In Teil b) des genannten Lemmas wird die Aussage von unserer Gleichung (1.1) bewiesen. In anderen Worten, es wird gezeigt, dass die Homotopierelation  $\simeq$  eine **Kongruenz** ist.

Es ist nicht schwer, den Begriff einer Homotopie zu den anderen in Beispiel 1.5 definierten topologischen Kategorien  $\mathcal{K}$  zu erweitern, deren Objekte in allen Fällen im Prinzip topologische Räume mit einer Folge von ausgezeichneten Unterräumen oder Punkten sind. Homotopien auf solchen Objekten werden definiert als Homotopien auf den topologischen (Ober)räumen, die für alle Werte  $t \in I$  die ausgezeichneten Unterräume oder Punkte im Quellobjekt in die entsprechenden ausgezeichneten Unterräume oder Punkte des Zielobjekts abbilden. Dies ist *nicht* das Gleiche, wie „Homotopie relativ zu einem Unterraum“, wo die *einzelnen Punkte* des Unterraums während der ganzen Homotopie fest bleiben müssen.

Zum Beispiel, in  $\mathbf{Top}^2$  ist eine Homotopie von einem Objekt  $(X, A)$  zu einem Objekt  $(Y, B)$  eine stetige Abbildung

$$H: X \times I \rightarrow Y,$$

so dass  $H(A \times I) \subseteq B$ . Wir notieren diese Situation mit

$$H: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B).$$

Für jedes  $t \in I$  erhalten wir einen  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismus  $H_t: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  durch die Festlegung

$$H_t(x) := H(x, t).$$

Wir nennen zwei  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismen  $f$  und  $g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  *homotop* und schreiben  $f \simeq g$ , wenn es eine Homotopie  $H: (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$  gibt mit  $H_0 = f$  und  $H_1 = g$ .

In den anderen topologischen Kategorien ist die Definition einer Homotopie und der Relation  $\simeq$  ähnlich.

Mit den gleichen Beweisen wie in  $\mathbf{Top}$  ist es leicht zu zeigen, dass auch in den anderen oben genannten topologischen Kategorien  $\mathcal{K}$  die Relation  $\simeq$  eine Äquivalenzrelation auf jeder Morphismenmenge und sogar eine Kongruenz ist.

Deshalb können wir in all diesen Kategorien wie in Definition 1.6 b) die Quotientenkategorie bilden.

Die Quotientenkategorie  $\mathcal{K}/\simeq$  heißt die *Homotopiekategorie* zu  $\mathcal{K}$  und wird mit  $\mathbf{HK}$  bezeichnet.

Die  $\simeq$ -Äquivalenzklasse eines Morphismus  $f$  in  $\mathcal{K}$  nennen wir ihre *Homotopieklasse* und wir bezeichnen sie, wie in Definition 1.6 b), mit  $[f]$ .

Die Menge aller Homotopieklassen von  $\mathcal{K}$ -Morphismen  $P \longrightarrow Q$  (wo  $P$  und  $Q$  Objekte von  $\mathcal{K}$  sind, d. h., topologische Räume oder Raumpaare oder punktierte Räume, je nachdem welche Kategorie  $\mathcal{K}$  ist) bezeichnen wir mit  $[P, Q]$  (in  $\mathbf{Top}^2$  zum Beispiel mit  $[(X, A), (Y, B)]$ ), und entsprechend für die anderen Kategorien).

Wir haben jetzt insbesondere drei neue Kategorien  $\mathbf{HTop}$ ,  $\mathbf{HTop}^2$  und  $\mathbf{HTop}_*$ , und es wird sich später herausstellen, dass dies die eigentlichen Quellkategorien der algebraischen Topologie sind und nicht die topologischen Kategorien selber.

Kategorien können viele Gestalten haben, aber manche sind eng miteinander verwandt. Folgende mögliche Beziehung ist dabei von Bedeutung:

**Definition 1.9** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien. Wir nennen  $\mathcal{L}$  eine *Unterkategorie* von  $\mathcal{K}$ , wenn gilt:

- a)  $\text{Ob}(\mathcal{L}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{K})$ .
- b) Für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  der „kleineren“ Kategorie  $\mathcal{L}$  ist

$$\text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B).$$

- c) Für je drei Objekte  $A$ ,  $B$  und  $C$  von  $\mathcal{L}$  und für je zwei Morphismen  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B)$  und  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(B, C)$  ist  $g \circ f$  der gleiche Morphismus  $A \rightarrow C$  in  $\mathcal{L}$ , wie in  $\mathcal{K}$ .

- d) Für jedes Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{L})$  ist  $\text{id}_A$  der gleiche Morphismus in  $\mathcal{L}$ , wie in  $\mathcal{K}$ .

Wenn für je zwei Objekte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{L}$  es in b) sogar der Fall ist, dass  $\text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ , so nennen wir  $\mathcal{L}$  eine *volle Unterkategorie* von  $\mathcal{K}$ .

Eine volle Unterkategorie unterscheidet sich von ihrer Oberkategorie nur durch die Objekte, nicht durch die Morphismenmengen der Objektpaare.

**Beispiele 1.10** a) Die Kategorie **AbGp** ist eine volle Unterkategorie der Kategorie **Gp**.

- b) **Top<sub>\*</sub>** ist eine volle Unterkategorie von **Top<sup>2</sup>**, wenn man den ausgezeichneten Punkt  $*$  eines punktierten topologischen Raumes mit dem topologischen Unterraum  $\{*\}$  identifiziert.
- c) **Top** ist eine volle Unterkategorie der Kategorie **Top<sup>2</sup>**, wenn man einen topologischen Raum  $X$  mit dem Raumpaare  $(X, \emptyset)$  identifiziert (was wir später auch generell tun werden und als Konvention einführen wollen).
- d) **Top<sup>2</sup>** wird zu einer Unterkategorie von **Top  $\times$  Top**, wenn man jeden Morphismus  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von **Top<sup>2</sup>** mit dem Morphismus  $(f, f|_A): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  der Kategorie **Top  $\times$  Top** identifiziert.

Für die Objekte  $(X, A)$  von **Top<sup>2</sup>** muss gelten  $A \subseteq X$ , so dass

$$\text{Ob}(\mathbf{Top}^2) \subsetneq \text{Ob}(\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}),$$

und wenn  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  Objekte von **Top<sup>2</sup>** sind, so gilt auch

$$\text{Mor}_{\mathbf{Top}^2}((X, A), (Y, B)) \subsetneq \text{Mor}_{\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}}((X, A), (Y, B)),$$

(im Allgemeinen) denn ein **Top  $\times$  Top**-Morphismus  $(f, g): (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist nur dann auch ein **Top<sup>2</sup>**-Morphismus, wenn  $g = f|_A$ . Deshalb ist insbesondere **Top<sup>2</sup>** keine *volle* Unterkategorie von **Top  $\times$  Top**.

- e) Auf die gleiche Weise kann man **Top<sub>\*</sub>** als eine Unterkategorie von **Top  $\times$  Top** auffassen (schließlich ist **Top<sub>\*</sub>** nach b) eine Unterkategorie von **Top<sup>2</sup>**).
- f) Sei **Inj** die Kategorie, die beliebige Mengen als ihre Objekte hat, aber deren Morphismen nur die *injektiven* mengentheoretischen Abbildungen zwischen zwei Mengen sind (da Identitätsabbildungen und Verknüpfungen von injektiven Abbildungen injektiv sind, ist dies tatsächlich eine Kategorie). Dann ist **Inj** eine Unterkategorie von **Meng**, aber keine volle Unterkategorie.

- g) **Körp** ist eine volle Unterkategorie von **KR1**, und **KR1** ist eine Unterkategorie von **Ring**, aber keine volle Unterkategorie, weil die Morphismen von **KR1** Einselemente in Einselemente abbilden müssen; allgemeine Ringhomomorphismen, auch zwischen Ringen mit 1, müssen das nicht.

Wenn man nur eine Kategorie auf einmal betrachten will, braucht man den Begriff Kategorie gar nicht erst einzuführen. Sie haben ja jahrelang Vektorraumtheorie, Gruppentheorie, Topologie und andere Gebiete der Mathematik mit den ihnen inne liegenden mathematischen Strukturen kennen gelernt und ausgiebig untersucht, ohne von Kategorien etwas zu wissen. Aber in der algebraischen Topologie wollen wir ja gerade mit verschiedenen Strukturen gleichzeitig arbeiten und somit mehrere Kategorien miteinander in Verbindung bringen. Das ist überhaupt der Grund, warum wir Kategorientheorie eingeführt haben, und uns geht es ganz besonders um „Struktur erhaltende“ Abbildungen zwischen verschiedenen Kategorien.

Solche Abbildungen heißen **Funktoren**, und es gibt sie in zwei Ausprägungen, je nachdem ob sie die Pfeilrichtung von Morphismen *erhalten* oder *umkehren*:

**Definition 1.11 (Funktork)** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien.

- I. Ein **kovarianter Funktor**  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  ist eine Zuordnung, die
  - a) jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  ein Objekt  $F(A)$  von  $\mathcal{L}$  zuordnet, und
  - b) für jedes Paar von Objekten  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  jedem Morphismus  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  einen Morphismus  $F(g) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A), F(B))$  zuordnet, so dass
    - i)  $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$ , wenn  $A, B, C \in \mathcal{K}$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  und  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$ ;
    - ii)  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  für jedes  $A \in \mathcal{K}$ .
  
- II. Ein **kontravarianter Funktor**  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  ist eine Zuordnung, die
  - a) jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  ein Objekt  $F(A)$  von  $\mathcal{L}$  zuordnet, und
  - b) für jedes Paar von Objekten  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  jedem Morphismus  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  einen Morphismus  $F(g) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(B), F(A))$  zuordnet, so dass
    - i)  $F(h \circ g) = F(g) \circ F(h)$ , wenn  $A, B, C \in \mathcal{K}$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  und  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$ ;
    - ii)  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  für jedes  $A \in \mathcal{K}$ .

Ko- und kontravariante Funktoren haben die gleichen Eigenschaften, bis auf die Tatsache, dass ein kontravarianter Funktor, angewendet auf Morphismen, die Reihenfolge von Quell- und Zielraum vertauscht und entsprechend auch die Reihenfolge der Faktoren in einer Verknüpfung vertauscht. Bei kovarianten Funktoren bleibt diese Reihenfolge in der Bildkategorie  $\mathcal{L}$  so, wie sie in der Quellkategorie war.

Der Sammelbegriff für kovariante und kontravariante Funktoren ist einfach **Funktor**, und wir sprechen schlicht von einem *Funktor* in Situationen, wo wir uns nicht festlegen wollen oder wo es momentan irrelevant ist, ob der Funktor ko- oder kontravariant ist; er muss aber trotzdem eine dieser beiden Eigenschaften haben (aber siehe die Einschränkung in Bemerkung 1.12 c) unten).

**Bemerkung 1.12** a) Sind  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien und sind  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  und  $G: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$  Funktoren, so können wir die *Verknüpfung*  $G \circ F$  von  $F$  und  $G$  auf die naheliegende Art bilden, und  $G \circ F$  ist ein Funktor  $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$ ; hierbei verhält sich die Unterscheidung kovariant–kontravariant wie ein Vorzeichen (wo Kontravarianz dem negativen Vorzeichen entspricht), d. h.,  $G \circ F$  ist genau dann kontravariant, wenn genau einer von  $F$  und  $G$  ein kontravarianter Funktor ist. Das prüft man sehr leicht nach.

Diese Regel erweitert sich entsprechend auf Verknüpfungen von mehr als zwei Funktoren — eine solche Verknüpfung ist kovariant genau dann, wenn die Anzahl der kontravarianten Faktoren gerade ist.

b) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie. Wenn man die Definition 1.6 a) der dualen Kategorie  $\mathcal{K}^-$  betrachtet, sieht man, dass die identische Zuordnung ein *kontravarianter* Funktor  $D_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^-$  (oder  $D_{\mathcal{K}^-}: \mathcal{K}^- \longrightarrow \mathcal{K}$ ) ist, und  $D_{\mathcal{K}}$  und  $D_{\mathcal{K}^-}$  sind Umkehrungen zueinander. Diese Funktoren sind in gewissem Sinne universelle oder atomare kontravariante Funktoren, wegen folgender Betrachtungen.

Wenn  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$  ein beliebiger Funktor zwischen zwei Kategorien ist, so sind

$${}_-F := F \circ D_{\mathcal{K}^-}: \mathcal{K}^- \longrightarrow \mathcal{L}$$

und

$$F_- := D_{\mathcal{L}} \circ F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}^-$$

Funktoren der umgekehrten Varianz zu  $F$ . Auf diese Weise kann man jeden kovarianten Funktor mit Hilfe der Funktoren  $D$  oder  $D^-$  ganz einfach zu einem kontravarianten Funktor umwandeln und umgekehrt.

Ferner

$$F = {}_{}F \circ D_{\mathcal{K}} = D_{\mathcal{L}}^- \circ F_{{}_{}},$$

so dass man *jeden* kontravarianten Funktor zerlegen kann als eine Verknüpfung von einem kovarianten Funktor mit einem dieser kontravarianten Grundfunktoren  $D$  oder  $D^-$ . Deshalb würde es an manchen Stellen in der Theorie der Funktoren eigentlich reichen, als Vereinfachung nur kovariante Funktoren zu betrachten. Eine Anwendung dieser Idee sehen wir in:

- c) Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien. In Definition 1.6 c) wurde die Produktkategorie  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  definiert. Einen Funktor  $F: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  nennen wir einen **Funktor von zwei Variablen**, und solche Funktoren können wie jeder andere Funktor ko- oder kontravariant sein.

Hier wollen wir aber auch die Möglichkeit zulassen, dass ein Funktor von zwei Variablen nur bezüglich *einer* dieser Variablen kovariant und bezüglich der anderen kontravariant ist. In Definition 1.11 ist diese Möglichkeit gar nicht vorgesehen, denn ein Funktor  $F$  gemischter Varianz in zwei Variablen müsste einen Morphismus  $f: (A, B) \rightarrow (C, D)$  überführen in einen Morphismus  $F(f): F(A, D) \rightarrow F(C, B)$  oder  $F(C, B) \rightarrow F(A, D)$ , und nicht in einen Morphismus zwischen den eigentlichen Bildobjekten  $F(A, B)$  und  $F(C, D)$ , in welcher Richtung auch immer. Natürlich versteht jeder sofort, was gewollt ist, wenn man von einem Funktor gemischter Varianz spricht, aber die bisherige Definition von Funktor passt für diesen Fall nicht genau.

Der einfachste und eleganteste Ausweg aus diesem Dilemma besteht in der Anwendung der Idee aus Teil b), und das klappt auch für Funktoren von beliebig vielen, also eventuell mehr als zwei, Variablen:

Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl und seien  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien. Einen Funktor  $F$  von  $n$  Variablen von  $\mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_n$  nach  $\mathcal{L}$ , der in den Variablen  $i_1, \dots, i_k$  kontravariant und in den anderen Variablen kovariant ist, definieren wir als die Verknüpfung eines *kovarianten* Funktors

$$\tilde{F}: \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \dots \times \tilde{\mathcal{K}}_n \rightarrow \mathcal{L}, \quad \text{wo } \tilde{\mathcal{K}}_i = \begin{cases} \mathcal{K}_i^-, & \text{wenn } i \in \{i_1, \dots, i_k\}; \\ \mathcal{K}_i & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der Abbildung

$$\tilde{D}_1 \times \dots \times \tilde{D}_n: \mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \dots \times \tilde{\mathcal{K}}_n,$$

wo

$$\tilde{D}_i = \begin{cases} D_{\mathcal{K}_i}, & \text{wenn } i \in \{i_1, \dots, i_k\}; \\ \text{id}_{\mathcal{K}_i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies beschreibt korrekt genau die Wirkung von  $F$ , und ansonsten verstehen wir ja sehr wohl, wie  $F$  wirken soll, so dass wir uns nie auf die grausamen Details dieser Definition berufen werden müssen.

**Beispiele 1.13** a) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie. Dann ist  $\text{id}_{\mathcal{K}}$ , die Identität von  $\mathcal{K}$ , ein kovarianter Funktor  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ .

b) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und  $\mathcal{L}$  eine Unterkategorie von  $\mathcal{K}$ . Aus Definition 1.9 c) und d) folgt, dass die Inklusion  $i: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$  ein kovarianter Funktor ist.

c) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $\sim$  eine Kongruenz auf  $\mathcal{K}$ . Wir haben eine Projektion  $P: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}/\sim$ , die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  das gleiche Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}/\sim$  zuordnet, und jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  seine Kongruenzklasse  $[f] \in [A, B]$ . Aus den Eigenschaften 1.6 b) einer Kongruenz folgt leicht, dass diese Projektion ein kovarianter Funktor ist.

d) Für uns sehr naheliegend ist folgende Instanz von Beispiel 1.13 c). Sei  $\mathcal{K} = \mathbf{Top}$  oder eine andere unserer topologischen Kategorien. Wir erhalten dann mit der Projektion einen kovarianten **Homotopiefunktor**  $[\ ]: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{HK}$ , der jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  das gleiche Objekt  $A$  von  $\mathbf{HK}$  zuordnet, und jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  seine Homotopieklasse  $[f] \in [A, B]$  zuordnet.

e) Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei Kategorien. Sowohl die Objekte wie auch die Morphismen der Produktkategorie  $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$  sind Paare von Objekten bzw. von Morphismen der Kategorien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$ , und wenn wir jedem solchen Paar sein erstes Element zuordnen (oder jedem Paar sein zweites Element) so erhalten wir Projektionen  $P_1: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$  bzw.  $P_2: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ . Offensichtlich sind diese Projektionen kovariante Funktoren.

f) Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie wie  $\mathbf{Gp}$  oder  $\mathbf{Top}$ , deren Objekte Mengen sind und deren Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen sind. Dann können wir einen kovarianten Funktor  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Meng}$  definieren, der jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  die Menge  $A$  zuordnet, und jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  die Abbildung  $f$  als *mengentheoretische Abbildung*  $A \rightarrow B$  zuordnet.

Dieser Funktor „vergisst“ einfach die zusätzliche Struktur der Objekte von  $\mathcal{K}$ ; man nennt ihn deshalb den *vergesslichen Funktor*.

- g) Es gibt viele andere Paare  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  von Kategorien, die sich dadurch unterscheiden, dass alle Objekte von  $\mathcal{K}$  auch Objekte von  $\mathcal{L}$  sind, aber zusätzliche Struktur tragen, und auch in diesen Fällen gibt es einen kovarianten *vergesslichen Funktor*  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ . Zum Beispiel gibt es einen vergesslichen Funktor  $F: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}$ , der jedem punktierten Raum  $(X, x)$  den zugehörigen topologischen Raum  $X$  zuordnet, und jeder basispunkttreuen stetigen Abbildung  $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  die Abbildung  $f$  als Abbildung  $X \rightarrow Y$ .

Entsprechend gibt es einen vergesslichen Funktor  $G: \mathbf{Top}^2 \rightarrow \mathbf{Top}$ , der den Unterraum vergisst und jedem topologischen Raumpaars  $(X, A)$  den „großen“ Raum  $X$  zuordnet, und so dass für jede stetige Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  gilt:  $G(f) = f$  als Abbildung  $X \rightarrow Y$ .

Man erinnere sich daran, dass nach den Beispielen 1.10 d) und e) die Kategorien  $\mathbf{Top}^2$  und  $\mathbf{Top}_*$  Unterkategorien von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$  sind. Die hier erwähnten vergesslichen Funktoren sind nichts anderes, als die Verknüpfung der Inklusionen dieser Unterkategorien in  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$  mit der Projektion  $P_1: \mathbf{Top} \times \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$  (in anderen Worten, sie sind die Einschränkung von  $P_1$  auf die Unterkategorien  $\mathbf{Top}^2$  und  $\mathbf{Top}_*$ ).

- h) Sei  $K$  ein fest gewählter Körper und  $\mathbf{VR}$  die Kategorie der Vektorräume über  $K$  (um die Notation zu vereinfachen erwähnen wir  $K$  nicht mehr explizit im Namen der Kategorie). Ähnlich wie in Beispiel 1.5 l) können wir die Kategorie  $\mathbf{VR}^2$  der Paare  $(V, W)$  von  $K$ -Vektorräumen und Unterräumen definieren (also bei einem Objekt  $(V, W)$  von  $\mathbf{VR}^2$  ist  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $W$  ein Untervektorraum von  $V$ ).

Wir können dann einen Funktor  $Q: \mathbf{VR}^2 \rightarrow \mathbf{VR}$  definieren durch die Zuordnungen  $Q(V, W) := V/W$  (der Quotientenvektorraum), und wenn  $f: (V, W) \rightarrow (U, T)$  eine lineare Abbildung von Vektorraum-paaren ist (d. h.,  $f$  ist eine lineare Abbildung  $V \rightarrow U$  mit  $f(W) \subseteq T$ ), dann ist  $Q(f)$  die von  $f$  induzierte lineare Abbildung  $\bar{f}: V/W \rightarrow U/T$ . Dies ist ein kovarianter Funktor.

- i) Sei  $K$  ein fest gewählter Körper und  $\mathbf{VR}$  die Kategorie der Vektorräume über  $K$ . Die Zuordnung  $*$ , die jedem  $K$ -Vektorraum  $V$  den Dualraum  $V^* := \text{Hom}(V, K)$  zuordnet, und jeder linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  die von  $f$  induzierte duale Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  mit  $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$  zuordnet, ist ein *kontravarianter* Funktor  $\mathbf{VR} \rightarrow \mathbf{VR}$ , wie man aus

den Eigenschaften der Dualräume und dualen linearen Abbildungen  $f^*$  leicht sieht.

- j) Wenn  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  sind, so ist auch  $\text{Hom}(V, W)$ , die Menge der  $K$ -linearen Abbildungen  $V \rightarrow W$ , ein Vektorraum über  $K$ . Wenn  $T$  und  $U$  zwei weitere Vektorräume sind und  $f: T \rightarrow V$  und  $g: W \rightarrow U$  lineare Abbildungen sind, so ist für  $\alpha \in \text{Hom}(V, W)$  die Verknüpfung  $g \circ \alpha \circ f$  eine lineare Abbildung  $T \rightarrow U$ , und sie hängt  $K$ -linear von  $\alpha$  ab, d. h., die Zuordnung  $\alpha \mapsto g \circ \alpha \circ f$  ist eine lineare Abbildung  $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(T, U)$ .

Wenn wir diese Zuordnung mit  $\text{Hom}(f, g)$  bezeichnen, so wird

$$\text{Hom}: \mathbf{VR} \times \mathbf{VR} \rightarrow \mathbf{VR}$$

zu einem Funktor in zwei Variablen, der kontravariant ist in der ersten Variablen und kovariant in der zweiten. Die erforderlichen Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.

- k) Eigentlich interessieren wir uns für „topologisch nützliche“ Funktoren von Topologie zu Algebra. Eine der Standardkonstruktionen kennen wir schon aus der *Einführung in die Topologie*.

Die Fundamentalgruppe bildet einen kovarianten Funktor

$$\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Gp}.$$

Dieser Funktor ordnet jedem punktierten Raum  $(X, x)$  die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  von  $X$  bei  $x$  zu, und einer stetigen Abbildung

$$f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$$

von punktierten Räumen ordnet er den induzierten Homomorphismus

$$\pi_1(f) := f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$$

der Fundamentalgruppen zu.

Die funktoriellen Eigenschaften 1.11 b) i) und ii) (für den kovarianten Fall) wurden in Lemma 6.25 im Skriptum zur *Einführung in die Topologie* bewiesen, so dass  $\pi_1$  tatsächlich ein kovarianter Funktor ist.

Da für eine stetige Abbildung  $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  von punktierten Räumen der induzierte Homomorphismus  $f_*$  der Fundamentalgruppen nur von der Homotopieklasse von  $f$  rel  $\{x\}$  abhängt, und da Homotopie rel  $\{x\}$  das gleiche wie Homotopie von Abbildungen von punktierten Räumen ist, induziert  $\pi_1$  auch einen wohldefinierten Funktor (den

wir auch  $\pi_1$  nennen können) auf der Homotopiekategorie, also einen wohldefinierten kovarianten Funktor

$$\pi_1: \mathbf{HTop}_* \longrightarrow \mathbf{Gp}.$$

In dieser Vorlesung werden wir noch viele weitere und wesentlich kompliziertere Funktoren kennen lernen, insbesondere Funktoren von den Kategorien  $\mathbf{Top}$  und  $\mathbf{Top}^2$  in algebraische Kategorien: in  $\mathbf{AbGp}$ , in eine Abwandlung  $\mathbf{GAG}$  von  $\mathbf{AbGp}$  (die Kategorie der *graduerten abelschen Gruppen*) und in  $\mathbf{Ring}$ .

Die Funktoren spielen in der Kategorientheorie die gleiche Rolle, die die Morphismen in einer einzelnen Kategorie spielen. In anderen Worten, mit dem Funktorbegriff wird die Kategorientheorie praktisch zu ihrem eigenen Objekt; bis auf die Problematik, dass eine Kategorie im allgemeinen keine Menge ist und somit nicht Element einer Klasse sein kann (die Klasse der „Objekte“ der Kategorientheorie), bildet die Kategorientheorie selber eine Art Kategorie, deren Morphismen die Funktoren sind.

Es gibt aber dennoch einen wichtigen qualitativen Unterschied zwischen den Funktoren und den Morphismen einer einzelnen Kategorie: Morphismen sind im Wesentlichen mathematische Atome und haben keine Unterstruktur, während Funktoren einen zweilagigen Aufbau haben, in dem sie sowohl eine Zuordnung von Objekten wie eine Zuordnung von Morphismen beinhalten. Die Tatsache, dass ein Funktor unter anderem Objekte der Zielkategorie als Werte annimmt, ermöglicht es, verschiedene Funktoren mit der gleichen Zielkategorie durch Morphismen dieser Kategorie zu vergleichen oder zu verbinden.

Dieser Gedanke wird uns zu dem dritten wichtigen Grundbegriff der Kategorientheorie führen, aber damit wir diesen Begriff möglichst klar und einfach beschreiben können, lohnt sich vorher ein kleiner Abstecher zu einer Struktur, die ohnehin in der algebraischen Topologie eine allgegenwärtige Rolle spielt. Es handelt sich bei dieser Struktur um den Begriff eines *Diagramms* in (oder über) einer Kategorie.

Salopp gesagt ist ein Diagramm nichts anderes als eine „räumliche Anordnung“ von Objekten und Morphismen einer Kategorie. Wir werden sie in dieser Vorlesung ständig benutzen und ganze Tafeln damit füllen. Es ist nämlich so, dass die Funktoren der algebraischen Topologie nur mit einigem Aufwand zu berechnen sind, und diese Berechnung lässt sich fast nie direkt ausführen, sondern erfordert eine ganze Menge Detektivarbeit und eine Art „Spurensuche“ in vielen anderen Objekten, als den gerade zu berechnenden. Man bettet ein zu untersuchendes Objekt ein in ein kompliziertes Netz von bekannten Objekten und Morphismen und schließt aus den Beziehungen der

vielen Bildobjekte und Bildmorphismen zueinander und zum Bild des untersuchten Objekts, wie der Funktor darauf wirkt.

Diese Art von Untersuchung kann leicht sehr unübersichtlich werden, wenn man sich nicht eine Möglichkeit verschafft, alle beteiligten Objekte und Morphismen auf einmal zu überblicken und die Beziehungen zwischen ihnen sich klar und deutlich vor Augen zu führen. Das geschieht am Besten durch eine graphische und bildliche Erfassung dieser Beziehungen, also durch eine klar gegliederte, gedachte oder auf einem Blatt Papier oder auf der Tafel hingeschriebene räumliche Anordnung, und dazu dienen die Diagramme.

Ein Diagramm trägt zwei Informationsschichten, die sich von einander trennen lassen. Eine dieser Schichten besteht aus den Angaben der genauen Objekte und Morphismen, die am Diagramm beteiligt sind und deren Beziehung zueinander sie aufzeigt.

Die zweite Schicht, die die eigentliche Diagrammstruktur in sich trägt, besteht nur aus der Angabe der räumlichen Anordnung, in der diese Objekte und Morphismen zueinander stehen, ganz unabhängig davon, um welche speziellen Objekte und Morphismen es sich handelt. Diese zweite Schicht nennen wir die *Gestalt* oder das *Muster* des Diagramms und man kann sie hinzeichnen oder modellieren, in dem man im Diagramm alle Objekte durch Punkte und alle Morphismen durch Pfeile oder gerichtete Strecken vom Punkt am Quellort zum Punkt am Zielort ersetzt; diese Punkte und Pfeile kann man sich als Platzhalter für die eigentlichen Objekte und Morphismen denken, die deren logische Anordnung zueinander beschreiben.

Die Trennung dieser beiden Schichten wird es später erlauben, mehrere Diagramme mit dem gleichen Muster zu vergleichen und Abbildungen zwischen ihnen zu definieren. Dadurch werden wir zu jeder festen Gestalt eine entsprechende Kategorie der Diagramme dieser Gestalt erhalten.

Das mathematische Modell für ein solches System von Punkten und Pfeilen, das die Gestalt eines Diagramms beschreibt, ist ein *gerichteter Graph*. Wir wählen eine geringfügig eingeschränkte Definition des gerichteten Graphen, bei der es nicht erlaubt ist, dass mehrere Pfeile ein Punktpaar verbinden. Diese Definition ist einfacher zu formulieren, vermeidet technischen Ballast, und ist völlig ausreichend für unsere Zwecke:

**Definition 1.14** Ein *gerichteter Graph*  $\mathcal{G}$  ist ein Paar  $(E, K)$ , wo  $E$  eine Menge ist und  $K \subseteq E \times E$ . Die Elemente von  $E$  heißen **Knoten** oder **Eckpunkte** des Graphen  $\mathcal{G}$ , und die Elemente von  $K$  heißen seine (gerichteten) **Kanten**. Speziell nennen wir ein Element  $(x, y) \in K$  (wo  $x, y \in E$ ) eine **Kante von  $x$  nach  $y$** , und wir nennen  $x$  den **Anfangspunkt** oder **Ausgangspunkt** der Kante und  $y$  ihr **Endpunkt** oder **Zielpunkt**.

Bildlich kann man sich die Knoten als Punkte in der Ebene oder im Raum vorstellen, und eine Kante  $(x, y)$  als einen Pfeil vom Punkte  $x$  zum Punkte  $y$ , und man zeichnet Graphen auch genau so hin.

Es ist bequem,  $K$  als eine Teilmenge von  $E \times E$  zu wählen, aber der Preis dafür ist, dass zwischen zwei Punkten in einer gegebenen Richtung höchstens eine gerichtete Kante liegen kann; will man mehrere Kanten mit gleichen Endpunkten zulassen, so muss man  $K$  unabhängig von  $E$  wählen und die Kanten durch eine Abbildung  $K \rightarrow E \times E$  darstellen, was den Umgang mit Graphen verkomplizieren würde.

**Definition 1.15** Sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Ein **Pfad** in  $\mathcal{G}$  ist eine endliche Folge  $\kappa_1 := (x_0, x_1), \kappa_2 := (x_1, x_2), \dots, \kappa_n := (x_{n-1}, x_n)$  von Kanten von  $\mathcal{G}$ , so dass, wie hier angegeben, der Endpunkt jeder Kante  $\kappa_i$  in der Folge, bis auf die letzte, gleich dem Anfangspunkt der darauffolgenden Kante  $\kappa_{i+1}$  ist. (Wir sagen dazu, die Kanten *stoßen aneinander an*.) Wir nennen den Anfangspunkt  $x_0$  der ersten Kante  $\kappa_1$  im Pfad den **Anfangspunkt** oder **Ausgangspunkt des Pfades** und wir nennen den Endpunkt  $x_n$  der letzten Kante  $\kappa_n$  im Pfad den **Endpunkt** oder **Zielpunkt des Pfades**.

Graphen interessieren uns in dieser Vorlesung in erster Linie als *Muster für Systeme aus Objekten und Morphismen einer Kategorie*:

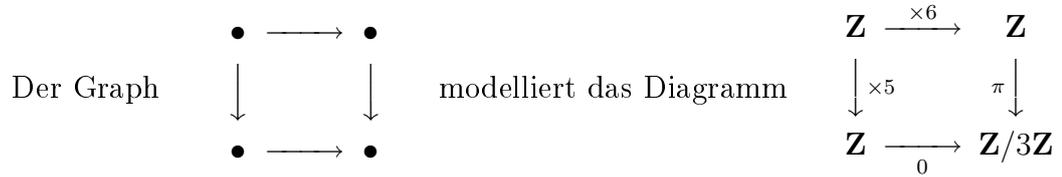
**Definition 1.16** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Ein **auf  $\mathcal{G}$  modelliertes Diagramm** oder ein **Diagramm von Gestalt  $\mathcal{G}$**  (oder kurz: ein  **$\mathcal{G}$ -Diagramm**) in  $\mathcal{K}$  besteht aus einer Abbildung  $P: E \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{K})$  und einer weiteren Abbildung

$$p: K \rightarrow \bigcup_{\substack{(A,B) \in \\ \text{Bild } P \times \text{Bild } P}} \text{Mor}(A, B),$$

so dass für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}$  gilt:  $p(x, y)$  ist ein Morphismus  $P(x) \rightarrow P(y)$ . Wir nennen  $\mathcal{G}$  das **Muster** oder die **Gestalt** des Diagramms  $(P, p)$ .

Die Abbildung  $P$  in dieser Definition ist nichts anderes als eine Belegung der Knoten von  $\mathcal{G}$  mit Objekten aus  $\mathcal{K}$ , und  $p$  ist nichts anderes als eine Belegung der gerichteten Kanten von  $\mathcal{G}$  mit Morphismen vom Anfangsobjekt zum Zielobjekt der Kante (bezüglich der Belegung  $P$ ). So wie in dieser Beschreibung schreibt man Diagramme auch hin:

**Beispiel 1.17** Hier ist ein einfaches Beispiel aus der Kategorie **AbGp**:



**Bemerkung 1.18** Man beachte, dass *Pfade* in Graphen so definiert wurden, dass in einem  $\mathcal{G}$ -Diagramm über einer Kategorie  $\mathcal{K}$  die Morphismen entlang eines Pfades in  $\mathcal{G}$  in der Kategorie verknüpft werden können. Genau dann, sogar, ist eine Folge von Kanten im Muster eines Diagramms ein Pfad, wenn die Verknüpfung der Morphismen, mit denen die Kanten belegt sind, in der Kategorie definiert ist.

Die verschiedenen Morphismen in einem Diagramm sind an und für sich ganz unabhängig voneinander und können beliebig gewählt werden. Aber Diagramme sind ja eigentlich ein Werkzeug, um Information über die darin enthaltenen Morphismen zu gewinnen, und zu diesem Zweck besteht in den praktischen Anwendungen von Diagrammen meistens doch folgende schöne Beziehung zwischen den Morphismen (oder man versucht sie einzurichten):

**Definition 1.19** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $D := (P, p)$  ein auf den Graphen  $\mathcal{G}$  modelliertes Diagramm über  $\mathcal{K}$ . Wir sagen, dass das Diagramm  $D$  *kommutiert*, oder wir nennen  $D$  ein *kommutatives Diagramm*, wenn für je zwei Pfade in  $\mathcal{G}$ , die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt haben, die Verknüpfung der Morphismen in  $D$  entlang dieser Pfade gleich ist.

Auch wenn ein Diagramm als Ganzes nicht kommutiert, können Teile davon oder bestimmte Pfade in  $\mathcal{G}$  kommutieren. Als Notation dafür ist es üblich, wenn die beiden Pfade im aufgezeichneten Diagramm ein Quadrat, Dreieck oder anderes „zusammenhängendes“ Gebiet umranden, in dieses Gebiet einen kreisförmigen Pfeil  $\circlearrowright$  zu schreiben.

*Beispiel.* Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Z} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbf{Z} \\
 \times 5 \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi \\
 \mathbf{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}
 \end{array}$$

aus Beispiel 1.17 ist offensichtlich kommutativ, wie man leicht nachrechnet.

Obwohl wir manchmal sehr komplizierte Diagramme verwenden werden, gibt es gewisse einfache Gestalten, die am häufigsten vorkommen und die deshalb eigene Namen haben:

**Definition 1.20** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie. Ein Diagramm  $D$  über  $\mathcal{K}$  heißt

a) eine **Folge**, wenn  $D$  eine der Gestalten

$$\dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

oder

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

oder

$$\dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

oder

$$\bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \bullet$$

hat. Dies ist einfach eine lineare Anordnung von Objekten und Morphismen.

In den ersten drei Fällen ist die Folge auf beiden Seiten oder nur nach einer Seite hin unendlich, und diese Diagramme nennen wir **lange Folgen**. Eine Folge kann aber auch wie im letzten Fall nur aus endlich vielen Objekten und Morphismen bestehen (die Bezeichnung *kurze Folge* wird aber für einen Spezialfall reserviert und wird nicht für alle endlichen Folgen verwendet);

b) ein **Quadrat**, wenn  $D$  die Gestalt 
$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$
 aus Beispiel 1.17 hat;

c) ein **Dreieck**, wenn  $D$  eine der Gestalten

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bullet & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \swarrow & \searrow \\ & \bullet & \end{array}$$

oder eine dazu äquivalente Gestalt hat (äquivalent in Bezug auf die Reihenfolge der Objekte und Morphismen).

Diagramme sind mehr als nur zufällig auftretende und für manche Zwecke nützliche Werkzeuge, oder schöne und leicht zu verstehende Darstellungen von Zusammenhängen innerhalb einer Kategorie. Wenn man die Gestalt festlegt, dann bilden die Diagramme dieser Gestalt selber die Objekte einer Kategorie (so dass wir später in der Lage sein werden, auch mit diagrammwertigen Funktoren zu arbeiten):

**Definition 1.21** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Wir gewinnen aus  $\mathcal{K}$  wie folgt eine neue Kategorie  $\mathcal{G}\text{-DK}$ , die Kategorie der  $\mathcal{G}$ -Diagramme über  $\mathcal{K}$ .

Die Objekte dieser Kategorie sind alle Diagramme  $D := (P, p)$  von Gestalt  $\mathcal{G}$  über  $\mathcal{K}$ .

Wenn  $D := (P, p)$  und  $C := (Q, q)$  zwei solche Diagramme sind ( $P$  und  $Q$  belegen die Knoten von  $\mathcal{G}$  mit Objekten aus  $\mathcal{K}$  und  $p$  und  $q$  belegen die Kanten zwischen den Knoten mit Morphismen zwischen den entsprechenden Objekten), so definieren wir einen Morphismus  $D \rightarrow C$  in  $\mathcal{G}\text{-DK}$  als eine Abbildung

$$\mu: E \longrightarrow \bigcup_{x \in E} \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P(x), Q(x)),$$

so dass für jeden Knoten  $x \in E$  gilt, dass  $\mu(x)$  ein  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $P(x) \rightarrow Q(x)$  ist, und so dass für jede Kante  $(x, y) \in K$  das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} P(x) & \xrightarrow{p(x,y)} & P(y) \\ \mu(x) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mu(y) \\ Q(x) & \xrightarrow{q(x,y)} & Q(y) \end{array} \quad (1.4)$$

kommutiert.

In anderen Worten, die Morphismen zwischen zwei Diagrammen in der Diagrammkategorie bestehen aus einer Familie von Morphismen der einfachen Kategorie jeweils zwischen den Objekten an gleicher Stelle in den beiden Diagrammen, so dass alle durch diese Morphismen und den Morphismen in den beiden Diagrammen gebildeten kleinen Quadrate kommutieren.

Sind  $B := (R, r)$ ,  $C := (Q, q)$  und  $D := (P, p)$  drei Diagramme mit Gestalt  $\mathcal{G}$  und sind  $\mu: D \rightarrow C$  und  $\nu: C \rightarrow B$  Morphismen von  $\mathcal{G}\text{-DK}$ , so definieren wir auf naheliegender Weise  $\nu \circ \mu: D \rightarrow B$  als die Zuordnung, die jedem Knoten  $x \in E$  den  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $\nu(x) \circ \mu(x): P(x) \rightarrow R(x)$  zuordnet.

Für ein Diagramm  $D := (P, p)$  definieren wir den Identitätsmorphismus  $\text{id}_D$  in  $\mathcal{G}\text{-DK}$  als die Zuordnung, die jedem Knoten  $x \in E$  die  $\mathcal{K}$ -Identität  $\text{id}_{P(x)}$  zuordnet.

Die so definierte Verknüpfung und die Identitätsmorphisme erfüllen offenbar die Bedingungen aus Definition 1.1 c) (die Kommutativität der durch die verknüpften Morphisme gebildeten kleinen Quadrate ist sehr leicht nachzuprüfen).

Gerade die durch einen Morphismus der Diagrammkategorie entstehenden kommutierenden Quadrate machen diagrammwertige Funktoren so nützlich, denn sie liefern sehr viel Information über die verschiedenen Morphisme, die in den Diagrammen und als Funktorwerte auftreten.

Eine weitere schöne Eigenschaft ist, dass jeder Funktor auf der Grundkategorie automatisch einen Funktor auf den entsprechenden Diagrammkategorien liefert:

**Definition 1.22** Sei  $\mathcal{G} := (E, K)$  ein gerichteter Graph. Sei

$$K^- := \{ (y, x) \mid (x, y) \in K \}.$$

Wir nennen  $\mathcal{G}^- := (E, K^-)$  den *umgekehrten* oder *umgerichteten* Graph zu  $\mathcal{G}$  (denn  $K^-$  besteht aus den Kanten von  $\mathcal{G}$  mit Anfangs- und Endpunkt vertauscht, also aus den „umgerichteten“ Kanten von  $\mathcal{G}$ ).

**Bemerkung und Definition 1.23** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und sei  $\mathcal{G} = (E, K)$  ein gerichteter Graph. Sei  $F$  ein kovarianter oder kontravarianter Funktor  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ .

Dann induziert  $F$  wie unten in a) beschrieben einen *Diagrammfunktor*

$$\mathcal{G}F: \begin{cases} \mathcal{G}\text{-DK} \rightarrow \mathcal{G}\text{-DL} & \text{wenn } F \text{ kovariant ist;} \\ \mathcal{G}\text{-DK} \rightarrow \mathcal{G}^-\text{-DL} & \text{wenn } F \text{ kontravariant ist,} \end{cases}$$

und  $\mathcal{G}F$  hat die gleiche Varianz, wie  $F$ .

a) Wenn  $D := (P, p)$  ein auf den Graphen  $\mathcal{G}$  modelliertes Diagramm über  $\mathcal{K}$  ist, so erhalten wir das Bilddiagramm  $\mathcal{G}F(D) =: (P', p')$ , in dem wir die Knoten von  $D$  und die Kanten von  $D$  (die ja Objekte bzw. Morphisme von  $\mathcal{K}$  sind) durch ihre Bilder unter  $F$  ersetzen. Das heißt,

i) für jeden Knoten  $x \in E$  von  $\mathcal{G}$  oder von  $\mathcal{G}^-$  (sie haben die gleichen Knoten) ist

$$P'(x) := F(P(x))$$

ii) wenn  $F$  kovariant ist, dann ist für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}$

$$p'(x, y) := F(p(x, y))$$

und dies ist tatsächlich ein  $\mathcal{L}$ -Morphismus  $F(P(x)) \longrightarrow F(P(y))$ . Wenn  $F$  kontravariant ist, dann ist für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}^-$  die Umkehrung  $(y, x)$  eine Kante von  $\mathcal{G}$  und  $p(y, x)$  ist ein  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $P(y) \longrightarrow P(x)$ . Wir setzen

$$p'(x, y) := F(p(y, x))$$

und dies ist tatsächlich ein  $\mathcal{L}$ -Morphismus  $F(P(x)) \longrightarrow F(P(y))$ , da  $F$  kontravariant ist.

- b) Wenn  $D$  ein *kommutatives* Diagramm ist, dann ist auch  $\mathcal{G}F(D)$  kommutativ (und wenn nur Teile von  $D$  kommutieren, dann kommutiert zumindest das Bild dieses Teils unter  $\mathcal{G}F$ ), denn die Kommutativitätsbedingung besagt nur, dass zwei verschiedene Verknüpfungen von Morphismen übereinstimmen. Wendet man  $F$  auf diese Verknüpfungen an, so gehen sie über in die Verknüpfungen der Bildmorphismen, in gleicher Reihenfolge wenn  $F$  kovariant ist, oder in umgekehrter Reihenfolge wenn  $F$  kontravariant ist.

Die Verknüpfungen waren vor der Abbildung mit  $F$  gleich, und gleiche Morphismen gehen unter  $F$  wieder in gleiche über, also gilt nach der Abbildung mit  $F$  wieder die Gleichheit der Verknüpfungen der Bildmorphismen, d. h., das Bilddiagramm (oder Teildiagramm) kommutiert auch.

- c) Hieraus folgt schließlich, dass  $\mathcal{G}F$  tatsächlich ein Funktor ist. In a) haben wir nur beschrieben, wie  $\mathcal{G}F$  auf Diagramme wirkt, also auf die Objekte der Diagrammkategorie.

Wenn  $D := (P, p)$  und  $C := (Q, q)$  zwei solche Objekte sind, so ist ein Morphismus  $\mu: D \longrightarrow C$  eine Abbildung, die jedem Knoten  $x \in E$  ein  $\mathcal{K}$ -Morphismus  $\mu(x): P(x) \longrightarrow Q(x)$  zuordnet, und wir definieren  $\mathcal{G}F(\mu)$  als die Abbildung  $\nu$  auf  $E$ , die jedem Knoten  $x$  den  $\mathcal{L}$ -Morphismus

$$F(\mu(x)): \begin{cases} F(P(x)) \longrightarrow F(Q(x)) & \text{im kovarianten Fall,} \\ F(Q(x)) \longrightarrow F(P(x)) & \text{im kontravarianten Fall} \end{cases}$$

zuordnet.

Damit  $\nu$  ein Morphismus von Diagrammen ist, muss es mit den Pfeilen vom Diagramm kommutieren, wie im Quadrat (1.4) in Definition 1.21 verlangt. Aber die Morphismen der Zuordnung  $\mu$  kommutieren mit den Morphismen entlang den Kanten des Diagramms  $D$  wie in (1.4), und

diese Kommutativität bleibt erhalten, wie wir gerade in b) gesehen haben, wenn wir alle Morphismen mit  $F$  abbilden, wie in der Definition von  $\mathcal{G}F$  festgelegt. Aus diesem Grund ist  $\nu$  tatsächlich ein Morphismus von Diagrammen, so dass  $\mathcal{G}F$  zumindest aus der richtigen Art von Zuordnungen besteht.

Man muss jetzt nur noch zeigen, dass  $\mathcal{G}F$  Verknüpfung von Diagrammmorphismen respektiert und Identitätsmorphismen wieder in Identitätsmorphismen abbildet, aber das ist aus der Definition klar.

**Notation 1.24** In Definition 1.23 haben wir den von  $F$  induzierten Diagrammfunktor  $\mathcal{G}F$  genannt, um eine Verwechslung mit  $F$  zu vermeiden, weil sonst die Definition kaum zu verstehen gewesen wäre. Diese Definition haben wir jetzt hoffentlich verstanden, und deshalb wollen wir uns in Zukunft die Bequemlichkeit erlauben, den Diagrammfunktor genauso zu benennen, wie der einfache Funktor, der ihn induziert. Aus dem Kontext wird immer klar sein, welche Variante des Funktors gemeint ist, so dass dies kaum zu Verwirrung führen kann.

Der Gedanke, der in der Definition der Morphismen einer Diagrammkategorie steckt, kann auf sehr ähnliche Weise und mit ähnlich nützlichen Auswirkungen benutzt werden, um so etwas wie einen „Morphismus zwischen Funktoren“ zu definieren. Diese „Morphismen zwischen Funktoren“ nennt man *natürliche Transformationen*, und sie bilden neben den Kategorien selber und den Funktoren den dritten wichtigen Grundbegriff der Kategorientheorie, den Begriff, den wir auf Seite 23 vor der Einführung der Diagramme angekündigt haben.

**Definition 1.25 (natürliche Transformation)** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und seien  $F$  und  $G$  zwei Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  von gleicher Varianz (also beide kovariant oder beide kontravariant).

Eine *natürliche Transformation*  $T: F \rightarrow G$  zwischen  $F$  und  $G$  ist eine auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  definierte Abbildung, die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  einen Morphismus  $T(A): F(A) \rightarrow G(A)$  der Kategorie  $\mathcal{L}$  zuordnet, so dass für jedes Paar  $A, B$  von Objekten von  $\mathcal{K}$  und für jeden Morphismus  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$  das der Varianz entsprechende folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ T(A) \downarrow & & \downarrow T(B) \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array} \quad (F \text{ und } G \text{ kovariant}),$$

bzw.

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xleftarrow{F(f)} & F(B) \\
 T(A) \downarrow & & \downarrow T(B) \\
 G(A) & \xleftarrow{G(f)} & G(B)
 \end{array} \quad (F \text{ und } G \text{ kontravariant}).$$

Nur aus technischen Gründen ist es nicht wirklich möglich, zu zwei gegebenen Kategorien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  eine Funktorkategorie zu definieren, deren Objekte die Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  sind. Da Funktoren auf der ganzen Objektklasse von  $\mathcal{K}$  definiert sind, sind sie im Allgemeinen Unmengen (also keine Mengen), und können daher nicht selber zu einer Klasse zusammengefasst werden, die die Objektklasse einer Kategorie wäre, mit den natürlichen Transformationen als Morphismen. Das ist nicht weiter schlimm, denn wir können zumindest festhalten, dass die natürlichen Transformationen, so wie sie in 1.25 definiert werden, die *Eigenschaften* 1.1 c) besitzen, die man von Morphismen verlangt:

**Lemma 1.26** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei Kategorien und seien  $F, G$  und  $H$  drei Funktoren gleicher Varianz  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ . Seien  $S: F \rightarrow G$  und  $T: G \rightarrow H$  natürliche Transformationen.

- a) Sei  $U$  die auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  definierte Abbildung, die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus  $T(A) \circ S(A): F(A) \rightarrow H(A)$  in  $\mathcal{L}$  zuordnet. Dann ist  $U$  eine natürliche Transformation  $F \rightarrow H$ ; wir nennen  $U$  die **Verknüpfung** der natürlichen Transformationen  $S$  und  $T$  und wir schreiben dafür  $U = T \circ S$ .

Die Verknüpfung von natürlichen Transformationen erfüllt das Assoziativgesetz.

- b) Die Abbildung auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus  $\text{id}_{G(A)}$  in  $\mathcal{L}$  zuordnet, ist eine natürliche Transformation  $G \rightarrow G$ , die wir die **identische Transformation** von  $G$  nennen und mit  $\text{id}_G$  bezeichnen. Für sie gilt

$$\text{id}_G \circ S = S \quad \text{und} \quad T \circ \text{id}_G = T$$

für jede Wahl der natürlichen Transformationen  $S$  und  $T$  ( $\text{id}_G$  benimmt sich also wie eine Identität).

*Beweis.* a) Nachzuprüfen ist nur die Kommutativität des für  $U$  und den Funktoren  $F$  und  $H$  passenden Diagramms aus Definition 1.25.

Im kovarianten Fall ist also zu zeigen, dass  $U(B) \circ F(f) = G(f) \circ U(A)$ . Wir haben

$$S(B) \circ F(f) = G(f) \circ S(A), \quad (1.5)$$

weil  $S$  eine natürliche Transformation ist, und

$$T(B) \circ G(f) = H(f) \circ T(A), \quad (1.6)$$

weil  $T$  eine natürliche Transformation ist. Also ist

$$\begin{aligned} U(B) \circ F(f) &= T(B) \circ S(B) \circ F(f) \\ &\stackrel{(1.5)}{=} T(B) \circ G(f) \circ S(A) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} H(f) \circ T(A) \circ S(A) \\ &= H(f) \circ U(A) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Den Beweis für den kontravarianten Fall erhält man wörtlich, wenn man in den Gleichungen  $A$  und  $B$  vertauscht. (Im Diagramm hat das die Wirkung, das Diagramm zu spiegeln und die waagerechten Pfeile umzukehren. Die Spiegelung wirkt sich nur optisch aus; inhaltlich ändert sich nur durch die Umkehrung der Pfeile etwas, und zwar wie verlangt die Varianz der Funktoren. Der Morphismus  $f$  geht nach wie vor von  $A$  nach  $B$ .)

Dass die Verknüpfung von natürlichen Transformationen assoziativ ist, ist sofort klar, denn es werden dabei nur die Morphismen verknüpft, die die natürliche Transformation jedem Objekt zuordnet, und die Verknüpfung von Morphismen ist nach Definition 1.1 c) i) assoziativ.

b) ist trivial. ■

Wenn  $\mathcal{K}$  eine kleine Kategorie ist, dann kann man tatsächlich eine Kategorie  $\mathbf{Funkt}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  definieren, deren Objekte die Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  sind und deren Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen diesen Funktoren sind; die erforderlichen Eigenschaften folgen sofort aus dem Lemma. Darauf wollen wir nicht weiter eingehen.

**Beispiel 1.27** Sei  $K$  ein Körper und sei  $\mathcal{K} := \mathbf{VR}^2$  die Kategorie der Paare von  $K$ -Vektorräumen und Untervektorräumen; d. h., wenn  $(V, W)$  ein Objekt von  $\mathcal{K}$  ist, dann ist  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $W$  ist ein Untervektorraum von  $V$ . Sei  $\mathcal{L} := \mathbf{VR}$  die Kategorie der Vektorräume über  $K$ .

Wir haben den vergesslichen Funktor  $P_1: \mathbf{VR}^2 \rightarrow \mathbf{VR}$ , der jedem Vektorraumpaar  $(V, W)$  den oberen Vektorraum  $V$  zuordnet und jedem Morphismus  $f$  von Vektorraumpaaren den gleichen Morphismus zuordnet, aber aufgefasst als eine lineare Abbildung der oberen Vektorräume.

In Beispiel 1.13 h) hatten wir den Quotientenfunktor  $Q: \mathbf{VR}^2 \rightarrow \mathbf{VR}$  definiert, der jedem Vektorraumpaar  $(V, W)$  den Quotientenraum  $V/W$  zuordnet und jedem Morphismus  $f: (V, W) \rightarrow (V', W')$  von Vektorraumpaa- ren die induzierte lineare Abbildung  $\bar{f}: V/W \rightarrow V'/W'$  zuordnet.

Für jedes Vektorraumpaar  $(V, W)$  ist die Projektion  $\pi: V \rightarrow V/W$  eine „kanonisch definierte“ lineare Abbildung (was immer das heißen mag; siehe dazu Bemerkung 1.28 unten). Diese Projektion ist eine natürliche Transformation  $\pi: P_1 \rightarrow Q$ , denn für jede lineare Abbildung von Vektorraumpaa- ren  $f: (V, W) \rightarrow (V', W')$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\bar{f}} & V'/W' \end{array}$$

**Bemerkung 1.28 („natürlich“)** Eine sehr geläufige Redewendung in der Mathematik behauptet, dass es eine *natürlich definierte* Struktur einer gewissen Art gibt, oder eine *natürliche* Konstruktion eines gewissen Objekts, oder zu gewissen Daten eine *natürliche* Abbildung mit gewissen Eigenschaften, oder man spricht auch von *kanonischen* oder *kanonisch definierten* Objekten oder Abbildungen, die man aus gewissen Angaben gewinnt. Zunächst interpretiert man diese Ausdrücke ganz naiv, etwa in dem Sinne, dass diese Konstruktionen sich „wie von selbst“ anbieten, oder dass sie geradlinig definiert sind, oder dass einem einfach keine andere Möglichkeit einfallen kann, wie die vorgegebene, so etwas zu konstruieren oder zu definieren.

Vorsicht! Sie müssten eigentlich bis jetzt bemerkt haben, dass Mathematiker im Allgemeinen nicht schwätzen und sich immer möglichst präzise ausdrücken, und das ist auch hier der Fall (nur konnten Sie bisher die Bedeutung dieses Sprachgebrauchs noch nicht würdigen). Die Wörter *natürlich* und *kanonisch* (wörtlich: *gesetzmäßig*) haben in diesen Ausdrücken eine genaue technische Bedeutung, nämlich die, dass es sich bei der angegebenen Konstruktion je nach den Gegebenheiten entweder um einen *Funktor* handelt (wenn Objekte, oder Morphismen *und* Objekte konstruiert werden) oder um eine *natürliche Transformation* (wenn zwischen vorher schon bekannten Objekten einer bestimmten Art nur ein Morphismus konstruiert wird).

Das „kanonische“ daran ist eben die Einhaltung der Gesetze, denen Funktoren und natürliche Transformationen unterliegen, die Verträglichkeit mit Verknüpfungen bzw. die Kommutativität mit den als Funktorwerte auftretenden Morphismen der Zielkategorie.

So gibt es zu jedem Paar bestehend aus einem Vektorraum  $V$  und einem Untervektorraum  $W$  die *natürliche* Konstruktion des Quotientenrau-

mes, mit der Angabe, dass lineare Abbildungen von Vektorraumpaaren eine *kanonische* lineare Abbildung zwischen den Quotientenräumen induzieren; hier handelt es sich um den in Beispiel 1.27 erwähnten Quotientenfunktor  $\mathbf{VR}^2 \rightarrow \mathbf{VR}$ . Und es gibt für jedes Vektorraumpaar  $(V, W)$  eine *natürliche* lineare Projektion  $\pi: V \rightarrow V/W$ ; hier wird nur ein Morphismus konstruiert und es handelt sich um die natürliche Transformation, die in Beispiel 1.27 präsentiert wird.

Wann immer wir in Zukunft von „natürlichen“ Objekten oder Morphismen reden, werden wir das mit der hier erklärten technischen Bedeutung meinen, und daraus können Sie selbstverständlich Rückschlüsse ziehen, die man auch in Beweisen verwenden kann, denn Funktoren und natürliche Transformationen erfüllen ja gewisse feste nützliche Eigenschaften.

Mit einem Funktor kann man eine natürliche Transformation in eine neue Kategorie übertragen:

**Lemma 1.29** *Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien, seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  und sei  $T: F \rightarrow G$  eine natürliche Transformation.*

*Sei  $H$  ein Funktor beliebiger Varianz  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ . Wir definieren auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  eine Zuordnung  $S$ , die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus*

$$H(T(A)): H(F(A)) \rightarrow H(G(A))$$

*von  $\mathcal{M}$  zuordnet (bzw.  $H(G(A)) \rightarrow H(F(A))$ ), wenn  $H$  kontravariant ist).*

*Dann ist  $S$  eine natürliche Transformation  $H \circ F \rightarrow H \circ G$ , wenn  $H$  kovariant ist, oder  $H \circ G \rightarrow H \circ F$ , wenn  $H$  kontravariant ist.*

*Wir nennen  $S$  die **Verknüpfung des Funktors  $H$  mit der natürlichen Transformation  $T$** , und schreiben dafür  $H \circ T$ .*

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass für  $S$  und den Funktoren  $H \circ F$  und  $H \circ G$  das der Varianz dieser Funktoren entsprechende Diagramm aus Definition 1.25 kommutiert. Aber für die natürliche Transformation  $T$  und den ursprünglichen Funktoren  $F$  und  $G$  kommutiert dieses Diagramm für jedes Paar von Objekten von  $\mathcal{K}$ , und das neue Diagramm entsteht daraus durch Anwendung des Funktors  $H$ , also kommutiert es auch nach Bemerkung 1.23 b). ■

Jede natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren lässt sich auf einfache Weise erweitern zu einer natürlichen Transformation zwischen den entsprechenden Diagrammfunktoren für Diagramme einer festen Gestalt, definiert in Definition 1.23:

**Lemma 1.30** *Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und sei  $\mathcal{G} = (E, K)$  ein gerichteter Graph. Seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  und sei  $T: F \rightarrow G$  eine natürliche Transformation.*

Die Funktoren  $F$  und  $G$  induzieren Funktoren  $\mathcal{G}F$  und  $\mathcal{G}G$  zwischen den Diagrammkategorien  $\mathcal{G}\text{-DK} \rightarrow \mathcal{G}\text{-DL}$ .

Wir definieren eine Zuordnung  $\mathcal{G}T$ , die jedem Diagramm  $D := (P, p)$  von Gestalt  $\mathcal{G}$  über  $\mathcal{K}$  den Diagrammmorphismus  $\mu$  von  $\mathcal{G}\text{-DL}$  zuordnet, der an jedem Knoten  $x \in E$  gegeben ist durch

$$\mu(x) := T(P(x)) : F(P(x)) \rightarrow G(P(x)).$$

Das so definierte  $\mathcal{G}T$  ist eine natürliche Transformation  $\mathcal{G}F \rightarrow \mathcal{G}G$ .

*Beweis.* Zunächst ist  $\mu$  tatsächlich ein Diagrammmorphismus, denn für jede Kante  $(x, y)$  von  $\mathcal{G}$  kommutiert (im kovarianten Fall) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(P(x)) & \xrightarrow{F(p(x,y))} & F(P(y)) \\ T(P(x)=\mu(x)) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mu(y)=T(P(y)) \\ G(P(x)) & \xrightarrow{G(p(x,y))} & G(P(y)) \end{array}$$

weil  $T$  eine natürliche Transformation ist (im kontravarianten Fall gilt der gleiche Schluss; der einzige Unterschied besteht darin, dass die waagerechten Pfeile im Diagramm von rechts nach links gehen).

Wir müssen noch zeigen, dass  $\mathcal{G}T$  wie in Definition 1.25 mit den Bildern eines Diagrammmorphismus unter  $F$  und  $G$  kommutiert. Sei also  $C := (Q, q)$  ein weiteres  $\mathcal{G}$ -Diagramm und  $\nu : D \rightarrow C$  ein Diagrammmorphismus. Wir gehen wieder vom kovarianten Fall aus, aber der Beweis im kontravarianten Fall geht genauso. Zu zeigen ist, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(D) & \xrightarrow{F(\nu)} & F(C) \\ \mathcal{G}T(D) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}T(C) \\ G(D) & \xrightarrow{G(\nu)} & G(C) \end{array}$$

von Diagrammmorphismen kommutiert, und dazu reicht es, für jeden Knoten  $x$  von  $\mathcal{G}$  die Kommutativität des entsprechenden Diagramms nachzuweisen, das zwischen den an diesem Knoten sitzenden Objekten entsteht:

$$\begin{array}{ccc} F(P(x)) & \xrightarrow{F(\nu(x))} & F(Q(x)) \\ T(P(x)) \downarrow & & \downarrow T(Q(x)) \\ G(P(x)) & \xrightarrow{G(\nu(x))} & G(Q(x)) \end{array}$$

Dies aber folgt wieder sofort aus der Tatsache, dass  $T$  eine natürliche Transformation  $F \rightarrow G$  ist. ■

Wir beenden diese Einführung in die Kategorientheorie mit der kategorientheoretischen Beschreibung, wann verschiedene Objekte einer Kategorie, oder wann verschiedene Funktoren von einer Kategorie in eine andere „gleich aussehen“ oder die „gleiche Struktur“ haben.

Der Begriff, den wir brauchen, ist Ihnen ja in vielen speziellen Kategorien schon bekannt, unter Namen wie „Isomorphismus“, „Homöomorphismus“ und so weiter.

**Definition 1.31** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und seien  $A$  und  $B$  Objekte von  $\mathcal{K}$  und  $f: A \rightarrow B$  ein Morphismus. Durch Verknüpfung mit  $f$  erhalten wir mengentheoretische Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda_f: \text{Mor}(C, A) &\longrightarrow \text{Mor}(C, B) \\ h &\longmapsto f \circ h \end{aligned}$$

für jedes Objekt  $C$  von  $\mathcal{K}$  und

$$\begin{aligned} \rho_f: \text{Mor}(B, D) &\longrightarrow \text{Mor}(A, D) \\ k &\longmapsto k \circ f \end{aligned}$$

für jedes Objekt  $D$  von  $\mathcal{K}$ . (Der Name  $\lambda$  benennt die Verknüpfung mit  $f$  von *links*, der Name  $\rho$  die Verknüpfung mit  $f$  von *rechts*.)

Wir nennen  $f$  einen

**Monomorphismus**, wenn  $\lambda_f$  für jede Wahl des Objekts  $C$  injektiv ist;

**Epimorphismus**, wenn  $\rho_f$  für jede Wahl des Objekts  $D$  injektiv ist;

**Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus  $g: B \rightarrow A$  gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_B. \quad (1.8)$$

Einen solchen Morphismus  $g$  nennen wir einen **Umkehrmorphimus** oder einen **inversen Morphismus** zu  $f$ , und wir notieren ihn oft mit  $f^{-1}$ .

Wichtig ist für uns hauptsächlich der Begriff des *Isomorphismus* in einer beliebigen Kategorie, dessen Definition Ihnen bekannt vorkommen sollte, da die Isomorphismen, die Sie schon kennen, in der Regel genau so definiert wurden. Die Definitionen von Monomorphismus und Epimorphismus sehen etwas seltsam aus, aber von Injektivität oder Surjektivität der Morphismen dürfen wir ja gar nicht sprechen, da Morphismen nicht unbedingt Abbildungen sind!

**Bemerkung 1.32** a) Wenn  $f: A \longrightarrow B$  ein Morphismus ist, der ein Linksinverses  $g: B \longrightarrow A$  und ein (vielleicht von  $g$  verschiedenes) Rechtsinverses  $g': B \longrightarrow A$  besitzt (also  $g \circ f = \text{id}_A$  und  $f \circ g' = \text{id}_B$ ), dann ist tatsächlich  $g = g'$  und  $f$  ist somit ein Isomorphismus mit dem Umkehrmorphismus  $g (= g')$ . Denn es gilt

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'.$$

- b) Wenn  $f: A \longrightarrow B$  ein Isomorphismus ist, dann ist der Umkehrmorphismus  $g$  eindeutig bestimmt, denn zwei verschiedene Umkehrmorphisme wären insbesondere ein Linksinverses und ein Rechtsinverses wie in Teil a). Diese Tatsache rechtfertigt die Verwendung einer festen Notation  $f^{-1}$  für den (ja eindeutigen) Umkehrmorphismus zu  $f$ .
- c) Für jedes Objekt  $A$  ist die Identität  $\text{id}_A$  offenbar ein Isomorphismus mit sich selber als Umkehrmorphismus.
- d) Wenn  $f$  ein Isomorphismus ist mit Umkehrmorphismus  $g$ , dann folgt aus Gleichung (1.8) auch, dass  $g$  ein Isomorphismus ist mit Umkehrmorphismus  $f$ .
- e) Seien  $f: A \longrightarrow B$  und  $h: B \longrightarrow C$  Morphismen. Wenn  $f$  und  $h$  Isomorphismen sind, dann ist auch  $h \circ f$  ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus  $f^{-1} \circ h^{-1}$ , wie man sofort nachrechnen kann.
- f) Seien  $f: A \longrightarrow B$  und  $h: B \longrightarrow C$  Morphismen, so dass  $h \circ f$  ein Isomorphismus ist, und so dass  $h$  oder  $f$  ein Isomorphismus ist. Dann sind  $h$  und  $f$  beide Isomorphismen.

Denn wenn  $f$  ein Isomorphismus ist, ist  $f^{-1}$  nach Teil d) ein Isomorphismus, also ist nach Teil e) auch  $(h \circ f) \circ f^{-1} = h$  ein Isomorphismus. Und wenn  $h$  ein Isomorphismus ist, ist  $h^{-1}$  nach Teil d) ein Isomorphismus, also nach Teil e) auch  $h^{-1} \circ (h \circ f) = f$ .

- g) Jeder Isomorphismus  $f$  ist immer ein Monomorphismus und ein Epimorphismus, denn

$$\lambda_{f^{-1}} \circ \lambda_f = \lambda_{\text{id}_A} = \text{id}_{\text{Mor}(A,A)},$$

also ist  $\lambda_f$  injektiv, und

$$\rho_{f^{-1}} \circ \rho_f = \rho_{\text{id}_B} = \text{id}_{\text{Mor}(B,B)},$$

also ist  $\rho_f$  injektiv.

**Definition 1.33** Sei  $\mathcal{K}$  eine Kategorie und seien  $A$  und  $B$  Objekte von  $\mathcal{K}$ . Wir sagen  $A$  ist *isomorph* zu  $B$  in der Kategorie  $\mathcal{K}$ , und wir schreiben  $A \cong B$  oder wo nötig zur Deutlichkeit  $A \cong_{\mathcal{K}} B$ , wenn es einen Isomorphismus  $f \in \text{Mor}(A, B)$  gibt.

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ , denn Bemerkung 1.32 c) zeigt, dass die Relation  $\cong$  reflexiv ist, 1.32 d) zeigt, dass sie symmetrisch ist, und 1.32 e) zeigt, dass sie transitiv ist.

**Lemma 1.34** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und sei  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  ein kovarianter oder kontravarianter Funktor. Seien  $A$  und  $B$  Objekte von  $\mathcal{K}$  und  $f: A \rightarrow B$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{K}$ . Dann ist  $F(f)$  ein Isomorphismus mit  $F(f^{-1})$  als seinen Umkehrmorphismus.

*Insbesondere gehen isomorphe Objekte unter jedem Funktor wieder in isomorphe Objekte über, und Isomorphie bleibt unter der Anwendung von Funktoren erhalten.*

*Beweis.* Wenn  $F$  kovariant ist haben wir

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

und

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

Wenn  $F$  kontravariant ist haben wir

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

und

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

■

Isomorphie haben Sie schon in vielen Situationen kennengelernt, in der Vektorraumtheorie, in der Gruppentheorie, in der Topologie (unter dem Namen Homöomorphie), und so ziemlich in jedem anderen Gebiet der Mathematik. In der Kategorientheorie kann man eine einzige Definition davon angeben, die für alle Kategorien passt und die das Wiederholen dieser Definition für jede neue Struktur, die man kennen lernt, überflüssig macht.

Ähnliches gilt für viele andere bekannte strukturelle Begriffe der Mathematik, für den Begriff eines Unterobjekts, eines Quotienten, eines Produkts oder einer Summe von Objekten. Diese Begriffe lassen sich charakterisieren

durch allgemeine kategorientheoretische Eigenschaften, die oft die Gestalt haben, dass es Morphismen mit gewissen Eigenschaften gibt, oder Morphismen gibt, die sich immer durch weitere zu einem kommutativen Diagramm ergänzen lassen. Allerdings würde es uns zu weit vom Thema abbringen, wenn wir in die Details dieser Konstruktionen eingehen. Wir benötigen zwar diese Begriffe, aber nur in Kategorien, in denen wir sie schon kennen, nämlich in den algebraischen und topologischen Kategorien. In neuen Varianten dieser Kategorien (z.B., in  $\mathbf{Top}^2$  oder in  $\mathbf{Top}_*$ ) werden wir die nötigen Anpassungen dieser Begriffe direkt definieren, weil das einfacher sein wird, als die Auswirkung der recht abstrakten kategorietheoretischen Definitionen in der jeweiligen Situation zu verstehen.

Der Isomorphiebegriff aber ist so wichtig, dass wir ihn hier noch in Verbindung mit natürlichen Transformationen betrachten wollen:

**Definition 1.35** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Kategorien und seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ . Wir nennen eine natürliche Transformation  $T: F \rightarrow G$  eine *natürliche Äquivalenz*, wenn für jedes Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  gilt, dass  $T(A): F(A) \rightarrow G(A)$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{L}$  ist.

In diesem Fall kann man auf  $\text{Ob}(\mathcal{K})$  eine Abbildung  $S$  definieren, die jedem Objekt  $A$  von  $\mathcal{K}$  den Morphismus  $T(A)^{-1}: G(A) \rightarrow F(A)$  zuordnet.

Man kann sehr leicht nachprüfen, dass auch  $S$  eine natürliche Transformation (und wegen Bemerkung 1.32 d) sogar eine natürliche Äquivalenz) ist:

Sei  $f: A \rightarrow B$  ein Morphismus von  $\mathcal{K}$ . Im kovarianten Fall folgt aus  $T(B) \circ F(f) = G(f) \circ T(A)$ , dass

$$S(B) \circ T(B) \circ F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f) \circ T(A) \circ S(A),$$

d. h.,

$$T(B)^{-1} \circ T(B) \circ F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f) \circ T(A) \circ T(A)^{-1},$$

woraus folgt

$$F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f),$$

was zu zeigen ist.

Der Beweis im kontravarianten Fall geht genauso.

Für die natürliche Transformation  $S$  gilt offensichtlich  $S \circ T = \text{id}_F$  und  $T \circ S = \text{id}_G$ . Wir nennen  $S$  die *Umkehrtransformation* oder die *inverse Transformation* zu  $T$  und schreiben dafür  $T^{-1}$ .

So wie die natürlichen Transformationen die „Morphismen“ der gedachten Funktorkategorie sind, sind die natürlichen Äquivalenzen ihre „Isomorphismen“. Natürlich äquivalente Funktoren haben im wesentlichen die gleiche Struktur, auch wenn sie nicht im Detail gleich sind, und sie bilden jedes Objekt ihrer Quellkategorie immer in zueinander isomorphe Objekte der Zielkategorie ab.

**Lemma 1.36** *Seien  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  Kategorien, seien  $F$  und  $G$  gleichvariante Funktoren  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  und sei  $T: F \rightarrow G$  eine natürliche Äquivalenz mit Umkehrtransformation  $S: G \rightarrow F$ .*

*Sei  $H$  ein Funktor beliebiger Varianz  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ . Dann ist die natürliche Transformation  $H \circ T$  (definiert in Lemma 1.29) auch eine natürliche Äquivalenz, mit  $H \circ S$  als Umkehrtransformation.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus Lemma 1.34 und der Definition von  $H \circ T$ . ■



# Kapitel 2

## Singuläre Homologie

In der Sprache von Kapitel 1 besteht die algebraische Topologie aus der Konstruktion und Untersuchung von Funktoren von  $\mathbf{Top}$ ,  $\mathbf{Top}^2$  oder  $\mathbf{Top}_*$  in eine algebraische Kategorie wie  $\mathbf{Gp}$ ,  $\mathbf{AbGp}$  oder  $\mathbf{Ring}$ . Dafür kennen wir bisher aus dem vergangenen Semester nur ein einfaches Beispiel, nämlich die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes, also den Funktor  $\pi_1$ . Aus Zeitgründen haben wir auch beschlossen, die weiteren „höheren“ Homotopiegruppen nicht mehr zu behandeln.

In diesem Kapitel wollen wir eine neue Art von algebraischen Funktoren für topologische Räume einführen, die *Homologiegruppen*, die nach ganz anderen Ideen und auf ganz andere Weise aufgebaut werden, als die Homotopiegruppen.

Die Konstruktion der Homologie geschieht in zwei Stufen, mit einem Zwischenstadium gegeben durch strukturreiche algebraische Objekte, die *Kettenkomplexe* heißen. Die erste Stufe der Konstruktion übersetzt die Geometrie auf recht geradlinige Weise in Kettenkomplexe (hierfür gibt es sowohl innerhalb der Topologie wie auch in anderen Gebieten der Mathematik ein großes Arsenal an Möglichkeiten), während die zweite Stufe auf eine einheitliche Weise aus den Kettenkomplexen die Homologiegruppen gewinnt.

Man könnte naiv fragen, wenn sowohl die Kettenkomplexe wie auch die Homologiegruppen die Geometrie algebraisch erfassen, warum die zweite Stufe überhaupt nötig ist, d. h., warum man nicht einfach auf der Stufe der Kettenkomplexe bleibt und dort weiterarbeitet. Abgesehen davon, dass die Homologie eine etwas einfachere Struktur hat als die Kettenkomplexe, liegt der entscheidende Grund in der Tatsache, dass die Homologiegruppen wohldefinierte Invarianten der topologischen Struktur und noch genauer, des Homotopietyps sind, was für die Kettenkomplexe keinesfalls zutrifft.

Die Kettenkomplexe haben eher die Rolle eines Baugerüsts für die Errichtung der Homologie. Als mathematische „Architekten“ der Homologie haben

wir den Entwurf des fertigen Gebäudes im Sinn, schreiben aber nicht unbedingt vor, welches passende Baugerüst der Konstrukteur verwenden oder für zweckmäßig halten soll, um die Konstruktion möglichst bequem ausführen zu können. So werden wir später verschiedene günstige und der Situation angepasste Möglichkeiten besprechen, um aus der Geometrie Kettenkomplexe zu gewinnen.

Obwohl wir unsere detaillierte Konstruktion der Homologie mit jeder der beiden Stufen beginnen könnten, und es wegen ihres einheitlichen Aufbaus vielleicht sogar eleganter wäre, die zweite Stufe zuerst zu besprechen, lässt die Untersuchung von Kettenkomplexen sich leichter motivieren, wenn man schon ein Beispiel parat hat. Wir beginnen deshalb doch mit der ersten Stufe und mit einer Kettenkomplexkonstruktion, die den Vorteil hat, ohne spezielle Voraussetzungen oder Hilfsstrukturen auf den topologischen Räumen auszukommen.

Es handelt sich um den so genannten *singulären Kettenkomplex* eines topologischen Raumes, und wir wollen zunächst beschreiben und motivieren, welche Gedanken hinter dieser Konstruktion stecken, bevor wir die Details nennen.

Während die Homotopiegruppen geometrische Merkmale eines Raumes als Hindernisse zur Homotopie von Schleifen sichtbar machen (die nichttrivialen Elemente der Homotopiegruppen sind gerade die Homotopieklassen von nicht nullhomotopen Schleifen), und während sie somit geometrische Besonderheiten praktisch mit einem Lasso einfangen, versucht die Homologie, den Raum „auszukacheln“ mit einfachen Standardbausteinen, und geometrische Besonderheiten daran sichtbar zu machen, dass es in dem Raum geschlossene Hüllen gibt, die nicht mit den Standardbausteinen aufgefüllt oder ausgekacheln werden können, weil keine endliche Kachelung diese Hülle als ihr Rand hat.

Das ist, erst einmal sehr vague und schemenhaft beschrieben, die Grundidee der Homologietheorie, und es gibt, wie schon erwähnt, viele verschiedene Möglichkeiten, diese Idee auszuführen, ganz ähnlich zu der Tatsache, dass es viele verschiedene Möglichkeiten gibt, einen Fußboden auszulegen.

Man kann dabei sehr präzise geformte möglichst einfache Standardbausteine passgenau aneinander fügen, wie das bei einem Parkettboden der Fall ist. Der Vorteil ist eine regelmäßige und leicht erfassbare Struktur, die aber sehr starr ist, so dass der Bodenbelag sich nicht immer gut an die Raumform anschmiegt und diese Methode nicht geeignet ist für sehr exotisch geformte Räume. Wenn man nicht allzu großen Wert auf saubere Handwerksarbeit legt, kann man auch kleine Teppiche und Strohmatten und dergleichen überall in den Raum streuen, bis der ganze Fußboden bedeckt ist. Obwohl sich dann kein sehr übersichtliches Muster ergibt, passt sich diese Methode leicht

an jede Raumform an. Und schließlich, wenn man sich möglichst wenig Arbeit machen will, kann man auch Fertigparkett oder gemustertes Linoleum legen, bei dem kleine Bausteine schon zu größeren vorgefertigten Platten zusammengefügt sind, von denen man nur wenige braucht, um den Raum schnell und mühelos auszulegen.

Auch die Homologietheorie versucht möglichst einfache Bausteine zu verwenden, die deshalb **Simplizes** genannt werden. Die Simplizes, die in den topologischen Raum gelegt werden, sind Kopien eines Musterstücks, des so genannten **Standardsimplexes** in jeder Dimension, aber es gibt verschiedene Forderungen, die man an die Genauigkeit der Kopien und die Genauigkeit der Auslegung stellen kann.

In einer Variante der Homologietheorie werden (wie bei einem Parkettboden) sehr genaue Bausteine verwendet, nämlich affine Kopien des Standardsimplexes, und sie werden sehr präzise aneinander gefügt, nämlich so, dass die sich berührenden Seiten zweier aneinander grenzender Simplizes genau deckungsgleich sind. Die so entstehenden Gebilde heißen **Simplizialkomplexe** und die mit ihnen konstruierte Homologie heißt die **simpliziale Homologie**. Der präzise Aufbau führt zu kleinen und überschaubaren Kettenkomplexen und ermöglicht deshalb eine sehr einfache Berechnung der Homologiegruppen unter effizienter Verwendung algebraischer Erzeugenden. Dafür muss man aber einen Preis bezahlen, denn die genaue simpliziale Struktur geht wesentlich in die Berechnung ein, und diese simpliziale Struktur ist ein künstlicher Zusatz zur topologischen Struktur, die man eigentlich untersuchen will. Man muss also mühsam zeigen, dass die simplizialen Homologiegruppen nur von der topologischen Struktur und nicht von der Wahl der simplizialen Zerlegung des Raumes abhängen. Außerdem ist die simpliziale Homologie nur definiert für Räume, die eine simpliziale Zerlegung besitzen, und das sind leider nicht alle (die Ausnahmen sind allerdings exotisch).

Die von uns bevorzugte Methode, die Homologiegruppen zu konstruieren, stellt im Gegensatz zur simplizialen Methode nur minimale Anforderung an die verwendeten Kopien des Standardsimplexes und an die Art, wie diese Kopien zusammengefügt werden. In der Analogie oben entspricht sie der unordentlichen Ausstreuung von sich überlappenden Teppichen und Strohmatten. Als Bausteine werden Bilder des Standardsimplexes unter beliebigen *stetigen* Abbildungen zugelassen, und sie dürfen beliebig im Raum verteilt sein. Nicht nur dürfen die Bildsimplizes sich überlappen oder ganz krumm zueinander liegen, es müssen die stetigen Abbildungen des Standardsimplexes, die die Bausteine ergeben, noch nicht einmal injektiv sein, sie können sogar völlig ausarten und konstant werden. Deshalb heißt diese Variante der Homologietheorie die **singuläre Homologie**. Weil man relativ frei geformte Bausteine frei zusammenbauen darf, ist die Ausgangssituation der singulären Homologie

unhandlicher und komplizierter als bei den anderen Versionen, aber das ist der einzige, leicht zu verschmerzende Nachteil, denn weil dem topologischen Raum keine zusätzliche Struktur aufgeprägt werden muss als Fundament für die singuläre Homologie, liefert sie direkt und unmittelbar einen Funktor auf **Top**, der für alle topologische Räume definiert ist und schon in seiner Definition nur von der topologischen Struktur abhängt. Die verloren gegangene direkte und einfache Berechenbarkeit der Homologiegruppen, die die simpliziale Theorie bietet, wird kompensiert durch leistungsfähige algebraische Werkzeuge, mit denen man die Homologie immer noch bequem berechnen kann.

Und schließlich kann man, nach der Entwicklung der Grundzüge der Homologietheorie, für geeignete Räume noch eine dritte und vereinfachte Variante, ähnlich dem Fertigparkett, herleiten, bei der von einer Aufteilung des Raumes in geeignet zusammengeklebte Bälle verschiedener Dimensionen ausgegangen wird (die man **Zellen** nennt), und bei der man die Homologiegruppen direkt aus dieser Zellenzerlegung ohne die Betrachtung von einzelnen Simplizes oft direkt hinschreiben kann. Der Vorteil dieser **zellulären Homologie** liegt darin, dass in die Konstruktion eine sehr viel kleinere Anzahl von Grundbausteinen eingeht, als bei der simplizialen oder singulären Homologie, so dass man es auch in der Zwischenstufe der Kettenkomplexe mit kleinen und überschaubaren Gruppen zu tun hat, während in der singulären Homologie die in den Kettenkomplexen auftretenden Gruppen noch nicht einmal endlich erzeugt sind (abgesehen von wenigen trivialen Ausnahmen).

Wegen der genannten mit ihr verbundenen technischen Schwierigkeiten werden wir in dieser Vorlesung die simpliziale Homologie überhaupt nicht behandeln, sondern von vornherein uns auf die singuläre Homologie konzentrieren. Aber wir werden später auch die zelluläre Homologie erläutern, weil ihre Anwendung in vielen Fällen sehr angenehm ist. Die Entwicklung der zellulären Homologie setzt aber schon einige Kenntnisse über die singuläre Homologie voraus, so dass wir zunächst nur diese Variante besprechen werden.

Zum Schluss erwähnen wir noch, dass die moderne algebraische Topologie als allgemeinste Beschreibung die Homologie und Kohomologie gerne mittels einer homotopietheoretischen Konstruktion und kategorietheoretischen Methoden erzeugt, weil man so am besten die gemeinsamen Eigenschaften aller Homologie- und Kohomologietheorien erfasst und diese Theorien auch in ganz anderen Situationen und Gebieten verwenden kann, als in der Topologie. Aber diese sehr abstrakte Konstruktion ist kaum verständlich, wenn man sie nicht an einem illustrativen bekannten klassischen Beispiel wie der singulären Homologie ausprobieren kann. In dieser Vorlesung haben wir leider nur Zeit für die klassische Konstruktion, mit der wir jetzt beginnen wollen.

Wir haben schon gesagt, dass die Homologiegruppen in jeder Dimension aus möglichst einfachen Bausteinen zusammengebaut werden, die Kopien eines Standardstücks sind. Wie kann dieser „möglichst einfache“ Standardbaustein aussehen?

In Dimension 0 haben wir keine große Auswahl — das einfachste nulldimensionale Gebilde ist ein einzelner Punkt, und so sieht auch jeder 0-Simplex aus. Auch in Dimension 1 gibt es einen kanonischen Kandidaten für die Rolle des einfachsten Bausteins, nämlich eine Strecke und als Standardbeispiel dafür das Intervall  $I = [0, 1]$ .

Wenn man an den physikalischen Alltag, an Parkettbretter und Backsteine denkt, wäre eine natürliche Wahl für die Standardräume in den nächsthöheren Dimensionen dann das Quadrat, der Würfel usw., also die Räume  $I^n$ . Doch es gibt *noch* einfachere aber trotzdem regelmäßige und starr geformte Gebilde, in Dimension 2 zum Beispiel ein Dreieck, in Dimension 3 anstelle des Quaders ein Tetraeder, und so weiter. Das Dreieck ist einfacher als ein Quadrat oder ein Rechteck, weil letzteres vier Ecken und vier Kanten hat, das Dreieck aber nur drei. Entsprechend haben dreidimensionale Quader schon  $2^3 = 8$  Ecken und 6 Seiten, das Tetraeder jeweils nur 4.

Das sollte deutlich machen, dass eine sinnvolle Wahl des einfachsten Standardbausteins in jeder Dimension in der *konvexen Hülle einer für diese Dimension minimalen Anzahl von Punkten* eines geeigneten affinen Raumes besteht. Die konvexe Hülle von einer Menge von Punkten hat die gleiche Dimension wie ihre affine Hülle, und diese Dimension ist möglichst groß (und somit die Anzahl der benötigten aufspannenden Punkte möglichst klein), wenn die Punkte affin unabhängig, oder wie man sagt, in allgemeiner Lage sind. (Das ist gleichbedeutend damit, dass die Abstandsvektoren von einem der Punkte zu den anderen linear unabhängig sind.) In diesem Fall ist die erzielte Dimension um Eins kleiner, als die Anzahl der aufspannenden Punkte.

Um eine konvexe Hülle von Dimension  $n$  zu erhalten, braucht man also  $n + 1$  Punkte in allgemeiner Lage. Dafür gibt es im  $\mathbf{R}^n$  eine kanonische Auswahl, die uns unseren Standardsimplex der Dimension  $n$  liefert.

**Definition 2.1** Sei  $n$  eine natürliche Zahl und für  $1 \leq i \leq n$  sei

$$e_i := (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

der  $i$ -te Standardbasisvektor vom  $\mathbf{R}^n$ . Sei  $e_0 := (0, \dots, 0)$  der Koordinatenursprung.

Wir definieren den  $n$ -dimensionalen *Standardsimplex*  $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$  als die konvexe Hülle der Punkte  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

Die konvexe Hülle dieser Punkte ist die Menge aller Punkte

$$x = \sum_{i=0}^n t_i e_i, \quad (2.1)$$

wo  $0 \leq t_i \leq 1$  und  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ . Die Koeffizienten  $t_i$  in der Darstellung (2.1) heißen die **baryzentrischen Koordinaten** des Punktes  $x \in \Delta_n$ .

Weil  $e_0 = 0$  bedeutet die Darstellung (2.1) der Punkte von  $\Delta_n$ , dass

$$\Delta_n := \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i=0}^n t_i \leq 1 \right\}.$$

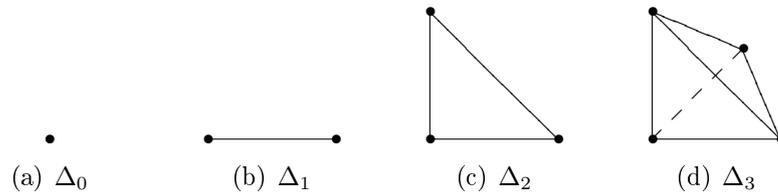


Abbildung 2.1: Die ersten vier Standardsimplizes.

Wie schon angekündigt, werden unsere eigentlichen Bausteine stetige Bilder des Standardsimplexes sein.

**Definition 2.2** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Ein **singulärer  $n$ -Simplex**  $\sigma$  in  $X$  ist eine stetige Abbildung

$$\sigma: \Delta_n \longrightarrow X.$$

Die Punkte  $x_i := \sigma(e_i)$  für  $i = 0, \dots, n$  nennen wir die **Eckpunkte** von  $\sigma$ .

Die Menge aller singulären  $n$ -Simplizes in  $X$  bezeichnen wir mit  $S_n(X)$ .

Weil man die singulären Simplizes auf diese Weise erhält, ist es auch möglich, einige Operationen, die wir mit ihnen durchführen werden, musterhaft auf dem Standardsimplex zu definieren und die Definition dann automatisch auf alle singulären Simplizes zu übertragen.

Deshalb ist es sinnvoll, gleich eine Sonderklasse von besonders schönen singulären Simplizes auszuzeichnen, zu der auch der Standardsimplex gehört, und für diese Klasse eine Notation einzuführen, die für die Erläuterung der Grundoperationen besonders geeignet ist.

**Definition 2.3** Sei  $V$  ein Vektorraum oder allgemeiner ein affiner Raum über  $\mathbf{R}$ . Einen singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in  $V$  nennen wir einen *linearen* oder einen *affinen  $n$ -Simplex*, wenn die stetige Abbildung  $\sigma: \Delta_n \rightarrow V$  die Einschränkung einer affinen Abbildung  $\mathbf{R}^n \rightarrow V$  ist.

In diesem Fall ist  $\sigma$  eindeutig bestimmt durch seine *Eckpunkte*  $v_i := \sigma(e_i)$  für  $i = 0, \dots, n$ , denn in baryzentrischen Koordinaten  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  auf  $\Delta_n$  (mit  $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$ , also  $t_0 = 1 - t_1 - \dots - t_n$ ) gilt die Formel

$$\sigma(t_1, \dots, t_n) = \sigma\left(\sum_{i=0}^n t_i e_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i \sigma(e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i. \quad (2.2)$$

In dieser Formel ist das Argument  $(t_1, \dots, t_n)$  des ganz linken Terms ein gewöhnliches kartesisches Koordinatentupel im  $\mathbf{R}^n$ , das wir in den anderen Termen zu einem  $n+1$ -Tupel  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  von baryzentrischen Koordinaten erweitern mit  $t_0$  wie in der Zeile vor der Formel.

Zu jeder Auswahl von  $n+1$  Punkten  $v_0, \dots, v_n \in V$  gibt es tatsächlich einen eindeutigen linearen Simplex  $\sigma$  mit diesen Punkten als Eckpunkte, definiert durch die Formel (2.2). Diese Formel bestimmt offensichtlich eine stetige Abbildung, die die Einschränkung einer affinen Abbildung auf ganz  $\mathbf{R}^n$  ist.

Wir notieren durch  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  den eindeutigen affinen Simplex mit Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n$ .

**Bemerkung 2.4** Man beachte, dass ein singulärer Simplex  $\sigma$  nicht injektiv sein muss, und keine besonderen Voraussetzungen außer Stetigkeit erfüllen muss.

Das gilt auch für affine Simplizes: ihre Eckpunkte müssen nicht affin unabhängig sein; sie müssen noch nicht einmal verschieden sein.

**Beispiel 2.5** Unser wichtigstes Beispiel eines affinen Simplexes wird der Standardsimplex selber sein, oder genauer, der singuläre Simplex  $\text{id}_{\Delta_n}$ , welcher in der Notation von Definition 2.3 der affine Simplex

$$[e_0, e_1, \dots, e_n] \in \mathbf{R}^n$$

ist.

Denn viele Operationen auf Simplizes brauchen wir nur auf diesem Musterbeispiel zu erklären, um sie sofort für alle singulären Simplizes  $\sigma$  verfügbar zu haben, in dem wir das Muster mit der stetigen Abbildung  $\sigma$  auf den Simplex  $\sigma$  übertragen.

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde gesagt, dass die Definition der Homologiegruppen zwei Stufen involviert. In der ersten Stufe bauen wir aus den geometrischen Bausteinen, die in unserem Fall die singulären Simplizes sind, auf einfache Weise ein algebraisches Objekt, das sich ein **Kettenkomplex** nennt, und erst in der zweiten Stufe wird auf rein algebraischem Wege aus dem Kettenkomplex die Homologie gewonnen.

Wie kann man schnell aus singulären Simplizes algebraische Objekte, zum Beispiel Gruppen und Gruppenhomomorphismen, erzeugen? Es gibt dazu eine sehr einfache Methode.

Anders als bei der Fundamentalgruppe werden wir nicht versuchen, eine Gruppenoperation irgendwie aus der geometrischen Struktur der singulären Simplizes herzuleiten, wie das bei der Verkettung von Schleifen der Fall war, sondern wir werden sie ganz billig als eine *formale* Addition von Simplizes gewinnen — wir schreiben einfach Summen (und Differenzen) von Simplizes hin, und rechnen mit ihnen nach den üblichen Gesetzen für additive abelsche Gruppen, als ob wir das dürften.

Und wir dürfen das tatsächlich, wie Sie aus der genaueren Definition weiter unten sehen werden. Zu diesem Zweck machen wir ein paar algebraische Vorbereitungen.

**Bemerkung 2.6** Sei  $A$  eine additive abelsche Gruppe. Dann können wir eine Art „skalare Multiplikation“ zwischen ganzen Zahlen und Elementen von  $A$  definieren, wenn wir wie üblich für  $a \in A$  und  $n > 0 \in \mathbf{Z}$

$$na := \underbrace{a + \cdots + a}_n \quad (2.3)$$

setzen,  $0 \cdot a := 0 \in A$  setzen und für  $n < 0$  das Produkt  $na$  als  $(-n)(-a)$  im Sinne von (2.3) definieren.

Es ist nicht schwer nachzurechnen, dass diese Operation die gleichen Eigenschaften erfüllt, wie die skalare Multiplikation in einem Vektorraum; man muss dazu nur eine lästige Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens der ganzen Zahlen durcharbeiten, weshalb wir den Nachweis auch nicht vorführen.

Diese „zusätzliche“ algebraische Struktur ist eine kostenlose Beigabe zu jeder additiven abelschen Gruppe — sie hat automatisch diese skalare Multiplikation mit Elementen von  $\mathbf{Z}$ , die unmittelbar aus der Gruppenaddition herleitbar ist.

Wir wollen jetzt versuchen, möglichst effizient zu beschreiben, was für eine Gruppe wir erhalten, wenn wir „formale Summen“ von singulären Simplizes, oder allgemeiner von Elementen einer beliebigen Menge bilden. Die „ $\mathbf{Z}$ -Modul“-Struktur aus Bemerkung 2.6 weist uns da einen günstigen Weg.

Eine formale Summe von Elementen einer Menge  $X$  können wir auf Grund der Bemerkung auch auffassen als eine formale  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination, in der nur endlich viele Summanden erscheinen (weil wir auch in einer formalen Summe nur endlich viele Summanden beteiligt sind). Weil es sich um „formale“ Summen handelt, gibt es hierbei keine Relationen oder andere Rechenregeln außer der normalen Rechenregeln, die in jeder additiven abelschen Gruppe gelten. Das heißt, dass die Reihenfolge der Summanden und der Additionen oder Subtraktionen keine Rolle spielt, aber dass außer auf diese Weise keine Gleichheiten zwischen verschiedenen Summationen auftreten. Als Konsequenz sind zwei  $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen in der formalen Summe genau dann gleich, wenn jedes Element von  $X$  in beiden Linearkombinationen den gleichen  $\mathbf{Z}$ -Koeffizienten trägt.

Sowohl dieser Begriff der Gleichheit, wie auch die Addition von zwei Linearkombinationen miteinander, kann man genau erfassen, wenn man eine Linearkombination durch die Funktion  $X \rightarrow \mathbf{Z}$  beschreibt, die jedem Element von  $X$  seinen Koeffizienten in der Linearkombination zuordnet. Weil die Linearkombinationen endlich sind, sind auch nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0, was man bei der Definition der entstehenden Gruppe berücksichtigen muss.

**Definition 2.7** Sei  $X$  eine Menge.

Wir bezeichnen mit  $\mathbf{Z}^X$  die Menge aller mengentheoretischen Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbf{Z}$ , und wir erinnern daran, dass diese Funktionenmenge zu einer additiven abelschen Gruppe wird, wenn wir zwei Funktionen  $f$  und  $g$  addieren, indem wir ihre Werte an jeder Stelle addieren.

Die Addition von zwei Funktionen wird also erklärt durch die Formel:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{für jedes } x \in X. \quad (2.4)$$

Wir setzen

$$F(X) := \{ f \in \mathbf{Z}^X \mid f(x) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } x \in X \}.$$

Offensichtlich ist dies eine Untergruppe von  $\mathbf{Z}^X$ , denn die Summe von zwei Funktionen, die nur an endlich vielen Stellen Werte ungleich 0 annehmen, nimmt nur dort Werte ungleich 0 an, wo einer der Summanden dies tut, und das sind immer noch insgesamt nur endlich viele Stellen.

Also ist  $F(X)$  eine additive abelsche Gruppe. Sie heißt die **freie abelsche Gruppe erzeugt durch die Menge  $X$** .

Für die Elemente von  $F(X)$  führen wir eine alternative suggestive Schreibweise ein: das Element  $f \in F(X)$  notieren wir auch mit

$$\sum_{x \in X} f(x) \cdot x. \quad (2.5)$$

Zunächst dürfen wir dies nicht wirklich als eine Summe verstehen (was soll da eigentlich addiert werden?), sondern nur als eine alternative Notation für die Funktion  $f$ , in der alle Werte der Funktion als die Koeffizienten der formalen Summe auftreten.

**Bemerkung 2.8** Definition 2.7 ist auch anwendbar, wenn  $X$  die leere Menge ist. In diesem Fall sind  $Z^\emptyset$  und  $F(\emptyset)$  additive abelsche Gruppen, deren Elemente Funktionen von der leeren Menge nach  $\mathbf{Z}$  sind.

Wenn man sich die Definition einer Funktion genau ansieht, erkennt man, dass es nicht keine Funktionen, sondern *genau eine* Funktion von der leeren Menge in jede beliebige Menge, also insbesondere auch nach  $\mathbf{Z}$ , gibt. Das bedeutet, dass  $Z^\emptyset$  eine additive abelsche Gruppe mit genau einem Element ist, und die einzige solche Gruppe ist die triviale Gruppe  $\{0\}$ .

Die „leere“ Funktion hat überhaupt keine Werte  $\neq 0$  und erfüllt deshalb die Bedingung für die Zugehörigkeit zu  $F(\emptyset)$ . In anderen Worten, es gilt auch

$$F(\emptyset) = \{0\}. \quad (2.6)$$

Auch die Summendarstellung (2.5) kann hier angewendet werden. Das einzige Element von  $F(\emptyset)$  ist die „leere“ Summe oder die Summe ohne Summanden, und diese hat nach Konvention den Wert 0.

**Bemerkung 2.9** Wir können jede Menge  $X$  als eine Teilmenge von  $F(X)$  auffassen, wenn wir jedes  $x \in X$  mit seiner *charakteristischen Funktion*  $\chi_x$  identifizieren, die gegeben ist durch

$$\chi_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } y = x; \\ 0, & \text{wenn } y \neq x, \end{cases}$$

und die nur einen Wert ungleich 0 annimmt und somit tatsächlich zu  $F(X)$  gehört.

Für solche Elemente  $x \in F(X)$  hat die Darstellung (2.5) den Koeffizienten 1 bei  $x$  und 0 bei allen anderen Summanden. Für ein beliebiges Element  $f \in F(X)$  sind in (2.5) nur endlich viele der Koeffizienten ungleich 0, und aus diesem Grund kann man (2.5) nun doch auch als eine endliche Linearkombination der Elemente aus  $X \subseteq F(X)$  lesen.

Hierbei überzeugt man sich leicht anhand der Einbettung von  $X$  in  $F(X)$ , dass diese Lesart das gleiche Element liefert, wie die Lesart als formale Notation für die Funktion  $f$ . Nämlich, für jedes einzelne  $x_0 \in X$  ist  $f(x_0) \cdot x_0$  die Funktion, die bei  $x_0$  den Wert  $f(x_0) \cdot 1 = f(x_0)$  annimmt, und überall sonst den Wert 0. Addiert man diese Funktionen für die endlich vielen  $x_0$ ,

bei denen  $f$  einen nichtverschwindenden Wert annimmt, erhält man genau die Funktion  $f$ .

Man stellt ferner leicht anhand der Definition fest, dass man mit den formalen Summen (2.5) wie gewohnt rechnen kann. D.h., die Addition und die skalare Multiplikation formaler Summen, ausgeführt in der Untergruppenstruktur von  $F(X) \subseteq \mathbf{Z}^X$ , verhalten sich nach den üblichen Regeln der Theorie der additiven abelschen Gruppen.

**Lemma 2.10** *Sei  $X$  eine Menge. Wir betrachten  $X$  als eine Teilmenge der freien abelschen Gruppe  $F(X)$ .*

a) *Jedes Element von  $F(X)$  hat eine eindeutige Darstellung*

$$\sum_{x \in X} n_x x \quad (2.7)$$

*als endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von Elementen von  $X$  (wo „endlich“ heißt, dass  $n_x \neq 0$  nur für endlich viele  $x$ ), und jeder Ausdruck (2.7), in der nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0 sind, bestimmt ein eindeutiges Element von  $F(X)$ .*

b) *Sei  $A$  eine beliebige additive abelsche Gruppe. Jede mengentheoretische Abbildung  $\varphi: X \rightarrow A$  bestimmt einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus*

$$g_\varphi: F(X) \rightarrow A,$$

*so dass  $g_\varphi|_X = \varphi$ . Er ist gegeben durch die Formel*

$$g_\varphi\left(\sum_{x \in X} n_x x\right) = \sum_{x \in X} n_x \varphi(x) \quad (2.8)$$

*(hier sind die  $n_x \in \mathbf{Z}$  und nur endlich viele von ihnen sind  $\neq 0$ ).*

*Die Aussagen dieses Lemmas gelten trivialerweise auch wenn  $X = \emptyset$ . In diesem Fall ist (2.7) für das einzige Element von  $F(\emptyset)$  die leere Summe, und für die einzige Funktion  $\varphi: \emptyset \rightarrow A$  ist  $g_\varphi$  der Nullhomomorphismus, der einzige Homomorphismus  $F(\emptyset) = \{0\} \rightarrow A$ .*

*Beweis.* Zu a): Jedes  $f \in F(X)$  hat eine eindeutige Darstellung (2.5), weil die Koeffizienten in dieser Darstellung alle Werte von  $f$  auflisten. Wir haben schon gesehen, dass man die Darstellung (2.5) tatsächlich als eine endliche Linearkombination in  $F(X)$  lesen darf, und man erhält die Darstellung (2.7), wenn man einfach  $n_x$  anstelle von  $f(x)$  schreibt.

Umgekehrt kann jede endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination (2.7) auch in der Gestalt (2.5) geschrieben werden, indem man die Werte der in (2.5) vorkommenden Funktion  $f$  aus den Koeffizienten  $n_x$  abliest; diese Funktion gehört automatisch zu  $F(X)$ , weil alle bis auf endlich viele  $n_x = 0$  sind, und sie ist der Wert der Linearkombination (2.7), wenn man die Elemente  $x \in X$  wie in Bemerkung 2.9 mit Funktionen in  $F(X)$  identifiziert.

Zu b): Wegen der Aussage von Teil a) bestimmt Formel (2.8) auf jeden Fall eine wohldefinierte und eindeutig bestimmte mengentheoretische Funktion  $g_\varphi: F(X) \rightarrow A$ . Weil in den additiven abelschen Gruppen  $F(X)$  und  $A$   $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen wie in der Formel sich „koeffizientenweise“ miteinander addieren, ist es klar, dass  $g_\varphi$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Anhand der Darstellung der Elemente  $x \in X$  als Linearkombinationen mit nur einem nichtverschwindenden Koeffizienten, der den Wert 1 hat, prüft man mit Formel (2.8) direkt nach, dass  $g_\varphi(x) = \varphi(x)$  für jedes  $x \in X$ , also dass  $g_\varphi|_X = \varphi$ . Das beweist die Existenz eines Homomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften.

Umgekehrt erfüllt jeder Gruppenhomomorphismus  $g_\varphi: F(X) \rightarrow X$  die Beziehung

$$g_\varphi\left(\sum_{x \in X} n_x x\right) = \sum_{x \in X} n_x g_\varphi(x),$$

und wenn  $g_\varphi|_X = \varphi$ , dann können wir die Werte  $g_\varphi(x)$  auf der rechten Seite durch  $\varphi(x)$  ersetzen und erhalten (2.8), die die Funktion  $g_\varphi$  eindeutig festlegt. Das zeigt die Eindeutigkeit. ■

Wir haben jetzt das algebraische Werkzeug für die Konstruktion des singulären Kettenkomplexes.

**Definition 2.11** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{N}$ .

- a) Die  *$n$ -te singuläre Kettengruppe* von  $X$  ist die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären  $n$ -Simplizes in  $X$  erzeugt wird, also die Gruppe

$$C_n(X) := F(S_n(X)).$$

Sie besteht aus allen formalen endlichen  $\mathbf{Z}$ -Linearkombinationen von singulären  $n$ -Simplizes. Die Elemente von  $C_n(X)$  heißen *singuläre  $n$ -Ketten* in  $X$ .

Wir können auch für negative ganze Zahlen  $n$  die  $n$ -te singuläre Kettengruppe definieren; da es in negativen Dimensionen keine singulären Simplizes gibt, gilt für  $n < 0 \in \mathbf{Z}$ , dass

$$C_n(X) := F(\emptyset) = \{0\} \tag{2.9}$$

- b) Sei  $Y$  ein topologischer Raum und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $\sigma \in S_n(X)$ ; dann ist  $\sigma$  eine stetige Abbildung  $\Delta_n \rightarrow X$ . Setze

$$f_{\#}(\sigma) := f \circ \sigma: \Delta_n \rightarrow Y. \quad (2.10)$$

Dies ist ein singulärer  $n$ -Simplex in  $Y$ . Also induziert  $f$  eine mengentheoretische Abbildung  $f_{\#}: S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ .

Nach Lemma 2.10 b) gibt es eine eindeutige Erweiterung von dieser Abbildung zu einem Gruppenhomomorphismus  $f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  (den wir auch  $f_{\#}$  oder formaler und genauer  $C_n(f)$  nennen), gegeben durch

$$f_{\#} \left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_{\sigma} \sigma \right) = \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_{\sigma} (f \circ \sigma), \quad (2.11)$$

wobei die Summe auf der rechten Seite eine endliche Linearkombination von singulären Simplexes in  $Y$  ist.

Den Homomorphismus  $f_{\#}$  können wir auch in negativen Dimensionen definieren; dort ist er erzwingenermaßen der Nullhomomorphismus.

**Bemerkung 2.12** Seien  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{N}$ . Aus (2.10) und (2.11) ist klar, dass

$$C_n(\text{id}_X) = (\text{id}_X)_{\#} = \text{id}_{C_n(X)}.$$

Entsprechend, wenn  $Y$  und  $Z$  weitere topologische Räume sind und wenn  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen sind, dann folgt sofort aus (2.10) und (2.11), dass

$$C_n(g \circ f) = (g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} = C_n(g) \circ C_n(f).$$

Das heißt, die Zuordnung  $X \mapsto C_n(X)$  und  $f \mapsto f_{\#} = C_n(f)$  bildet für jedes  $n \in \mathbf{N}$  einen kovarianten Funktor  $C_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{AbGp}$ .

Diese Behauptung gilt trivialerweise auch für  $n < 0 \in \mathbf{Z}$ , wie man sofort überlegt.

Neben den einzelnen Kettengruppen ist auch eine bestimmte Abbildung  $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  wichtig, die wir nun definieren wollen. Dazu betrachten wir zunächst den Standardsimplex von Dimension  $n$ :

**Definition 2.13** Sei  $n \geq 1 \in \mathbf{N}$  und sei  $0 \leq i \leq n$ .

- a) Die  $i$ -te **Seite**  $\Delta_n^{(i)}$  von  $\Delta_n$  ist der affine  $n-1$  Simplex in  $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$ , der als Ecken alle Ecken von  $\Delta_n$  hat, bis auf die  $i$ -te  $e_i$ . In anderen Worten,

$$\Delta_n^{(i)} := [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n]. \quad (2.12)$$

Abbildung 2.2 zeigt die Seiten der eins- und zweidimensionalen Standardsimplizes.

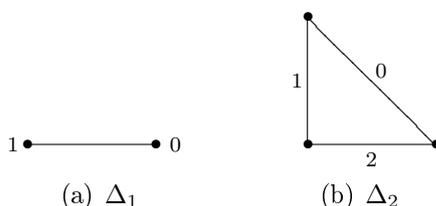


Abbildung 2.2: Die Seiten der Standardsimplizes.

Man sieht, dass die  $i$ -te Seite die Seite ist, die der  $i$ -ten Ecke *gegenüberliegt*.

Man beachte, dass der Standardnullsimplex  $\Delta_0$  gar keine Seiten besitzt, da es keine  $(-1)$ -Simplizes gibt.

- b) Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\sigma \in S_n(X)$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ . Wir definieren die  $i$ -te **Seite**  $\sigma^{(i)}$  von  $\sigma$  als

$$\sigma^{(i)} := \sigma_{\#}(\Delta_n^{(i)}) = \sigma \circ \Delta_n^{(i)}. \quad (2.13)$$

Dies ist ein singulärer  $(n-1)$ -Simplex in  $X$ .

Wieder ist es der Fall, dass ein singulärer 0-Simplex keine Seiten besitzt.

**Notation 2.14** Wir werden es in Zukunft oft mit Ausdrücken wie die rechte Seite von (2.12) zu tun haben, in denen aus einer Liste von Koordinaten oder dergleichen ein oder zwei Elemente weggelassen werden.

In diesen Fällen ist die Schreibweise von (2.12) sehr unhandlich. Üblich ist es deshalb, solche „Listen mit Auslassungen“ zu notieren, indem man alle Elemente der vollen Liste hinschreibt, aber ein Dachakzent  $\hat{\phantom{x}}$  über die Elemente setzt, die auszulassen oder zu überspringen sind.

In dieser Notation, die wir fortan verwenden werden, ist

$$\Delta_n^{(i)} := [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n].$$

**Bemerkung 2.15** Sei  $V$  ein reeller affiner Raum und seien  $v_0, v_1, \dots, v_n$  Punkte von  $V$  (wobei  $n \geq 1$ ). Dann folgt sofort aus (2.13) und der Definition des affinen Simplexes  $[v_0, \dots, v_n]$ , dass

$$[v_0, \dots, v_n]^{(i)} = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]. \quad (2.14)$$

**Bemerkung 2.16** Sei  $X$  ein topologischer Raum, sei  $n \geq 2 \in \mathbf{N}$  und sei  $\sigma$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ . Sei  $0 \leq i < j \leq n$ .

Dann ist

$$(\sigma^{(j)})^{(i)} = (\sigma^{(i)})^{(j-1)} = \sigma_{\sharp}([e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n]). \quad (2.15)$$

Denn nach Definition der Seiten eines singulären Simplexes  $\sigma$  reicht es, diese Operationen auf dem Standardsimplex  $\Delta_n$  auszuführen und das Ergebnis mit  $\sigma_{\sharp}$  nach  $X$  zu übertragen, und nach Bemerkung 2.15 erhält man die  $k$ -te Seite eines affinen Simplexes, in dem man aus der Liste der Ecken die  $k$ -te Ecke entfernt.

Wir haben  $i < j$ , und wenn man im Simplex  $\text{id}_{\Delta_n} = [e_0, \dots, e_n]$  zuerst die  $j$ -te Ecke entfernt, ist die  $i$ -te Ecke des neuen Simplexes immer noch die ursprüngliche  $i$ -te Ecke  $e_i$ , so dass

$$([e_0, \dots, e_n]^{(j)})^{(i)} = [e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n].$$

Entfernt man aber zuerst die  $i$ -te Ecke, so ist die ursprüngliche  $j$ -te Ecke jetzt die  $j - 1$ -te, und somit erhält man das gleiche Ergebnis in der anderen Reihenfolge der Eckenentfernung als  $([e_0, \dots, e_n]^{(i)})^{(j-1)}$ .

Man beachte, dass Gleichung (2.15) alle Fälle der Bildung einer Seite von einer Seite eines Simplexes abdeckt, denn wenn  $i \not< j$ , so ist  $j \leq i$  und (2.15) kann dann gelesen werden (mit  $j$  in der Rolle von  $i$  und  $i + 1$  in der Rolle von  $j$ ) als

$$(\sigma^{(i+1)})^{(j)} = (\sigma^{(j)})^{(i)} = \sigma_{\sharp}([e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_{i+1}, \dots, e_n]). \quad (2.16)$$

**Definition 2.17** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $n \in \mathbf{N}$  und sei  $\sigma \in S_n(X)$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ .

Wir definieren den **Rand**  $\partial_n \sigma$  von  $\sigma$  als die  $(n - 1)$ -Kette gegeben durch die alternierende Summe der Seiten von  $\sigma$ , also:

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}. \quad (2.17)$$

Diese Definition gilt, wenn man sie richtig versteht, auch für  $n = 0$ , aber da ein 0-Simplex  $\sigma$  keine Seiten hat, haben wir auf der rechten Seite von (2.17) dann die leere Summe, d. h., eine Summe über keine Summanden, die nach Konvention den Wert 0 hat.

Nach Lemma 2.10 b) erweitert sich die Funktion  $\partial_n$  auf  $S_n(X)$  zu einem wohldefinierten Gruppenhomomorphismus  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ , genannt der **Randoperator**.

Der Randoperator  $\partial_0$  ist auch in Dimension 0 erklärt und ist da der Nullhomomorphismus. Man kann den Randoperator auch in allen negativen Dimensionen erklären, aber da muss er auch der Nullhomomorphismus sein, da die negativdimensionalen Kettengruppen alle  $\{0\}$  sind.

Meistens vereinfachen wir die Notation für den Randoperator zu  $\partial$ , solange klar ist, in welcher Dimension wir gerade arbeiten.

**Bemerkung und Definition 2.18** Sei  $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ . Wir definieren den **Rand des Standard  $n$ -Simplexes** als

$$\partial_n \Delta_n := \partial_n \text{id}_{\Delta_n} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \Delta_n^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i [e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n].$$

Der Rand des Standard 0-Simplexes wird als 0 definiert.

Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\sigma \in S_n(X)$  ein singulärer  $n$ -Simplex in  $X$ . Weil die Seiten  $\sigma^{(i)}$  von  $\sigma$  nach Definition 2.13 b) die Bilder unter  $\sigma_{\#}$  der entsprechenden Seiten  $\Delta_n^{(i)}$  des Standardsimplexes sind, ist klar, dass

$$\partial_n \sigma = \sigma_{\#}(\partial_n \Delta_n). \quad (2.18)$$

Mit den eingeführten Konventionen für Ränder von Nullsimplexes gilt diese Formel auch für  $n = 0$ .

Hier zwei sehr wichtige Grundeigenschaften des Randoperators:

**Lemma 2.19** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{Z}$ .

- a) Sei  $Y$  ein weiterer topologischer Raum und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann kommutiert für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array} \quad (2.19)$$

oder in anderen Worten: für jede Kette  $c \in C_n(X)$  ist

$$\partial_n f_{\#}(c) = f_{\#}(\partial_n c). \quad (2.20)$$

- b)

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0: C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X), \quad (2.21)$$

d. h., der Rand eines Randes ist immer 0.

*Beweis.* Beide Behauptungen sind trivial wenn  $n < 0$ , da dann alle auftretenden Abbildungen Nullhomomorphismen sind. Wir können also annehmen, dass  $n \in \mathbf{N}$ .

Zu a): Es reicht, (2.20) für einzelne Simplizes  $\sigma$  als  $c$  nachzuprüfen. Aber nach (2.18) und der Definition von  $f_{\#}$  haben wir wie behauptet

$$\partial_n(f_{\#}(\sigma)) = \partial_n(f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)_{\#}(\partial_n \Delta_n) = f_{\#}(\sigma_{\#}(\partial_n \Delta_n)) = f_{\#}(\partial_n \sigma).$$

Zu b): Nach (2.18) und Teil a) reicht es, die Behauptung für  $\text{id}_{\Delta_n}$  nachzuweisen, also zu zeigen, dass  $\partial_{n-1}(\partial_n(\Delta_n)) = 0$ .

Für  $n \leq 1$  ist dies trivial, so dass wir nur noch den Fall betrachten müssen, wo  $n \geq 2$ .

Wir haben

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\Delta_n)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \Delta_n^{(j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_{n-1}(\Delta_n^{(j)}) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\Delta_n^{(j)})^{(i)} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} (\Delta_n^{(j)})^{(i)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dies ist eine Linearkombination von Seiten von  $\Delta_n$ , und nach Bemerkung 2.16 erscheint jede zweifache Seite  $[e_0, \dots, \widehat{e}_p, \dots, \widehat{e}_q, \dots, e_n]$  von  $\Delta_n$  (mit  $0 \leq p < q \leq n$ ) zweimal in der Summation (2.22): einmal mit Vorzeichen  $(-1)^{p+q}$  im Summanden für  $i = p$  und  $j = q$ , und einmal mit Vorzeichen  $(-1)^{p+q-1}$  im Summanden für  $i = q - 1$  und  $j = p$ .

Diese beiden Beiträge heben sich wegen des verschiedenen Vorzeichens weg. Also ist die Gesamtsumme (2.22) gleich 0.  $\blacksquare$

An dieser Stelle haben wir die angekündigte Zwischenstufe der Homologiekonstruktion erreicht. Aus den singulären Simplizes in einem topologischen Raum  $X$  haben wir folgende einfache algebraische Struktur gebaut: in jeder Dimension  $n \in \mathbf{N}$  (oder sogar in  $\mathbf{Z}$ ) eine so genannte **singuläre Kettengruppe**  $C_n(X)$ , und für jede Dimension einen Homomorphismus  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ , den **Randoperator**, mit der Eigenschaft, dass zweimal hintereinander Rand nehmen den Nulloperator ergibt:  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .

Weil der Randoperator wie in Lemma 2.19 a) mit den von einer stetigen Abbildung induzierten Homomorphismen kommutiert, ist diese Struktur auch *natürlich*.

Die jetzige Struktur ist die eines **Kettenkomplexes**, und wir wollen zunächst die Struktur ein bisschen genauer beschreiben und zeigen, dass sie eine Kategorie bestimmt. Danach werden wir die zweite Stufe der Homologiekonstruktion durchführen, in der wir die Homologiegruppen aus dem singulären Kettenkomplex gewinnen. Anschließend wollen wir diese Strukturen in eine etwas elegantere Verpackung einkleiden, mit der wir effizienter darüber reden können; diese „elegante“ Variante, formuliert in der Sprache der graduierten abelschen Gruppen, wird uns dann für den Rest der Vorlesung begleiten.

**Definition 2.20** a) Ein **Kettenkomplex**  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ist eine Folge

$$C = \{ C_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

von additiven abelschen Gruppen  $C_n$  (genannt die **Kettengruppen** von  $\mathcal{C}$ , wobei  $C_n$  die *n-te Kettengruppe* oder die **Kettengruppe in Dimension  $n$**  genannt wird) zusammen mit einer Folge

$$\partial = \{ \partial_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen

$$\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1},$$

so dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0: C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}. \quad (2.23)$$

Wir nennen  $\partial_n$  den *n-ten Randoperator* oder die *n-te Randabbildung* des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ .

b) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist eine Folge  $f = \{ f_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$  von Gruppenhomomorphismen

$$f_n: C_n \longrightarrow D_n,$$

so dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_{n+1} \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

kommutiert, d. h., so dass

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n. \quad (2.24)$$

In anderen Worten, Kettenabbildungen sind Folgen von Gruppenhomomorphismen zwischen den Kettengruppen gleicher Dimension der beiden Kettenkomplexe, die mit dem Randoperator verträglich sind, indem sie mit ihm kommutieren.

**Bemerkung und Definition 2.21** Die Kettenkomplexe und die Kettenabbildungen zwischen ihnen bilden die Objekte und Morphismen einer neuen Kategorie **KK**, der *Kategorie der Kettenkomplexe und Kettenabbildungen*.

Ein *Kettenkomplex* ist nichts anderes als ein Diagramm über **AbGp** modelliert auf dem beiderseits unendlichen Graphen

$$\mathcal{G} := \dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots,$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Verknüpfung je zwei aufeinanderfolgender Pfeile in dem Diagramm der Nullhomomorphismus ist. Eine *Kettenabbildung* ist einfach ein Diagrammmorphismus solcher Diagramme.

Insofern ist **KK** eine *volle Unterkategorie* der Kategorie **G-DAbGp** der beiderseits unendlich langen Folgen von abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Damit wissen wir automatisch, dass Kettenkomplexe und Kettenabbildungen alle Eigenschaften aus Definition 1.1 erfüllen, einschließlich der Eigenschaften über die Verknüpfung und den Identitätsmorphisms. Kettenabbildungen werden wie Diagrammmorphismen verknüpft, und das bedeutet, dass für Kettenkomplexe  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{E}$  und für Kettenabbildungen  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  die Verknüpfung  $g \circ f$  gegeben wird durch

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n \quad \text{für jedes } n.$$

Entsprechend sind die Identitätskettenabbildungen einfach die Identität auf jeder Kettengruppe.

**Beispiel und Definition 2.22** Wir haben in Lemma 2.19 gesehen, dass die singulären Kettengruppen eines topologischen Raumes  $X$ , zusammen mit dem singulären Randoperator, einen Kettenkomplex bilden. Diesen Kettenkomplex wollen wir mit  $(C_*(X), \partial_X)$  bezeichnen; der Index „\*“ ist zu verstehen als ein Platzhalter für die verschiedenen Dimensionen  $n$  der einzelnen Kettengruppen  $C_n(X)$  oder als ein Zeichen, der alle Dimensionen zusammenfasst und gleichzeitig darstellt.

In Lemma 2.19 haben wir außerdem gesehen, dass für jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen die induzierten Abbildungen  $f_{\#}$  zwischen den entsprechenden singulären Kettengruppen der beiden Räume eine Kettenabbildung

$$C_*(f) = f_{\#}: (C_*(X), \partial_X) \rightarrow (C_*(Y), \partial_Y)$$

bilden.

Der Kettenkomplex  $(C_*(X), \partial_X)$  heißt der *singuläre Kettenkomplex* des topologischen Raumes  $X$ . Die Kettenabbildung  $C_*(f) := f_{\#}$ , die eine stetige Abbildung zwischen den singulären Kettenkomplexen ihres Quell- und Zielraumes induziert, nennen wir die *singuläre Kettenabbildung* der stetigen Abbildung  $f$ .

Weil nach Bemerkung 2.12 schon die einzelnen Kettengruppen  $C_n(X)$  und die einzelnen Homomorphismen  $C_n(f)$  einen Funktor  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  bilden, erfüllt auch die Zuordnung der gesamten singulären Kettenabbildung  $C_*(f)$  zu einer stetigen Abbildung die funktoriellen Eigenschaften aus Definition 1.11 b).

In anderen Worten, die Zuordnung  $C_*$ , die jedem topologischen Raum  $X$  seinen singulären Kettenkomplex  $(C_*(X), \partial_X)$  und jeder stetigen Abbildung  $f$  ihre singuläre Kettenabbildung  $C_*(f)$  zuordnet, ist ein kovarianter Funktor  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{KK}$ .

Wir werden später viele weitere Beispiele für Kettenkomplexe und kettenkomplexwertige Funktoren kennenlernen, aber im Moment wollen wir uns mit diesem einen Beispiel begnügen und zunächst die Homologiekonstruktion zu Ende führen.

Die jetzt folgende zweite Stufe der Konstruktion geht von einem Kettenkomplex aus und benutzt die spezielle Struktur, die Kettenkomplexe auszeichnet, um eine Familie von Funktoren

$$H_n: \mathbf{KK} \rightarrow \mathbf{AbGp}$$

zu erzeugen, die man die *Homologiegruppen* des Kettenkomplexes nennt.

**Definition 2.23** a) Sei  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ein Kettenkomplex. Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  setze

$$Z_n(\mathcal{C}) := \text{Ker } \partial_n \subseteq C_n$$

und setze

$$B_n(\mathcal{C}) := \text{Bild } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_n.$$

$Z_n(\mathcal{C})$  heißt die  $n$ -te *Zyklengruppe* des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ , und seine Elemente heißen  $n$ -*Zyklen*.  $B_n(\mathcal{C})$  heißt die  $n$ -te *Rändergruppe* des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ , und seine Elemente heißen  $n$ -*Ränder*.

Wegen (2.23) ist jeder Rand automatisch ein Zyklus, d. h., wir haben  $B_n(\mathcal{C}) \subseteq Z_n(\mathcal{C})$  für jedes  $n$ .

Die Quotientengruppe

$$H_n(\mathcal{C}) := \frac{Z_n(\mathcal{C})}{B_n(\mathcal{C})}$$

heißt die  $n$ -te **Homologiegruppe** des Kettenkomplexes  $\mathcal{C}$ .

Jede Homologiekategorie in  $H_n(\mathcal{C})$  ist eine Äquivalenzklasse von  $n$ -Zyklen im Quotienten nach der Rändergruppe. Dabei sind zwei Zyklen  $z$  und  $z'$  genau dann äquivalent, wenn ihre Differenz  $z - z'$  ein Rand ist. Diese Äquivalenzrelation auf der Zyklengruppe heißt auch **Homologie**, und wir sagen im Falle der Äquivalenz,  $z$  ist **homolog** zu  $z'$ , und wir schreiben dafür  $z \sim z'$ .

Genau dann ist ein Zyklus  $z$  selber ein Rand, wenn  $z \sim 0$ . In diesem Fall sagen wir auch,  $z$  ist **nullhomolog**.

- b) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe. Sei  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Kettenabbildung. Da  $f$  mit den Randoperatoren kommutiert wie in (2.24) und außerdem als Homomorphismus  $0$  in  $0$  abbildet, bildet  $f$  Zyklen wieder in Zyklen ab und Ränder wieder in Ränder, d. h.,

$$f_n(Z_n(\mathcal{C})) \subseteq Z_n(\mathcal{D}) \quad (2.25)$$

und

$$f_n(B_n(\mathcal{C})) \subseteq B_n(\mathcal{D}). \quad (2.26)$$

Folglich induziert  $f_n$  auch einen Homomorphismus

$$f_* = H_n(f): H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{D}),$$

so dass für jeden  $n$ -Zyklus  $z \in Z_n(\mathcal{C})$  gilt  $f_*([z]) = [f_n(z)]$ .

**Bemerkung 2.24** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ,  $\mathcal{D} = (D, \partial')$ , und  $\mathcal{E} = (E, \partial'')$  Kettenkomplexe und seien  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Kettenabbildungen. Da in jeder Dimension  $n$  nach Definition gilt

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n,$$

gilt diese Beziehung auch für die Einschränkungen von  $g_n$  und  $f_n$  auf die Ränder- und Zyklengruppen und somit auch für die induzierten Homomorphismen in Homologie. Wir haben also

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$

Und da für jeden Kettenkomplex  $\mathcal{C}$  die identische Kettenabbildung  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  auf jeder Kettengruppe die Identität ist und somit auch auf den Zyklengruppen und Rändergruppen, induziert sie in Homologie die Identität:

$$H_n(\text{id}_{\mathcal{C}}) = \text{id}_{H_n(\mathcal{C})}.$$

Folglich ist  $H_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  ein *kovarianter Funktor*  $\mathbf{KK} \rightarrow \mathbf{AbGp}$ .

**Definition 2.25** Der *singuläre  $n$ -te Homologiefunktor*

$$H_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{AbGp}$$

ist definiert als die Verknüpfung des in Beispiel und Definition 2.22 definierten singulären Kettenkomplexfunktors  $C_*: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{KK}$  mit dem Homologiefunktor  $H_n: \mathbf{KK} \rightarrow \mathbf{AbGp}$  aus Definition 2.23 und Bemerkung 2.24.

In anderen Worten, der singuläre  $n$ -te Homologiefunktor

$$H_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{AbGp}$$

ist gegeben durch die Zuordnungen

$$H_n(X) := H_n(C_*(X))$$

für jeden topologischen Raum  $X$ , und

$$H_n(f) := H_n(C_*(f)) = H_n(f_{\#})$$

für jede stetige Abbildung  $f$ .

Wir werden bald neben dem singulären Kettenkomplex eines topologischen Raumes weitere Beispiele von kettenkomplexwertigen Funktoren kennen lernen, die uns dann, verknüpft mit dem Homologiefunktor auf Kettenkomplexen, weitere Homologiegruppen liefern werden.

Vorher wollen wir uns aber das Leben ein bisschen bequemer machen. Kettenkomplexe sind, wie wir gesehen haben, wesentliche Grundobjekte der Homologietheorie, aber schon jetzt können Sie sehen, dass sie unhandlich sind, weil sie aus unendlich vielen Gruppen und Randhomomorphismen bestehen. Aus diesem Grund werden wir sie in eine Art Kapsel packen, nämlich in eine *einzelne* Gruppe, die die Kettengruppen in allen Dimensionen gleichzeitig in sich birgt und somit ermöglicht, sie alle auf einmal und einheitlich zu behandeln.

Der Trick (der nicht nur für Kettengruppen funktioniert, sondern für beliebige Folgen von abelschen Gruppen) ist ganz einfach: wir machen im Wesentlichen aus einer Folge von Gruppen die entsprechende Reihe, d. h., wir

bilden als Kodierung für die Gruppenfolge die direkte Summe der beteiligter Gruppen. Wir lassen nur solche Homomorphismen zu, die diese Summenstruktur respektieren. Wir können dann die einzelnen Gruppen der Folge und die einzelnen Homomorphismen einer Homomorphismenfolge zwischen ihnen jederzeit aus dem Kapsel wieder herausholen.

**Definition 2.26** Eine *graduierte abelsche Gruppe* ist eine abelsche Gruppe  $G$  zusammen mit einer direkten Summenzerlegung

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n. \quad (2.27)$$

Jede einzelne Gruppe  $G_n$  in dieser Summenzerlegung heißt die  *$n$ -te Stufe* oder der  *$n$ -te homogene Anteil* der graduierten abelschen Gruppe  $G$ . Diese Gruppen sind alle auch Untergruppen von  $G$ .

Seien  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  und  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  graduierte abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen  $f$  *graduiert von Grad  $k \in \mathbf{Z}$*  oder eine *Grad- $k$  Abbildung*, wenn für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt

$$f(G_n) \subseteq H_{n+k}.$$

In diesem Fall und genau in diesem Fall ist  $f_n := f|_{G_n}$  ein Gruppenhomomorphismus

$$f_n: G_n \rightarrow H_{n+k},$$

den wir die  *$n$ -te Stufe* oder den  *$n$ -ten homogenen Anteil* von  $f$  nennen.

Man beachte, dass die Verknüpfung eines graduierten Homomorphismus von Grad  $k$  mit einem graduierten Homomorphismus von Grad  $l$  offensichtlich wieder ein graduiertes Homomorphismus ist, und zwar von Grad  $k + l$ . Und die Identität  $\text{id}_G$  einer graduierten abelschen Gruppe  $G$  ist graduiert von Grad 0.

Somit bilden die graduierten abelschen Gruppen und die graduierten Homomorphismen die Objekte und Morphismen einer Kategorie  $\mathbf{GAG}$ , der *Kategorie der graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen*.

Da die Verknüpfung von zwei Grad-0 Abbildungen wieder Grad 0 hat, und da die Identität  $\text{id}_G$  eine Grad-0 Abbildung ist, erhalten wir eine Unterkategorie  $\mathbf{GAG}_0$  von  $\mathbf{GAG}$ , die die gleichen Objekte wie  $\mathbf{GAG}$  hat, aber die nur die Grad-0 Abbildungen (und nicht alle graduierten Homomorphismen) als Morphismen zulässt. Wir nennen diese Kategorie die *Kategorie der graduierten abelschen Gruppen und Grad-0 Abbildungen*.

**Bemerkung und Definition 2.27** Sei  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  eine graduierte abelsche Gruppe und sei  $a \in G$ . Dann schreibt sich  $a$  auf eindeutige Weise als eine (im Wesentlichen endliche) Summe

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n, \quad (2.28)$$

wo jedes  $a_n \in G_n$  und nur endlich viele  $a_n \neq 0$ . Wir nennen  $a_n$  die *n-te Stufe* oder den *n-ten homogenen Anteil* von  $a$ .

Die Nützlichkeit von graduierten abelschen Gruppen rührt daher, dass die üblichen Operationen, die man mit Gruppen macht (Bildung von Untergruppen, von Quotienten, von Kern und Bild eines Homomorphismus, usw.) bei graduierten abelschen Gruppen „stufenweise“ wirken, so dass man sie gleichzeitig auf alle Einzelstufen einer graduierten abelschen Gruppe ausführen kann, indem man sie auf die ganze Gruppe anwendet; das Ergebnis für die einzelnen Stufen ist trotzdem aus dem Gesamtergebnis wieder auslesbar. Das gibt uns eine sehr effiziente und knappe Notation für die Anwendung solcher Operationen auf alle Glieder einer Folge von Gruppen.

**Bemerkung und Notation 2.28** Seien  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  und  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  graduierte abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow H$  ein graduierter Homomorphismus von Grad  $k$ . Für jedes

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \in G$$

ist

$$f(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a_n) \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_{n+k} = H, \quad (2.29)$$

denn die Darstellung (2.28) für  $a$  ist eine endliche Summe (nur endlich viele Summanden auf der rechten Seite sind  $\neq 0$ ) und  $f$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

In anderen Worten,

$$(f(a))_n = f_{n-k}(a_{n-k}) \quad (2.30)$$

für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .

Aus (2.29) und (2.30) ist klar, dass die homogenen Anteile  $f_n$  eines graduierten Homomorphismus  $f$  diesen eindeutig bestimmen. Andererseits kann man für jede Folge  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  von Homomorphismen

$$f_n: G_n \rightarrow H_{n+k}$$

(für ein fest gewähltes  $k$ ) mit Formel (2.29) einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus  $f: G \rightarrow H$  definieren, dessen Einschränkung auf  $G_n$  gleich  $f_n$  ist und der durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist. Das gilt auch wenn unendlich viele der  $f_n \neq 0$  sind, denn für jedes einzelne  $a \in G$  sind alle bis auf endlich viele  $a_n = 0$ , und somit sind alle bis auf endlich viele  $f_n(a_n) = 0$ , da die  $f_n$  Homomorphismen sind. Die rechte Seite von (2.29) ist also *immer* eine endliche Summe.

Diese Abbildung  $f$  ist offensichtlich ein graduierter Homomorphismus von Grad  $k$  mit den vorgegebenen  $f_n$  als seine homogenen Anteile.

Es gibt also eine Bijektion zwischen den Grad- $k$  Abbildungen  $G \rightarrow H$  und den Folgen von Homomorphismen  $f_n: G_n \rightarrow H_{n+k}$ .

Den eindeutigen graduierten Homomorphismus  $f$  mit den homogenen Anteilen  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  werden wir in Zukunft mit

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n \quad \text{oder} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$$

notieren.

**Definition 2.29** Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe und sei  $A \subseteq G$  eine Untergruppe von  $G$ .

Wir nennen  $A$  eine **graduierete Untergruppe** von  $G$  genau dann, wenn

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (A \cap G_n).$$

In diesem Fall ist  $A$  selber eine graduierte abelsche Gruppe mit Stufen

$$A_n := A \cap G_n \subseteq G_n$$

**Lemma 2.30** Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe.

- a) Sei  $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$  eine graduierte abelsche Gruppe, so dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt  $A_n \subseteq G_n$ . Dann ist  $A_n = A \cap G_n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ , und somit ist  $A$  eine graduierete Untergruppe von  $G$ .

In anderen Worten, die graduierten Untergruppen von  $G$  sind genau die graduierten abelschen Gruppen, deren sämtliche Stufen Untergruppen der entsprechenden Stufen von  $G$  sind.

- b) Sei  $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$  eine graduierte Untergruppe von  $G$  und sei  $g \in G$  mit homogenen Anteilen  $g_n \in G_n$  für  $n \in \mathbf{Z}$ . Dann ist  $g \in A$  genau dann, wenn  $g_n \in A_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .
- c) Sei  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  eine weitere graduierte abelsche Gruppe und sei  $f: G \rightarrow H$  ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$ .
- i)  $\text{Ker } f$  ist eine graduierte Untergruppe von  $G$  und der  $n$ -te homogene Anteil von  $\text{Ker } f$  ist  $\text{Ker } f_n \subseteq G_n$  für jedes  $n$ .
  - ii)  $\text{Bild } f$  ist eine graduierte Untergruppe von  $H$  mit  $n$ -tem homogenen Anteil  $\text{Bild } f_{n-k} \subseteq H_n$  für jedes  $n$ .
- d) Sei  $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$  eine graduierte abelsche Gruppe und  $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$  eine graduierte Untergruppe von  $G$  (so dass  $H_n \subseteq G_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ ). Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\frac{G}{H} \cong \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n}, \quad (2.31)$$

so dass wir  $G/H$  als eine graduierte abelsche Gruppe behandeln können mit Stufen  $G_n/H_n$ .

- e) Seien  $G$  und  $K$  graduierte abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow K$  ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$ , mit homogenen Anteilen  $f_n$ . Sei  $H$  eine graduierte Untergruppe von  $G$  und sei  $L$  eine graduierte Untergruppe von  $K$ , so dass  $f(H) \subseteq L$ .

Dann gilt:

- i) Die Abbildung  $f|_H: H \rightarrow L$  ist ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$  mit  $n$ -tem homogenen Anteil  $f_n|_{H_n}$ .
- ii) Die von  $f$  induzierte Abbildung der Quotienten  $\bar{f}: G/H \rightarrow K/L$  ist vermöge der Isomorphismen (2.31) ein graduerter Homomorphismus von Grad  $k$  und sein  $n$ -ter homogener Anteil ist der von  $f_n$  induzierte Homomorphismus  $\bar{f}_n: G_n/H_n \rightarrow K_{n+k}/L_{n+k}$ . Dies zeigt übrigens, dass der Isomorphismus aus Teil d) tatsächlich **kanonisch** ist, im Sinne einer **natürlichen Äquivalenz**.

*Beweis.* a): Sei  $a \in A$ . Dann hat  $a$  eine eindeutige Darstellung

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

als eine Summe von Elementen  $a_n$  der einzelnen homogenen Anteile  $A_n$  von  $A$ , und weil für jedes  $n$  gilt  $A_n \subseteq G_n$ , ist dies auch die eindeutige Darstellung (2.28) von  $a$  als Summe von Elementen der  $G_n$ .

$a \in G_n$  genau dann, wenn alle homogenen Anteile von  $a$  außer der  $n$ -ten gleich 0 sind, also wenn  $a = a_n \in A_n$ . Somit ist, wie behauptet,  $A \cap G_n = A \cap A_n = A_n$ .

b): Da  $g_n$  die homogenen Anteile von  $g$  sind, hat  $g$  die eindeutige Darstellung

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \quad (2.32)$$

als eine endliche Summe von Elementen der homogenen Anteile  $G_n$  von  $G$ .

Wenn alle  $g_n \in A_n$ , dann ist  $g$  eine endliche Summe von Elementen von  $A$  und somit selber in  $A$ .

Für die andere Richtung, wenn  $g \in A$ , dann hat  $g$  auch eine Darstellung

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

als endliche Summe von homogenen Anteilen  $a_n \in A_n \subseteq G_n$ , und wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (2.32) ist  $g_n = a_n$  für alle  $n$  und somit sind alle  $g_n \in A_n$ .

c): Sei

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \in G,$$

wo die  $a_n$  die homogenen Anteile von  $a$  sind. Nach (2.29) und (2.30) bilden die  $f_n(a_n)$  die homogenen Anteile von  $f(a)$  und

$$f(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a_n) \in H. \quad (2.33)$$

$a \in \text{Ker } f$  genau dann, wenn  $f(a) = 0$ , und dies gilt genau dann, wenn alle homogenen Anteile  $f_n(a_n)$  von  $f(a)$  Null sind, also genau dann, wenn  $a_n \in \text{Ker } f_n$  für alle  $n$ . Nach Teil b) ist das gleichbedeutend damit, dass  $a \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } f_n$ , also ist

$$\text{Ker } f = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } f_n.$$

Nach Teil a) ist  $\text{Ker } f$  eine graduierte Untergruppe von  $G$  mit homogenen Anteilen  $\text{Ker } f_n \subseteq G_n$ . Das beweist i).

Aus Gleichung (2.33) ist klar, dass  $f(G) \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$ . Für die Inklusion in der anderen Richtung, sei

$$b = \sum_{m \in \mathbf{Z}} b_m \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n) \subseteq H.$$

Nach Teil b) ist dann jedes  $b_m$  in der  $m$ -ten Stufe von  $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$ , und diese ist  $f_{m-k}(G_{m-k})$ , da  $f$  Grad  $k$  hat. Insbesondere können wir für jedes  $m \in \mathbf{Z}$  ein Element  $a_{m-k} \in G_{m-k}$  finden, so dass  $f_{m-k}(a_{m-k}) = b_m$ . Falls  $b_m = 0$  wählen wir speziell  $a_{m-k} = 0$ . Da nur endlich viele  $b_m \neq 0$ , sind somit nur endlich viele  $a_{m-k} \neq 0$ , und  $a := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$  ist ein wohldefiniertes Element von  $G$ , für das  $f(a) = b$  nach (2.33) und der Wahl der  $a_n$ .

Wir haben also die Gleichheit  $f(G) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$  gezeigt, und nach Teil a) ist  $f(G)$  eine graduierte Untergruppe von  $H$  mit  $f_n(G_n) \subseteq H_{n+k}$  als  $n+k$ -te Stufe für jedes  $n$ . Das beweist ii).

d): Für jedes  $n$  sei  $\pi_n: G_n \rightarrow G_n/H_n$  die kanonische Projektion auf den Quotienten und sei

$$p = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_n: G \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n}.$$

Dies ist ein graduierter Homomorphismus von Grad 0 mit homogenen Anteilen  $\pi_n$ .

Da jedes  $\pi_n$  surjektiv ist, folgt aus Teil c) ii), dass  $p$  surjektiv ist. Nach Teil c) i) ist

$$\text{Ker } p = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } \pi_n = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$$

und aus dem ersten Isomorphiesatz für Quotienten induziert  $p$  einen Isomorphismus

$$\bar{p}: \frac{G}{H} \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n},$$

gegeben durch

$$\bar{p} \left( \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \right] \right) = p \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_n]. \quad (2.34)$$

Zu e) i): Sei  $h_n \in H_n \subseteq H$ . Weil  $f$  graduiert ist, ist  $f(h_n) = f_n(h_n) \in K_{n+k}$ . Weil  $f(H) \subseteq L$ , gehört  $f_n(h_n)$  nach Teil b) sogar zu  $L_{n+k}$ .

Also ist  $f(H_n) \subseteq L_{n+k}$  für jedes  $n$  und somit ist  $f|_H: H \rightarrow L$  graduiert von Grad  $k$ .

Zu e) ii): Aus Teil i) folgt  $f_n(H_n) \subseteq L_{n+k}$  für jedes  $n$ , und somit induziert jedes  $f_n$  einen Homomorphismus

$$\bar{f}_n: G_n/H_n \rightarrow K_{n+k}/L_{n+k}.$$

Sei

$$g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n \in G.$$

Vermöge des Isomorphismus (2.34) und nach der Definition von  $\bar{f}$  können wir schreiben

$$\begin{aligned}\bar{f}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_n]\right) &= \bar{f}([g]) = [f(g)] \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(g_n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_n(g_n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}_n([g_n]).\end{aligned}$$

Bezüglich der Graduierung von  $G/H$  aus Teil d) hat  $\bar{f}$  die gleiche Formel, wie die Grad- $k$  Abbildung  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{f}_n$ .

Das heißt,  $\bar{f}$  ist diese Abbildung und ist somit eine graduierte Abbildung von Grad  $k$  mit homogenen Anteilen  $\bar{f}_n$ . ■

Mit Hilfe der graduierten abelschen Gruppen können wir Kettenkomplexe und ihre Homologie viel prägnanter und einfacher definieren, als wir es oben getan haben (die neue Definition ist aber äquivalent zur alten und übersetzt sie nur in eine andere Sprache).

### Definition 2.31 (Kettenkomplex und Homologie, graduiert)

- a) Ein **Kettenkomplex**  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  besteht aus einer graduierten abelschen Gruppe  $C$  und einem graduierten Homomorphismus  $\partial: C \rightarrow C$  von Grad  $-1$ , genannt der **Randoperator**, so dass

$$\partial \circ \partial = 0 \tag{2.35}$$

(oder  $\partial^2 = 0$ , wie wir oft schreiben werden).

- b) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

ist ein graduierter Homomorphismus  $C \rightarrow D$  von Grad 0, so dass

$$\partial' \circ f = f \circ \partial. \tag{2.36}$$

- c) Die Kettenkomplexe bilden, wie man leicht nachprüft, die Objekte einer Kategorie **KK**, deren Morphismen die Kettenabbildungen sind.
- d) Sei  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  ein Kettenkomplex. Wir nennen die graduierte abelsche Gruppe

$$Z = Z(\mathcal{C}) := \text{Ker } \partial$$

die graduierte **Zyklengruppe von  $\mathcal{C}$**  und wir nennen die graduierte abelsche Gruppe

$$B = B(\mathcal{C}) := \text{Bild } \partial$$

die graduierte **Rändergruppe von  $\mathcal{C}$** .

e) Wegen (2.35) ist  $B \subseteq Z$ . Die graduierte abelsche Gruppe

$$H(\mathcal{C}) := \frac{Z}{B} \tag{2.37}$$

heißt die graduierte **Homologiegruppe** von  $\mathcal{C}$ .

f) Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei Kettenkomplexe und sei

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

eine Kettenabbildung. Aus (2.36) folgt

$$f(Z(\mathcal{C})) \subseteq Z(\mathcal{D})$$

und

$$f(B(\mathcal{C})) \subseteq B(\mathcal{D}).$$

Deshalb induziert  $f$  einen wohldefinierten Homomorphismus

$$H(f) := \bar{f}: H(\mathcal{C}) = \frac{Z(\mathcal{C})}{B(\mathcal{C})} \longrightarrow \frac{Z(\mathcal{D})}{B(\mathcal{D})} = H(\mathcal{D}),$$

der nach Lemma 2.30 e) ii) auch ein graduierter Homomorphismus von Grad 0 ist. Wir nennen  $H(f)$  die graduierte **Homologieabbildung** oder den graduieren **Homologiehomomorphismus**, der von der Kettenabbildung  $f$  induziert wird.

g) Die graduierte Homologie ist ein Funktor

$$H: \mathbf{KK} \longrightarrow \mathbf{GAG}.$$

Der Nachweis der erforderlichen Eigenschaften ist trivial.

Der Vorteil dieser neuen Definition der Kettenkomplexe und ihrer Homologie ist, dass wir nun die gesamte Homologie eines Kettenkomplexes als eine einzelne graduierte abelsche Gruppe erhalten, statt einer Folge von ganz vielen Homologiegruppen  $H_n(\mathcal{C})$  in allen einzelnen Dimensionen. Damit ist sehr viel einfacher und effizienter umzugehen.

Wir werden in Zukunft beide Versionen verwenden, je nachdem, welche Version für die jeweilige Betrachtung angebracht erscheint, aber in der Regel wird die bevorzugte Version die graduierte sein.

**Beispiele 2.32** a) Sei  $G$  eine beliebige additive abelsche Gruppe. Wir können aus  $G$  eine offensichtlich zu  $G$  isomorphe und deshalb auch  $G$  benannte graduierte abelsche Gruppe

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

machen, indem wir  $G_0 = G$  setzen und  $G_m = \{0\}$  setzen für alle  $m \neq 0$ .

Entsprechend wird jeder Gruppenhomomorphismus  $f: G \rightarrow H$  von additiven abelschen Gruppen zu einem Grad-0 Homomorphismus

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$$

der graduierten abelschen Gruppen  $G \rightarrow H$ , wenn wir  $f_0 = f$  setzen und  $f_m = 0$  setzen für alle  $m \neq 0$  (was bleibt uns anderes übrig?). Natürlich nimmt  $f$  als Grad-0 Abbildung der graduierten abelschen Gruppen genau die gleichen Werte an, wie der ursprüngliche Homomorphismus  $f$  der ursprünglichen abelschen Gruppen.

Auf diese Weise wird **AbGp** zu einer (sogar vollen) Unterkategorie der Kategorie **GAG**<sub>0</sub>.

b) Seien  $X_1, X_2, \dots, X_m$  endlich viele Unbekannte. Ein **Monom**  $X^\alpha$  in  $X_1, \dots, X_m$  ist ein Ausdruck der Form

$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_m^{\alpha_m},$$

wo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$  ein  $m$ -Tupel von natürlichen Zahlen ist. Der **Grad** des Monoms  $X^\alpha$  ist definiert als die natürliche Zahl

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m.$$

Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Die additive abelsche Gruppe  $(\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m])_n$ , definiert als die freie abelsche Gruppe erzeugt von allen Monomen in  $X_1, \dots, X_m$  von Grad  $n$ , heißt die **additive Gruppe der homogenen Polynome in  $X_1, \dots, X_m$  von Grad  $n$** , und

$$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m])_n$$

heißt die **additive Gruppe der ganzzahligen Polynome in den Variablen  $X_1, \dots, X_m$** .

$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m]$  ist ein Beispiel einer graduierten abelschen Gruppe, aber noch besser, die formale Multiplikation

$$X^\alpha \cdot X^\beta := X^{\alpha+\beta}$$

(wo  $\alpha + \beta$  in  $\mathbf{N}^m \subseteq \mathbf{Z}^m$  zu verstehen ist) erweitert sich eindeutig zu einer bilinearen Abbildung

$$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] \times \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m],$$

die eine Ringmultiplikation ist und  $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m]$  zu einem graduierten Ring macht, genannt der *Polynomring über  $\mathbf{Z}$  in den Unbekannten  $X_1, \dots, X_m$* .

Für jedes Monom  $X^\alpha$  ist die Multiplikation mit  $X^\alpha$  ein graduierter Homomorphismus

$$\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m]$$

von Grad  $|\alpha|$ .

- c) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Für  $n \in \mathbf{N}$  sei  $C_n(X)$  die singuläre Kettengruppe von  $X$  wie in Definition 2.11 und für jedes  $n$  sei  $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$  der singuläre Randoperator aus Definition 2.17. Für  $n < 0$  sei  $C_n(X) := \{0\}$  und für  $n \leq 0$  setze  $\partial_n := 0: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ .

Wir definieren  $C_*(X)$  als die graduierte abelsche Gruppe

$$C_*(X) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n(X)$$

und  $\partial: C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$  als den graduierten Homomorphismus

$$\partial := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \partial_n$$

von Grad  $-1$ .

Weil die Verknüpfung von graduierten Homomorphismen offenbar stufenweise ausgerechnet werden kann (wende Gleichung (2.29) an) folgt aus Lemma 2.19 b), dass  $\partial^2 = 0$ .

Also ist  $\mathcal{C}(X) := (C_*(X), \partial)$  ein Kettenkomplex im Sinne von Definition 2.31. Wir nennen diesen Kettenkomplex den *singulären Kettenkomplex* des topologischen Raumes  $X$ .

Dies ist kein Widerspruch zur früheren Definition 2.22 des singulären Kettenkomplexes eines topologischen Raumes oder zur Verwendung der in Definition 2.22 schon eingeführten Notation  $C_*(X)$ . Es stellt lediglich die Übersetzung dieser Begriffe in die graduierte Version von Kettenkomplexen dar, wie in Definition 2.31. Beide Versionen sind nur verschiedene Schreibweisen für die letztendlich gleiche Struktur.

Wenn  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so ist

$$C_*(f) = f_{\#} := \sum_{n=0}^{\infty} C_n(f)$$

eine Grad-0 Abbildung und wegen Lemma 2.19 a) ist sie eine Kettenabbildung im Sinne von Definition 2.31, was sich leicht nachrechnen lässt unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Verknüpfungen von graduierten Homomorphismen sich stufenweise berechnen lassen.

Wir bezeichnen die graduierte Zyklengruppe  $\text{Ker } \partial$  des Kettenkomplexes  $C_*(X)$  fortan mit  $Z_*(X)$  und die graduierte Rändergruppe  $\text{Bild } \partial$  des Kettenkomplexes  $C_*(X)$  mit  $B_*(X)$ . Die graduierte Homologiegruppe dieses Kettenkomplexes bezeichnen wir mit  $H_*(X)$  und nennen sie die **graduierte singuläre Homologiegruppe** des Raumes  $X$ .

Alle diese graduierten Gruppen haben als ihre homogenen Anteile in den verschiedenen Dimensionen die in Definition 2.23 a) eingeführten Zyklen-, Ränder-, bzw. Homologiegruppen für den singulären Kettenkomplex von  $X$ . Das folgt sofort aus Lemma 2.30 c) und d), und wenn  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung ist, dann folgt aus Lemma 2.30 e), dass die homogenen Anteile des von der Kettenabbildung  $C_*(f)$  induzierten Grad-0 Homomorphismus

$$H_*(f) = f_* := H(C_*(f)): H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

die in den einzelnen Dimensionen induzierten Homomorphismen

$$H_n(f_{\#}) = H_n(C_*(f))$$

aus Definition 2.23 b) sind.

Der graduierte Kettenkomplex  $(C_*(X), \partial)$  und die graduierte Homologiegruppe  $H_*(X)$  bringen also nichts Neues, sondern sind nur eine bequeme und nützliche Zusammenfassung der bisherigen Folgen der singulären Kettengruppen und der Homologiegruppen  $H_n(X)$  jeweils zu einer einzigen Gesamtgruppe, ohne dass Details verloren gehen.

Wir haben mit den graduierten abelschen Gruppen eine sehr knappe und effiziente Formulierung der Definition der singulären Homologie eines topologischen Raumes gefunden. Wir werden gleich darangehen, Methoden zur Berechnung der Homologie zu entwickeln, und wir werden diese Berechnungen systematisch im nächsten Kapitel durchführen. Auch ganz einfache Beispiele werden wir deshalb auf den nächsten Abschnitt vertagen, mit einer trivialen Ausnahme:

**Beispiel 2.33** Sei  $X := \emptyset$  der leere topologische Raum. Dann gibt es überhaupt keine singulären Simplexes in  $X$  und somit auch keine Erzeugenden der Kettengruppe. Es folgt

$$C_*(\emptyset) = \{0\} \quad \text{und} \quad H_*(\emptyset) = \{0\}.$$

Das jetzige Kapitel wollen wir mit einem wichtigen weiteren Beispiel von einem Kettenkomplex beenden, der den Homologiebegriff auf die Kategorie  $\mathbf{Top}^2$  überträgt, eine Verallgemeinerung, die auch für die Berechnung der Homologie in  $\mathbf{Top}$  erforderlich ist.

**Definition 2.34** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard, also ein Objekt der Kategorie  $\mathbf{Top}^2$  (das bedeutet, dass  $X$  ein topologischer Raum ist und  $A$  ein Unterraum von  $X$ ). Sei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.

Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Offensichtlich kann man  $S_n(A)$  als eine Teilmenge von  $S_n(X)$  betrachten (die Inklusion  $S_n(A) \hookrightarrow S_n(X)$  ist gegeben durch  $i_{\#}$ ). Somit wird auch  $C_n(A)$  zu einer Untergruppe von  $C_n(X)$  für jedes  $n$ ; wir fassen dabei jede Kette auf  $A$  als eine Kette auf  $X$  auf, deren Koeffizienten auf Simplexes, die nicht in  $A$  enthalten sind, alle 0 sind.

Also ist  $C_*(A)$  eine graduierte Untergruppe von  $C_*(X)$ ; die Grad-0 Abbildung  $i_{\#} = C_*(i)$  ist die Inklusion  $C_*(A) \rightarrow C_*(X)$ .

Dies ist aber eine Kettenabbildung, und wenn man die Bedingung dafür,  $\partial \circ i_{\#} = i_{\#} \circ \partial$ , richtig liest, besagt sie einfach, dass  $\partial_A = \partial_X|_{C_*(A)}$  und somit

$$\partial_X(C_*(A)) \subseteq C_*(A) \tag{2.38}$$

Folglich induziert  $\partial_X$  einen graduierten Homomorphismus

$$\bar{\partial}: \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \longrightarrow \frac{C_*(X)}{C_*(A)}$$

von Grad -1, und weil  $\partial_X^2 = 0$ , gilt auch  $\bar{\partial}^2 = 0$ .

Wir bezeichnen die graduierte abelsche Gruppe  $C_*(X)/C_*(A)$  fortan mit  $C_*(X, A)$ . Wir haben soeben gesehen, dass das Paar

$$\mathcal{C}(X, A) := (C_*(X, A), \bar{\partial})$$

ein Kettenkomplex ist. Wir nennen ihn den **relativen singulären Kettenkomplex** des Raumpaars  $(X, A)$ .

Seine Zyklengruppe bezeichnen wir mit  $Z_*(X, A)$  und seine Rändergruppe mit  $B_*(X, A)$ .

Die Homologiegruppe von  $\mathcal{C}(X, A)$  wird mit  $H_*(X, A)$  notiert und heißt die **relative graduierte Homologiegruppe** des Raumpaars  $(X, A)$ . Ihre homogenen Anteile  $H_n(X, A)$  heißen die **relativen Homologiegruppen** des Paares  $(X, A)$ .

**Bemerkung 2.35** Hier ein paar Gedanken, die vielleicht helfen, die relativen Kettengruppen und die relative Homologie zu verstehen.

Der Nenner von  $C_*(X, A)$  ist  $C_*(A)$  und besteht aus allen endlichen Summen und Differenzen von singulären Simplizes in  $A$ . Eine Kette  $c \in C_*(X, A)$  ist zwar eigentlich nur eine Äquivalenzklasse oder Restklasse von Ketten in  $X$ , aber da man bei der Quotientenbildung im Wesentlichen nur alle singulären Simplizes in  $A$  gleich 0 setzt, hat jede relative Kette  $c$  einen eindeutigen Repräsentanten  $c' \in C_*(X)$ , der eine endliche  $\mathbf{Z}$ -Linearkombination von singulären Simplizes ist, die *nicht ganz in  $A$  enthalten sind*.

Wenn  $c' \in C_*(X)$  irgendein Repräsentant von  $c$  ist, dann ist  $c$  genau dann ein relativer Zyklus, nicht wenn  $\partial c' = 0$ , sondern wenn  $\partial c'$  eine Kette in  $A$  ist, also nur Simplizes enthält, die ganz in  $A$  liegen.

Und  $c$  ist genau dann ein Rand im relativen Kettenkomplex, wenn  $c'$  zu einem Rand von  $C_*(X)$  gemacht werden kann durch Addition einer geeigneten Kette ganz in  $A$ , wenn sich also  $c'$  von einem Rand in  $C_*(X)$  nur durch eine Kette in  $A$  unterscheidet ( $c'$  muss aber nicht selber ein Rand in  $C_*(X)$  sein).

**Bemerkung und Definition 2.36** Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  topologische Raumpaare und sei

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

eine stetige Abbildung von Raumpaaren.

Weil  $f(A) \subseteq B$  ist

$$f_{\#}(C_*(A)) \subseteq C_*(B)$$

und  $f_{\#} = C_*(f)$  induziert somit einen wohldefinierte graduierten Homomorphismus

$$\bar{f}_{\#}: C_*(X, A) = \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \longrightarrow \frac{C_*(Y)}{C_*(B)} = C_*(Y, B),$$

der eine Kettenabbildung ist (d. h., mit  $\bar{\partial}$  kommutiert), weil schon  $f_{\sharp}$  mit  $\partial$  kommutiert.

Diese Kettenabbildung der relativen Kettenkomplexe bezeichnen wir auch mit  $C_*(f)$ , da aus dem Kontext immer hervorgeht, welche der so bezeichneten Abbildungen gemeint ist.

$C_*(f)$  induziert natürlich auch in Homologie einen Grad-0 Homomorphismus

$$H_*(f) = f_* := H(C_*(f)): H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B).$$

**Lemma 2.37**  $C_*$  (wie in Definition 2.34 für Raumpaare definiert) ist ein Funktor  $\mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{KK}$ . Somit ist auch  $H_*$  ein Funktor  $\mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{GAG}$ .

*Beweis.* Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, und für die erste Behauptung müssen nur die funktoriellen Eigenschaften der Zuordnung von Morphismen zu Morphismen nachgeprüft werden, nämlich, dass

$$\bar{\text{id}}_{\sharp} = C_*(\text{id}_{(X,A)}) = \text{id}_{C_*(X,A)}$$

und dass

$$C_*(g \circ f) = C_*(g) \circ C_*(f),$$

wenn  $f$  eine stetige Abbildung von Raumpaaren  $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$  ist und  $g$  eine stetige Abbildung  $(Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ .

Beides ist aber trivial. ■

**Bemerkung 2.38** In Beispiel 1.10 c) hatten wir gesehen, dass man  $\mathbf{Top}$  als eine Unterkategorie von  $\mathbf{Top}^2$  auffassen kann, wenn man jeden topologischen Raum  $X$  mit dem Raumpaar  $(X, \emptyset)$  identifiziert, und die Inklusion  $J: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}^2$  ist ein Funktor nach Beispiel 1.13 b).

Weil  $C_*(\emptyset) = \{0\}$  (Beispiel 2.33) ist  $C_*(X, \emptyset) = C_*(X)$  oder in anderen Worten  $H_* \circ J = H_*$  auf  $\mathbf{Top}$ .

Umgekehrt haben wir nach Beispiel 1.13 g) auf  $\mathbf{Top}^2$  die vergesslichen Funktoren  $P_1(X, A) := X$  und  $P_2(X, A) = A$ .

Für jedes topologische Raumpaar  $(X, A)$  gibt es Inklusionen  $i: A \longrightarrow X$  und  $j: X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ , und nach der Definition der Morphismen von  $\mathbf{Top}^2$  ist  $i$  eine natürliche Transformation  $P_2 \longrightarrow P_1$  und  $j$  eine natürliche Transformation  $P_2 \longrightarrow \text{id}_{\mathbf{Top}^2}$ ; die genannten Inklusionen sind also *natürliche Inklusionen*.

Wenn wir Lemma 1.29 anwenden, sehen wir dass  $i_{\sharp} = C_* \circ i$  salopp gesagt eine natürliche Transformation  $C_*(A) \longrightarrow C_*(X)$  ist, und  $j_{\sharp} = C_* \circ j$  ist eine natürliche Transformation  $C_*(X) \longrightarrow C_*(X, A)$ . Entsprechend ist  $i_* = H_* \circ i_{\sharp}$

eine natürliche Transformation  $H_*(A) \longrightarrow H_*(X)$  und  $j_* = H_* \circ j_{\#}$  eine natürliche Transformation  $H_*(X) \longrightarrow H_*(X, A)$ .

(Korrekt ausgedrückt müsste man sagen:  $i_{\#}$  ist eine natürliche Transformation  $C_* \circ P_2 \longrightarrow C_* \circ P_1$  und  $j_{\#}$  ist eine natürliche Transformation  $C_* \circ P_1 \longrightarrow C_*$ ; ferner ist  $i_*$  eine natürliche Transformation  $H_* \circ P_2 \longrightarrow H_* \circ P_1$  und  $j_*$  ist eine natürliche Transformation  $H_* \circ P_1 \longrightarrow H_*$ . Aber auch die saloppe Formulierung versteht man nicht falsch und man „verinnerlicht“ sie etwas besser.)

Im folgenden Kapitel werden wir noch eine dritte natürliche Transformation zwischen diesen Homologiefunktoren konstruieren, diesmal eine von Grad -1, aber das ist schon Teil der Berechnung der Homologie, womit wir sofort beginnen wollen.



# Kapitel 3

## Die Eilenberg-Steenrod Axiome

In diesem Kapitel wollen wir Methoden entwickeln zur Berechnung der Homologiegruppen von topologischen Räumen und Raumpaaren. Zum Glück ist das einfacher, als im Falle der Homotopie.

Natürlich würden wir auch gerne ein bisschen mehr über das Verhalten des Homologiefunktors und seiner Grundeigenschaften wissen, als wir in Kapitel 2 herleiten konnten (genauer gesagt haben wir in Kapitel 2 noch nicht einmal den Versuch unternommen, viel darüber herauszubekommen). Aber dieses Ziel widerspricht sich nicht mit dem erstgenannten. Im Gegenteil, beide ergänzen sich hervorragend, und wir könnten genauso gut sagen, in diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten Eigenschaften der Homologie im Detail erforschen.

Deshalb heißt das Kapitel auch nicht „Berechnung der Homologie“ oder so ähnlich, sondern in der Kapitelüberschrift ist von gewissen „Axiomen“ die Rede. Das hat folgendes Bewandnis.

Es gibt im Wesentlichen nur einen topologischen Raum (oder etwas präziser, nur eine sehr kleine Klasse von topologischen Räumen), deren singuläre Homologiegruppen man direkt anhand der Definition ausrechnet, in dem man die singulären Kettengruppen und die singulären Randoperatoren genau angibt. Für andere Varianten der Homologie, etwa die simpliziale, ist das nicht so — da berechnet man fast alle Homologiegruppen direkt über die dort sehr viel kleineren Kettengruppen (das erfordert allerdings die Vorarbeit, den topologischen Raum zu triangulieren, d. h., ihn zu einem Simplizialkomplex zu machen).

Bei der singulären Homologie ist die direkte Berechnung nur für wenige Räume überhaupt möglich, weil fast alle Räume sehr große Kettengruppen haben, in denen man schwer rechnen kann. Die einzige wesentliche nichtleere Ausnahme, bei der eine direkte Berechnung sogar die einzige Möglichkeit ist, ist der Einpunktraum oder etwas allgemeiner, total unzusammenhängende to-

pologische Räume, also Räume, die eine spezielle und nicht sehr interessante topologische Struktur haben.

Bei allen anderen Räumen benutzt man die *Eigenschaften* der singulären Homologie, um die Homologiegruppen des gegebenen Raumes mit der Homologie von einfacheren Räumen in Verbindung zu bringen, deren Homologie man vorher schon ausgerechnet hat. Stellt man die richtigen Verbindungen her, so kann man aus der schon bekannten Homologie der einfacheren Räume die Homologie des neuen Raumes genau bestimmen.

Der Ausgangspunkt für diese Methodik ist natürlich die Homologie des Einpunktraumes. Für alles andere wird eine Werkzeugkiste eingesetzt, die aus einer kleinen Liste von Standardsätzen besteht, über die Homologie eben des Einpunktraumes und über die Beziehungen zwischen den Homologiegruppen verschiedener verwandter Raumpaare.

Diese Standardsätze oder Standardeigenschaften der Homologie sind aber typisch für alle üblichen Varianten der Homologie und sind so wichtig, dass sie von Eilenberg und Steenrod 1952 aufgezählt wurden in Form einer Liste von *Axiomen der Homologie*. Es handelt sich allerdings nicht wirklich um Axiome, sondern um grundlegende Sätze, die wir für die singuläre Homologie auch beweisen werden.

Die eigentliche Aussage des Satzes von Eilenberg und Steenrod war, dass diese grundlegenden Sätze über Homologie in einer ganzen Reihe von topologischen Kategorien gelten (genannt „zulässige Kategorien“), und dass sie für die Kategorie der kompakten Polyederpaare (in anderen Worten, der Paare von kompakten Simplicialkomplexen) die Homologie bis auf Isomorphie eindeutig charakterisieren. Sie *gelten* aber in weit mehr als dieser einen Kategorie und können dort anstelle der eigentlichen, womöglich komplizierten Konstruktion der Homologie als wären sie Axiome benutzt werden, um alle wichtigen Eigenschaften der Homologietheorie herzuleiten. Zu diesen „wichtigen Eigenschaften“ gehört auch die Berechnung der Homologiegruppen beliebiger Räume.

Diese axiomatische Vorgehensweise hat mehrere Vorteile: sie ist in der Regel einfacher als ein unmittelbares Hantieren mit der jeweiligen Homologiekonstruktion; sie ist äußerst leistungsfähig, wenn man in der Anwendung ein bisschen Übung hat (insbesondere leistungsfähig genug, um die Vorteile der simplicialen über die singuläre Homologie völlig wettzumachen); sie ist universell, in dem Sinne, dass man mit *einem* Beweis den gleichen Satz für viele verschiedene Homologietheorien herleiten kann, ohne sich auf die Details und Unterschiede dieser Theorien zu beziehen (vor der Einführung dieser Axiome gab es chaotische Zustände, weil mehrere verschiedene Homologietheorien auf dem Markt waren, mit denen man sich einzeln beschäftigen musste); und schließlich machen sie ganz klar und deutlich, worauf es in der Homologie ankommt, d. h., welche Eigenschaften für Homologietheorien ty-

pisch sind und welche Eigenschaften eine Theorie haben sollte, um als eine Homologietheorie zu gelten.

Der letzte Punkt soll nicht unterschätzt werden, denn er bietet einen Prüfstein für Ideen zur Entwicklung neuer Varianten der Homologie, die vielleicht Fragen lösen können, die die klassischen Homologievarianten nicht beantworten können. Seit dem Erscheinen von Eilenberg und Steenrods Buch sind eine ganze Anzahl von „verallgemeinerten Homologietheorien“ und „verallgemeinerten Kohomologietheorien“ entwickelt worden, die auf ganz andersartige Merkmale aufgebaut sind, z.B. auf Vektorbündel, auf Kobordismen usw., und die zwar nicht alle Eilenberg-Steenrod Eigenschaften erfüllen, aber nur geringfügig und in einzelnen Punkten davon abweichen und somit insgesamt eine einheitliche Theorie bilden.

Für diese verallgemeinerten Theorien gibt es heute modernere und allgemeinere Konstruktionsmöglichkeiten, die starke Beziehungen zur Homotopietheorie haben und die in vielen Kategorien anwendbar sind, und die die Einzelkonstruktionen der verschiedenen Homologie- und Kohomologietheorien zusammenfassen und ersetzen können. Was bei diesen Konstruktionen passiert, kann man aber am besten verstehen, wenn man eine wichtige Homologietheorie schon kennt. Aus diesem Grund werden wir die klassische Untersuchung der singulären Homologie weiterführen und müssen leider aus Zeitgründen und Mangel an den nötigen Grundlagen darauf verzichten, viel zum modernen Zugang zu sagen.

Für die singuläre Homologie bieten die Eilenberg-Steenrod Axiome fast den einzigen praktikablen Weg, in die Theorie einzudringen und darin weiter zu kommen. Unser erstes Ziel wird deshalb sein, diese Axiome zu beweisen, damit wir sie anwenden können.

Es gibt vier Axiome in der Eilenberg-Steenrod Liste, und eines ist ganz einfach und beschreibt nur die Homologie des Einpunktraumes (die wir direkt ausrechnen werden). Ein anderes besagt, dass die Homologie homotopieinvariant ist, d. h., Räume mit dem gleichen Homotopietyp haben die gleiche Homologie und homotope Abbildungen induzieren die gleichen Homomorphismen in Homologie.

Die verbleibenden beiden Axiome beschreiben die Beziehung zwischen der Homologie eines Raumpaars  $(X, A)$  und der Homologie der einzelnen Räume  $X$  und  $A$ , oder zwischen der Homologie eines Raumes und der Homologie zweier offener Mengen, die den Raum überdecken, sowie von ihrem Durchschnitt. Diese Beziehung wird aber nicht direkt und eindeutig ausgedrückt, etwa durch Isomorphismen, sondern durch eine gewisse algebraische Konstruktion, genannt eine *exakte Folge* von Gruppen und Homomorphismen, aus der man in speziellen Fällen genaue Informationen herleiten kann, aber in ungünstigen Fällen eben nicht sehr viel über die einzelnen Gruppen

und Homomorphismen herausbekommt. Die ganze Kunst der Anwendung besteht darin, eine Berechnungsaufgabe so zu zerlegen, dass die günstigen Fälle auftreten und man am Ende klare Ergebnisse erhält.

Wegen der Wichtigkeit dieser algebraischen Konstruktion in der ganzen Homologietheorie beginnen wir dieses Kapitel mit einem kurzen Abschnitt über exakte Folgen, auch als Vorbereitung für die Formulierung der Eilenberg-Steenrod Axiome.

**Definition 3.1** Sei  $\mathcal{F}$  eine Folge von Gruppen und Homomorphismen (also ein linear angeordnetes Diagramm wie in Definition 1.20 a)) und in  $\mathcal{F}$  komme die Teilfolge

$$\dots A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \dots \quad (3.1)$$

vor. Hier können die Punkte leer sein oder für weitere Homomorphismen und Gruppen stehen.

Wir sagen (3.1) oder  $\mathcal{F}$  ist *exakt an der Stelle B*, wenn

$$\text{Bild } f = \text{Ker } g. \quad (3.2)$$

Wir nennen die ganze Folge  $\mathcal{F}$  eine *exakte Folge*, wenn sie an jeder Stelle, wo es Sinn macht, d. h., an jeder Stelle der Gestalt von  $B$  in (3.1), exakt ist.

(Wenn die Folge  $\mathcal{F}$  eine erste oder eine letzte Gruppe hat, d. h., wenn sie irgendwo beginnt oder irgendwo endet, dann lässt sich die Definition natürlich nicht auf diese erste oder letzte Stelle anwenden, weil dort entweder der eingehende Homomorphismus  $f$  oder der abgehende Homomorphismus  $g$  fehlt.)

**Bemerkung 3.2** Die Exaktheitsbedingung (3.2) impliziert, dass in einer exakten Folge (oder an jeder exakten Stelle in einer nicht überall exakten Folge) die Verknüpfung zweier aufeinanderfolgender Homomorphismen der triviale Homomorphismus 0 ist (im nichtabelschen Fall entsprechend der triviale Homomorphismus mit konstantem Wert 1).

Insbesondere ist eine exakte Folge von abelschen Gruppen immer auch ein Kettenkomplex, allerdings kein sehr interessanter Kettenkomplex, denn Bedingung (3.2) besagt gerade, dass alle Rändergruppen *gleich* den Zyklengruppen der gleichen Dimension sind, also dass die Homologie in jeder Dimension  $\{0\}$  ist.

Man kann das so verstehen, dass die Homologie eines Kettenkomplexes ein Maß für seine *Nichtexaktheit* ist!

Folgende Beispiele werden ein bisschen deutlicher machen, was Exaktheit bedeutet oder bedeuten kann. Wir beschränken uns dabei bewusst auf den

Fall von additiven abelschen Gruppen, weil wir diesen vorrangig betrachten werden, aber die Aussagen gelten auch (wenn man 1 statt 0 schreibt) für den nichtabelschen Fall.

**Lemma 3.3** a) Wenn  $f = 0$ , dann ist (3.1) genau dann exakt, wenn  $g$  injektiv ist.

Insbesondere,  $\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{g} C$  ist genau dann exakt, wenn  $g$  injektiv ist.

b) Wenn  $g = 0$ , dann ist (3.1) genau dann exakt, wenn  $f$  surjektiv ist.

Insbesondere,  $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\}$  ist genau dann exakt, wenn  $f$  surjektiv ist.

c)  $\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow \{0\}$  ist genau dann exakt, wenn  $A = \{0\}$ .

d)  $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\}$  ist genau dann exakt, wenn  $f$  ein Isomorphismus ist.

*Beweis.* a): Wenn  $f = 0$ , so ist  $\text{Bild } f = \{0\}$  und (3.1) ist genau dann exakt, wenn dies  $\text{Ker } g$  ist, also, wenn  $g$  injektiv ist.

b): Wenn  $g = 0$ , so ist  $\text{Ker } g = B$  und (3.1) ist genau dann exakt, wenn dies  $\text{Bild } f$  ist, also, wenn  $f$  surjektiv ist.

c): Das Bild der linken Abbildung ist  $\{0\} \subseteq A$ ; der Kern der rechten Abbildung ist ganz  $A$ ; das Diagramm ist genau dann exakt, wenn sie gleich sind, also wenn  $A = \{0\}$ .

d) folgt sofort aus a) und b). ■

Für kompliziertere (insbesondere längere) Folgen als diese beinhaltet die Exaktheit außer in Spezialfällen nicht so eine klare Aussage wie in diesen ganz einfachen Beispielen, aber sie liefert trotzdem viel Information. Der nächstkompliziertere Fall sieht so aus wie 3.3 d), aber ist in der Mitte um eine nichttriviale Gruppe länger. Dieser Fall ist so wichtig, dass er einen eigenen Namen hat:

**Definition 3.4** Eine *kurze exakte Folge* von abelschen Gruppen und Homomorphismen ist eine exakte Folge der speziellen Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (3.3)$$

Auch hier können wir etwas sagen über die Gruppen, die in der Folge vorkommen:

**Definition 3.5** Seien  $G$  und  $H$  abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Die Quotientengruppe

$$\frac{H}{\text{Bild } f}$$

heißt der **Cokern** von  $f$  und wird mit  $\text{Coker } f$  bezeichnet.

**Lemma 3.6** Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen. Dann ist

$$f: A \rightarrow f(A) = \text{Ker } g \subseteq B$$

ein Isomorphismus, und  $g$  induziert einen Isomorphismus

$$\bar{g}: \text{Coker } f = \frac{B}{f(A)} \rightarrow C.$$

*Beweis.* Nach Lemma 3.3 a) ist  $f$  injektiv, also ein Isomorphismus auf sein Bild, und dieses ist gleich  $\text{Ker } g$  wegen der Exaktheit der Folge bei  $B$ . Nach Lemma 3.3 b) ist  $g$  surjektiv und nach dem „Ersten Isomorphiesatz“ für Gruppen induziert  $g$  einen Isomorphismus

$$\bar{g}: B/\text{Ker } g \rightarrow g(B) = C.$$

Wegen der Exaktheit der Folge bei  $B$  ist aber  $\text{Ker } g = \text{Bild } f$ , also ist  $\bar{g}$  ein Isomorphismus  $B/f(A) = \text{Coker } f \rightarrow C$ . ■

Man kann das etwas salopp so ausdrücken, dass in einer kurzen exakten Folge (3.3) im Wesentlichen gilt  $C \cong B/A$ .

**Bemerkung 3.7** Exakte Folgen von Gruppen und Homomorphismen sind insbesondere Folgen, also *Diagramme* von einer bestimmten Gestalt, und für jede mögliche Gestalt  $\mathcal{G}$  eines Folgendigramms bilden die exakten Folgen dieser Gestalt die Objekte einer vollen Unterkategorie der Diagrammkategorie  $\mathcal{G}\text{-DGp}$  oder in unserem Fall eher  $\mathcal{G}\text{-DAbGp}$  (siehe Definition 1.21).

Das bedeutet insbesondere, dass wir über Funktoren sprechen können, die auf exakten Folgen definiert sind oder die exakten Folgen als Werte annehmen.

Es macht deshalb auch Sinn zu behaupten, eine in einer gewissen Situation auftretende exakte Folge sei *natürlich* — das bedeutet nichts anderes, als dass diese Folge die Objektzuordnung eines Funktors ist, der exakte Folgen als Objektwerte und Morphismen im Sinne der Diagrammkategorie als

Morphismenwerte annimmt. Zur Erinnerung, ein Morphismus in der Diagrammkategorie zwischen zwei Gruppenfolgen gleicher Gestalt besteht aus einer Familie von Gruppenhomomorphismen zwischen entsprechenden Stellen in den beiden Folgen, so dass alle kleinen Quadrate, die diese Homomorphismen mit den Homomorphismen *innerhalb* der beiden Folgen bilden, kommutieren.

Kurze exakte Folgen sind aus verschiedenen Gründen besonders wichtig. Einer dieser Gründe besteht in der Tatsache, dass man jede längere exakte Folge in kurze exakte Folgen zerlegen kann:

**Bemerkung 3.8** Seien  $G$  und  $H$  abelsche Gruppen und sei  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Dann gibt es natürliche kurze exakte Folgen

$$\{0\} \longrightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} \text{Bild } f \longrightarrow \{0\} \quad (3.4)$$

und

$$\{0\} \longrightarrow \text{Bild } f \xrightarrow{j} H \xrightarrow{p} \text{Coker } f \longrightarrow \{0\}, \quad (3.5)$$

wo  $i$  und  $j$  die Inklusionen sind und  $p$  die Projektion auf den Quotienten ist, als den der Cokern definiert ist. Als Abbildung auf ihr Bild ist  $f$  ja auch surjektiv, so dass die Exaktheit bei den äußeren Gruppen in jeder Folge von vornherein gegeben ist, und die Exaktheit bei den mittleren Gruppen  $G$  und  $H$  ist für diese Folgen auch trivial.

Die Natürlichkeit bezieht sich, wie in Bemerkung 3.7 erklärt, auf die Diagrammkategorien, d. h., die hier genannten kurzen exakten Folgen hängen funktoriell von dem Diagramm  $G \xrightarrow{f} H$  ab. Davon kann man sich leicht überzeugen; wir führen es nicht vor.

Eine exakte Folge, egal welcher Länge, ist eine Hintereinanderreihung von Gruppenhomomorphismen, und die Exaktheit bewirkt, dass die kurzen exakten Folgen (3.4) für diese Gruppenhomomorphismen sich ineinander verzahnen und somit die gesamte gegebene längere exakte Folge in viele kurze exakte Folgen zerlegen:

**Bemerkung 3.9** Sei

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \dots$$

eine exakte Folge von Gruppen und Homomorphismen beliebiger Länge. Dann zerlegt sich diese Folge wie in folgendem Diagramm in lauter kurze

exakte Folgen des Typs (3.4):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{f_{n-1}} & A_n & \xrightarrow{f_n} & A_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & \dots \\
 & \searrow f_{n-1} & \nearrow & \searrow f_n & \nearrow & \searrow f_{n+1} & \nearrow \\
 & \text{Bild } f_{n-1} & & \text{Bild } f_n & & \text{Bild } f_{n+1} & \\
 & = \text{Ker } f_n & & = \text{Ker } f_{n+1} & & = \text{Ker } f_{n+2} & \\
 \{0\} & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\}
 \end{array}$$

Die kurzen exakten Folgen bestehen jeweils aus zwei schräg steigenden und den anschliessenden zwei schräg fallenden Pfeilen

$$\begin{array}{ccc}
 & \bullet & \\
 & \nearrow & \searrow \\
 \{0\} & \bullet & \bullet \\
 & \nearrow & \searrow \\
 & & \{0\}
 \end{array}$$

Wegen dieser Bemerkung kann man jede noch so komplizierte Situation mit exakten Folgen auf kurze exakte Folgen zurückführen. In einem gewissen Sinne sind sie also die kompliziertesten exakten Folgen, die man betrachten muss.

Ein anderer Grund für die Bedeutung der kurzen exakten Folgen ist, dass sie Quotienten  $G/H$  von abelschen Gruppen genau beschreiben durch die entsprechende kurze exakte Folge  $\{0\} \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow \{0\}$ . Weitere Gründe werden später ganz deutlich werden.

Bisher haben wir nur danach gefragt, welche Bedeutung die Exaktheit einer Folge hat für die Gruppen und Homomorphismen innerhalb der Folge. Sie wirkt sich aber auch auf sehr angenehme Weise aus auf Eigenschaften von Homomorphismen (also Diagrammmorphismen) *zwischen* zwei verschiedenen exakten Folgen:

**Lemma 3.10 (Das 5-er Lemma)** Sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
 \alpha \downarrow \cong & & \beta \downarrow \cong & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \cong & & \varepsilon \downarrow \cong \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen, in dem die waagerechten Reihen exakt sind. Die vier äußeren (also die ersten beiden

und die letzten beiden) der fünf senkrechten Abbildungen seien Isomorphismen. Dann ist auch der mittlere senkrechte Homomorphismus  $\gamma$  ein Isomorphismus.

Die Voraussetzung über die senkrechten Homomorphismen wurde so formuliert, weil sie homogen ist und sich deshalb so am leichtesten einprägen lässt, aber man kann sie geringfügig abschwächen — der gleiche Schluss gilt, wenn die erste Abbildung  $\alpha$  nur surjektiv und die letzte Abbildung  $\varepsilon$  nur injektiv ist (und  $\beta$  und  $\delta$  nach wie vor Isomorphismen sind).

*Beweis.* Der Beweis erfolgt nach einer in der algebraischen Topologie äußerst beliebten Vorgehensweise, die man **Diagrammjagd** nennt. Diese Methode besteht darin, einzelne Elemente (hier der Gruppen  $C$  und  $C'$ ) mit den vorhandenen Abbildungen auf Pfade durch das Diagramm zu schicken, bis man Nullwerte erhält. Die Kommutativität der einzelnen Quadrate wird ausgenutzt, um Pfade um zwei Seiten eines Quadrats über die anderen beiden Seiten umzuleiten, und die Exaktheit der waagerechten Folgen und die vorausgesetzten Eigenschaften der senkrechten Abbildungen werden ausgenutzt, um zu zeigen, dass gewisse Elemente 0 sind, oder um Elemente entlang der Pfeile „zurückzuholen“, also um Urbilder unter den Homomorphismen zu finden — für die waagerechten Abbildungen existieren solche Urbilder, auf Grund der Exaktheit, genau dann, wenn der folgende Pfeil das Element auf 0 schickt.

Wir führen jetzt einen solchen Beweis durch, wobei wir die Kommutativität des Diagramms immer stillschweigend einsetzen werden, um Verknüpfungen umzuschreiben. Auf die Verwendung der anderen Voraussetzungen wird immer explizit hingewiesen. Wenn man sich den Beweis auf dem Papier ansieht, erscheint er sehr undurchsichtig, aber wenn man die einzelnen Schritte mit dem Finger im Diagramm nachfährt, wird alles ganz einfach. Deshalb heißt diese Beweismethode auch so — im Wesentlichen besteht sie darin, Elemente mit dem Finger auf dem Blatt oder an der Tafel durch das Diagramm zu „jagen“.

Wir zeigen nun zuerst, dass  $\gamma$  injektiv ist. Sei  $c \in C$  mit  $\gamma c = 0$ . Dann ist  $h'\gamma c = \delta hc = 0$ . Weil  $\delta$  injektiv ist, ist  $hc = 0$ . Weil die obere Reihe exakt ist, gibt es ein  $b \in B$  mit  $gb = c$ .

Für dieses  $b$  gilt nun  $0 = \gamma c = \gamma gb = g'\beta b$ . Weil die untere Reihe exakt ist, gibt es ein Element  $a' \in A'$  mit  $f'a' = \beta b$ , und weil  $\alpha$  surjektiv ist, gibt es ein  $a \in A$  mit  $\alpha a = a'$ .

Wir haben dann  $\beta b = f'a' = f'\alpha a = \beta fa$  und weil  $\beta$  injektiv ist folgt daraus  $b = fa$ . Also ist  $c = gb = gfa = 0$ , denn die Exaktheit der oberen Reihe impliziert  $gf = 0$  (Bemerkung 3.2). Also ist  $c = 0$  und  $\gamma$  ist injektiv.

Jetzt zeigen wir, dass  $\gamma$  surjektiv ist. Sei  $c' \in C'$ . Weil  $\delta$  surjektiv ist,

gibt es ein Element  $d \in D$  mit  $\delta d = h'c'$ . Weil die untere Reihe exakt ist, ist  $i'h'c' = 0$ , also auch  $i'\delta d = \varepsilon id = 0$ , und weil  $\varepsilon$  injektiv ist, ist  $id = 0$ . Weil die obere Reihe exakt ist, gibt es ein Element  $\bar{c} \in C$  mit  $h\bar{c} = d$ .

Leider muss nicht unbedingt gelten, dass  $\gamma\bar{c} = c'$ , aber wir haben zumindest  $h'\gamma\bar{c} = \delta h\bar{c} = \delta d = h'c'$ , woraus folgt  $h'(c' - \gamma\bar{c}) = 0$ . Weil die untere Reihe exakt ist, gibt es ein Element  $b' \in B'$  mit  $g'b' = c' - \gamma\bar{c}$ , und weil  $\beta$  surjektiv ist, gibt es ein Element  $b \in B$  mit  $\beta b = b'$ .

Sei  $c = \bar{c} + gb \in C$ . Wir haben  $\gamma c = \gamma\bar{c} + \gamma gb = \gamma\bar{c} + g'\beta b = \gamma\bar{c} + g'b' = \gamma\bar{c} + c' - \gamma\bar{c} = c'$ . Also ist  $\gamma c = c'$  und  $\gamma$  ist surjektiv.

Also ist  $\gamma$  ein Isomorphismus.

Wenn man den Beweis noch einmal durchliest nach den verwendeten Eigenschaften der senkrechten Abbildungen, sieht man, dass im ersten Teil die Injektivität von  $\beta$  und  $\delta$  verwendet wird, sowie die Surjektivität von  $\alpha$ . Im zweiten Teil wird die Surjektivität von  $\beta$  und  $\delta$  verwendet und die Injektivität von  $\varepsilon$ . Deshalb muss verlangt werden, dass  $\beta$  und  $\delta$  Isomorphismen sind, aber es reicht, wenn  $\alpha$  surjektiv und  $\varepsilon$  injektiv ist. ■

**Bemerkung 3.11** Das „5-er Lemma“ heißt natürlich wegen der fünf Gruppen in jeder Reihe und der fünf senkrechten Abbildungen so.

Es ist wichtig anzumerken, dass die Folgerung die Existenz des *gesamten kommutativen Diagramms* mit den fünf senkrechten Abbildungen voraussetzt. Die Aussage besagt nämlich *nicht*: "Wenn man zwei exakte Folgen  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{i} E$  und  $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} D' \xrightarrow{i'} E'$  hat mit  $A \cong A'$ ,  $B \cong B'$ ,  $D \cong D'$  und  $E \cong E'$ , dann ist auch  $C \cong C'$ ." Diese naive Vereinfachung kann durchaus **falsch** sein.

Wenn man keine mittlere Abbildung  $\gamma: C \rightarrow C'$  vorweisen kann, die das Diagramm kommutativ macht (und die dann wegen des 5-er Lemmas tatsächlich ein Isomorphismus ist), ist es sogar möglich, dass die äußeren vier Abbildungen Identitäten sind, ohne dass die mittleren Gruppen isomorph sind. Natürlich existiert dann auch kein Homomorphismus der mittleren Gruppen, der das Diagramm kommutativ macht.

Wir wissen jetzt genug über exakte Folgen, um sie in einfachen Fällen anwenden zu können. Für die algebraische Topologie brauchen wir diesen Begriff aber auch für andere Kategorien, die in der Homologietheorie eine Rolle spielen.

**Bemerkung 3.12** Wir haben die Exaktheit bisher nur definiert für Folgen von Gruppen und Homomorphismen. Den gleichen Begriff mit den gleichen Konsequenzen kann man aber problemlos erweitern auf jede Kategorie, die aus Gruppen aufgebaut ist oder deren Objekte eine Gruppenstruktur tragen.

Neben der offensichtlichen Verallgemeinerung auf die Kategorie der Moduln über einen Ring können wir Exaktheit ohne weitere Vorbereitung auf jede Diagrammkategorie über den Kategorien  $\mathbf{Gp}$  oder  $\mathbf{AbGp}$  anwenden, und auf Unterkategorien solcher Kategorien, sowie auf die Kategorie  $\mathbf{GAG}$  der graduierten abelschen Gruppen und der graduierten Homomorphismen und auf ihre Unterkategorien.

Sei  $\mathcal{G}$  ein gerichteter Graph und sei  $\mathcal{K} = \mathcal{G}\text{-DAbGp}$  die Kategorie der  $\mathcal{G}$ -Diagramme von abelschen Gruppen und Homomorphismen (man kann die Einschränkung „abelsch“ aber auch weglassen). Eine Folge

$$\dots D \xrightarrow{\mu} D' \xrightarrow{\nu} D'' \dots \quad (3.6)$$

von  $\mathcal{G}$ -Diagrammen und Diagrammmorphismen heißt dann exakt beim Diagramm  $D'$ , wenn die Bedingung (3.2) für die Gruppenhomomorphismen und Gruppen an jeder einzelnen, in den drei Diagrammen sich entsprechenden, Stelle in den Diagrammen erfüllt ist.

Das heißt etwas ausführlicher: wenn  $D = (P, p)$  in der Notation von Definition 1.16, wenn  $D' = (Q, q)$  und wenn  $D'' = (R, r)$ , dann ist die Folge (3.6) exakt bei  $D'$  genau dann, wenn für jeden einzelnen Knoten  $x$  von  $\mathcal{G}$  die Folge

$$P(x) \xrightarrow{\mu(x)} Q(x) \xrightarrow{\nu(x)} R(x)$$

von Gruppen und Homomorphismen bei  $Q(x)$  exakt ist.

Die Exaktheit für Folgen von graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen braucht man gar nicht extra zu definieren, weil Definition 3.1 hier direkt anwendbar ist — graduierte abelsche Gruppen sind ja schließlich auch Gruppen und graduierte Homomorphismen sind insbesondere auch Gruppenhomomorphismen; sie erfüllen nur *zusätzliche* Eigenschaften. Aber auch in diesem Fall ist es eine Konsequenz von Lemma 2.30 c), dass eine Folge von graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen genau dann exakt ist, wenn dies für jede Stufe einzeln gilt.

Natürlich überträgt sich der Exaktheitsbegriff automatisch auch auf Unterkategorien. Insbesondere wird es sinnvoll sein, von exakten Folgen von *Kettenkomplexen* zu sprechen, weil die Kategorie  $\mathbf{KK}$  der Kettenkomplexe je nach der bevorzugten Variante der Definition eine Unterkategorie einer Diagrammkategorie von Gruppen und Homomorphismen ist, oder eine Unterkategorie einer Diagrammkategorie von graduierten abelschen Gruppen, modelliert auf dem Graphen  mit einem Knoten (der ein Platzhalter für die direkte Summe der Kettengruppen ist) und einem Pfeil von diesem Knoten zurück zu sich (als Platzhalter für den Randoperator).

Der erste grundlegende Satz der Homologietheorie, den wir beweisen, hängt nicht von den Einzelheiten der jeweiligen Homologietheorie ab, sondern ist im Wesentlichen eine Eigenschaft von *Kettenkomplexen*.

**Definition 3.13** Eine *lange exakte Folge* von Gruppen und Homomorphismen ist eine exakte Folge, die unendliche Länge hat, also die an mindestens einem Ende unbegrenzt ist (vergleiche Definition 1.20 a)).

**Satz 3.14** Sei

$$\{0\} \longrightarrow (C, \partial) \xrightarrow{f} (D, \partial') \xrightarrow{g} (E, \partial'') \longrightarrow \{0\} \quad (3.7)$$

eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen.

Dann gibt es eine natürliche lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots \quad (3.8)$$

zwischen den Homologiegruppen der drei Kettenkomplexe, oder effizienter in der Kategorie **GAG** ausgedrückt, es gibt ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H(C) & \xrightarrow{f_*} & H(D) \\ & \swarrow \beta & \searrow g_* \\ & H(E) & \end{array} \quad \text{Grad } -1 \quad (3.9)$$

zwischen den graduierten Homologiegruppen der drei Kettenkomplexe, mit den von den Kettenabbildungen induzierten Grad 0 Homomorphismen  $f_* = H(f)$  und  $g_* = H(g)$  und mit einem Grad  $-1$  Homomorphismus

$$\beta: H(E) \longrightarrow H(C),$$

den wir den *verbindenden Homomorphismus* des exakten Homologie-dreiecks nennen wollen, und der wie folgt erklärt wird:

Das unten stehende Diagramm von graduierten abelschen Gruppen hat die Randoperatoren der Kettenkomplexe als senkrechte Abbildungen und kommutiert, weil die waagerechten Abbildungen Kettenabbildungen sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' & & \\ \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & \{0\} \end{array} \quad (3.10)$$

Eine Homologieklassse  $\varepsilon$  in  $H(E)$  ist die Restklasse eines Zyklus  $z \in Z(E) = \text{Ker } \partial''$ . Man stelle sich  $z$  vor in der Gruppe  $E$  in der oberen Reihe des Diagramms (beide Reihen sind eigentlich die gleiche Folge, zweimal hingeschrieben um die Randoperatoren sichtbar zu machen).

Weil  $g$  surjektiv ist, gibt es ein Element  $d \in D$  mit  $gd = z$ . Weil  $z$  ein Zyklus ist und das rechte Quadrat im Diagramm kommutiert, gilt  $g\partial'd = \partial''gd = \partial''z = 0$ , und weil die untere Reihe exakt ist gibt es ein Element  $c \in C$  mit  $fc = \partial'd$ . Dieses Element ist ein Zyklus und  $\beta(\varepsilon) = [c]$ .

*Beweis.* Im Beweis sind viele Einzelschritte zu tun: wir müssen zeigen, dass das Dreieck (3.9) an allen drei Stellen exakt ist; wir müssen außerdem zeigen, dass das Dreieck natürlich ist, also dass alle drei Homomorphismen im Dreieck mit den Homomorphismen kommutieren, die von einem Morphismus zwischen zwei kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen induziert werden; aber bevor wir mit diesen Aufgaben überhaupt beginnen können, müssen wir nachprüfen, dass wir tatsächlich ein wohldefiniertes Dreieck von graduierten Homomorphismen vor uns haben und speziell, dass die Angaben in der Aussage des Satzes die Abbildung  $\beta$  wohl und eindeutig definieren und dass  $\beta$  wirklich ein Homomorphismus ist. Das machen wir als Erstes.

Die einzelnen Beweisschritte lassen sich am einfachsten verfolgen in einer erweiterten Version von Diagramm (3.10) mit drei Zeilen (die aber wieder alle die gleiche kurze exakte Folge darstellen):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & \{0\}
 \end{array} \tag{3.11}$$

**Wohldefiniertheit von  $\beta$ :** Die Vorschrift zur Konstruktion von  $\beta$  war: zu einer Homologieklassse  $\varepsilon$  in  $H(E)$  wähle man einen Zyklus  $z \in Z(E) \subseteq E$  mit  $\varepsilon = [z]$ , man wähle ein Urbild  $d \in D$  von  $z$  mit  $gd = z$ , und man findet dann aus schon erläuterten Gründen eine Kette  $c \in C$  mit  $fc = \partial'd$ . Diese Kette  $c$  ist sogar eindeutig bestimmt, weil  $f$  wegen der Exaktheit der Folge injektiv ist.

Es wurde behauptet, dass  $c$  ein Zyklus ist. Das gilt wegen der Injektivität von  $f$  und weil die linken Quadrate in (3.11) kommutieren, denn  $f\partial c = \partial'fc = \partial'\partial'd = 0$ , also ist  $\partial c = 0$ .

Folglich repräsentiert  $c$  eine Homologieklassse  $[c] \in H(C)$  und diese nehmen wir als den Wert  $\beta(\varepsilon)$ .

Es gibt zwei Stellen in dieser Konstruktion, wo eine *nichteindeutige* Wahl getroffen wird, und wir müssen zeigen, dass das Ergebnis  $\beta(\varepsilon)$  nicht von diesen Wahlen abhängt, nämlich nicht von der Wahl des Zyklus  $z \in E$  mit  $\varepsilon = [z]$ , und nicht von der Wahl des Elementes  $d \in D$  mit  $gd = z$ .

Stellen wir uns also vor, wir hätten statt  $z$  einen vielleicht anderen Zyklus  $z' \in E$  gewählt mit der gleichen Homologiekategorie, und wir hätten statt  $d \in D$  ein anderes Element  $d' \in D$  gewählt mit  $gd' = z'$  (da  $z'$  auch gleich  $z$  sein darf, decken wir hiermit auch die Möglichkeit ab, verschiedene Urbilder des gleichen Zyklus  $z \in E$  zu wählen). Wir stellen uns diese Elemente vor in der mittleren Reihe von Diagramm (3.11).

Sei  $c$  das eindeutige Element von  $C$  mit  $fc = \partial'z$  und sei  $c'$  das eindeutige Element von  $C$  mit  $fc' = \partial'z'$ . Wir müssen zeigen, dass  $[c] = [c']$ , also dass  $c - c'$  ein Rand ist.

Weil  $[z] = [z']$  ist  $z - z'$  ein Rand und es gibt ein Element  $y \in E$  mit  $z - z' = \partial''y$ . Weil  $g$  surjektiv ist finden wir ein Element  $x \in D$  mit  $gx = y$ . Wir stellen uns diese Elemente vor in der oberen Reihe von Diagramm (3.11).

Weil das obere rechte Quadrat kommutiert, gilt

$$gd - gd' = z - z' = \partial''gx = g\partial'x$$

und somit ist  $d - d' - \partial'x \in \text{Ker } g = \text{Bild } f$ . Wähle ein Element  $w \in C$  mit

$$d - d' - \partial'x = f(w).$$

Weil das linke untere Quadrat in Diagramm (3.11) kommutiert, haben wir

$$\begin{aligned} f\partial w &= \partial'fw \\ &= \partial'(d - d' - \partial'x) = \partial'd - \partial'd' - \partial'\partial'x = \partial'd - \partial'd' - 0 \\ &= \partial'd - \partial'd' \\ &= fc - fc', \end{aligned}$$

und weil  $f$  injektiv ist gilt  $\partial w = c - c'$  und  $c - c'$  ist ein Rand, wie behauptet. Das heißt,  $\beta(\varepsilon)$  hängt nicht von den während der Konstruktion getroffenen Wahlen ab und  $\beta$  ist wohldefiniert.

Aus der Konstruktion ist klar, dass  $\beta$  die Dimension eines homogenen Elementes von  $H(E)$  um 1 erniedrigt, aber wir müssen noch zeigen, dass  $\beta$  ein Homomorphismus ist.

Das ist ganz einfach einzusehen, denn wenn  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  zwei Elemente von  $H(E)$  sind, so seien  $z$  und  $z'$  Zyklen in  $E$  mit  $\varepsilon = [z]$  und  $\varepsilon' = [z']$ , man wähle Elemente  $d$  und  $d' \in D$  mit  $gd = z$  und  $gd' = z'$ , und man finde die Elemente

$c$  und  $c' \in C$  mit  $fc = \partial'z$  und  $fc' = \partial'z'$ , für die dann gilt  $\beta(\varepsilon) = [c]$  und  $\beta(\varepsilon') = [c']$ .

Dann ist  $z + z'$  ein Zyklus in  $E$ , dessen Homologieklassse  $\varepsilon + \varepsilon'$  ist,  $d + d'$  ist ein Element von  $D$  mit  $g(d + d') = z + z'$ , und  $c + c'$  ist ein Element von  $C$  mit  $f(c + c') = \partial'd + \partial'd' = \partial'(d + d')$ . Also ist

$$\beta(\varepsilon + \varepsilon') = [c + c'] = \beta(\varepsilon) + \beta(\varepsilon'),$$

und  $\beta$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

**Exaktheit bei  $H(C)$ :** Nach der Definition von  $\beta$  hat jede Homologieklassse in  $\text{Bild } \beta$  die Form  $[c]$  für einen Zyklus  $c \in C$  so dass  $fc = \partial'd$  für ein geeignetes Element  $d \in D$ . Insbesondere ist  $f_*[c] = [fc] = 0$ , weil  $fc$  ein Rand ist. Also ist  $\text{Bild } \beta \subseteq \text{Ker } f_*$ .

Für die andere Inklusion, sei  $\gamma \in H(C)$  mit  $f_*(\gamma) = 0$  und sei  $c$  ein Zyklus in  $C$  mit  $\gamma = [c]$ . Da  $f_*[c] = [fc] = 0$ , ist  $fc$  ein Rand und es gibt ein Element  $d \in D$  mit  $\partial'd = fc$ . Sei  $z := gd \in E$ . Wegen der Kommutativität der rechten Quadrate und der Exaktheit der Zeilen von (3.11) ist  $\partial''z = \partial''gd = g\partial'd = gfc = 0$  und  $z$  ist somit ein Zyklus. Nach der Definition von  $\beta$  gilt  $\beta([z]) = [c] = \gamma$ . Also ist  $\text{Ker } f_* \subseteq \text{Bild } \beta$  und die Exaktheit bei  $H(C)$  ist bewiesen.

**Exaktheit bei  $H(D)$ :**  $g_* \circ f_* = 0$ , weil schon  $g \circ f = 0$  in der exakten Folge (3.7). Also ist  $\text{Bild } f_* \subseteq \text{Ker } g_*$ .

Für die andere Inklusion, sei  $\delta \in H(D)$  mit  $g_*(\delta) = 0$  und sei  $d$  ein Zyklus in  $D$  mit  $\delta = [d]$ . Wir stellen uns diese Elemente vor in der mittleren Zeile von (3.11).

Weil  $g_*[d] = [gd] = 0$ , ist  $gd$  ein Rand und es gibt ein Element  $e \in E$  mit  $\partial''e = gd$ . Weil  $g$  surjektiv ist gibt es ein Element  $a \in D$  mit  $ga = e$ . Sei  $d' := d - \partial'a$ ; dies ist ein Zyklus weil  $d$  und  $\partial'a$  Zyklen sind, und  $[d'] = [d]$ , weil  $d$  und  $d'$  sich nur um einen Rand unterscheiden. Wir haben also auch  $\delta = [d']$ .

Wegen der Kommutativität der rechten Quadrate von (3.11) ist

$$gd' = gd - g\partial'a = gd - \partial''ga = gd - \partial''e = 0$$

und weil die Zeilen des Diagramms exakt sind gibt es ein  $c \in C$  mit  $fc = d'$ .

$c$  ist ein Zyklus, denn weil  $d'$  ein Zyklus ist, ist  $0 = \partial'd = \partial'fc = f\partial c$ , und aus der Injektivität von  $f$  folgt, dass  $\partial c = 0$ .

Wir haben also

$$\delta = [d'] = [fc] = f_*([c]),$$

und somit ist  $\text{Ker } g_* \subseteq \text{Bild } f_*$  und die Exaktheit bei  $H(D)$  ist bewiesen.

**Exaktheit bei  $H(E)$ :** Sei  $\varepsilon \in H(E)$ ; diese Homologiekategorie ist eine Äquivalenzklasse von Zyklen von  $E$ . Nach der Definition von  $\beta$  gibt es für jeden Zyklus  $z \in \varepsilon$  ein Element  $d \in D$  mit  $gd = z$  und zu jedem solchen Element  $d \in D$  gibt es einen Zyklus  $c \in C$  mit  $fc = \partial'd$ , der wegen der Injektivität von  $f$  eindeutig ist, und es gilt  $\beta(\varepsilon) = [c]$ . Weil  $\beta$  wohldefiniert ist hängt  $[c]$  weder von der Wahl von  $z \in \varepsilon$  noch von der Wahl von  $d$  ab.

Wenn  $\varepsilon \in \text{Bild } g_*$ , so gibt es einen Zyklus  $d \in D$  mit  $\varepsilon = g_*([d]) = [gd]$ , d. h., wir können in der Konstruktion von  $\beta(\varepsilon)$  den Zyklus  $z$  als  $gd$  wählen und den gegebenen Zyklus  $d$  als sein Urbild in  $D$ . Weil  $d$  ein Zyklus ist, haben wir  $\partial'd = 0$ , also wir können  $c = 0$  wählen und  $\beta(\varepsilon) = [0] = 0$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $\text{Bild } g_* \subseteq \text{Ker } \beta$ .

Für die andere Inklusion, sei  $\varepsilon \in \text{Ker } \beta$ . Dann ist der Zyklus  $c$  in obiger Konstruktion von  $\beta(\varepsilon)$  ein Rand, d. h., es gibt ein Element  $a \in C$  mit  $c = \partial a$ .

Wir haben dann

$$\partial'd = fc = f\partial a = \partial'fa,$$

so dass  $d' := d - fa$  ein Zyklus ist. Ferner gilt wegen der Exaktheit der waagerechten Folgen in (3.11)

$$g_*([d']) = [gd'] = [gd - gfa] = [gd - 0] = [z] = \varepsilon,$$

so dass  $\varepsilon \in \text{Bild } g_*$ .

Damit haben wir gezeigt, dass  $\text{Ker } \beta \subseteq \text{Bild } g_*$  und das Dreieck (3.9) ist auch bei  $H(E)$  exakt. Es ist also tatsächlich an jeder Stelle exakt.

### Natürlichkeit des exakten Dreiecks (3.9):

Sei die Familie der senkrechten Abbildungen in

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & (C, \partial) & \xrightarrow{f} & (D, \partial') & \xrightarrow{g} & (E, \partial'') \longrightarrow \{0\} \\ & & p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & (\bar{C}, \bar{\partial}) & \xrightarrow{\bar{f}} & (\bar{D}, \bar{\partial}') & \xrightarrow{\bar{g}} & (\bar{E}, \bar{\partial}'') \longrightarrow \{0\} \end{array} \quad (3.12)$$

ein Diagrammmorphismus zwischen zwei kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen (das bedeutet, dass das Diagramm kommutiert).

Die Kettenabbildungen  $p$ ,  $q$  und  $r$  induzieren Grad-0 Homomorphismen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  zwischen den Homologiegruppen an entsprechenden Stellen in den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen. Wir müssen zeigen, dass das exakte Homologiedreieck natürlich ist, und das bedeutet, dass die Zuordnung des exakten Homologiedreiecks zu einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen und die Zuordnung der Homologiemorphismen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  zu einem Morphismus (3.12) von kurzen exakten Folgen

von Kettenkomplexen einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen zu der Kategorie der exakten Dreiecke von graduierten abelschen Gruppen bildet.

Funktoren müssen zwar den Identitätsmorphismus und Verknüpfungen von Morphismen richtig übertragen, aber damit müssen wir uns nicht groß auseinandersetzen, weil die entsprechenden Eigenschaften in unserer Situation offensichtlich und trivial sind.

Es geht vielmehr darum, zu zeigen, dass die zugeordneten Abbildungen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  überhaupt einen Morphismus der Kategorie der exakten Dreiecke bilden, also einen *Diagrammmorphismus* zwischen den Objekten dieser Kategorie. Dazu müssen wir zeigen, dass  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  mit den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen ein kommutatives Diagramm bilden, und das läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass sie mit den Homomorphismen in diesen exakten Homologiedreiecken drei kommutative Quadrate bilden.

Zwei Seiten des exakten Homologiedreiecks der beiden kurzen exakten Folgen werden jeweils durch die Abbildungen  $f_*$  und  $g_*$  bzw.  $\bar{f}_*$  und  $\bar{g}_*$  gebildet und sie kommutieren mit den Homomorphismen  $p_*$ ,  $q_*$  und  $r_*$  wegen Bemerkung 1.23 b), weil die Quadrate, um die es hier geht, durch Anwendung des Homologiefunktors auf die kommutativen Quadrate in (3.12) entstehen.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} H(E) & \xrightarrow{\beta} & H(C) \\ r_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ H(\bar{E}) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & H(\bar{C}) \end{array} \quad (3.13)$$

kommutiert, das  $r_*$  und  $p_*$  mit den dritten Seiten der exakten Homologiedreiecke (also mit den verbindenden Homomorphismen) bilden.

Sei  $\varepsilon \in H(E)$  und sei  $z \in E$  ein Zyklus mit  $\varepsilon = [z]$ . Wähle ein Element  $d \in D$  mit  $gd = z$  und sei  $c \in C$  der Zyklus mit  $fc = \partial'd$ . Nach der Definition von  $\beta$  ist  $\beta(\varepsilon) = [c]$  und somit  $p_*\beta(\varepsilon) = [pc]$ .

Sei  $\bar{z} := rz \in \bar{E}$ , sei  $\bar{d} := qd \in \bar{D}$  und sei  $\bar{c} := pc \in \bar{C}$ . Da  $r$  eine Kettenabbildung ist, ist  $\bar{z}$  ein Zyklus und  $r_*(\varepsilon) = [rz] = [\bar{z}]$ .

Weil (3.12) kommutiert und weil die Abbildungen in dem Diagramm Kettenabbildungen sind, überträgt sich die gesamte Konstruktion von  $\beta(\varepsilon)$  mittels  $p$ ,  $q$  und  $r$  in die andere kurze exakte Folge und wir haben  $\bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}]$ .

Oder wenn Sie diese Schlussfolgerung etwas langsamer und detaillierter erklärt haben wollen: Weil (3.12) kommutiert haben wir

$$\bar{z} = rz = rgd = \bar{g}qd = \bar{g}\bar{d}$$

und weil  $q$  eine Kettenabbildung ist und (3.12) kommutiert haben wir

$$\bar{\partial}'\bar{d} = \bar{\partial}'qd = q\partial'd = qfc = \bar{f}pc = \bar{f}\bar{c}.$$

Das bedeutet, nach der Konstruktion des exakten Homologiedreiecks, dass  $\bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}]$ .

Nach den Definitionen von  $\bar{z}$  und  $\bar{c}$  gilt nun

$$\bar{\beta}r_*(\varepsilon) = \bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}] = [pc] = p_*\beta(\varepsilon).$$

In anderen Worten  $\bar{\beta}r_* = p_*\beta$  und (3.13) kommutiert. Das exakte Homologiedreieck ist also natürlich. ■

Hiermit haben wir zunächst nur einen schönen Satz über Kettenkomplexe gewonnen, aber daraus gewinnen wir leicht eine Grundaussage über die singuläre Homologie.

**Bemerkung 3.15** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard und seien

$$i: A \rightarrow X$$

und

$$j: X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$$

die Inklusionen. Dann bilden die singulären Kettenkomplexe von  $X$ ,  $A$  und  $(X, A)$  eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A) \xrightarrow{i_\#} C_*(X) \xrightarrow{\pi=j_\#} C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \quad (3.14)$$

von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen.

Man erinnere sich aus Definition 2.34 daran, dass  $C_*(A)$  eine graduierte Untergruppe von  $C_*(X)$  ist und dass  $i_\#$  die Inklusion dieser Untergruppe ist. Der dritte Pfeil in der Folge (3.14) ist die Projektion  $\pi$  von  $C_*(X)$  auf den Quotienten  $C_*(X)/C_*(A) = C_*(X, A)$ .

Gleichzeitig ist diese Abbildung auch die Kettenabbildung  $j_\#$ , die von der Inklusion von Raumpaaren  $j: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$  induziert wird, denn  $C_*(X)$  können wir nach Bemerkung 2.38 als den Quotienten

$$\frac{C_*(X)}{\{0\}} = \frac{C_*(X)}{C_*(\emptyset)} = C_*(X, \emptyset)$$

auffassen und  $j_\#$  ist dann die Projektion

$$C_*(X) = C_*(X, \emptyset) = \frac{C_*(X)}{C_*(\emptyset)} \xrightarrow{j_\#} \frac{C_*(X)}{C_*(A)} = C_*(X, A).$$

*Beweis.* Die Folge (3.14) ist exakt bei  $C_*(A)$ , weil  $i_{\sharp}$  die Inklusion einer Untergruppe ist und deshalb injektiv ist, und sie ist exakt bei  $C_*(X, A)$  und bei  $C_*(X)$ , weil  $\pi$  die Projektion auf den Quotienten nach dem Bild von  $i_{\sharp}$  ist und deshalb surjektiv ist und das Bild von  $i_{\sharp}$  als Kern hat.

Diese Folge ist eine Instanz von der exakten Folge (3.5) mit  $i_{\sharp}$  in der Rolle von  $f$ .

Sie ist natürlich, weil die Kettenabbildungen  $i_{\sharp} = C_*(i)$  und  $j_{\sharp} = C_*(j)$  nach Bemerkung 2.38 natürliche Transformationen sind und somit mit den Kettenabbildungen kommutieren, die von  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismen und den dazugehörigen stetigen Abbildungen der einzelnen Räume induziert werden. ■

**Korollar 3.16** Sei  $(X, A)$  ein topologisches Raumpaard und seien  $i: A \rightarrow X$  und  $j: X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(A) & \xrightarrow{i_*} & H_*(X) \\
 \swarrow \beta & & \swarrow j_* \\
 & & H_*(X, A) \\
 \text{Grad } -1 & & 
 \end{array} \tag{3.15}$$

zwischen den graduierten Homologiegruppen von  $A$ ,  $X$  und  $(X, A)$ , mit den von den Inklusionen induzierten Grad 0 Homomorphismen  $i_* = H_*(i)$  und  $j_* = H_*(j)$  und mit einem Grad  $-1$  Homomorphismus

$$\beta: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A),$$

den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen und der wie folgt leicht zu konstruieren ist:

Sei  $\gamma \in H_*(X, A)$  und sei  $z \in C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$  ein beliebiger Zyklus mit Homologieklassse  $\gamma$ . Nach der Definition von  $C_*(X, A)$  ist  $z$  die Restklasse  $c + C_*(A)$  einer Kette  $c \in C_*(X)$ . Dass  $z$  ein relativer Zyklus ist bedeutet, dass  $\partial c$  ein Element des Nenners  $C_*(A) \subseteq C_*(X)$  des Quotienten  $C_*(X, A)$  ist. Als Rand in  $C_*(X)$  ist  $\partial c$  auch in  $C_*(A)$  ein Zyklus und

$$\beta(\gamma) = [\partial c] \in H_*(A).$$

Das exakte Dreieck (3.15) heißt das **exakte Homologiedreieck** des Paares  $(X, A)$  von topologischen Räumen.

*Beweis.* Die Existenz und Natürlichkeit des exakten Homologiedreiecks (3.15) folgt sofort durch Anwendung von Satz 3.14 auf die natürliche kurze exakte Folge von singulären Kettenkomplexen (3.14) aus Bemerkung 3.15.

Die Vorschrift für die Konstruktion des verbindenden Homomorphismus  $\beta$  spezialisiert sich wie folgt für die kurze exakte Folge (3.14): Zu einer Homologieklassse  $\gamma \in H_*(X, A)$  wähle man einen Zyklus  $z \in C_*(X, A)$  mit  $\gamma = [z]$  und man bestimme ein Urbild von  $z$  unter  $\pi$ , also eine Kette  $c \in C_*(X)$  mit  $z = c + C_*(A)$ . Dann ist  $\beta(\gamma)$  die Homologieklassse der eindeutigen Kette in  $C_*(A)$ , die unter  $i_\#$  auf  $\partial c$  abgebildet wird, in anderen Worten,  $\beta(\gamma)$  ist die Homologieklassse von  $\partial c$  aufgefasst als Kette auf  $A$ . Das ist genau die Konstruktion, die in der Aussage oben beschrieben wird. ■

**Bemerkung 3.17** Wenn man die einzelnen Homologiegruppen  $H_n$  ausrechnen will, kann man das exakte Dreieck (3.15) „abwickeln“ und man erhält eine natürliche lange exakte Folge

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots \quad (3.16)$$

zwischen den Homologiegruppen in den einzelnen Dimensionen, genannt die **lange exakte Homologiefolge** des Raumpaars  $(X, A)$ .

Die nächste wichtige Eigenschaft der singulären Homologie, die wir beweisen wollen, ist die Homotopieinvarianz. Wir beginnen wieder mit einem (ganz einfachen) Satz für Kettenkomplexe.

**Definition 3.18** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  Kettenkomplexe und seien  $f$  und  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Kettenabbildungen.

Eine **Kettenhomotopie** von  $f$  nach  $g$  ist ein Grad +1 Homomorphismus  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , so dass

$$g - f = \partial' \circ \Phi + \Phi \circ \partial. \quad (3.17)$$

Wenn es eine solche Kettehomotopie  $\Phi$  gibt, so sagen wir,  $f$  und  $g$  sind **kettenhomotop** vermöge  $\Phi$  und wir schreiben  $f \simeq_\Phi g$ .

Beachten Sie, dass die rechte Seite von (3.17) eine Grad-0 Abbildung ist, wie die linke Seite.

**Lemma 3.19** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  Kettenkomplexe und seien  $f$  und  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Kettenabbildungen.

- a) Wenn  $f \simeq g$ , dann ist  $H(f) = H(g): H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{D})$ .
- b) Kettenhomotopie  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kettenabbildungen  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .
- c) Sei  $\mathcal{E} = (E, \partial'')$  ein dritter Kettenkomplex und seien  $h$  und  $k$  Kettenabbildungen  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ . Wenn  $f \simeq g$  und  $h \simeq k$ , dann ist  $h \circ f \simeq k \circ g$ .

(Teile b) und c) besagen, dass Kettenhomotopie eine Kongruenz auf der Kategorie  $\mathbf{KK}$  ist. Das ist eine passende Eigenschaft für einen „Homotopiebegriff“, da auch die normale Homotopie von stetigen Abbildungen eine Kongruenz auf  $\mathbf{Top}$  ist.)

*Beweis.* Teil a): Sei  $\gamma \in H(\mathcal{C})$  und sei  $z \in \mathcal{C}$  ein Zyklus mit  $\gamma = [z]$ . Dann ist

$$gz - fz = \partial' \Phi z + \Phi \partial z = \partial' \Phi z + 0 = \partial' \Phi z,$$

weil  $z$  ein Zyklus ist. Also ist  $gz - fz$  ein Rand und somit ist

$$g_*(\gamma) - f_*(\gamma) = [gz] - [fz] = [gz - fz] = [\partial' \Phi z] = 0$$

und  $g_* = f_*$ .

Teil b): Für jede Kettenabbildung  $f$  ist offensichtlich die konstante Abbildung 0 eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $f$ ; also ist  $\simeq$  reflexiv.

Wenn  $f \simeq_{\Phi} g$ , so ist  $-\Phi$  eine Kettenhomotopie von  $g$  nach  $f$  und  $\simeq$  ist symmetrisch.

Und schließlich, wenn  $f \simeq_{\Phi} g$  und  $g \simeq_{\Psi} h$ , wo  $f$ ,  $g$  und  $h$  Kettenabbildungen  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  sind, so ist

$$h - f = (h - g) + (g - f) = \partial' \Psi + \Psi \partial + \partial' \Phi + \Phi \partial = \partial' \circ (\Psi + \Phi) + (\Psi + \Phi) \circ \partial$$

(weil  $\partial'$  ein Gruppenhomomorphismus ist). Also ist  $\Psi + \Phi$  eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $h$  und  $\simeq$  ist transitiv.

Teil c): Sei  $\Phi$  eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $g$  und sei  $\Psi$  eine Kettenhomotopie von  $h$  nach  $k$ . Wir haben

$$\begin{aligned} kg - hf &= kg - hg + hg - hf && (-hg + hg = 0) \\ &= (k - h) \circ g + h \circ (g - f) && (h \text{ ist Homomorphismus}) \\ &= (\partial'' \Psi + \Psi \partial') \circ g + h \circ (\partial' \Phi + \Phi \partial) && (h \simeq_{\Psi} k \text{ und } f \simeq_{\Phi} g) \\ &= \partial'' \Psi g + \Psi \partial' g + h \partial' \Phi + h \Phi \partial && (h \text{ ist Homomorphismus}) \\ &= \partial'' \Psi g + \Psi g \partial + \partial'' h \Phi + h \Phi \partial && (g, h \text{ Kettenabbildungen}) \\ &= \partial'' \circ (\Psi g + h \Phi) + (\Psi g + h \Phi) \circ \partial && (\partial'' \text{ ist Homomorphismus.}) \end{aligned}$$

Also ist  $\Psi g + h \Phi$  eine Kettenhomotopie von  $h \circ f$  zu  $k \circ g$ . ■

**Definition 3.20** Seien  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  Kettenkomplexe.

Eine Kettenabbildung  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt eine **Kettenhomotopieäquivalenz**, wenn es eine Kettenabbildung  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt (genannt eine **Kettenhomotopieinverse** zu  $f$ ), so dass

$$g \circ f \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

und

$$f \circ g \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Wenn es eine Kettenhomotopieäquivalenz  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt, sagen wir, dass  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  **kettenhomotopieäquivalent** oder **vom gleichen Kettenhomotopietyp** sind und wir schreiben  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ .

**Bemerkung 3.21** Aus Lemma 3.19 a) folgt sofort, dass Kettenhomotopieäquivalenzen Isomorphismen der Homologiegruppen induzieren und dass Kettenkomplexe vom gleichen Kettenhomotopietyp isomorphe graduierte Homologiegruppen haben.

Unser Ziel ist es, Aussagen wie Lemma 3.19 a) oder Bemerkung 3.21 für die *topologische* Homotopie zwischen stetigen Abbildungen zu gewinnen, aber die topologischen Aussagen lassen sich am bequemsten und effektivsten erhalten, wenn man den Umweg über die Kettenhomotopie nimmt oder die Kettenhomotopie als Zwischenstufe verwendet. Wir wollen also aus einer topologischen Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen eine Kettenhomotopie zwischen den induzierten Kettenabbildungen konstruieren.

Wie bei fast allen Konstruktionen in der singulären Homologie lässt sich auch diese Konstruktion am einfachsten zunächst auf dem Standardsimplex oder genauer für die konstante Homotopie des singulären Simplexes  $\text{id}_{\Delta_n}$  erklären und dann mit einer beliebigen topologischen Homotopie in den eigentlich interessierenden topologischen Raum übertragen.

Da aber auch Randoperatoren und somit Seiten des Standardsimplexes ins Spiel kommen, fassen wir die Grunddefinitionen und die Anfänge dieser Konstruktion ein bisschen allgemeiner.

**Definition 3.22** a) Wir konstruieren einen Funktor  $Z: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$  durch die Zuordnungen

$$Z(X) := X \times I$$

für jeden topologischen Raum  $X$  und

$$Z(f) := f \times \text{id}_I: Z(X) = X \times I \longrightarrow Y \times I = Z(Y)$$

für jede stetige Abbildung  $f: X \longrightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen. Wir haben hier den Namen  $Z$  gewählt als Abkürzung für **Zylinder**.

- b) Neben dem Funktor  $Z$  haben wir auch den Identitätsfunktor  $\text{id}_{\mathbf{Top}}$  von  $\mathbf{Top}$  nach sich. Wir konstruieren zwei natürliche Transformationen  $\lambda$  (für „linkes Ende“) und  $\rho$  (für „rechtes Ende“) von  $\text{id}_{\mathbf{Top}} \rightarrow Z$ , indem wir für jeden topologischen Raum  $X$  stetige Abbildungen

$$\lambda(X) \text{ und } \rho(X): \text{id}_{\mathbf{Top}}(X) = X \longrightarrow X \times I = Z(X)$$

definieren durch die Vorschriften

$$\lambda(X)(x) := (x, 0) \in X \times I \quad \text{und} \quad \rho(X)(x) := (x, 1) \in X \times I$$

für jedes  $x \in X$ .

Für jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  kommutieren  $\lambda(X)$  und  $\rho(X)$  offensichtlich mit  $f$  und  $Z(f) = f \times \text{id}_I$ , so dass diese Zuordnungen tatsächlich natürliche Transformationen definieren.

Die Abbildungen  $\lambda(X)$  und  $\rho(X)$  sind für jeden Raum  $X$  sogar Einbettungen  $X \rightarrow X \times I$ .

Um die Notation zu vereinfachen, werden wir bei der Anwendung dieser natürlicher Transformationen  $\lambda$  und  $\rho$  auch die jedem topologischen Raum  $X$  zugeordneten stetigen Abbildungen  $\lambda(X)$  und  $\rho(X)$  schlicht  $\lambda$  und  $\rho$  nennen, obwohl dann eigentlich verschiedene Abbildungen den gleichen Namen erhalten. Der Raum  $X$  wird sowieso bei jeder Anwendung aus den jeweiligen Umständen hervorgehen.

**Definition 3.23** Sei  $n \in \mathbf{N}$ .

- a) Das  $n$ -te **Standardprisma** ist die  $n + 1$ -dimensionale affine Kette  $P_n$  auf  $\Delta_n \times I \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$  gegeben durch die Formel

$$P_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i [\lambda e_0, \dots, \lambda e_i, \rho e_i, \dots, \rho e_n]. \quad (3.18)$$

- b) Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\sigma \in S_n(X)$ . Wir definieren das **Prisma auf  $\sigma$**  als die  $n + 1$ -dimensionale Kette

$$P_\sigma := (\sigma \times \text{id}_I)_\#(P_n) \in C_{n+1}(X \times I). \quad (3.19)$$

- c) Nach Lemma 2.10 b) und Bemerkung 2.28 erweitert sich die Zuordnung aus Teil b) zu einem eindeutigen graduierten Homomorphismus

$$P: C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I),$$

von Grad  $+1$ , so dass  $P(\sigma) = P_\sigma$  für jeden singulären Simplex  $\sigma$  in  $X$ . Wir nennen  $P$  den **Prismenoperator** oder die **Prismenabbildung** auf  $X$ .

Die Summanden von  $P_n$  zerlegen  $\Delta_n \times I$  in  $n+1$  schön zusammengefügte  $n+1$ -dimensionale affine Simplexes, die für  $n=1$  und  $n=2$  in Abbildungen 3.1 und 3.2 zu sehen sind.

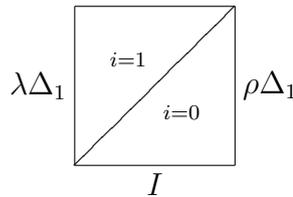


Abbildung 3.1: Die Simplexes im Standardprisma  $P_1$ .

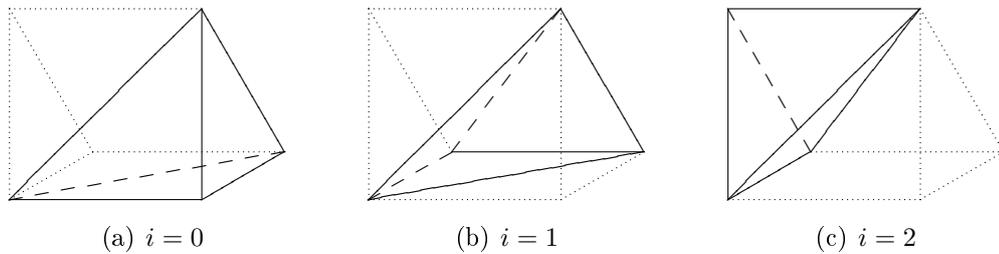


Abbildung 3.2: Die drei Summanden im Prisma  $P_2$ .

**Bemerkung 3.24** Sei  $V$  ein affiner Raum und sei  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner  $n$ -Simplex in  $V$ . Dann ist  $V \times \mathbf{R}$  auch ein affiner Raum und  $\sigma \times \text{id}_I$  ist die Einschränkung einer affinen Abbildung  $\mathbf{R}^{n+1} \rightarrow V \times \mathbf{R}$  auf  $\Delta_n \times I$ , so dass  $(\sigma \times \text{id}_I)_\#$  affine Simplexes in  $\Delta_n \times I$  (und insbesondere die Summanden von  $P_n$ ) wieder in affine Simplexes überführt, deren Ecken die Bilder der Ecken der Summanden von  $P_n$  unter  $\sigma \times \text{id}_I$  sind.

Also ist das Prisma auf einem affinen Simplex  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  gegeben durch die Formel

$$P_\sigma = P_{[v_0, \dots, v_n]} = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n]. \quad (3.20)$$

**Notation 3.25** Wir wollen jetzt den Rand von  $P_n$  oder allgemeiner von  $P_\sigma$  für einen affinen Simplex  $\sigma$  in einem affinen Raum  $V$  ausrechnen, und um darüber einfacher reden zu können führen wir kurze Namen ein für die

Summanden von  $P_\sigma$  und für die affinen Simplizes, die in den Rändern dieser Summanden auftreten.

All diese Simplizes haben gemeinsam, dass ihre Ecken aus den Ecken eines affinen Simplexes  $\tau = [v_0, \dots, v_n]$  in  $V$  gewonnen werden (dieser ist entweder  $\sigma$  selber oder eine Seite von  $\sigma$ ), indem die ersten paar Ecken mit  $\lambda$  nach  $V \times \{0\}$  versetzt werden und die letzten Ecken mit  $\rho$  nach  $V \times \{1\}$  versetzt werden. Trotzdem kommen zwei verschiedene Situationen vor.

Die meisten dieser Simplizes  $v$  haben eine Gestalt wie in (3.20), wo eine Ecke  $v_k$  von  $\tau$  zweimal unter den Ecken von  $v$  vertreten ist, als  $\lambda v_k$  und direkt anschließend als  $\rho v_k$ .

Bilden wir aber eine Seite eines solchen Simplexes  $v$ , was bei der Berechnung des Randoperators passiert, so kann diese Verdoppelung aufgehoben werden und wir haben es deshalb auch mit Simplizes zu tun, unter deren Ecken jede Ecke von  $\tau$  genau einmal vorkommt.

Wir führen für diese beiden Situationen bequeme Kürzel ein, die nur  $\tau$  nennen und den Index, ab dem die Ecken von  $V \times \{0\}$  nach  $V \times \{1\}$  übersiedeln.

Ist  $\tau = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner Simplex in  $V$  und  $0 \leq k \leq n$ , so bezeichnen wir mit  $\delta_k(\tau)$  den affinen  $n+1$ -Simplex

$$\delta_k(\tau) = \delta_k([v_0, \dots, v_n]) := [\lambda v_0, \dots, \lambda v_k, \rho v_k, \dots, \rho v_n],$$

und für  $0 \leq k \leq n+1$  bezeichnen wir mit  $\varepsilon_k(\tau)$  den affinen  $n$ -Simplex

$$\varepsilon_k(\tau) = \varepsilon_k([v_0, \dots, v_n]) := [\lambda v_0, \dots, \lambda v_{k-1}, \rho v_k, \dots, \rho v_n]$$

in  $V \times I$ . (Hier soll  $\delta$  an „doppelt“ und  $\varepsilon$  an „einfach“ erinnern.)

Man beachte: für  $k = n+1$  ist

$$\varepsilon_{n+1}(\tau) = \lambda_{\#}(\tau) \tag{3.21}$$

und ist ganz in  $V \times \{0\}$  enthalten; für  $k = 0$  ist

$$\varepsilon_0(\tau) = \rho_{\#}(\tau) \tag{3.22}$$

und ist ganz in  $V \times \{1\}$  enthalten.

**Bemerkung 3.26** Sei  $V$  ein affiner Raum und  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner Simplex in  $V$ . Im  $i$ -ten Summanden von  $P_\sigma$  in (3.19) erscheint in der Notation von 3.25 der affine Simplex

$$\delta_i(\sigma) = [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n].$$

Wir erhalten die  $j$ -te Seite dieses Simplexes durch Entfernung der  $j$ -ten Ecke innerhalb der Klammern  $[ \ ]$ . Diese Ecke ist  $\lambda v_j$  für  $j \leq i$  und  $\rho v_{j-1}$  für  $i < j \leq n+1$ . Umgekehrt ist  $v_i$  die  $i-1$ -te Ecke von  $\sigma^{(j)}$  wenn  $j < i$  und die  $i$ -te Ecke von  $\sigma^{(j)}$  für  $j > i$ .

Somit erhalten wir für  $0 \leq j \leq n+1$

$$(\delta_i(\sigma))^{(j)} = \begin{cases} [\lambda v_0, \dots, \widehat{\lambda v_j}, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j < i; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_{i-1}, \rho v_i, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j = i; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_{i+1}, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j = i+1; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \widehat{\rho v_{j-1}}, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } i+1 < j \end{cases} \quad (3.23)$$

oder mit den in Notation 3.25 eingeführten Abkürzungen

$$(\delta_i(\sigma))^{(j)} = \begin{cases} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) & \text{wenn } j < i; \\ \varepsilon_i(\sigma) & \text{wenn } j = i; \\ \varepsilon_{i+1}(\sigma) & \text{wenn } j = i+1; \\ \delta_i(\sigma^{(j-1)}) & \text{wenn } i+1 < j. \end{cases} \quad (3.24)$$

**Lemma 3.27** Sei  $V$  ein affiner Raum und  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner Simplex in  $V$ . Dann ist

$$\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) = \rho_{\sharp}(\sigma) - \lambda_{\sharp}(\sigma) \in C_n(V \times I). \quad (3.25)$$

*Beweis.* Aus Gleichung (3.20) für  $P_\sigma$ , aus der Definition des Randoperators und aus Gleichung (3.24) für die Seiten der Summanden von  $P_\sigma$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \partial P_\sigma = \partial \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i(\sigma) \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial(\delta_i(\sigma)) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (\delta_i(\sigma))^{(j)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} (\delta_i(\sigma))^{(j)} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n (-1)^{2i} \varepsilon_i(\sigma) + \sum_{i=0}^n (-1)^{2i+1} \varepsilon_{i+1}(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j-1)}) \quad (3.26a) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(\sigma) - \sum_{i=0}^n \varepsilon_{i+1}(\sigma) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j-1)}) \quad (3.26b)$$

$$= \sum_{i'=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i'} (-1)^{i'+j+1} \delta_{i'}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(\sigma) - \sum_{i'=1}^{n+1} \varepsilon_{i'}(\sigma) \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j'=i+1}^n (-1)^{i+j'+1} \delta_i(\sigma^{(j')}) \quad (3.26c)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j+1} \delta_i(\sigma^{(j)}) + \varepsilon_0(\sigma) - \varepsilon_{n+1}(\sigma). \quad (3.26d)$$

Hier erhalten wir zunächst (3.26a) durch Einsetzen aus den verschiedenen Fällen in (3.24), und wir vereinfachen diese Zeile zu (3.26b) durch Ausrechnen der Vorzeichen der mittleren Summanden und durch die Beobachtung, dass es zu  $i = 0$  in der ersten Summation kein  $j \leq i - 1$  und zu  $i = n$  in der letzten Summation kein  $j \geq i + 2$  geben kann.

In (3.26c) „glätten“ wir die nicht in einfacher Form in den Summanden stehenden Indizes durch die Einführung neuer, um eins verschobener Indizes gleich den Ausdrücken in den Summanden (dabei werden die Summationen unabhängig voneinander behandelt, so dass die neuen Indizes in verschiedenen Summationen verschiedene Bedeutungen haben); wir schreiben *nur in dieser Zeile* die neuen Indizes mit einem Strich, um sie von den alten zu unterscheiden, und wir passen alle Vorkommnisse der alten Indizes entsprechend an.

Anschließend schreiben wir die Striche nicht mehr und es wird dann ersichtlich, dass man nun die erste und letzte Summe zu einer einzigen Summation für  $j$  von 0 bis  $n$  zusammenfassen kann, und dass in den mittleren Summen die Terme für Indexwerte 1 bis  $n$  sich wegheben und nur der Summand für  $i = 0$  in der zweiten Summe und der Summand für  $i = n + 1$  in der dritten Summe übrig bleiben. Diese Vereinfachung ergibt schließlich (3.26d).

Jetzt berechnen wir den zweiten Summanden auf der linken Seite von (3.25). Da  $P$  ein Homomorphismus ist, folgt direkt aus der Definition des Randoperators und aus Formel 3.20 für das Prisma eines affinen Simplexes, dass

$$P(\partial\sigma) = P\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma^{(j)}\right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P(\sigma^{(j)}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_{\sigma^{(j)}} \\ = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{\dim \sigma^{(j)}} (-1)^i \delta_i(\sigma^{(j)}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j)}). \quad (3.27)$$

Der letzte Ausdruck ist die erste Summe in (3.26d), aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Also heben sich diese Beiträge weg, wenn wir die Summe von (3.26d) und (3.27) bilden, und wir erhalten

$$\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) = \varepsilon_0(\sigma) - \varepsilon_{n+1}(\sigma) = \rho_{\sharp}(\sigma) - \lambda_{\sharp}(\sigma)$$

nach (3.22) und (3.21). ■

**Korollar 3.28** *Der Prismenoperator  $P: C_*(X) \rightarrow C_*(X \times I)$  ist eine natürliche Kettenhomotopie zwischen den natürlichen Kettenabbildungen  $\lambda_{\sharp}$  und  $\rho_{\sharp}$ .*

*Beweis.*  $\lambda_{\sharp}$  und  $\rho_{\sharp}$  sind natürliche Kettenabbildungen  $C_*(X) \rightarrow C_*(X \times I)$ , weil  $\lambda$  und  $\rho$  natürliche Transformationen  $\text{id}_{\mathbf{Top}} \rightarrow Z$  sind und somit nach Lemma 1.29 die Anwendung von  $C_*$  auf  $\lambda$  und  $\rho$  natürliche Transformationen  $C_* \rightarrow C_* \circ Z$  liefert.

Die Definition von  $P$  bewirkt, dass  $P$  automatisch eine natürliche Transformation  $C_* \rightarrow C_* \circ Z$  ist, denn wenn  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so gilt für jeden singulären Simplex  $\sigma \in S_n(X)$ , dass

$$\begin{aligned} P(C_*(f)(\sigma)) &= P(f_{\sharp}(\sigma)) = P(f \circ \sigma) = P_{f \circ \sigma} \\ &= ((f \circ \sigma) \times \text{id}_I)_{\sharp}(P_n) \\ &= ((f \times \text{id}_I) \circ (\sigma \times \text{id}_I))_{\sharp}(P_n) \\ &= (f \times \text{id}_I)_{\sharp}((\sigma \times \text{id}_I)_{\sharp}(P_n)) \\ &= (f \times \text{id}_I)_{\sharp}(P_{\sigma}) = (f \times \text{id}_I)_{\sharp}(P(\sigma)) \\ &= C_*Z(f)(P(\sigma)). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Bisher haben wir in der Notation für den Prismenoperator aus Bequemlichkeit den Namen des topologischen Raumes, auf den er wirkt, nicht erwähnt, aber wenn wir das der Genauigkeit halber jetzt einmal tun, so haben wir gerade gezeigt, dass  $P(Y) \circ C_*(f) = C_*(Z(f)) \circ P(X)$  zumindest auf singulären Simplexes in  $X$ . Da diese aber  $C_*(X)$  frei erzeugen, gilt diese Beziehung auf ganz  $C_*(X)$  und  $P$  ist eine natürliche Transformation  $C_* \rightarrow C_* \circ Z$ .

Nach Definition ist  $P$  für jeden Raum  $X$  ein Grad +1 Homomorphismus, und für jeden singulären Simplex  $\sigma$  gilt, weil  $P$ ,  $\rho_{\sharp}$  und  $\lambda_{\sharp}$  natürliche

Transformationen und  $\sigma_{\#}$  und  $(\sigma \times \text{id}_I)_{\#}$  Kettenabbildungen sind, dass:

$$\begin{aligned}
\partial P(\sigma) + P\partial(\sigma) &= \partial P(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) + P\partial(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
&= \partial\left((\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P(\text{id}_{\Delta_n}))\right) + P\left(\sigma_{\#}(\partial(\text{id}_{\Delta_n}))\right) \\
&= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\partial P(\text{id}_{\Delta_n})) + (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P\partial(\text{id}_{\Delta_n})) \\
&= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}((\partial P + P\partial)(\text{id}_{\Delta_n})) \\
&\stackrel{\text{Lem 3.27}}{=} (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}((\rho_{\#} - \lambda_{\#})(\text{id}_{\Delta_n})) \\
&= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\rho_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) - (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\lambda_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
&= \rho_{\#}(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) - \lambda_{\#}(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
&= \rho_{\#}(\sigma) - \lambda_{\#}(\sigma).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Da dies für singuläre Simplexes gilt, gilt es auch für jede Kette in  $C_*(X)$  und  $P$  ist eine Kettenhomotopie von  $\rho_{\#}$  nach  $\sigma_{\#}$ . ■

**Satz 3.29** a) Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und seien  $f$  und  $g$  stetige Abbildungen  $X \rightarrow Y$ . Wenn  $f \simeq g$ , dann ist

$$f_{\#} \simeq g_{\#}: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$$

und somit ist

$$f_* = g_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y).$$

b) Die gleiche Aussage gilt auch in **Top**<sup>2</sup> statt **Top** und für die relative Homologie, nämlich:

Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  topologische Raumpaare und seien  $f$  und  $g$  stetige Abbildungen  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Wenn  $f$  homotop ist zu  $g$  als Abbildungen von Raumpaaren, dann sind auch  $f_{\#}$  und  $g_{\#}: C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$  kettenhomotop. Folglich ist

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B).$$

*Beweis.* Es reicht, Teil b) zu beweisen, da Teil a) den Spezialfall  $A = B = \emptyset$  darstellt. Trotzdem erhalten wir als Zwischenschritt auch einen direkten Beweis von Teil a).

Sei  $K: (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$  eine Homotopie in  $\mathbf{Top}^2$  von  $f$  nach  $g$ . Sei  $i: A \longrightarrow X$  die Inklusion. Und schließlich, sei  $P$  der Prismenoperator aus Definition 3.23 c).

Damit klar ist, auf welchen Kettengruppen wir im folgenden die Rand- und Prismenoperatoren betrachten, werden wir sie nicht wie sonst aus Bequemlichkeit mit einem einfachen Buchstaben notieren, sondern den jeweiligen topologischen Raum als Index an das Symbol  $\partial$  oder  $P$  heften.

Nach Korollar 3.28 ist

$$\partial_{X \times I} P_X + P_X \partial_X = \rho_{\sharp} - \lambda_{\sharp}$$

als Abbildungen  $C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I)$ , und weil  $K_{\sharp}: C_*(X \times I) \longrightarrow C_*(Y)$  eine Kettenabbildung ist, haben wir

$$\begin{aligned} \partial_Y K_{\sharp} P_X + K_{\sharp} P_X \partial_X &= K_{\sharp} \partial_{X \times I} P_X + K_{\sharp} P_X \partial_X \\ &= K_{\sharp} \circ (\partial_{X \times I} P_X + P_X \partial_X) \\ &= K_{\sharp} \circ (\rho_{\sharp} - \lambda_{\sharp}) = K_{\sharp} \rho_{\sharp} - K_{\sharp} \lambda_{\sharp} \quad (3.30) \\ &= (K \circ \rho)_{\sharp} - (K \circ \lambda)_{\sharp} \\ &= g_{\sharp} - f_{\sharp} \end{aligned}$$

als Abbildungen  $C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$ .

(Insbesondere ist  $K_{\sharp} P_X$  eine Kettenhomotopie von  $f_{\sharp}$  nach  $g_{\sharp}$  und  $f$  und  $g$  induzieren den gleichen Homologiehomomorphismus  $H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ ; wir haben an dieser Stelle also schon Teil a) bewiesen.)

Weil  $P$  eine natürliche Transformation ist, ist  $(i \times \text{id}_I)_{\sharp} \circ P_A = P_X \circ i_{\sharp}$  oder anders gesagt,  $P_A = P_X | C_*(A)$ . Insbesondere bildet  $P_X$  den Unterkettenkomplex  $C_*(A) \subseteq C_*(X)$  nach  $C_*(A \times I)$  ab (weil  $P_A$  dies tut) und induziert somit nach Lemma 2.30 e) ii) auf dem Quotienten einen Grad +1 Homomorphismus

$$\bar{P}_X: C_*(X, A) \longrightarrow C_*(X \times I, A \times I).$$

Weil die Randoperatoren und die Kettenabbildungen der relativen Kettengruppen von den entsprechenden Randoperatoren und Kettenabbildungen der Oberräume der Paare induziert werden, folgt sofort aus (3.30), dass

$$\bar{\partial}_{(Y, B)} \bar{K}_{\sharp} \bar{P}_X + \bar{K}_{\sharp} \bar{P}_X \bar{\partial}_{(X, A)} = \bar{g}_{\sharp} - \bar{f}_{\sharp}$$

als Abbildungen  $C_*(X, A) \longrightarrow C_*(Y, B)$ .

Das heißt,  $\bar{K}_{\sharp} \bar{P}_X$  ist eine Kettenhomotopie von  $\bar{f}_{\sharp}$  nach  $\bar{g}_{\sharp}$  und diese relativen Kettenabbildungen induzieren somit die gleiche Abbildung

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

in der relativen Homologie. ■

**Lemma 3.30** a) Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz. Dann ist

$$f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

ein Isomorphismus.

b) Seien  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  topologische Raumpaare und sei  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine stetige Abbildung, so dass  $f: X \rightarrow Y$  und  $f|_A: A \rightarrow B$  Homotopieäquivalenzen sind. Dann ist

$$f_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$$

ein Isomorphismus.

(Man beachte, dass man nicht verlangen muss, dass  $f$  eine Homotopieäquivalenz in  $\mathbf{Top}^2$  ist, sondern nur dass  $f$  für die Oberräume und für die Unterräume jeweils Homotopieinversen hat, die nichts miteinander zu tun haben müssen. Ebenfalls können die Homotopien für die Ober- und Unterräume unabhängig voneinander existieren und müssen keine besondere Beziehung zueinander einhalten.)

*Beweis.* Zu a): Sei  $g: Y \rightarrow X$  ein Homotopieinverses zu  $f$ . Aus  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  folgt mit Satz 3.29 a), dass  $g_\#$  und  $f_\#$  Kettenhomotopieinverse zueinander sind und somit Kettenhomotopieäquivalenzen sind, und weiter, dass  $f_*$  und  $g_*$  Umkehrabbildungen zueinander sind und somit Isomorphismen der Homologiegruppen.

Zu b): In dem von  $f$  induzierten Diagrammmorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) \\ f_* \downarrow \cong & & f_* \downarrow \cong & & \downarrow f_* & & \cong \downarrow f_* & & \cong \downarrow f_* \\ H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(Y) \end{array}$$

des gezeigten Abschnitts der langen exakten Homologiefolgen von  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  sind in jeder Dimension nach Teil a) und den Voraussetzungen die vier äußeren Homomorphismen  $f_*$  Isomorphismen. Aus dem 5-er Lemma folgt, dass auch der mittlere Homomorphismus

$$f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

für jedes  $n$  ein Isomorphismus ist. ■

An dieser Stelle können wir schon, analog zu Korollar 6.30 für die Fundamentalgruppe im Skriptum der *Einführung in die Topologie*, ein erstes einfaches Ergebnis über die Homologiegruppen zusammenziehbarer Räume erhalten, sobald wir die einfachste Grundeigenschaft in der Eilenberg-Steenrod Liste behandelt haben, nämlich die Bestimmung der Homologie eines Einpunktraumes. Wir müssen das ohnehin jetzt tun, weil wir ohne dieses Ergebnis die letzte schwierige Grundeigenschaft des Homologiefunktors nicht herleiten können.

**Satz 3.31** Sei  $X = \{p\}$  ein topologischer Raum, der nur aus einem Punkt besteht. Dann ist

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0; \\ \{0\}, & \text{wenn } n \neq 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

*Beweis.* Da  $X$  nur aus einem Punkt besteht, ist jede stetige Abbildung nach  $X$  konstant und insbesondere gibt es in jeder Dimension  $n \geq 0$  genau einen singulären  $n$ -Simplex in  $X$ , nämlich die konstante Abbildung  $\Delta_n \rightarrow \{p\}$ . Wir nennen diesen eindeutigen  $n$ -Simplex  $s_n$ . Es folgt, dass  $C_n(X) = \mathbf{Z}$  für jedes  $n \geq 0$ .

Weil  $C_{-1}(X) = \{0\}$ , ist  $s_0$  automatisch ein Zyklus. Wenn  $n > 1$ , so gibt es auch in Dimension  $n - 1$  nur einen singulären Simplex in  $X$ , d.h., jede Seite  $s_n^{(i)}$  von  $s_n$  ist gleich  $s_{n-1}$ , und wir haben

$$\begin{aligned} \partial_n s_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i s_n^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_{n-1} \\ &= \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \right) s_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist;} \\ s_{n-1}, & \text{wenn } n \text{ gerade ist.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

In anderen Worten,  $\partial_n$  ist ein Isomorphismus  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  für  $n$  gerade  $\geq 2$ , und  $\partial_n$  ist 0, wenn  $n$  ungerade oder wenn  $n \leq 0$  ist.

Wann immer in einem Kettenkomplex  $\partial_n$  ein Isomorphismus ist, ist  $Z_n$  und somit auch  $B_n = \{0\}$ , und  $B_{n-1}$  und somit auch  $Z_{n-1}$  ist ganz  $C_{n-1}$ , so dass  $H_n = H_{n-1} = \{0\}$ .

Weil dies im singulären Kettenkomplex  $C_*(X)$  für alle geraden  $n \geq 2$  der Fall ist, ist  $H_n(X) = \{0\}$  für alle  $n \geq 1$ , und natürlich auch für  $n < 0$ , weil dann  $C_n$  schon  $\{0\}$  ist.

Es verbleibt nur der Fall  $n = 0$ . Wir haben  $\partial_1 = \partial_0 = \{0\}$ . Also ist  $Z_0(X) = \mathbf{Z}$  aber  $B_0(X) = \{0\}$ , und deshalb ist  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ . ■

**Definition 3.32** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *azyklisch*, wenn die Homologie von  $X$  wie in (3.31) ist, d. h., wenn  $H_n(X) = \{0\}$  für alle  $n \neq 0$  und wenn  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ .

$X$  ist also azyklisch genau dann, wenn  $X$  die Homologie eines Punktes hat.

**Korollar 3.33** Jeder zusammenziehbare topologische Raum  $X$  ist azyklisch.

*Beweis.* Wenn  $X$  zusammenziehbar ist, hat  $X$  den Homotopietyp eines Einpunktraumes, und aus Lemma 3.30 a) folgt, dass  $X$  dann auch die Homologie (3.31) eines Einpunktraumes hat. ■

**Beispiele 3.34** Die Räume  $\mathbf{R}^n$ ,  $D^n$ , und jede konvexe Teilmenge von  $\mathbf{R}^n$  (insbesondere auch  $\Delta_n!$ ) sind alle azyklisch und haben die durch (3.31) gegebene Homologie.

Wir brauchen noch eine wichtige Eigenschaft der singulären Homologie, um die Homologiegruppen interessanter Räume tatsächlich berechnen zu können. Diese Eigenschaft erlaubt es, Räume  $X$  auf gewisse zulässige Weisen in zwei überlappende Teile  $A$  und  $B$  zu zerlegen und aus der (hoffentlich einfacheren) Homologie der Teile und ihres Durchschnitts die Homologie des ganzen Raumes zusammenzubauen.

Dabei tritt ein technisches Problem auf, für dessen Lösung wir zuerst sorgen müssen: wir wollen aus den Kettengruppen von  $A$  und  $B$  die Homologie von  $X$  berechnen, aber leider gibt es singuläre Simplizes in  $X$ , die weder in  $A$  noch in  $B$  enthalten sind, und deshalb erzeugen  $C_*(A)$  und  $C_*(B)$  nicht die volle Kettengruppe von  $X$ , sondern nur eine Untergruppe. Dieses Problem lässt sich letztendlich doch überwinden, weil diese echte Untergruppe  $C_*(A) + C_*(B)$  der singulären Kettengruppe trotzdem die volle *Homologiegruppe* von  $X$  erzeugt und ohne Verzerrung berechnet.

Der Clou, um das zu zeigen, besteht darin, zu große Simplizes in  $X$  in kleinere zu unterteilen, die ganz in  $A$  oder ganz in  $B$  liegen. Hier die wichtigen Grundbegriffe für die Zerlegung von großen Simplizes in „kleine“.

**Definition 3.35** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  eine Überdeckung von  $X$ . In anderen Worten, sei

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

Wir nennen einen singulären Simplex  $\sigma \in S_n(X)$  *klein* oder genauer  *$\mathcal{U}$ -klein*, wenn es ein  $\lambda \in \Lambda$  gibt mit  $\text{Bild } \sigma \subseteq U_\lambda$ .

Wir bezeichnen mit  $S_n(\mathcal{U})$  die Menge aller  $\mathcal{U}$ -kleinen  $n$ -Simplizes in  $X$  und mit

$$C_n(\mathcal{U}) := F(S_n(\mathcal{U}))$$

die freie abelsche Gruppe erzeugt von den kleinen  $n$ -Simplizes in  $X$ ; sie ist eine Untergruppe von  $C_n(X)$  und offensichtlich wird sie erzeugt von den Untergruppen  $C_n(U_\lambda)$  für  $\lambda \in \Lambda$ , d. h., wir haben

$$C_n(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_n(U_\lambda) \quad (3.33)$$

für jedes  $n \in \mathbf{N}$ . Die Elemente von  $C_n(\mathcal{U})$  nennen wir  **$\mathcal{U}$ -kleine  $n$ -Ketten** auf  $X$ .

Wir setzen

$$C_*(\mathcal{U}) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n(\mathcal{U}). \quad (3.34)$$

Dies ist eine graduierte Untergruppe von  $C_*(X)$  und wegen (3.33) gilt auch hier

$$C_*(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_*(U_\lambda). \quad (3.35)$$

Die Elemente von  $C_*(\mathcal{U})$  nennen wir  **$\mathcal{U}$ -kleine Ketten** auf  $X$ .

Offensichtlich ist jede Seite eines kleinen Simplexes wieder klein und deshalb ist der Rand einer kleinen Kette wieder klein. Das heißt, der Randoperator  $\partial$  von  $C_*(X)$  bildet  $C_*(\mathcal{U})$  wieder in sich ab und  $C_*(\mathcal{U})$  ist ein *Unterkettenkomplex* von  $C_*(X)$ . (Das ist auch klar aus (3.35), denn jedes  $C_*(U_\lambda)$  ist ein Unterkettenkomplex von  $C_*(X)$  und unter  $\partial$  abgeschlossen.)

Wir bezeichnen mit  $j$  die Inklusion

$$j: C_*(\mathcal{U}) \longrightarrow C_*(X);$$

sie ist eine Kettenabbildung.

Wir schreiben  $H_*(\mathcal{U})$  als bequeme Kurznotation für die graduierte Homologiegruppe  $H(C_*(\mathcal{U}))$  des Kettenkomplexes  $C_*(\mathcal{U})$ .

Unser Ziel wird es sein, zu zeigen, dass der Unterkettenkomplex  $C_*(\mathcal{U})$  die gleiche Homologie hat, wie ganz  $C_*(X)$ , und zu diesem Zweck werden wir zeigen, dass unter geeigneten leicht zu erfüllenden Voraussetzungen für die Überdeckung  $\mathcal{U}$  die Kettenabbildung  $j$  einen Isomorphismus in Homologie induziert.

Um das zeigen zu können, müssen wir große Simplizes  $\sigma$  auf geeignete Weise zerkleinern. Die Methode, die wir dafür wählen, heißt **baryzentrische Unterteilung**, und wir bereiten ihre Definition vor durch einige Betrachtungen über affine Simplizes.

**Definition 3.36** Sei  $V$  ein affiner Raum und sei  $v \in V$ . Für jeden affinen  $n$ -Simplex  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  in  $V$  bezeichnen wir mit  $v \cdot \sigma$  den affinen  $n + 1$ -Simplex

$$v \cdot \sigma := [v, v_0, v_1, \dots, v_n]. \quad (3.36)$$

Diese Definition setzen wir linear fort auf die von den affinen Simplexes erzeugte Untergruppe von  $C_n(V)$ , d. h., für eine affine Kette

$$c = \sum_{\substack{\sigma \in S_n(X) \\ \sigma \text{ affin}}} m_\sigma \sigma$$

setzen wir

$$v \cdot c := \sum_{\substack{\sigma \in S_n(X) \\ \sigma \text{ affin}}} m_\sigma (v \cdot \sigma) \in C_{n+1}(V).$$

Dies ist wieder eine affine Kette. Die Abbildung  $v \cdot$  ist nach Definition ein Gruppenhomomorphismus.

**Bemerkung 3.37** Sei  $V$  ein affiner Raum. Sei  $v \in V$  und  $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner  $n$ -Simplex in  $V$ .

Der 0-te Eckpunkt von  $v \cdot \sigma$  ist  $v$ , und für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq n + 1$  ist der  $i$ -te Eckpunkt von  $v \cdot \sigma$  gleich dem  $i - 1$ -ten Eckpunkt  $v_{i-1}$  von  $\sigma$ . Folglich ist

$$(v \cdot \sigma)^{(0)} = [v_0, \dots, v_n] = \sigma$$

und

$$(v \cdot \sigma)^{(i)} = v \cdot \sigma^{(i-1)} \quad \text{für jedes } i \geq 1.$$

Hieraus folgt sofort

$$\partial(v \cdot \sigma) = \sigma - v \cdot \partial\sigma,$$

wie man sofort nachrechnet.

Diese Beziehung überträgt sich auf jede affine Kette, d. h., wir haben

$$\partial(v \cdot c) = c - v \cdot \partial c \quad (3.37)$$

für jede affine Kette  $c$  auf  $V$ .

**Definition 3.38** Das *Baryzentrum* des  $n$ -dimensionalen Standardsimplexes  $\Delta_n$  ist der Punkt

$$b_n := \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)}_n \in \Delta_n, \quad (3.38)$$

dessen baryzentrische Koordinaten alle gleich sind und somit gleich  $1/(n+1)$  sind, da ihre Summe 1 sein muss. Die kartesischen Koordinaten in (3.38) sind einfach die letzten  $n$  baryzentrischen Koordinaten. Das Baryzentrum ist, wie der Name sagt, der Schwerpunkt von  $\Delta_n$ .

**Definition 3.39** Durch Induktion über  $n$  definieren wir für jedes  $n \in \mathbf{N}$  und jeden topologischen Raum  $X$  eine natürliche Kettenabbildung

$$B_n: C_n(X) \longrightarrow C_n(X),$$

genannt die *baryzentrische Unterteilung*, wie folgt:

Für  $n = 0$  setzen wir

$$B_0 := \text{id}_{C_0(X)} \quad (3.39)$$

und für  $n < 0$  setzen wir  $B_n = \mathbf{0}$ , da wir ohnehin keine andere Wahl haben. Offensichtlich ist dies natürlich und offensichtlich gilt  $\partial_0 B_0 = B_{-1} \partial_0$ .

Nun sei  $n \geq 0$  und es sei  $B_n$  schon als natürliche Kettenabbildung  $B_n: C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$  definiert, und insbesondere gelte

$$\partial_n B_n = B_{n-1} \partial_n. \quad (3.40)$$

Wir nennen

$$B_{n+1}^* := b_{n+1} \cdot B_n(\partial \Delta_{n+1}) \quad (3.41)$$

die *baryzentrische Unterteilung des Standard  $n+1$ -Simplexes*; sie ist eine affine Kette in  $C_{n+1}(\Delta_{n+1})$ .

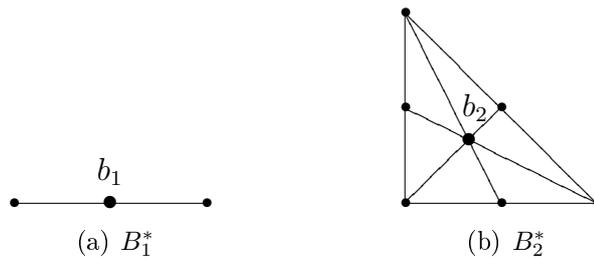


Abbildung 3.3: Die baryzentrische Unterteilung des Standardsimplexes.

Für jeden singulären  $n+1$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$  definieren wir

$$B_{n+1}(\sigma) := \sigma_{\#}(B_{n+1}^*) \quad (3.42)$$

und setzen dies linear fort zu einem Homomorphismus

$$B_{n+1}: C_{n+1}(X) \longrightarrow C_{n+1}(X).$$

Dies ist nach Definition eine natürliche Transformation, denn für jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen gilt für jeden singulären  $n + 1$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$ , dass

$$f_{\#}(B_{n+1}(\sigma)) = f_{\#}\sigma_{\#}(B_{n+1}^*) = (f \circ \sigma)_{\#}(B_{n+1}^*) = B_{n+1}(f \circ \sigma) = B_{n+1}(f_{\#}(\sigma)),$$

und diese Beziehung setzt sich auf beliebige Ketten fort, so dass

$$f_{\#} \circ B_{n+1} = B_{n+1} \circ f_{\#}$$

auf ganz  $C_n(X)$ .

$B_{n+1}$  hat bezüglich  $\partial_{n+1}$  die Eigenschaft einer Kettenabbildung, denn für jeden singulären  $n + 1$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$  gilt:

$$\partial_{n+1}(B_{n+1}(\sigma)) = \partial_{n+1}(\sigma_{\#}(B_{n+1}^*)) \quad (3.43a)$$

$$= \sigma_{\#}(\partial_{n+1}B_{n+1}^*) \quad (3.43b)$$

$$= \sigma_{\#}\left(\partial_{n+1}(b_{n+1} \cdot B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}))\right) \quad (3.43c)$$

$$= \sigma_{\#}(B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) - b_{n+1} \cdot \partial_n B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1})) \quad (3.43d)$$

$$= \sigma_{\#}(B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) - b_{n+1} \cdot B_{n-1}\partial_n\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) \quad (3.43e)$$

$$= \sigma_{\#}B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) \quad (3.43f)$$

$$= B_n(\sigma_{\#}(\partial_{n+1}\Delta_{n+1})) \quad (3.43g)$$

$$= B_n(\partial_{n+1}(\sigma)). \quad (3.43h)$$

Dabei folgt (3.43a) durch Einsetzen aus der Definition (3.42) von  $B_{n+1}$ ; wir erhalten (3.43b), weil  $\sigma_{\#}$  eine Kettenabbildung ist; in (3.43c) haben wir die rechte Seite von Gleichung (3.41) für  $B_{n+1}^*$  eingesetzt; wir erhalten (3.43d) aus (3.37); für (3.43e) nutzen wir die Induktionsannahme (3.40) aus, dass  $B_n$  mit  $B_{n-1}$  und  $\partial_n$  die Eigenschaft einer Kettenabbildung erfüllt; (3.43f) folgt, weil  $\partial_n\partial_{n+1} = 0$  ist; in (3.43g) nutzen wir die Induktionsvoraussetzung aus, dass  $B_n$  natürlich ist; und wir erhalten (3.43h) aus der Beziehung (2.18) für den Randoperator  $\partial$ .

Die Beziehung (3.43) setzt sich auf beliebige Ketten fort, so dass

$$\partial_{n+1}B_{n+1} = B_n\partial_{n+1}$$

auf ganz  $C_{n+1}(X)$  und  $B_{n+1}$  in Bezug auf  $B_n$  und  $\partial_{n+1}$  die Eigenschaften einer Kettenabbildung hat.

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und wir erhalten durch Induktion eine Familie von Abbildungen  $B_n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ , die mit den  $B_n = \mathbf{0}$  für  $n < 0$  die homogenen Anteile einer natürlichen graduierten Kettenabbildung

$$B: C_*(X) \rightarrow C_*(X)$$

sind, die wir die (erste) **baryzentrische Unterteilung** nennen.

Wir werden gleich sehen, dass für eine Kette  $c \in C_*(X)$  die Simplizes in  $Bc$  tatsächlich kleiner sind als die Simplizes in  $c$ , aber nur ein bisschen kleiner, so dass die einmalige baryzentrische Unterteilung für die meisten Anwendungen nicht „fein genug“ ist. Da aber  $B$  eine Selbstabbildung von  $C_*(X)$  ist, kann man es mehrmals anwenden um „beliebig feine“ Unterteilungen zu erhalten.

Wir benutzen deshalb neben  $B$  selber auch die Potenzen

$$B^k = \underbrace{B \circ \cdots \circ B}_k$$

von  $B$  und nennen  $B^k$  die  **$k$ -te baryzentrische Unterteilung** auf  $C_*(X)$ . Auch die  $B^k$  sind natürliche Kettenabbildungen.

Wir werden gleich zeigen, dass für eine vorgegebene offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  genügend oft baryzentrisch unterteilte Simplizes  $\mathcal{U}$ -klein werden, aber damit uns das etwas nützt, darf die baryzentrische Unterteilung die homologischen Eigenschaften der Ketten, also ihre Bedeutung für die Homologiegruppen des Raumes, nicht verändern. Das wollen wir zuerst sicherstellen, in dem wir zeigen, dass die baryzentrische Unterteilung kettenhomotop zur Identität ist.

Aber die Konstruktion der Kettenhomotopie ist nicht so schön geometrisch wie bei der Konstruktion des Prismenoperators weiter oben. Zum Glück brauchen wir uns nicht um die geometrischen Details zu kümmern—sie würden uns ohnehin nur verwirren. Die eigentliche Konstruktion ist „nichtkonstruktiv“ und ein wenig abstrakt, und gibt die Bildketten der Kettenhomotopie gar nicht explizit an.

Wir werden in diesem Geiste handeln und die Einzelheiten der Konstruktion in einem allgemeinen, von dem speziellen Falle der baryzentrischen Unterteilung losgelösten Satz erläutern, der dann für viele andere Fälle auch anwendbar ist. Das hat auch den Vorteil, dass dadurch das Wesentliche herausgekehrt wird und die Konstruktion im Endeffekt leichter verständlich wird.

**Lemma 3.40** *Seien  $f$  und  $g$  zwei natürliche Transformationen  $C_* \rightarrow C_*$  (natürliche Transformationen der Kategorie  $\mathbf{KK}$ , also natürliche Kettenabbildungen), so dass  $f_0 = g_0$ . Dann gibt es eine natürliche Kettenhomotopie  $\Phi$  von  $f$  nach  $g$ , d. h., ein natürlicher Grad +1 Homomorphismus  $C_* \rightarrow C_*$ , so dass*

$$g - f = \partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial.$$

*Beweis.* Damit die Notation nicht ganz unhandlich wird, werden wir für jeden einzelnen topologischen Raum  $X$  die von den natürlichen Transformationen

$f$ ,  $g$  und  $\Phi$  gegebenen graduierten Homomorphismen  $C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$  auch mit  $f$ ,  $g$  und  $\Phi$  bezeichnen (anstatt mit  $f(X)$ ,  $g(X)$ ,  $\Phi(X)$ , wie es richtiger wäre); nur an einer Stelle wird zur Genauigkeit die volle Notation doch verwendet.

Wir beginnen mit der Konstruktion einer solchen natürlichen Kettenhomotopie  $\Phi$ . Für  $n \leq 0$  müssen wir  $\Phi_n = 0$  setzen, da die Kettengruppen in negativen Dimensionen  $\{0\}$  sind. Wir brauchen also nur die  $\Phi_n$  für  $n \in \mathbf{N}$  zu konstruieren, und das tun wir durch Induktion über  $n$ . Dabei muss  $\Phi_n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$  die Bedingung

$$g_n - f_n = \partial_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ \partial_n \quad (3.44)_n$$

erfüllen (und eine natürliche Transformation sein).

Um die Induktion zu beginnen setzen wir  $\Phi_0 := 0$ . Bedingung  $(3.44)_0$  ist erfüllt, weil  $f_0 = g_0$ .

Wir nehmen jetzt an, dass  $n > 0$  und dass wir schon für alle  $k < n$  natürliche Transformationen  $\Phi_k: C_k \longrightarrow C_{k+1}$  definiert haben, die  $(3.44)_k$  für jedes  $k < n$  erfüllen.

Um  $\Phi_n$  zu definieren, konstruieren wir erst einen „Prototypen“, aus dem wir die Werte für alle Ketten erhalten können. Dazu betrachten wir die Kette

$$c := g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \in C_n(\Delta_n), \quad (3.45)$$

wobei mit  $f_n$ ,  $g_n$  und  $\Phi_{n-1}$  die Abbildungen gemeint sind, die diese natürliche Transformationen dem topologischen Raum  $\Delta_n$  zuordnen.

Weil  $g$  und  $f$  natürliche Kettenabbildungen sind und weil  $(3.44)_{n-1}$  erfüllt ist, haben wir

$$\begin{aligned} \partial_n c &= \partial_n g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n f_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= g_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) - f_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= \Phi_{n-2}(\partial_{n-1} \partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Kette  $c$  ist also ein Zyklus.

Aber  $\Delta_n$  ist zusammenziehbar und somit azyklisch. Weil  $n > 0$  haben wir  $H_n(\Delta_n) = 0$  und jeder  $n$ -Zyklus ist auch ein  $n$ -Rand. Wir können also eine Kette  $d \in C_{n+1}(\Delta_n)$  finden mit  $\partial_{n+1} d = c$ .

Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  und einen beliebigen singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$  setzen wir

$$\Phi_n(\sigma) := \sigma_{\#}(d) \in C_{n+1}(X), \quad (3.46)$$

und wir erweitern  $\Phi_n$  linear zu einem Homomorphismus  $C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ .

Erstens liefert dies automatisch eine natürliche Transformation, denn wenn  $h: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so gilt für jeden singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in  $X$ , dass

$$h_{\#}(\Phi_n(\sigma)) = h_{\#}\sigma_{\#}(d) = (h \circ \sigma)_{\#}(d) = \Phi_n(h \circ \sigma) = \Phi_n(h_{\#}(\sigma)).$$

Weil diese Beziehung für die Erzeugenden  $\sigma$  von  $C_n(X)$  gilt, gilt sie auch für jede Kette und wir haben

$$h_{\#} \circ \Phi_n(X) = \Phi_n(Y) \circ h_{\#}.$$

Die so definierte natürliche Transformation  $\Phi_n$  erfüllt auch  $(3.44)_n$ , denn für jeden singulären  $n$ -Simplex  $\sigma$  in einem topologischen Raum  $X$  haben wir

$$\partial_{n+1}\Phi_n(\sigma) + \Phi_{n-1}\partial_n(\sigma) = \partial_{n+1}\sigma_{\#}(d) + \Phi_{n-1}\partial_n\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47a)$$

$$= \sigma_{\#}\partial_{n+1}(d) + \Phi_{n-1}\sigma_{\#}\partial_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47b)$$

$$= \sigma_{\#}(c) + \sigma_{\#}\Phi_{n-1}\partial_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47c)$$

$$= \sigma_{\#}(c + \Phi_{n-1}\partial_n(\text{id}_{\Delta_n})) \quad (3.47d)$$

$$= \sigma_{\#}(g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n(\text{id}_{\Delta_n})) \quad (3.47e)$$

$$= \sigma_{\#}g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \sigma_{\#}f_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47f)$$

$$= g_n\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (3.47g)$$

$$= g_n(\sigma) - f_n(\sigma).$$

Hier setzen wir aus (3.46) ein, um die rechte Seite von (3.47a) zu erhalten, (3.47b) folgt, weil  $\sigma_{\#}$  eine Kettenabbildung ist, wir erhalten den ersten Term von (3.47c) weil  $\partial d = c$  und den zweiten Term weil  $\Phi_{n-1}$  natürlich ist, und (3.47d) folgt, weil  $\sigma_{\#}$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir erhalten (3.47e), indem wir für  $c$  die rechte Seite von seiner definierenden Gleichung (3.45) einsetzen. (3.47f) folgt wieder, weil  $\sigma_{\#}$  ein Gruppenhomomorphismus ist, und wir können es zu (3.47g) umschreiben, weil  $f$  und  $g$  als natürliche Transformationen vorausgesetzt wurden.

Die Gleichung (3.47) beweist, dass  $(3.44)_n$  für einzelne singuläre Simplizes gilt, aber dann gilt es auch für beliebige Ketten in  $C_n(X)$ .

Den gesamten Beweis von  $(3.44)_n$  kann man wie folgt kurz zusammenfassen: die Eigenschaft, dass  $h_{\#}$  für jede stetige Abbildung  $h$  eine Kettenabbildung ist, bedeutet anders ausgedrückt, dass der singuläre Randoperator eine natürliche Transformation ist, und dann folgt alles aus der Tatsache, dass  $d$  gerade so gewählt wurde, dass  $(3.44)_n$  für den singulären Simplex  $\text{id}_{\Delta_n}$  gilt. Wegen der Natürlichkeit aller Abbildungen in  $(3.44)_n$  gilt diese Gleichung dann auch für beliebige singuläre Simplizes, und durch Linearität für beliebige Ketten.

Damit haben wir den Induktionsschritt zu Ende geführt, denn wir haben eine natürliche Transformation  $\Phi_n$  definiert, die  $(3.44)_n$  erfüllt. Durch Induktion erhalten wir nun alle homogenen Anteile einer natürlichen Transformation  $\Phi: C_* \rightarrow C_*$ , die eine Kettenhomotopie von  $f$  nach  $g$  ist. ■

Ähnliche Gedanken und Methoden, wie in diesem Beweis, kommen immer wieder zur Anwendung in der algebraischen Topologie, und es gibt viele Situationen, wo ein direkter oder „geometrischer“ Beweis gar nicht möglich oder kaum zu verstehen wäre.

Das wichtige Merkmal, das diesen Beweis ermöglicht, ist die Tatsache, dass die spezielle Kette  $\text{id}_{\Delta_n}$ , die auf einem azyklischen Raum lebt, als Modell für *alle* singulären Ketten dient, in dem Sinne, dass jede singuläre Kettengruppe von Bildern oder Kopien dieser speziellen Kette frei erzeugt wird.

**Korollar 3.41** Für jedes  $k \in \mathbf{N}$  ist die  $k$ -te baryzentrische Unterteilung  $B^k$  natürlich kettenhomotop zur Identität als Kettenabbildungen von  $C_*(X)$  in sich.

*Beweis.* Das folgt sofort aus Lemma 3.40, denn  $B^k$  und  $\text{id}_{C_*(X)}$  sind natürliche Kettenabbildungen, die in Dimension 0 gleich sind nach Bestimmung (3.39) in Definition 3.39. ■

Die Tragweite dieses Korollars liegt darin, dass wir die singuläre Homologie eines Raumes genauso gut mit singulären Ketten berechnen können, die beliebig oft baryzentrisch unterteilt wurden. Uns bleibt nur noch zu zeigen, dass wir dadurch die Ketten „klein“ bekommen können bezüglich einer vorgegebenen offenen Überdeckung.

Dazu müssen wir die Größe eines baryzentrisch unterteilten Simplexes messen können, und das tun wir am einfachsten mit einer Metrik in einem metrischen Raum. Da der Standardsimplex im metrischen Raum  $\mathbf{R}^n$  liegt und als Muster für alle singulären Simplizes fungiert, reicht es, diese Messung für den Standardsimplex oder ohne Mehraufwand für beliebige affine Simplizes in einem normierten Vektorraum vorzunehmen.

**Definition 3.42** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $A \subseteq X$ . Wir definieren den **Durchmesser**  $\delta(A)$  von  $A$  als

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

$A$  heißt **beschränkt**, wenn  $\delta(A) < \infty$ .

Wenn  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$  ist, nennen wir den Durchmesser der Bildmenge  $\sigma(\Delta_n)$  vereinfachend den **Durchmesser von  $\sigma$**  und schreiben dafür  $\delta(\sigma)$ .

Weil ihr Bild kompakt ist, sind singuläre Simplexe immer beschränkt.

**Lemma 3.43** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{R}$ , sei  $\| \cdot \|$  eine Norm auf  $V$  und sei  $d$  die Metrik dieser Norm. Seien  $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$  und sei  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ . Bezüglich der Metrik  $d$  ist dann

$$\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i, j \leq n} d(v_i, v_j),$$

d. h., die maximale Entfernung zwischen zwei Punkten in einem affinen Simplex wird zwischen zwei Eckpunkten angenommen.

*Beweis.* Zunächst sei  $x$  ein beliebiger Punkt von  $V$  und sei  $a \in \text{Bild } \sigma$ . Dann gibt es reelle Zahlen  $t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0$  mit  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$  und mit  $\sum_{i=0}^n t_i v_i = a$ .

Wir haben

$$\begin{aligned} d(x, a) = \|x - a\| &= \left\| \sum_{i=0}^n t_i x - \sum_{i=0}^n t_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n t_i (x - v_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i \|x - v_i\| \leq \sum_{i=0}^n t_i \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\| \\ &= 1 \cdot \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\| \\ &= \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\|. \end{aligned}$$

In anderen Worten, die maximale Entfernung von irgendeinem Punkt  $x$  zu einem Punkt in einem affinen Simplex ist die Entfernung von  $x$  zum entferntesten Eckpunkt des Simplexes.

Nun seien  $a$  und  $b$  beliebige Punkte von  $\sigma$ . Dann gibt es nach dieser Feststellung einen Eckpunkt  $v_j$  mit  $d(a, b) \leq d(a, v_j)$  und es gibt anschließend einen Eckpunkt  $v_i$  mit  $d(a, v_j) \leq d(v_i, v_j)$ .

Also gibt es zu je zwei Punkten  $a$  und  $b$  von  $\sigma$  Eckpunkte  $v_i$  und  $v_j$  mit  $d(a, b) \leq d(v_i, v_j)$ , und deshalb wird die maximale Entfernung zwischen zwei Punkten von  $\sigma$  zwischen zwei Eckpunkten angenommen. ■

**Korollar 3.44** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{R}$ , sei  $\| \cdot \|$  eine Norm auf  $V$  und sei  $d$  die Metrik dieser Norm. Sei  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  ein affiner  $n$ -Simplex in  $V$  und sei  $B\sigma$  seine erste baryzentrische Unterteilung.

Für jeden Simplex  $\tau$  in der Kette  $B\sigma$  gilt

$$\delta(\tau) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma). \quad (3.48)$$

*Beweis.* Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über  $n$ . Sie gilt automatisch für  $n = 0$ , weil jeder Nullsimplex aus einem einzigen Punkt besteht und Durchmesser 0 hat.

Nun sei  $n > 0$  und die Behauptung sei richtig für alle  $k < n$ . Sei

$$s := \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$$

der Schwerpunkt oder das Baryzentrum von  $\sigma$ .

Die Definition von  $B$  in Gleichungen (3.41) und (3.42) besagt (für Dimension  $n$  statt  $n+1$ ), dass

$$\begin{aligned} B_n(\sigma) &= \sigma_{\#}(B_n^*) = \sigma_{\#}(b_n \cdot B_{n-1}(\partial\Delta_n)) \\ &= \sigma(b_n) \cdot \sigma_{\#}(B_{n-1}(\partial\Delta_n)) && (\sigma \text{ affin}) \\ &= \sigma(b_n) \cdot B_{n-1}(\sigma_{\#}(\partial\Delta_n)) && (B_{n-1} \text{ natürlich}) \\ &= s \cdot B_{n-1}(\partial\sigma). \end{aligned}$$

Die Eckpunkte der Simplexes in dieser Kette sind  $s$  und Eckpunkte der Simplexes in  $B_{n-1}(\partial\sigma)$ .

Die Simplexes in  $\partial\sigma$  sind Seiten von  $\sigma$  und haben somit höchstens den Durchmesser von  $\sigma$ . Nach Induktionsannahme haben zwei Eckpunkte eines Simplexes in  $B_{n-1}(\partial\sigma)$  höchstens die Entfernung

$$\frac{n-1}{n} \delta(\sigma) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma)$$

zueinander.

Der Punkt  $s$  hat zu den Eckpunkten  $v_j$  von  $\sigma$  die Entfernung

$$\begin{aligned} d(s, v_j) &= \|s - v_j\| = \left\| \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i - \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \right) v_j \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (v_i - v_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \|v_i - v_j\| \\ &\leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma), \end{aligned}$$

weil  $\|v_j - v_j\| = 0$  und jedes der  $n$  anderen  $\|v_i - v_j\| \leq \delta(\sigma)$ . Nach Lemma 3.43 hat  $s$  zu jedem beliebigen Punkt von Bild  $\sigma$  und insbesondere zu den Eckpunkten der Simplexes in  $B_{n-1}(\partial\sigma)$  höchstens diese Entfernung.

Also haben je zwei Eckpunkte eines Simplexes in  $B_n(\sigma)$  höchstens Entfernung  $\frac{n}{n+1} \delta(\sigma)$  zueinander und die Behauptung folgt sofort aus Lemma 3.43. ■

**Satz 3.45 (Satz über kleine Simplizes)** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ , so dass

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overset{\circ}{U}_\lambda.$$

(Das gilt zum Beispiel, wenn  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist.)

Dann induziert die Inklusion  $j: C_*(\mathcal{U}) \longrightarrow C_*(X)$  einen Isomorphismus in Homologie, d. h.,

$$H(j): H_*(\mathcal{U}) \longrightarrow H_*(X)$$

ist ein Isomorphismus von graduierten abelschen Gruppen.

*Beweis.* Zunächst sei  $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$  ein singulärer Simplex in  $X$  (und insbesondere eine stetige Abbildung). Für jedes  $\lambda \in \Lambda$  sei

$$V_\lambda := \sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}_\lambda).$$

Weil  $\sigma$  stetig ist bilden die  $V_\lambda$  eine offene Überdeckung von  $\Delta_n$ , und weil  $\Delta_n$  kompakt ist besitzt diese Überdeckung bezüglich der Maximumsmetrik auf  $\mathbf{R}^n$  eine Lebesgue-Zahl  $\varepsilon$ , so dass jede Scheibe von Radius  $< \varepsilon$  und somit auch jede Teilmenge von Durchmesser  $< \varepsilon$  ganz in einer der Mengen  $V_\lambda$  enthalten ist.

Weil  $n/(n+1) < 1$  gibt es eine Zahl  $k_\sigma \in \mathbf{N}$ , so dass  $(n/(n+1))^{k_\sigma} < \varepsilon$ , und das gilt natürlich immer noch, wenn man  $k_\sigma$  durch eine größere Zahl ersetzt. Der Standardsimplex  $\Delta_n$  hat offenbar Durchmesser 1, und aus Korollar 3.44 folgt deshalb, dass für jedes  $k \geq k_\sigma$  die Simplizes in der affinen Kette  $B^k \text{id}_{\Delta_n}$  alle Durchmesser  $< \varepsilon$  haben und somit jeweils in einer der Überdeckungsmengen  $V_\lambda$  liegen.

Nach Anwendung der stetigen Abbildung  $\sigma$  bedeutet das, dass das Bild jedes singulären Simplexes in der Kette  $B^k \sigma = \sigma_\# B^k \text{id}_{\Delta_n}$  ganz enthalten ist in einer der Mengen

$$\sigma(V_\lambda) \subseteq \overset{\circ}{U}_\lambda \subseteq U_\lambda,$$

d. h., die Kette  $B^k \sigma$  ist  $\mathcal{U}$ -klein wenn  $k \geq k_\sigma$ .

Eine singuläre Kette  $c \in C_*(X)$  ist eine lineare Kombination von endlich vielen singulären Simplizes  $\sigma$ , und wenn wir  $k_c$  als das Maximum der  $k_\sigma$  für

die Simplizes  $\sigma$  in  $c$  definieren, so gilt offensichtlich, dass  $B^k c$  eine  $\mathcal{U}$ -kleine Kette ist für jedes  $k \geq k_c$ .

In anderen Worten, **wenn man eine singuläre Kette in  $X$  genügend oft baryzentrisch unterteilt, wird sie  $\mathcal{U}$ -klein.**

Wir zeigen nun, dass  $H(j)$  ein Isomorphismus ist.

Zur Klarheit bezeichnen wir den Randoperator von  $C_*(\mathcal{U})$  mit  $\partial_{\mathcal{U}}$  und den Randoperator von  $C_*(X)$  mit  $\partial_X$ .

Zunächst zur Surjektivität: sei  $\gamma \in H_*(X)$  und sei  $z \in C_*(X)$  ein Zyklus mit  $[z] = \gamma$ . Dann gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $B^k z \in j(C_*(\mathcal{U}))$  und es gibt  $z' \in C_*(\mathcal{U})$  mit  $B^k z = jz'$ . Da  $j$  und  $B^k$  Kettenabbildungen sind, haben wir

$$j\partial_{\mathcal{U}}z' = \partial_X jz' = \partial_X B^k z = B^k \partial_X z = B^k(0) = 0$$

und weil  $j$  injektiv ist, ist  $\partial_{\mathcal{U}}z' = 0$ , d. h.,  $z'$  ist ein Zyklus.

Weil  $B^k \simeq \text{id}_{C_*(X)}$ , gibt es eine Kettenhomotopie  $\Phi$ , so dass

$$\begin{aligned} z &= B^k z + \partial_X \Phi z + \Phi \partial_X z \\ &= B^k z + \partial_X \Phi z + 0 && \text{(da } z \text{ ein Zyklus ist)} \\ &= B^k z + \partial_X \Phi z, \end{aligned}$$

und somit ist

$$\gamma = [z] = [B^k z + \partial_X \Phi z] = [B^k z] = [jz'] \in \text{Bild } H(j).$$

Zur Injektivität von  $H(j)$ : Sei  $\omega \in \text{Ker } H(j) \subseteq H_*(\mathcal{U})$  und sei  $z$  ein Zyklus in  $C_*(\mathcal{U})$  mit  $\omega = [z]$ .

Weil

$$H(j)([z]) = [jz] = 0 \in H_*(X)$$

ist  $jz$  ein Rand in  $C_*(X)$ . Sei  $c$  eine Kette in  $C_*(X)$  mit  $jz = \partial_X c$ .

Nach dem ersten Teil des Beweises gibt es eine Zahl  $k$  und eine Kette  $d \in C_*(\mathcal{U})$ , so dass  $B^k c = jd$ , und weil  $B^k$  und  $j$  Kettenabbildungen sind, ist

$$B^k jz = B^k \partial_X c = \partial_X B^k c = \partial_X jd = j\partial_{\mathcal{U}}d \in C_*(X). \quad (3.49)$$

Nun ist  $B^k$  eine natürliche Kettenabbildung und kettenhomotop zur Identität vermöge einer natürlichen Kettenhomotopie  $\Phi$ , die auf dem singulären Kettenkomplex jedes topologischen Raumes definiert ist.

Diese Kettenhomotopie ist insbesondere auf den Kettenkomplexen  $C_*(U_\lambda)$  und auf  $C_*(X)$  definiert, aber leider *nicht* direkt auf dem Kettenkomplex  $C_*(\mathcal{U})$ , weil dieser Kettenkomplex nicht der Wert des Funktors  $C_*$  auf einem Objekt von **Top** ist! Aus diesem Grund müssen wir einen etwas umständlichen Weg gehen und Ketten in  $C_*(\mathcal{U})$  in ihre Bestandteile auf den einzelnen Unterräumen  $U_\lambda$  zerlegen, bevor wir die Kettenhomotopie anwenden können.

Es gilt

$$C_*(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_*(U_\lambda), \quad (3.50)$$

und für  $z$  existiert eine (nichteindeutige) Zerlegung

$$z = \sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

mit  $z_\lambda \in C_*(U_\lambda)$  und mit nur endlich vielen  $z_\lambda \neq 0$ .

Auf den einzelnen Summanden  $C_*(U_\lambda)$  in (3.50) ist  $j = (i_\lambda)_\#$ , wo  $i_\lambda$  die Inklusion  $U_\lambda \rightarrow X$  ist.

Wir schreiben  $\Phi_\lambda$  für die Kettenhomotopie  $\Phi(U_\lambda)$ , die die natürliche Transformation  $\Phi$  dem Raum  $U_\lambda$  zuordnet, und  $\Phi_X$  für die Kettenhomotopie  $\Phi(X)$ , die die natürliche Transformation  $\Phi$  dem Raum  $X$  zuordnet. Die natürliche Transformation  $B^k$  notieren wir auf  $U_\lambda$  entsprechend mit  $B_\lambda^k$ , aber auf  $X$  einfach wie bisher mit  $B^k$ . Den Randoperator von  $C_*(U_\lambda)$  notieren wir zur Klarheit mit  $\partial_\lambda$ , bemerken aber, dass er die Einschränkung des Randoperators  $\partial_{\mathcal{U}}$  von  $C_*(\mathcal{U})$  ist und dass wir deshalb überall wo  $\partial_\lambda$  steht genauso gut auch  $\partial_{\mathcal{U}}$  schreiben können; den Randoperator von  $C_*(X)$  notieren wir, wie schon gesagt, mit  $\partial_X$ .

Wir haben

$$jz = j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) = j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda^k z_\lambda + \partial_\lambda \Phi_\lambda z_\lambda + \Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda)\right) \quad (3.51a)$$

$$\begin{aligned} &= j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^k z_\lambda\right) + j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \partial_{\mathcal{U}} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda\right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} j(B_\lambda^k z_\lambda) + j\partial_{\mathcal{U}}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} j(\Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (i_\lambda)_\#(B_\lambda^k z_\lambda) + j\partial_{\mathcal{U}}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} (i_\lambda)_\#(\Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} B^k((i_\lambda)_\# z_\lambda) + j\partial_{\mathcal{U}}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_X((i_\lambda)_\# \partial_\lambda z_\lambda) \end{aligned} \quad (3.51b)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\lambda \in \Lambda} B^k j z_\lambda + j\partial_{\mathcal{U}}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_X j \partial_{\mathcal{U}} z_\lambda \\ &= B^k j \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) + j\partial_{\mathcal{U}}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \Phi_X j \partial_{\mathcal{U}} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) \\ &= B^k j z + j\partial_{\mathcal{U}}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \Phi_X j \partial_{\mathcal{U}} z \\ &= B^k j z + j\partial_{\mathcal{U}}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + 0 \end{aligned} \quad (3.51c)$$

$$\begin{aligned}
&= B^k jz + j\partial_U \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda \right) \\
&= j\partial_U d + j\partial_U \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda \right). \tag{3.51d}
\end{aligned}$$

Hier erhalten wir die Summanden auf der rechten Seite von (3.51a) aus der Tatsache, dass  $\Phi_\lambda$  eine Kettenhomotopie von  $B_\lambda^k$  zu  $\text{id}_{C_*(U_\lambda)}$  ist. In (3.51b) wird ausgenutzt, dass  $B^k$  und  $\Phi$  natürlich sind. Wir erhalten (3.51c) weil  $z$  ein Zyklus von  $C_*(\mathcal{U})$  ist. Schließlich folgt (3.51d) aus (3.49).

Weil  $j$  aber injektiv ist, gilt

$$z = \partial_U d + \partial_U \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda \right)$$

und somit ist  $z$  ein Rand in  $C_*(\mathcal{U})$ , also  $\omega = [z] = 0$  und  $H(j)$  ist injektiv. Damit sind wir fertig.  $\blacksquare$

Wir wollen den Satz über kleine Simplizes gleich verwenden, um eine weitere sehr nützliche exakte Homologiefolge zu gewinnen. Wir erhalten diese Folge wieder als das exakte Homologiedreieck oder die lange exakte Homologiefolge einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen, aber ohne den Satz über kleine Simplizes wäre diese Homologiefolge nicht sehr hilfreich, wie Sie gleich sehen werden.

**Lemma und Definition 3.46** *Sei  $(X; A, B)$  eine topologische Raumtriade (d. h.,  $X$  ist ein topologischer Raum und  $A$  und  $B$  sind Unterräume von  $X$  mit  $X = A \cup B$ ).*

*Sei  $i'$  die Inklusion  $A \cap B \rightarrow A$  und sei  $i''$  die Inklusion  $A \cap B \rightarrow B$ .*

*Die direkte Summe  $C_*(A) \oplus C_*(B)$  ist ein Kettenkomplex mit Randoperator  $\partial_A \oplus \partial_B$ , und die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\iota: C_*(A \cap B) &\longrightarrow C_*(A) \oplus C_*(B) \\
c &\longmapsto (i'_\# c, i''_\# c)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

*ist offensichtlich eine Kettenabbildung.*

*Sei  $j'$  die Inklusion  $A \rightarrow X$  und sei  $j''$  die Inklusion  $B \rightarrow X$ .*

*Die Bilder der Kettenabbildungen  $j'_\#$  und  $j''_\#$  sind enthalten in*

$$C_*(\{A, B\}) := j'_\#(C_*(A)) + j''_\#(C_*(B)) \subseteq C_*(X)$$

*und wir haben eine offensichtliche Kettenabbildung*

$$\begin{aligned}
\kappa: C_*(A) \oplus C_*(B) &\longrightarrow C_*(\{A, B\}) \\
(c_1, c_2) &\longmapsto j'_\# c_1 - j''_\# c_2.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Man erhält aus diesen Kettenkomplexen und Kettenabbildungen eine offensichtlich natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\iota} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\kappa} C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \quad (3.54)$$

und wir nennen diese Folge die **Kettenkomplexfolge der Triade**  $(X; A, B)$ .

*Beweis.* Die Kettenabbildung  $\iota$  ist injektiv, weil schon die Komponenten  $i'_\#$  und  $i''_\#$  injektiv sind, da sie jeweils von einer Inklusion induziert werden.

Für eine Kette  $(c_1, c_2) \in C_*(A) \oplus C_*(B)$  ist

$$\kappa(c_1, c_2) = j'_\# c_1 - j''_\# c_2 = 0$$

genau dann, wenn  $j'_\# c_1 = j''_\# c_2$ , oder in anderen Worten, wenn  $c_1$  und  $c_2$  in  $C_*(\{A, B\}) \subseteq C_*(X)$  die gleiche eindeutige Linearkombination von singulären Simplizes in  $X$  sind.

Da aber alle Simplizes in  $c_1$  ihr Bild in  $A$  haben und alle Simplizes in  $c_2$  ihr Bild in  $B$  haben, folgt aus der Gleichheit, dass alle Simplizes in  $c_1$  oder in  $c_2$  ihr Bild sowohl in  $A$  wie auch in  $B$ , sprich in  $A \cap B$  haben müssen. Somit ist  $j'_\# c_1 = j''_\# c_2$  genau dann, wenn  $c_1$  und  $c_2$  die gleiche Kette in  $X$  sind und diese Kette eine Kette auf  $A \cap B$  ist, also genau dann, wenn es eine Kette  $c \in C_*(A \cap B)$  gibt mit  $c_1 = i'_\# c$  und  $c_2 = i''_\# c$ .

Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $(c_1, c_2) = \iota c$ . Wir haben somit gezeigt, dass  $\text{Ker } \kappa = \text{Bild } \iota$ , und die Folge (3.54) ist an der mittleren Stelle exakt.

Und schliesslich,  $\kappa$  ist surjektiv weil

$$\begin{aligned} \kappa(C_*(A) \oplus C_*(B)) &= \kappa\left((C_*(A) \oplus \{0\}) + (\{0\} \oplus C_*(B))\right) \\ &= \kappa(C_*(A) \oplus \{0\}) + \kappa(\{0\} \oplus C_*(B)) \\ &= j'_\#(C_*(A)) + j''_\#(C_*(B)) \\ &= C_*(\{A, B\}). \end{aligned}$$

(In der vorletzten Zeile beachte man, dass obwohl  $\kappa = -j''_\#$  auf  $\{0\} \oplus C_*(B)$ , wir hier  $+$  schreiben können, weil  $+j''_\#$  und  $-j''_\#$  die gleiche Bildgruppe haben.)

Also ist die Folge (3.54) an allen Stellen exakt. ■

In diesem Beweis sind wir, um absolute Klarheit zu erreichen, sehr genau mit den Bezeichnungen für die von den Rauminklusionen induzierten Kettenabbildungen umgegangen, aber man kann das auch etwas lockerer handhaben:

**Bemerkung 3.47** Die Kettenabbildungen  $i'_{\sharp}$ ,  $i''_{\sharp}$ ,  $j'_{\sharp}$  und  $j''_{\sharp}$ , die in Definition 3.46 eingeführt wurden, sind alle injektiv, weil sie von Inklusionen von topologischen Räumen induziert werden und diese naturgemäß injektiv sind.

Deshalb können wir vermöge dieser Abbildungen, wie wir es schon oft getan haben,  $C_*(A \cap B)$  als eine Untergruppe von  $C_*(A)$  und von  $C_*(B)$  auffassen (mit  $i'_{\sharp}$  und  $i''_{\sharp}$  als die Inklusionen), und wir können  $C_*(A)$  und  $C_*(B)$  und ihre gemeinsame Untergruppe  $C_*(A \cap B)$  als Untergruppen von  $C_*(\{A, B\})$  oder von  $C_*(X)$  auffassen.

Betrachten wir diese Kettengruppen als Untergruppen von  $C_*(\{A, B\})$  oder von  $C_*(X)$ , so gilt

$$C_*(A \cap B) = C_*(A) \cap C_*(B), \quad (3.55)$$

da, wie im Beweis von Lemma 3.46 schon erklärt, eine Kette  $c \in C_*(X)$  genau dann zu  $C_*(A)$  und zu  $C_*(B)$  gehört, wenn jeder singuläre Simplex mit nichtverschwindendem Koeffizienten in  $c$  in  $A$  enthalten ist und auch in  $B$ , und somit in  $A \cap B$  enthalten ist. Das ist genau die Bedingung dafür, dass  $c \in C_*(A \cap B)$ .

Diese Bedingung wurde ja im Beweis von Lemma 3.46 schon ausgenutzt, um die Exaktheit der Folge (3.54) bei  $C_*(A) \oplus C_*(B)$  zu zeigen:  $j'_{\sharp}c_1 - j''_{\sharp}c_2 = 0$  genau dann, wenn  $c_1 = c_2$  in  $C_*(X)$ , woraus aber auch automatisch folgt, dass  $c_1 = c_2 \in C_*(A) \cap C_*(B) = C_*(A \cap B)$  und somit  $(c_1, c_2) \in \text{Bild } \iota$ .

Die lange exakte Homologiefolge oder das exakte Homologiedreieck der kurzen exakten Folge (3.54) kann ein sehr leistungsfähiges Berechnungsinstrument bieten, sofern wir die Homologie der in dieser kurzen Folge vorkommenden Kettenkomplexen mit topologischen Räumen in Verbindung bringen können. Für den mittleren Komplex ist das kein Problem:

**Bemerkung 3.48** Sind  $\mathcal{C} = (C, \partial)$  und  $\mathcal{D} = (D, \partial')$  zwei beliebige Kettenkomplexe, so bildet ihre direkte Summe  $C \oplus D$  mit dem Randoperator  $\partial \oplus \partial'$  wieder einen Kettenkomplex  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ , und man sieht sehr leicht ein, ähnlich aber einfacher als im Beweis von Lemma 2.30 c) und d), dass

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) &= Z(\mathcal{C}) \oplus Z(\mathcal{D}) \\ B(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) &= B(\mathcal{C}) \oplus B(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

und deshalb auch

$$H(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) \cong H(\mathcal{C}) \oplus H(\mathcal{D}). \quad (3.56)$$

Entsprechend, und wieder ähnlich beweisbar wie Lemma 2.30 e), wenn  $\bar{\mathcal{C}} = (\bar{C}, \bar{\partial})$  und  $\bar{\mathcal{D}} = (\bar{D}, \bar{\partial}')$  zwei weitere Kettenkomplexe sind und wenn

$f: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  und  $f: \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathcal{D}}$  Kettenabbildungen sind, so ist  $f \oplus g$  eine Kettenabbildung  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} \oplus \bar{\mathcal{D}}$  und vermöge des Isomorphismus (3.56) gilt

$$H(f \oplus g) = H(f) \oplus H(G): H(\mathcal{C}) \oplus H(\mathcal{D}) \rightarrow H(\bar{\mathcal{C}}) \oplus H(\bar{\mathcal{D}}).$$

Diese Bemerkung erlaubt uns, die Homologie des mittleren Kettenkomplexes in der kurzen exakten Folge (3.54) zu berechnen. Nur der rechte Kettenkomplex ist manchmal problematisch, aber wir kennen schon viele Fälle, in denen das nicht der Fall ist, und bevor wir darauf zurückkommen, lösen wir den gordischen Knoten einfach durch eine Verfügung.

**Definition 3.49** Eine Triade  $(X; A, B)$  von topologischen Räumen wird eine *Mayer-Vietoris Triade* genannt, wenn die Inklusion

$$j: C_*(\{A, B\}) \rightarrow C_*(X)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert, d. h., wenn

$$H(j): H_*(\{A, B\}) \rightarrow H_*(X)$$

ein Isomorphismus ist.

**Beispiel 3.50** Jede Triade  $(X; A, B)$  von topologischen Räumen für die gilt

$$X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \tag{3.57}$$

ist eine Mayer-Vietoris Triade.

Das ist die Aussage des Satzes über kleine Simplizes 3.45 für die Überdeckung  $\mathcal{U} = \{A, B\}$  von  $X$ .

**Satz 3.51 (Mayer-Vietoris)** Sei  $(X; A, B)$  eine Mayer-Vietoris Triade von topologischen Räumen. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck von graduierten Gruppen

$$\begin{array}{ccc} H_*(A \cap B) & \xrightarrow{(i'_*, i''_*)} & H_*(A) \oplus H_*(B) \\ & \swarrow \text{Grad } -1 & \searrow j'_* \circ \pi_1 - j''_* \circ \pi_2 \\ & \delta & H_*(X) \end{array} \tag{3.58}$$

wo  $i': A \cap B \rightarrow A$ ,  $i'': A \cap B \rightarrow B$ ,  $j': A \rightarrow X$ , und  $j'': B \rightarrow X$  die Inklusionen sind, die  $\pi_i$  die Projektionen von  $H_*(A) \oplus H_*(B)$  auf den  $i$ -ten Summanden sind, und wo der verbindende Homomorphismus  $\delta$  von Grad  $-1$  wie folgt erklärt wird.

Sei  $\gamma \in H_*(X)$ . Dann gibt es Ketten  $c \in C_*(A)$  und  $d \in C_*(B)$  so dass  $c + d$  ein Zyklus in  $C_*(X)$  ist und  $\gamma = [c + d]$ . Weil  $c + d$  ein Zyklus ist, ist  $\partial c = -\partial d$  und muss eine Kette auf  $A \cap B$  sein, da  $\partial c$  eine Kette auf  $A$  ist und  $\partial d$  eine Kette auf  $B$  ist.

$\partial c$  ist sogar ein Zyklus in  $C_*(A \cap B)$  (da  $\partial \partial c = 0$ , egal in welchem Raum wir den Randoperator beim zweiten Mal anwenden). Es gilt

$$\delta(\gamma) = [\partial c] \in H_*(A \cap B). \tag{3.59}$$

Das exakte Dreieck (3.58) heißt das **Mayer-Vietoris Homologiedreieck** der Triade  $(X; A, B)$ .

*Beweis.* Die natürliche kurze exakte Kettenkomplexfolge (3.54) der Triade  $(X; A, B)$  hat nach Satz 3.14 ein ebenfalls natürliches exaktes Homologiedreieck, das wir wie im folgenden Diagramm (3.60) durch den Isomorphismus  $H(j)$  ergänzen, um das Mayer-Vietoris Homologiedreieck (3.58), bestehend aus dem waagerechten Pfeil  $H(\iota)$  und den beiden gestrichelten Pfeilen, zu erhalten:

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(A \cap B) & \xrightarrow{H(\iota)} & H_*(A) \oplus H_*(B) \\
 & \searrow \beta & \swarrow H(\kappa) \\
 & H_*(\{A, B\}) & \\
 & \delta \swarrow & \searrow H(j \circ \kappa) \\
 & H_*(X) & 
 \end{array}
 \tag{3.60}$$

$\cong \downarrow H(j)$

Auch  $j$  und somit  $H(j)$  sind offenbar natürliche Transformationen, so dass das ganze Diagramm (3.60) einschließlich des Mayer-Vietoris Dreiecks natürlich ist.

Das Mayer-Vietoris Dreieck ist in diesem Diagramm das äußere Dreieck. Die Abbildung  $\delta$  ist  $\beta \circ (H(j))^{-1}$  und die andere gestrichelte Seite ist die Abbildung  $H(j) \circ H(\kappa) = H(j \circ \kappa)$ .

Weil der Pfeil  $H(j)$  ein Isomorphismus ist, ist  $\text{Bild } \delta = \text{Bild } \beta$  und es ist  $\text{Ker } \delta = H(j)(\text{Ker } \beta)$ . Entsprechend ist  $\text{Ker } H(j \circ \kappa) = \text{Ker } H(\kappa)$  und  $\text{Bild } H(j \circ \kappa) = H(j)(\text{Bild } H(\kappa))$ . Weil das innere Dreieck in (3.60) exakt ist, ist somit auch das äußere, also das Mayer-Vietoris Dreieck, exakt.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Abbildungen im Mayer-Vietoris Dreieck die in der Satzaussage genannte Gestalt haben.

Wegen der in Gleichung (3.52) angegebenen Definition von  $\iota$  ist offensichtlich  $H(\iota) = (i'_*, i''_*)$  wie behauptet.

Für Ketten  $c_1 \in C_*(A)$  und  $c_2 \in C_*(B)$  ist  $\kappa(c_1, c_2) = j'_\# c_1 - j''_\# c_2$  nach (3.53), und  $(j \circ \kappa)(c_1, c_2)$  ist die gleiche Kette, nur betrachtet als Kette in  $C_*(X)$  und nicht in  $C_*(\{A, B\})$ . Es folgt, dass für je zwei Homologieklassen  $\alpha_1 \in H_*(A)$  und  $\alpha_2 \in H_*(B)$  gilt

$$H(j \circ \kappa)(\alpha_1, \alpha_2) = j'_* \alpha_1 - j''_* \alpha_2 = (j'_* \pi_1 - j''_* \pi_2)(\alpha_1, \alpha_2).$$

Und schließlich, sei  $\gamma \in H_*(X)$ . Wir haben  $\delta(\gamma) = \beta((H(j))^{-1}(\gamma))$ . Sei  $z$  ein Zyklus in  $C_*(\{A, B\})$  mit  $[z] = (H(j))^{-1}(\gamma)$  oder, was das Gleiche bedeutet, mit  $\gamma = H(j)([z]) = [jz]$ .

Die Kette  $z \in C_*(\{A, B\})$  lässt sich zerlegen als eine Summe von einer Kette  $c \in C_*(A)$  und einer Kette  $d \in C_*(B)$  (wenn man diese Kettengruppen gemäß Bemerkung 3.47 als Untergruppen von  $C_*(\{A, B\})$  auffasst).

Also  $z = c + d$ , und  $jz$  ist die gleiche Kette, aber betrachtet als Kette in  $C_*(X)$ . Wir haben also  $\gamma = [c + d]$ , wie es in der Satzaussage steht.

Nach Definition ist  $\delta(\gamma) = \beta([z])$ .

Um diesen Wert des verbindenden Homomorphismus  $\beta$  zu konstruieren, müssen wir zuerst ein Urbild von der Kette  $z \in C_*(\{A, B\})$  unter  $\kappa$  finden. Die Kette  $(c, -d) \in C_*(A) \oplus C_*(B)$  ist offensichtlich ein solches Urbild.

Wir haben dann den Rand von diesem Urbild zu bilden, also  $\partial(c, -d) = (\partial c, -\partial d)$ . Dieser liegt automatisch im Bild von  $\iota$  und aus der Definition von  $\iota$  ist klar, dass  $\partial c$  die einzige Kette  $w$  in  $C_*(A \cap B)$  sein kann, für die gilt  $\iota(w) = (\partial c, -\partial d)$ . Folglich ist  $\beta([z]) = [\partial c]$ , wie in (3.59) behauptet wurde.

Man beachte, dass wir uns hier im Beweis gar nicht darum kümmern müssen, warum  $\partial c$  tatsächlich ein Zyklus in  $C_*(A \cap B)$  ist, denn das ist ein Teil der Aussage von Satz 3.14 und muss hier nicht noch einmal bewiesen werden. Der Grund wird aber in der Aussage des jetzigen Satzes ohnehin kurz erläutert.

Worum wir uns aber doch kurz kümmern müssen ist die Frage, ob das Funktionieren dieser Vorschrift irgendwie von der Wahl des Zyklus  $z$  und der Zerlegung  $z = c + d$  abhängen kann. Das tut es nicht, denn die Homologieklassse von  $z$  in  $H_*(\{A, B\})$  ist durch  $\gamma$  eindeutig bestimmt, weil  $H(j)$  ein Isomorphismus ist, und alles andere hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, weil der verbindende Homomorphismus  $\beta$  wohldefiniert ist. Insbesondere hängt  $\beta([z])$  nicht von der Wahl des Zyklus  $z$  in dieser Homologieklassse ab, und auch nicht von der Wahl des Urbilds  $(c, -d)$  von  $z$  unter  $\kappa$ . Diese Wahlen entsprechen aber der Wahl von  $z$  und seiner Zerlegung  $z = c + d$ ; diese beeinflussen also nicht den Wert  $\delta(\gamma)$  und  $\delta$  ist durch die angegebene Konstruktion wohldefiniert. ■

Der Satz von Mayer-Vietoris wird sich als das wichtigste Hilfsmittel erweisen, wenn wir bald mit der Berechnung von Homologiegruppen beginnen.

Zuerst wollen wir aber noch einen anderen wichtigen Satz präsentieren, der aber keine neuen Beweismittel erfordert, weil er äquivalent zum Satz von Mayer-Vietoris ist.

Dieser neue Satz besagt im Wesentlichen, dass eine relative Homologiegruppe  $H_*(X, A)$  nicht davon abhängt, was tief im Innern des Unterraumes  $A$  passiert; das wird sozusagen „geschluckt“ durch die Relativierung modulo  $A$ . Die Aussage ist, dass sich  $H_*(X, A)$  nicht verändert, wenn man einen „genügend kleinen“ Unterraum  $B$  von  $A$  aus  $X$  und  $A$  entfernt oder „ausschneidet“. Deshalb heißt dieser Satz der **Ausschneidungssatz**.

**Definition 3.52** Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel, also ein Objekt von  $\mathbf{Top}^3$  ( $X$  ist ein topologischer Raum und  $B \subseteq A \subseteq X$ ).

Wir nennen  $(X, A, B)$  ein **Ausschneidungstripel**, wenn die natürliche Inklusion

$$i: (X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert, d. h., wenn

$$i_*: H_*(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow H_*(X, A)$$

ein Isomorphismus von graduierten abelschen Gruppen ist.

**Bemerkung 3.53** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $A$  und  $B$  zwei Unterräume von  $X$ .

Die Komplementierung von  $B$  verwandelt topologische Raumtripel in entsprechende Raumtriaden und umgekehrt.

In anderen Worten, wenn  $(X, A, B)$  ein Raumtripel ist (das heißt, wenn  $B \subseteq A$ ), dann ist  $(X; A, X \setminus B)$  eine Raumtriade (d. h.,  $X = A \cup (X \setminus B)$ ).

Umgekehrt, wenn  $(X; A, B)$  eine Raumtriade ist (also wenn  $X = A \cup B$ ), dann ist  $(X, A, X \setminus B)$  ein Raumtripel (d. h.,  $X \setminus B \subseteq A$ ).

Die Komplementierung von  $B$  liefert somit eine Bijektion zwischen der Menge aller Raumtripel mit  $X$  als Oberraum und der Menge aller Raumtriaden mit  $X$  als Oberraum, eine Bijektion, die ihre eigene Umkehroperation ist.

**Lemma 3.54** Ein topologisches Raumtripel  $(X, A, B)$  ist genau dann ein Ausschneidungstripel, wenn die entsprechende Raumtriade  $(X; A, X \setminus B)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist.

*Beweis.* Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir  $D$  für  $X \setminus B$ .

Wir bemerken zuerst, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\varphi: \frac{C_*({A, D})}{C_*(A)} \xrightarrow{\cong} C_*(X \setminus B, A \setminus B)$$

gibt, denn nach dem zweiten Isomorphiesatz für additive abelsche Gruppen ist

$$\frac{C_*({A, D})}{C_*(A)} = \frac{C_*(A) + C_*(D)}{C_*(A)} \cong \frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)},$$

wobei der Isomorphismus für  $a \in C_*(A)$  und  $d \in C_*(D)$  die Restklasse

$$a + d + C_*(A) = d + C_*(A) \in \frac{C_*(A) + C_*(D)}{C_*(A)}$$

auf die wohldefinierte Restklasse

$$d + (C_*(A) \cap C_*(D)) \in \frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)}$$

abbildet. Weil  $D = X \setminus B$ , ist aber

$$\frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)} \stackrel{(3.55)}{=} \frac{C_*(D)}{C_*(A \cap D)} = C_*(D, A \cap D) = C_*(X \setminus B, A \setminus B).$$

Aus dieser Beschreibung ist klar, dass  $\varphi$  eine Kettenabbildung ist.

Nun betrachte man folgendes Diagramm von Kettenkomplexen, in denen die Zeilen kurze exakte Folgen sind:

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{j'_\#} & C_*({A, D}) & \xrightarrow{\pi} & \frac{C_*({A, D})}{C_*(A)} & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow \text{id} = & & \downarrow j & & \cong \downarrow \varphi & & \\ & & C_*(A) & \xrightarrow{j'_\#} & C_*(X) & \xrightarrow{\pi'} & C_*(X, A) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & & & & & \downarrow i_\# & & \end{array} \quad (3.61)$$

Das linke Quadrat kommutiert offensichtlich (alle Pfeile sind Inklusionen von Untergruppen).

Auch das rechte Quadrat kommutiert. Sei  $a + d \in C_*({A, D})$ , wobei  $a \in C_*(A)$  und  $d \in C_*(D)$ . Die waagerechten Abbildungen  $\pi$  und  $\pi'$  sind kanonischen Projektionen auf Quotienten, und nach der Beschreibung oben des Isomorphismus  $\varphi$  haben wir

$$\begin{aligned} i_\# \varphi \pi(a + d) &= i_\# \varphi(a + d + C_*(A)) \\ &= i_\#(d + C_*(A \setminus B)) \\ &= d + C_*(A) \in C_*(X, A), \end{aligned}$$

während

$$\pi'j(a + d) = \pi'(a + d) = a + d + C_*(A) = d + C_*(A)$$

das Gleiche ist.

Die senkrechten Pfeile in (3.61) bilden also einen Morphismus von kurzen exakten Folgen von Kettenabbildungen, und nach Übergang zu Homologiegruppen induzieren sie einen Morphismus der langen exakten Homologiefolgen dieser kurzen exakten Folgen.

Dieser Morphismus der langen Folgen enthält an jeder dritten Stelle die Identität von  $H_n(A)$ , also einen Isomorphismus, an den Stellen daneben (auch jede dritte Stelle insgesamt)  $H_n(j)$ , und an den Stellen daneben (das restliche Drittel der Stellen)  $H_n(i) \circ H_n(\varphi)$ .

Das 5-er Lemma impliziert sofort, dass genau dann alle  $H_n(j)$  Isomorphismen sind, wenn alle  $H_n(i) \circ H_n(\varphi)$  Isomorphismen sind, oder äquivalent, wenn alle  $H_n(i)$  Isomorphismen sind (denn  $H_*(\varphi)$  ist immer ein Isomorphismus, weil schon  $\varphi$  einer ist).

In anderen Worten,  $(X; A, D)$  ist eine Mayer-Vietoris Triade genau dann, wenn  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstriplet ist. ■

**Satz 3.55 (Ausschneidungssatz)** Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel, so dass  $\bar{B} \subseteq A^\circ$ . Dann ist  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstriplet.

*Beweis.* Aus  $\bar{B} \subseteq A^\circ$  folgt  $X = A^\circ \cup (X \setminus \bar{B}) = A^\circ \cup (X \setminus B)^\circ$ . Also ist  $(X; A, X \setminus B)$  nach Beispiel 3.50 eine Mayer-Vietoris Triade und  $(X, A, B)$  nach Lemma 3.54 ein Ausschneidungstriplet. ■

Man kann vermuten, und die Vermutung ist auch richtig, dass der Satz von Mayer-Vietoris oder die Ausschneidung sehr nützliche Hilfsmittel sein werden zur Berechnung der Homologie von topologischen Räumen, so dass diese gerade entwickelten Methoden sehr laut nach einem Anwendungsbeispiel schreien. Solche Beispiele werden wir auch bald geben (im nächsten Kapitel), aber vorher wollen wir die Gesamtergebnisse dieses Abschnitts kurz Revue passieren lassen und zusammenfassen, was wir erreicht haben und welche Werkzeuge wir nun besitzen. Danach können wir die Werkzeuge ein bisschen verfeinern, was die Berechnung von Beispielen erleichtern wird.

Es gibt eine „Standardzusammenfassung“ der wichtigen Ergebnisse dieses Kapitels in der Gestalt von folgender Definition von Eilenberg und Steenrod, die die Grundeigenschaften der Homologie als Axiome festhält, aus denen man Beweise und vor allem auch Berechnungen herleiten kann, die in allen Homologietheorien (und nicht nur in der singulären Homologie) zutreffen.

**Definition 3.56 (Eilenberg-Steenrod Axiome)** Sei  $\mathcal{K}$  eine „geeignete“ Kategorie von topologischen Raumpaaren und stetigen Abbildungen von Raumpaaren (die Objekte und Morphismen können aber zusätzliche Struktur haben und der vergessliche Funktor  $\mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Top}^2$  muss nicht surjektiv sein, d.h., nicht jedes topologische Raumpaar muss ein Objekt von  $\mathcal{K}$  bilden). Die geeigneten Kategorien nennt man **zulässige Kategorien** und wir wollen gar nicht so genau sagen, was das beinhaltet, außer zu betonen, dass  $\mathbf{Top}^2$  auf jeden Fall eine zulässige Kategorie ist.

Eine **Homologietheorie** auf  $\mathcal{K}$  ist ein Funktor  $H: \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{GAG}_0$ , zusammen mit einer Grad  $-1$  natürlichen Transformation  $\beta: H(X, A) \rightarrow H(A, \emptyset)$ , die folgende Eigenschaften erfüllen (wenn wir wie üblich jeden topologischen Raum  $X$  mit dem Raumpaar  $(X, \emptyset)$  gleichsetzen):

**Homotopieaxiom:** Sind  $f$  und  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Morphismen von  $\mathcal{K}$ , so ist  $H(f) = H(g): H(X, A) \rightarrow H(Y, B)$ .

**Exaktheitsaxiom:** Zu jedem Objekt  $(X, A)$  von  $\mathcal{K}$  seien  $i: A \rightarrow X$  und  $j: X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen. Dann ist das natürliche Homologiedreieck

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{H(i)} & H(X) \\ & \searrow \text{Grad } -1 & \swarrow H(j) \\ & H(X, A) & \end{array}$$

exakt.

**Ausschneidungsaxiom:** Sei  $(X, A)$  ein Objekt von  $\mathcal{K}$  und sei  $U$  ein offener Unterraum von  $A$  mit  $\bar{U} \subseteq A^\circ$ , und so dass  $(X \setminus U, A \setminus U) \in \mathcal{K}$ . Dann induziert die Inklusion  $k: (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$  einen Isomorphismus in Homologie, d.h.,  $H(k): H(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H(X, A)$  ist ein Isomorphismus.

**Dimensionsaxiom:** Wenn  $P$  ein Einpunktraum ist, dann ist  $H_n(P) = \{0\}$  für alle  $n \neq 0$ . Die Gruppe  $H_0(P)$  heißt die **Koeffizientengruppe** der Homologietheorie.

**Satz 3.57** Die singuläre Homologie  $H_*$  ist eine Homologietheorie im Sinne von Definition 3.56 auf der Kategorie  $\mathcal{K} = \mathbf{Top}^2$ .

*Beweis.* Das Homotopieaxiom ist Satz 3.29, das Exaktheitsaxiom gilt nach Korollar 3.16, das Ausschneidungsaxiom ist erfüllt (sogar ohne die Voraussetzung  $U$  offen) wegen Satz 3.55, und Satz 3.31 ist das Dimensionsaxiom. Die

Koeffizientengruppe der singulären Homologie, wie wir sie präsentiert haben, ist  $\mathbf{Z}$ . ■

Bevor wir diesen Abschnitt beenden, wollen wir mit Hilfe des Homotopieaxioms eine Verbesserung des Mayer-Vietoris Satzes und des Ausschneidungssatzes erzielen, die es erlaubt, die Voraussetzungen für ihre Anwendung etwas abzuschwächen.

**Definition 3.58** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $A \subseteq X$  ein Unterraum von  $X$  und  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.

- a) Eine **Retraktion** von  $X$  auf  $A$  ist eine stetige Abbildung  $r: X \rightarrow A$ , so dass

$$r|_A = r \circ i = \text{id}_A.$$

Wir nennen  $A$  einen **Retrakt** von  $X$ , wenn es eine Retraktion von  $X$  nach  $A$  gibt.

- b) Eine **Deformationsretraktion** von  $X$  auf  $A$  ist eine Retraktion  $r: X \rightarrow A$  mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass

$$i \circ r \simeq \text{id}_X. \quad (3.62)$$

Wenn sogar gilt  $i \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$ , so nennen wir  $r$  eine **starke Deformationsretraktion**.

Wir nennen  $A$  einen (**starken**) **Deformationsretrakt** von  $X$ , wenn es eine (starke) Deformationsretraktion von  $X$  nach  $A$  gibt.

**Lemma 3.59** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  ein Retrakt von  $X$ . Sei  $r: X \rightarrow A$  eine Retraktion und sei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a)  $A$  ist ein Deformationsretrakt von  $X$ .
- b) Die Inklusion  $i$  ist eine Homotopieäquivalenz.
- c) Die Retraktion  $r$  ist eine Homotopieäquivalenz.
- d) Die Retraktion  $r$  ist eine Deformationsretraktion.

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b): Wenn  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$  ist, dann existiert eine Deformationsretraktion  $\tilde{r}: X \rightarrow A$ , die nach Definition 3.58 b) und Formel (3.62) ein Homotopierechtsinverses zu  $i$  ist, und als einfache Retraktion

ein Linksinverses zu  $i$  ist. Da  $i$  auf jeder Seite ein einseitiges Homotopieinverses besitzt, folgt aus Lemma 6.9 a) aus dem Skriptum zur *Einführung in die Topologie*, dass  $i$  eine Homotopieäquivalenz ist.

$b) \Rightarrow c)$ : Wenn  $i$  eine Homotopieäquivalenz ist, dann besagt Lemma 6.9 a) aus dem Skriptum zur *Einführung in die Topologie*, dass *jedes* einseitige Homotopieinverse zu  $i$  ein beidseitiges Homotopieinverse ist, und somit nach Teil b) des gleichen Lemmas selber auch eine Homotopieäquivalenz ist. Insbesondere gilt dies für die Abbildung  $r$ , die als Retraktion auf jeden Fall ein Linksinverses zu  $i$  ist.

$c) \Rightarrow d)$ : Wenn  $r$  eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist nach dem gleichen Lemma 6.9 a) die Inklusion  $i$ , die ein Rechtsinverses zur Retraktion  $r$  ist, auch ein Homotopielinksinverses, so dass  $r$  Gleichung (3.62) erfüllt und deshalb nach Definition eine Deformationsretraktion ist.

$d) \Rightarrow a)$  ist trivial. ■

**Lemma 3.60** a) Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel und sei  $C$  eine Teilmenge von  $B$ , so dass  $X \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus C$  und  $A \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $A \setminus C$  ist. Dann ist  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstripel genau dann, wenn  $(X, A, C)$  ein Ausschneidungstripel ist.

Insbesondere ist  $(X, A, B)$  ein Ausschneidungstripel, wenn  $\bar{C} \subseteq A^\circ$ .

b) Sei  $(X; A, B)$  eine Raumtriade und seien  $A' \supseteq A$  und  $B' \supseteq B$  Teilmengen von  $X$ , so dass  $A$  ein Deformationsretrakt von  $A'$ ,  $B$  ein Deformationsretrakt von  $B'$  und  $A \cap B$  ein Deformationsretrakt von  $A' \cap B'$  ist. Dann ist  $(X; A, B)$  eine Mayer-Vietoris Triade genau dann, wenn  $(X; A', B')$  eine Mayer-Vietoris Triade ist.

Insbesondere ist  $(X; A, B)$  Mayer-Vietoris, wenn  $X = A^\circ \cup B^\circ$ .

*Beweis.* Zu a): Sei  $j: (X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow (X \setminus C, A \setminus C)$  die Inklusion. Weil  $X \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus C$  ist und  $A \setminus B$  ein Deformationsretrakt von  $A \setminus C$  ist, sind die Inklusionen  $j: X \setminus B \rightarrow X \setminus C$  und die Einschränkung  $j: (A \setminus B): A \setminus B \rightarrow A \setminus C$  Homotopieäquivalenzen, nach Lemma 3.59.

Aus Lemma 3.30 b) folgt, dass auch in der relativen Homologie

$$j_*: H_*(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow H_*(X \setminus C, A \setminus C)$$

ein Isomorphismus ist.

Sei  $i$  die Inklusion  $(X \setminus C, A \setminus C) \rightarrow (X, A)$ , so dass  $i \circ j$  die Inklusion  $(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow (X, A)$  ist. Da  $j_*$  ein Isomorphismus ist, ist  $i_*$  genau dann

ein Isomorphismus, wenn  $i_* \circ j_* = (i \circ j)_*$  einer ist. Das ist genau die Aussage von Teil a).

„Insbesondere“ ist klar aus Satz 3.55.

Zu b): Seien  $k: A \cap B \rightarrow A' \cap B'$ ,  $k': A \rightarrow A'$  und  $k'': B \rightarrow B'$  die Inklusionen. Wegen der Voraussetzungen und Lemma 3.59 sind diese Inklusionen Homotopieäquivalenzen und induzieren deshalb Isomorphismen in Homologie.

Wir haben eine natürliche Inklusion  $\gamma: C_*(\{A, B\}) \rightarrow C_*(\{A', B'\})$ , die man auch schreiben kann als  $\gamma = k'_\# + k''_\#$  und die eine injektive Kettenabbildung ist, und die Kettenabbildungen  $k_\#, k'_\# \oplus k''_\#$  und  $\gamma$  sind offensichtlich die Bestandteile eines Morphismus zwischen den kurzen exakten Kettenkomplexfolgen der Triaden  $(X; A, B)$  und  $(X; A', B')$ . Das heißt, das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A \cap B) & \xrightarrow{\iota} & C_*(A) \oplus C_*(B) & \xrightarrow{\kappa} & C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \\
 & & k_\# \downarrow & & k'_\# \oplus k''_\# \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A' \cap B') & \xrightarrow{\iota'} & C_*(A') \oplus C_*(B') & \xrightarrow{\kappa'} & C_*(\{A', B'\}) \longrightarrow \{0\}
 \end{array}$$

kommutiert, weil alle senkrechten Homomorphismen von den Inklusionen der ineinander verschachtelten Unterräume induziert werden.

Die senkrechten Abbildungen induzieren einen Morphismus zwischen den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen, wobei die linken beiden senkrechten Pfeile Isomorphismen  $k_*$  und  $k'_* \oplus k''_*$  induzieren, die, wenn man die exakten Dreiecke zu langen exakten Homologiefolgen abwickelt, die Abbildungen  $H_n(\gamma)$  von beiden Seiten einrahmen. In anderen Worten, in jeder auf  $H_n(\gamma)$  zentrierten Gruppe von fünf Abbildungen im Morphismus zwischen den langen exakten Folgen sind die äußeren vier Abbildungen Isomorphismen. Das 5-er Lemma besagt, dass auch  $H(\gamma)$  ein Isomorphismus ist.

Wenn  $j$  die Inklusion  $C_*(\{A', B'\}) \rightarrow C_*(X)$  ist, so ist  $j \circ \gamma$  die Inklusion  $C_*(\{A, B\}) \rightarrow C_*(X)$ . Weil  $H(\gamma)$  ein Isomorphismus ist, ist  $H(j)$  genau dann ein Isomorphismus (und  $(X; A', B')$  genau dann Mayer-Vietoris), wenn  $H(j \circ \gamma) = H(j) \circ H(\gamma)$  ein Isomorphismus ist und  $(X; A, B)$  Mayer-Vietoris ist.

Der Zusatz „insbesondere“ folgt sofort aus Beispiel 3.50. ■

**Beispiel und Definition 3.61** In den Sphären

$$S^n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

für  $n \in \mathbf{N}$  finden wir schöne Beispiele zur Anwendung von Mayer-Vietoris Triaden und Ausschneidungstripeln, wo auch die Verbesserungen aus Lemma 3.60 sich als sehr hilfreich erweisen.

Wir führen dazu ein paar Namen ein für wichtige Teilräume von  $S^n$ .

Zunächst enthält jede Sphäre einen **Nordpol**

$$p_+ := (0, \dots, 0, 1)$$

und einen **Südpol**

$$p_- := (0, \dots, 0, -1),$$

und die Komplemente  $S_+^n := S^n \setminus \{p_-\}$  und  $S_-^n := S^n \setminus \{p_+\}$  dieser Pole sind offene Teilmengen, die zu  $\mathbf{R}^n$  oder zu der offenen  $n$ -dimensionalen Einheitsscheibe homöomorph sind (und somit zusammenziehbar sind).

Für jedes  $n$  können wir  $S^{n-1}$  in  $S^n$  einbetten als seinen **Äquator**

$$S^{n-1} = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n = 0\}.$$

Man findet leicht einen Homöomorphismus

$$S_+^n \cap S_-^n = S^n \setminus \{p_{\pm}\} \cong S^{n-1} \times (-1, 1). \quad (3.63)$$

Wir können  $S^n$  auch in zwei **Halbsphären** zerlegen: die **obere Halbsphäre**

$$D_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0\}$$

und die **untere Halbsphäre**

$$D_-^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq 0\}.$$

Indem man einfach die letzte Koordinate nicht hinschreibt, erhält man einen Homöomorphismus von den Halbsphären  $D_+^n$  und  $D_-^n$  zur abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen Einheitsscheibe  $D^n$ . Dieser Homöomorphismus ist die Identität auf  $S^{n-1}$ .

Man beachte, dass  $S^n = D_+^n \cup D_-^n$  und dass  $D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$ .

Wir können auch das Innere dieser Halbsphären betrachten. Diese Unterräume sind die **offene obere Halbsphäre**

$$E_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n > 0\}$$

und die **offene untere Halbsphäre**

$$E_-^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n < 0\}.$$

Sie sind jeweils homöomorph zur offenen  $n$ -dimensionalen Scheibe  $D_n^\circ$  oder zu  $\mathbf{R}^n$ . Die offenen Halbsphären sind jeweils das Komplement der entgegengesetzten abgeschlossenen Halbsphäre, d. h.,

$$S^n \setminus D_\pm^n = E_\mp^n.$$

Als Instanz von Beispiel 3.50 sehen wir, dass  $(S^n; S_+^n, S_-^n)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist. Das gilt auch, wenn wir  $S_\pm^n$  durch beliebige Umgebungen von  $D_\pm^n$  ersetzen.

Wenn  $B$  eine beliebige in  $S^n$  abgeschlossene Teilmenge von  $E_-^n$  ist, so ist  $(S^n, D_-^n, B)$  ein Ausschneidungstripel nach dem Ausschneidungssatz 3.55. Insbesondere ist  $(S^n, D_-^n, \{p_-\})$  ein Ausschneidungstripel.

Natürlich gilt diese Aussage auch, wenn wir in ihr die unteren offenen und abgeschlossenen Halbsphären und den unteren Pol durch die oberen ersetzen.

Mit Hilfe von Lemma 3.60 können wir aus diesen Instanzen von Mayer-Vietoris Folgen und Ausschneidungstriplen weitere gewinnen, die angenehmer anzuwenden sind.

Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  ist  $(S^n, D_-^n, E_-^n)$  ein Ausschneidungstripel, denn man sieht leicht, dass  $D_+^n = S^n \setminus E_-^n$  ein Deformationsretrakt von  $S_+^n = S^n \setminus \{p_-\}$  ist und  $S^{n-1} = D_-^n \setminus E_-^n$  ein Deformationsretrakt von  $D_-^n \setminus \{p_-\}$  ist. Eine jeweilige Homotopie  $H$  von der Identität zu einer Retraktion lässt die Punkte in der oberen Halbsphäre unverändert, und verschiebt die Punkte der unteren Halbsphäre entlang Großkreisen, die den Punkt mit den Polen verbinden, zum Äquator hin. Wer will, findet leicht die Formel für diese Homotopie — die Koordinate  $x_n$  wird linear mit der Zeit gegen 0 geschoben, und die anderen Koordinaten werden passend vergrößert, damit der Bildpunkt in der Sphäre bleibt.

Natürlich ist auch  $(S^n, D_+^n, E_+^n)$  ein Ausschneidungstripel.

Weil  $(S^n; S_+^n, S_-^n)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist und weil, wie wir gesehen haben,  $D_\pm^n$  ein Deformationsretrakt von  $S_\pm^n$  ist und weil  $S^{n-1} = D_+^n \cap D_-^n$  offenbar ein Deformationsretrakt von

$$S_+^n \cap S_-^n \cong S^{n-1} \times (-1, 1)$$

ist, ist auch  $(S^n; D_+^n, D_-^n)$  eine Mayer-Vietoris Triade.

Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt auf einfache Weise die wichtigsten Homologiegruppen ausrechnen.



# Kapitel 4

## Berechnungen und Anwendungen

Wir wollen die Erkenntnisse, Grundeigenschaften und Vorbereitungen aus Kapitel 3, insbesondere die Eilenberg-Steenrod Axiome für die singuläre Homologie, jetzt benutzen, um einige wichtige Homologiegruppen und Homomorphismen auszurechnen und ein paar Anwendungen herzuleiten.

Wir beginnen mit einer ganz einfachen Bemerkung.

**Bemerkung 4.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei

$$\mathcal{W} = \{ W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$$

die Menge der Wegkomponenten von  $X$ .

Da jeder Standardsimplex  $\Delta_n$  wegweise zusammenhängend ist, liegt das Bild jedes singulären Simplexes  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$  ganz in einer Wegkomponente. Weil die singulären Kettengruppen von den singulären Simplizes frei erzeugt werden, ist somit

$$C_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_*(W_\lambda), \quad (4.1)$$

und weil die Summanden Unterkettenkomplexe sind ist es klar, dass auch

$$H_*(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(W_\lambda). \quad (4.2)$$

Der Beweis der Existenz des Isomorphismus in (4.2) lässt sich auf die gleiche Weise führen, wie der Beweis von Lemma 2.30 d).

In Dimension 0 können wir für jeden topologischen Raum die Homologie ganz einfach bestimmen.

**Lemma 4.2** Sei  $A \neq \emptyset$  ein wegweise zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist  $H_0(A) = \mathbf{Z}$  und die  $1 \in \mathbf{Z}$  ist die Homologieklass  $[y]$

eines beliebigen Punktes  $y \in A$ , aufgefasst als ein singulärer 0-Simplex (der automatisch ein 0-Zyklus ist).

Ferner, für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  und eine beliebige stetige Abbildung  $f: A \rightarrow X$  ist  $H_0(f)$  injektiv.

Wenn  $X$  wegweise zusammenhängend ist, dann gilt sogar  $H_0(f) = \text{id}_{\mathbf{Z}}$  (mit der oben gegebenen Wahl der Isomorphismen  $H_0(A) \cong \mathbf{Z} \cong H_0(X)$ ).

*Beweis.* Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. Da  $\Delta_0 = \{0\}$  einpunktig ist, ist ein 0-Simplex in  $X$  eindeutig bestimmt durch seinen einzigen Bildpunkt, d. h., wir können  $S_0(X)$  mit  $X$  identifizieren und somit  $C_0(X)$  mit der von  $X$  erzeugten freien abelschen Gruppe  $F(X)$ .

Jede 0-Kette ist ein Zyklus, weil  $C_{-1}(X) = \{0\}$ . Um die 0-te Homologie zu berechnen, müssen wir nur noch die Rändergruppe bestimmen.

Jeder Rand ist eine Linearkombination von Rändern von 1-Simplizes, und ein 1-Simplex  $\sigma: \Delta_1 = I \rightarrow X$  ist nichts anderes, als ein Weg in  $X$ . Ferner

$$\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0) \quad (4.3)$$

nach Definition.

Sei  $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbf{Z}$  die Abbildung definiert durch

$$\varepsilon\left(\sum_{x \in X} n_x x\right) = \sum_{x \in X} n_x,$$

die jeder Kette ihre Koeffizientensumme in  $\mathbf{Z}$  zuordnet. Sie ist wohldefiniert, weil in einer Kette nur endlich viele Koeffizienten  $\neq 0$  sind, und sie ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. (Diese Abbildung heißt die **Augmentation**.)

An (4.3) sieht man, dass  $B_0(X) \subseteq \text{Ker } \varepsilon$ . Insbesondere repräsentiert jede 0-Kette, die nicht im Kern von  $\varepsilon$  liegt, eine nichtverschwindende Homologiekategorie.

Für einen wegweise zusammenhängenden nichtleeren Raum  $A$  gilt sogar  $B_0(X) = \text{Ker } \varepsilon$ . Denn für je zwei Punkte  $x$  und  $y \in A$  gibt es einen Weg, also einen 1-Simplex, von  $x$  nach  $y$ , und nach (4.3) ist  $y - x$  ein Rand. Das bedeutet, dass wenn wir einen festen Punkt  $y \in A$  wählen, wir jede Kette

$$c = \sum_{x \in A} n_x x \in C_0(A)$$

durch Addition des Randes

$$\sum_{x \in A} n_x (y - x)$$

in die zu  $c$  homologe Kette

$$c' := \sum_{x \in A} n_x y = \varepsilon(c)y$$

verwandeln können. Weil sie sich durch einen Rand unterscheiden, sind  $c$  und  $c'$  entweder beide Ränder oder beide keine Ränder. Aber  $c'$  ist offensichtlich *genau dann* ein Rand, wenn  $\varepsilon(c) = 0$ .

Nach dem Ersten Isomorphiesatz aus der Gruppentheorie induziert  $\varepsilon$  einen Isomorphismus

$$H_0(A) = \frac{Z_0(A)}{B_0(A)} = \frac{C_0(A)}{\text{Ker } \varepsilon} \longrightarrow \text{Bild } \varepsilon = \mathbf{Z}.$$

Dieser Isomorphismus bildet die Homologieklassse  $[y]$  eines beliebigen Punktes  $y \in A$  (aufgefasst als 0-Zyklus) auf  $1 \in \mathbf{Z}$  ab, d. h., diese Homologieklassse, die nicht von  $y$  abhängt, entspricht der 1 in  $\mathbf{Z}$ .

Sei  $X$  ein anderer topologischer Raum und sei  $f: A \rightarrow X$  stetig und  $z := f(y)$ . Für jedes  $n \neq 0 \in \mathbf{Z}$  ist

$$f_*(n[y]) = f_*([ny]) = [f_\#(ny)] = [nz] \neq 0, \quad (4.4)$$

weil  $\varepsilon(nz) = n \neq 0$ . Also ist  $f_* = H_0(f)$  injektiv.

Wenn auch  $X$  wegweise zusammenhängend ist, ist auch  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ , erzeugt zum Beispiel von der Homologieklassse  $[z]$ , und Gleichung (4.4) zeigt, dass  $H_0(f)$  tatsächlich die Identität ist. ■

**Korollar 4.3** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{W}$  die Menge der Wegkomponenten von  $X$ .

Dann ist

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{W \in \mathcal{W}} \mathbf{Z}, \quad (4.5)$$

wobei jeder Punkt  $x \in X$  einen Zyklus in  $Z_0(X)$  darstellt, dessen Homologieklassse die 1 ist in demjenigen Summanden  $\mathbf{Z}$  von (4.5), der zur Wegkomponente von  $x$  gehört.

Sei  $Y$  ein zweiter topologischer Raum und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Für jede Wegkomponente  $W$  von  $X$  gibt es eine eindeutige Wegkomponente  $V$  von  $Y$  mit  $f(W) \subseteq V$ , und  $H_0(f)$  bildet den  $W$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(X)$  identisch ab auf den  $V$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(Y)$ .

*Beweis.* Die Darstellung (4.5) folgt sofort aus Gleichung (4.2) in Bemerkung 4.1 und aus Lemma 4.2. Dabei wird der  $W$ -te Summand  $\mathbf{Z}$  erzeugt von der Homologieklassse eines beliebigen Punktes  $w \in W$ .

Wenn  $f: X \rightarrow Y$  stetig ist und  $V$  die Wegkomponente von  $Y$  ist mit  $f(W) \subseteq V$ , dann bildet  $H_0(f)$  die Homologieklassse von  $w$  ab auf die Homologieklassse von  $f(w) \in Y$ , und weil  $f(w)$  in  $V$  liegt, erzeugt diese Klasse den  $V$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(Y)$ .

Das bedeutet, dass  $H_0(f)$  den  $W$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(X)$  identisch abbildet auf den  $V$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(Y)$ . ■

**Beispiele 4.4** a)  $S^0 = \{+1, -1\}$  besteht aus zwei Punkten, mit der diskreten Topologie. Aus dem Dimensionsaxiom und aus Bemerkung 4.1 folgt, dass

$$H_n(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0 \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.6)$$

b)  $D^0 = \{0\}$  hat einen Punkt und  $S^{-1} = \emptyset$ . Deshalb ist

$$H_n(D^0, S^{-1}) = H_n(D^0) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0 \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.7)$$

c)  $S^0 \subseteq D^1 = [-1, 1]$  und  $D^1$  ist azyklisch, hat also Homologie  $\mathbf{Z}$  in Dimension 0 und  $\{0\}$  in jeder anderen Dimension. Für die Inklusion  $i: S^0 \rightarrow D^1$  gilt also  $H_n(i) = 0$  für alle  $n \neq 0$ , und nach Korollar 4.3 hat

$$H_0(i): \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$$

die Matrix  $(1, 1)$ , d. h., die Gestalt

$$H_0(m, n) = m + n, \quad (4.8)$$

denn  $i$  bildet beide Wegkomponenten von  $S^0$  ab in die einzige Wegkomponente von  $D^1$ .

Mit diesem kleinen Anfang sind wir jetzt in der Lage, die Homologiegruppen aller Sphären auszurechnen.

**Satz 4.5** Für jedes  $n \geq 1$  und für jedes  $k \in \mathbf{Z}$  ist

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.9)$$

und

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong H_k(S^n, D_-^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Die Isomorphismen zwischen diesen Homologiegruppen werden zum Teil durch stetige Abbildungen induziert.

Insbesondere wird der erste Isomorphismus in (4.10) induziert durch die Inklusion  $i: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, D_-^n)$ , die die Scheibe  $D^n$  als die obere Halbsphäre  $D_+^n$  in  $S^n$  einbettet; für diese Inklusion ist  $i_*$  ein Isomorphismus der gesamten graduierten Homologiegruppen.

Für die Inklusion  $j: (S^n, \emptyset) \rightarrow (S^n, D_-^n)$  ist  $H_k(j)$  für alle  $k \geq 1$  ein Isomorphismus (aber nicht für  $k = 0$ ).

*Beweis.*  $S^n$  ist die Vereinigung der beiden wegweise zusammenhängenden Scheiben  $D_+^n$  und  $D_-^n$ , und für  $n > 0$  ist ihr Durchschnitt  $S^{n-1}$  nichtleer. Daraus folgt, dass  $S^n$  wegweise zusammenhängend ist, wenn  $n > 0$ , und deshalb ist  $H_0(S^n) = \mathbf{Z}$ .

Wir können in der Aussage des Satzes die „Standardscheibe“  $D^n$  ersetzen durch eine homöomorphe Kopie, nämlich durch die Scheibe  $D_+^n$ , die obere Halbsphäre in  $S^n$ .

Wir betrachten nun folgendes Diagramm, in dem die Zeilen Auszüge aus den langen exakten Homologiefolgen der Paare  $(D_+^n, S^{n-1})$  und  $(S^n, D_-^n)$  sind und die senkrechte Abbildung durch die Inklusion des Raumpaares induziert wird:

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(D_+^n) & \longrightarrow & H_k(D_+^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D_+^n) \\ & & & & \downarrow i_* \cong & & \\ H_k(D_-^n) & \longrightarrow & H_k(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^n, D_-^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(D_-^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^n) \end{array}$$

Die Abbildung  $i_*$  ist ein Ausschneidungsisomorphismus, denn  $(S^n, D_-^n, E_-^n)$  ist ein Ausschneidungstripel nach Beispiel und Definition 3.61 und das Paar  $(D_+^n, S^{n-1})$  erhält man aus dem Paar  $(S^n, D_-^n)$  durch Ausschneidung von  $E_-^n$  (in anderen Worten,  $D_+^n = S^n \setminus E_-^n$  und  $S^{n-1} = D_-^n \setminus E_-^n$ ).

Das liefert, wie behauptet, den ersten Isomorphismus in (4.10).

Das Diagramm enthält aber mehr Isomorphismen, wobei ihr genaues Aussehen von dem Wert von  $k$  und  $n$  abhängt. Wenn  $k = 0$  hat die untere Zeile nach Lemma 4.2 die Gestalt

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\text{id}_Z} \mathbf{Z} \longrightarrow H_0(S^n, D_-^n) \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \{0\},$$

woraus folgt, dass  $H_0(S^n, D_-^n) = \{0\}$ , wie es in (4.10) steht.

Für  $k = 1$  hat das Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_1(D_+, S^{n-1}) & \xrightarrow{\beta_1} & H_0(S^{n-1}) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ & & \downarrow \cong & & & & \\ \{0\} & \longrightarrow & H_1(S^n) & \xrightarrow[\cong]{H_1(j)} & H_1(S^n, D_-^n) & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \end{array}$$

Der verbindende Homomorphismus in der unteren Zeile ist 0, weil die anschließende Abbildung nach Lemma 4.2 injektiv ist. Aus diesem Grund ist die Abbildung  $H_1(j): H_1(S^n) \rightarrow H_1(S^n, D_-^n)$  ein Isomorphismus.

Die Gestalt des verbindenden Homomorphismus in der oberen Zeile hängt vom Wert von  $n$  ab, aber  $\beta_1$  ist auf jeden Fall injektiv und somit ein Isomorphismus auf sein Bild, welches der Kern des rechten Pfeils ist.

Wenn  $n = 1$ , so ist der rechte Pfeil in der oberen Zeile nach Beispiel 4.4 c) die Abbildung  $(m, n) \mapsto m + n$  von  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  und hat Kern

$$\{(m, -m) \mid m \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}.$$

Das zeigt, dass  $H_1(S^1) \cong H_1(D_+, S^0) \cong \mathbf{Z}$  und beweist den Fall  $k = n = 1$  in (4.9) und (4.10).

Wenn  $n > 1$ , so ist der rechte Pfeil die Identität von  $\mathbf{Z}$  nach Lemma 4.2, da dann  $S^{n-1}$  wegweise zusammenhängend ist. Folglich ist  $\beta_1 = 0$  (da der Kern des rechten Pfeils  $\{0\}$  ist) und wir haben

$$H_1(S^n) \cong H_1(D_+, S^{n-1}) = \{0\},$$

im Einklang mit (4.9) und (4.10).

Wir haben damit den Fall  $k = 1$  vollständig berechnet.

Wenn  $k > 1$ , so hat unser Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_k(D_+, S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{} & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow \cong & & & & \\ \{0\} & \longrightarrow & H_k(S^n) & \xrightarrow[\cong]{H_k(j)} & H_k(S^n, D_-^n) & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

und wir sehen, dass  $H_k(j)$  ein Isomorphismus ist, wie behauptet, und dass für alle  $n > 0$  und  $k > 1$  gilt

$$H_k(S^n) \cong H_k(D_+, S^{n-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}).$$

Durch Induktion folgt hieraus, dass

$$H_k(S^n) \cong H_{k-r}(S^{n-r})$$

für jedes  $r > 0$ , so dass  $k - r \geq 1$  und  $n - r \geq 0$ , also für jedes  $r > 0$  mit  $r < k$  und  $r \leq n$ .

Wenn  $k \leq n$  nehmen wir  $r = k - 1$  und wir finden

$$H_k(S^n) \cong H_1(S^{n-k+1}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n - k + 1 = 1, \text{ also wenn } k = n; \\ \{0\}, & \text{wenn } n - k + 1 > 1, \text{ also wenn } k < n. \end{cases}$$

Wenn  $k > n$  nehmen wir  $r = n$  und wir finden

$$H_k(S^n) \cong H_{k-n}(S^0) = \{0\}$$

nach Beispiel 4.4 a), da  $k - n > 0$ .

Das beweist alle Fälle von (4.9), und die fehlenden Fälle von (4.10) folgen sofort aus dem Isomorphismus  $H_k(S^n) \cong H_k(D_+^n, S^{n-1})$  für  $k > 1$ . ■

Die Tatsache, dass  $H^n(S^n) = \mathbf{Z}$  für jedes  $n > 0$  erlaubt uns, ähnlich zu Definition 8.6 des Skriptums *Einführung in die Topologie* in Bezug auf die erste Homotopiegruppe des Kreises, für jede stetige Selbstabbildung der  $n$ -Sphäre einen **homologischen Abbildungsgrad** zu definieren (der intuitiv gesehen beschreibt, wie oft die Abbildung die Sphäre um sich selbst wickelt).

**Definition 4.6** Sei  $n \geq 1$  und  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung.

Dann ist  $H_n(f): H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  ein Homomorphismus  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  und somit die Multiplikation mit einer wohldefinierten Zahl  $a \in \mathbf{Z}$ , die wir den **Abbildungsgrad**  $\text{Grad } f$  von  $f$  nennen.

**Bemerkung 4.7** a) Da homotope Abbildungen den gleichen Homomorphismus in Homologie induzieren, hängt der Grad einer Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  nur von der Homotopieklasse von  $f$  ab.

b) Sei  $P = \{p\}$  ein Einpunktraum. Wenn  $f$  konstant ist, so faktorisiert  $f$  durch  $P$ , d. h., wir können schreiben  $f = g \circ h$ , wo  $h$  die einzige Abbildung  $S^n \rightarrow P$  ist und wo  $g$  eine Abbildung  $P \rightarrow S^n$  ist.

Da aber  $H_n(P) = \{0\}$  (weil  $n \geq 1$ ), folgt daraus, dass  $\text{Grad } f = 0$  wenn  $f$  konstant ist, und wegen Teil a) gilt dies auch, wenn  $f$  nullhomotop ist.

c) Offensichtlich ist  $\text{Grad } \text{id}_{S^n} = 1$ .

d) Wenn  $f$  und  $g$  zwei Abbildungen  $S^n \rightarrow S^n$  sind, dann ist

$$\text{Grad}(g \circ f) = \text{Grad } g \cdot \text{Grad } f,$$

wie man leicht sieht.

**Lemma 4.8** Sei  $n$  eine positive natürliche Zahl und sei  $0 \leq k \leq n$ . Wir bezeichnen mit  $s_k$  die Abbildung  $S^n \rightarrow S^n$ , die die Einschränkung auf  $S^n$  der Spiegelung von  $\mathbf{R}^{n+1}$  in der Ebene  $x_k = 0$  ist, also die Abbildung gegeben durch

$$s_k(x_0, \dots, x_n) := (x_0, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (4.11)$$

Der Grad von  $s_k$  ist  $-1$ .

*Beweis.* Es reicht, die Behauptung für  $k = n$  zu beweisen, denn für je zwei Indizes  $k$  und  $l$  zwischen  $0$  und  $n$ , sei  $\tau: S^n \rightarrow S^n$  die Abbildung, die die  $k$ -te und  $l$ -te Koordinate vertauscht. Da  $\tau^2 = \text{id}_{S^n}$ , muss  $(\text{Grad } \tau)^2 = 1$  sein. Offensichtlich ist  $s_l = \tau s_k \tau$  und somit

$$\text{Grad } s_l = (\text{Grad } \tau)^2 \text{Grad } s_k = \text{Grad } s_k,$$

d. h., alle  $s_k$  haben den gleichen Grad.

Seien  $i: (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, D_-^n)$  und  $j: (S^n, \emptyset) \rightarrow (S^n, D_-^n)$  die Inklusionen. Nach der Aussage von Satz 4.5 induzieren diese stetigen Abbildungen Isomorphismen der  $n$ -ten Homologiegruppen dieser Raumpaare.

Sei  $c \in C_n(D_+^n)$  eine Kette, deren Restklasse in  $C_n(D_+^n, S^{n-1})$  ein relativer Zyklus ist, dessen Homologieklass die Gruppe  $H_n(D_+^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$  erzeugt. Da  $C_n(D_+^n) \subseteq C_n(S^n)$ , können wir  $c$  auch als eine Kette in  $C_n(S^n)$  betrachten.

Sei  $d = (s_n)_\#(c)$ . Dies ist eine Kette in  $C_n(D_-^n)$ .

Weil  $c$  einen Zyklus von  $C_n(D_+^n, S^{n-1})$  repräsentiert, ist  $\partial c \in C_*(S^{n-1})$ , und weil  $s_n|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ , gilt

$$\partial d = \partial(s_n)_\#(c) = (s_n)_\#(\partial c) = \partial c.$$

Es folgt, dass  $c - d$  ein Zyklus in  $C_n(S^n)$  ist. Weil  $d \in C_n(D_-^n)$ , ist

$$j_\#(c - d) = j_\#(c) = i_\#(c + C_n(S^{n-1})) \in C_n(S^n, D_-^n).$$

Da  $H_n(i)$  und  $H_n(j)$  Isomorphismen sind und  $[c + C_n(S^{n-1})]$  nach der Wahl von  $c$  ein Erzeugendes von  $H_n(D_+^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$  ist, ist  $[c - d]$  ein Erzeugendes von  $H_n(S^n)$ .

Aber  $(s_n)_\#(c) = d$  und  $(s_n)_\#(d) = c$  (weil  $(s_n)^2 = \text{id}_{S^n}$ ). Also ist

$$(s_n)_\#(c - d) = d - c = -(c - d)$$

und  $\text{Grad } s_n = -1$ . ■

**Korollar 4.9** Sei  $n \geq 1$  und sei  $\tau: S^n \rightarrow S^n$  die Antipodenabbildung  $\tau(x) = -x$ . Dann ist  $\text{Grad } \tau = (-1)^{n+1}$ .

*Beweis.*  $\tau = s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1 \circ s_0$  und nach Bemerkung 4.7 d) und Lemma 4.8 ist  $\text{Grad } \tau$  das Produkt von  $n + 1$  Kopien von  $-1$ . ■

Mit diesen Vorbereitungen lassen sich viele der Ergebnisse aus Kapitel 8 des Skriptums *Einführung in die Topologie* nach den gleichen Ideen wie dort aber unter Verwendung der Homologiegruppen der Sphären neu beweisen, diesmal aber in beliebigen Dimensionen  $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ , da wir uns nicht nur auf die Fundamentalgruppe von  $S^1$  stützen müssen.

**Hilfssatz 4.10** *Jeder Retrakt eines azyklischen topologischen Raumes  $X$  ist auch azyklisch.*

*Beweis.* Sei  $A \subseteq X$  ein Retrakt von  $X$  und sei  $r: X \rightarrow A$  eine Retraktion. Sei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion.

Dann ist  $r \circ i = \text{id}_A$  und somit

$$H_n(r) \circ H_n(i) = H_n(\text{id}_A) = \text{id}_{H_n(A)} \quad (4.12)$$

für jedes  $n$ .

Wenn  $X$  azyklisch ist, dann ist  $H_n(X) = \{0\}$  für jedes  $n \geq 1$  und  $H_0(X) = \mathbf{Z}$ .

Letzteres besagt nach Lemma 4.2, dass  $X$  wegzusammenhängend ist. Da aus  $r \circ i = \text{id}_A$  folgt, dass  $r$  surjektiv ist, ist auch  $A = \text{Bild } r$  wegzusammenhängend und hat somit  $\mathbf{Z}$  als 0-te Homologiegruppe.

Für  $n \geq 1$  folgt aus  $H_n(X) = \{0\}$ , dass  $H_n(r)$  und  $H_n(i)$  und nach Gleichung (4.12) auch  $\text{id}_{H_n(A)}$  die Nullabbildung sind, woraus man schliesst, dass  $H_n(A) = \{0\}$ . Insgesamt heißt das, dass  $A$  azyklisch ist. ■

**Lemma 4.11** *Für jedes  $n \geq 1$  ist  $S^{n-1}$  kein Retrakt von  $D^n$ .*

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Hilfssatz 4.10, da  $D^n$  azyklisch ist aber  $S^{n-1}$  nicht, denn die  $n - 1$ -te Homologiegruppe der Sphäre ist  $\mathbf{Z}$  und nicht  $\{0\}$  (oder im Fall  $n = 1$  ist sie  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  und nicht  $\mathbf{Z}$ ). ■

**Satz 4.12 (Brouwerscher Fixpunktsatz)** *Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Jede stetige Abbildung*

$$f: D^n \rightarrow D^n$$

*hat einen Fixpunkt; d. h., es gibt einen Punkt  $x \in D^n$ , so dass  $f(x) = x$ .*

Für  $n = 0$  muss nichts bewiesen werden, da  $D^0$  nur aus einem einzigen Punkt besteht. Der Beweis für  $n \geq 1$  benutzt Lemma 4.11 und geht praktisch genau so, wie der Beweis des Spezialfalls für  $D^2$ , Satz 8.5 des Skriptums *Einführung*

in die Topologie; nur die Dimensionen sind anders, aber die Beweismethode ist die Gleiche. Deshalb verzichten wir darauf, den Beweis hier zu wiederholen.

**Lemma 4.13** Sei  $n \in \mathbf{N}$  und seien  $f$  und  $g: S^n \rightarrow S^n$  stetige Abbildungen. Wenn für jedes  $x \in S^n$  gilt  $f(x) \neq -g(x)$ , dann ist  $f \simeq g$ .

*Beweis.* Sei  $r: D^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  die Retraktion

$$r(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Definiere eine Homotopie  $H: S^n \times I \rightarrow D^{n+1}$  durch

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass  $H(x, t)$  nie 0 ist, denn sonst gibt es ein  $x \in S^n$  und ein  $t \in [0, 1]$  mit  $(1 - t)f(x) + tg(x) = 0$  oder

$$(1 - t)f(x) = -tg(x). \quad (4.13)$$

Da aber  $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 1$ , ist

$$1 - t = |1 - t| = \|(1 - t)f(x)\| = \|-tg(x)\| = |-t| = t$$

oder in anderen Worten  $t = 1 - t = \frac{1}{2}$ , und daraus folgt mit (4.13), dass  $f(x) = -g(x)$ , in Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Da also  $H(x, t)$  nie 0 ist, können wir  $r$  auf seinen Wert anwenden, und  $r \circ H$  ist eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  als Abbildungen  $S^n \rightarrow S^n$ . ■

**Korollar 4.14** Sei  $n \geq 1$  und sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung.

Wenn  $f$  keinen Fixpunkt hat (mit  $f(x) = x$ ), so ist  $f$  homotop zur Antipodenabbildung  $\tau$  mit  $\tau(x) = -x$  für jedes  $x$ .

Wenn  $f$  keinen Antipodenpunkt hat (mit  $f(x) = -x$ ), so ist  $f \simeq \text{id}_{S^n}$ .

*Beweis.* Ein Punkt  $x$  ist genau dann ein Fixpunkt von  $f$ , wenn  $f(x) = -\tau(x)$ . Wenn es keinen solchen Punkt gibt, dann folgt aus Lemma 4.13, dass  $f \simeq \tau$ . Und wenn  $f$  keinen Antipodenpunkt hat, so folgt aus Lemma 4.13, dass  $f \simeq \text{id}_{S^n}$ . ■

**Korollar 4.15** Sei  $n \in \mathbf{N}$  gerade. Jede stetige Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  hat entweder einen Fixpunkt (mit  $f(x) = x$ ) oder einen Antipodenpunkt (mit  $f(x) = -x$ ).

*Beweis.* Sei  $\tau: S^n \rightarrow S^n$  die Antipodenabbildung mit  $\tau(x) = -x$  für jedes  $x$ .

Wenn  $f$  weder einen Fixpunkt noch einen Antipodenpunkt hat, so besagt Korollar 4.14, dass  $\tau \simeq f \simeq \text{id}_{S^n}$ , aber für  $n$  gerade ist das nach Bemerkung 4.7 a) nicht möglich, weil nach Korollar 4.9  $\text{Grad } \tau = (-1)^{n+1} = -1$  und  $\text{Grad } \text{id}_{S^n} = 1$ . ■

**Satz 4.16 (Satz vom Igel)** *Wenn  $n > 0$  gerade ist, so besitzt  $S^n$  kein nirgends verschwindendes stetiges Tangentenvektorfeld.*

*Dies kann man auch anders ausdrücken. Da man ein nichtverschwindendes Tangentenvektorfeld auf Länge 1 normieren kann und da die Tangentenvektoren zu  $S^n$  genau die Orthogonalen des Ortsvektors sind, besagt dieser Satz:*

*Es gibt keine stetige Abbildung  $v: S^n \rightarrow S^n$ , so dass  $v(x) \perp x$  für jedes  $x \in S^n$ .*

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Korollar 4.15, denn  $\pm x$  ist nie orthogonal zu  $x$ . Also hat eine solche Abbildung  $v$ , mit  $v(x) \perp x$  für jedes  $x \in S^n$ , weder einen Fixpunkt noch einen Antipodenpunkt, in Widerspruch zum Korollar. ■

Dieser Satz heißt der „Satz vom Igel“, da er, in einer skurrilen Fassung für  $n = 2$ , besagt, dass man die Stacheln eines Igels (ein Einheitsvektorfeld auf einer  $S^2$ , welche die Haut des Igels darstellt), nicht kämmen kann, so dass sie flach (also tangential) liegen.

Die amerikanische Version lautet: man kann einen behaarten Billiardball nicht kämmen. Behaarte Billiardbälle scheint es in Deutschland nicht zu geben (obwohl es Igel oder zumindest ähnliche Tiere in Amerika gibt).

*Bemerkung.* In Kapitel 8 des Skriptums *Einführung in die Topologie* haben wir noch zwei weitere schöne Anwendungen des (damals homotopietheoretischen) Abbildungsgrades präsentiert, nämlich den Satz von Borsuk-Ulam und den Schinkenbrotsatz. Es wurde zumindest durch Andeutung in Aussicht gestellt, mit Homologietheorie auch diese Sätze, die zu den hier besprochenen Anwendungen sehr ähnlich erscheinen, in höhere Dimensionen leicht übertragen zu können.

Diese Sätze gelten auch tatsächlich in höheren Dimensionen, aber das zu beweisen ist nicht leicht und leider kaum möglich mit den Mitteln, die uns im Moment zur Verfügung stehen.

Für diese Anwendungen brauchen wir die Kohomologietheorie und insbesondere die *Ringstruktur* der graduierten Kohomologiegruppe, eine Struktur, die die Homologiegruppe leider nicht besitzt. Deshalb müssen wir doch darauf verzichten, diese Anwendungen in dieser Vorlesung zu präsentieren.

Wir schließen dieses Kapitel mit einem weiteren Berechnungsbeispiel als Anwendung der Mayer-Vietoris Folge.

**Beispiel 4.17** In  $X := S^1 \times I$  verkleben wir den Kreis  $S^1 \times \{0\}$  mit dem Kreis  $S^1 \times \{1\}$  vermöge eines geeigneten Homöomorphismus  $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$  und betrachten den daraus resultierenden Raum  $Y$ .

Etwas genauer, wir definieren  $\sim$  als die kleinste Äquivalenzrelation auf  $X$ , so dass  $(z, 0) \sim (\varphi(z), 1)$  für jedes  $z \in S^1$ . Das bedeutet,  $(z, s) \sim (w, t)$  genau dann, wenn  $s = 0, t = 1$  und  $w = \varphi(z)$ , oder wenn  $t = 0, s = 1$  und  $z = \varphi(w)$ , oder wenn  $(z, s) = (w, t)$ . Wir setzen  $Y := S^1 \times I / \sim$ .

Uns interessieren zwei spezielle Instanzen von  $\varphi$ .

- a) Wenn  $\varphi = \text{id}_{S^1}$ , so ist  $Y$  homöomorph zum **Torus**  $T^2 = S^1 \times S^1$  und die Abbildung  $[(z, t)] \mapsto (z, e^{2\pi it})$  ist ein Homöomorphismus, denn die Abbildung

$$\begin{aligned} S^1 \times I &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (z, t) &\longmapsto (z, e^{2\pi it}) \end{aligned}$$

ist identifizierend, wie man leicht überlegt, und bildet genau dann zwei Punkte auf den gleichen Wert, wenn sie bezüglich  $\sim$  äquivalent sind.

Der Torus hat nichttriviale Homologiegruppen nur in Dimension 0, 1 und 2, und dort gilt:

$$H_0(T^2) = \mathbf{Z} \tag{4.14a}$$

$$H_1(T^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \tag{4.14b}$$

$$H_2(T^2) = \mathbf{Z} \tag{4.14c}$$

- b) Der Quotientenraum  $Y$ , der sich ergibt, wenn  $\varphi$  die Spiegelung  $s_1$  aus Lemma 4.8 ist, nennt sich die **Kleinsche Flasche**; wir wollen ihn mit  $K$  bezeichnen. Wir erinnern daran, dass  $s_1(x_0, x_1) = (x_0, -x_1)$ , oder wenn wir  $S^1$  als den Einheitskreis in  $\mathbf{C}$  betrachten, dann ist  $s_1$  die komplexe Konjugation.

Die Kleinsche Flasche hat nichttriviale Homologiegruppen nur in Dimension 0 und 1, und dort gilt:

$$H_0(K) = \mathbf{Z} \tag{4.15a}$$

$$H_1(K) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2 \tag{4.15b}$$

wobei  $\mathbf{Z}_2$ , wie in der Topologie üblich, die Gruppe  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  bedeutet.

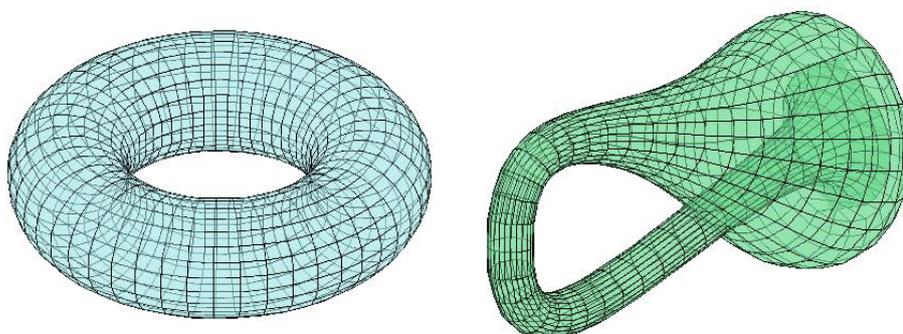
(a) Der Torus  $T^2$ .(b) Die Kleinsche Flasche  $K$ .

Abbildung 4.1: Räume, die man aus einem Kreiszyylinder kleben kann.

*Beweis.* Um die Homologie dieser beiden Räume auszurechnen, geben wir eine Mayer-Vietoris Triade an.

Sei  $\pi: S^1 \times I \rightarrow Y$  die kanonische Projektion auf den Quotientenraum und sei  $A := \pi(S^1 \times [0, \frac{1}{2}])$  und  $B := \pi(S^1 \times [\frac{1}{2}, 1])$ . Auf den beiden genannten Halbzyindern ist  $\pi$  stetig, abgeschlossen (bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab, weil alle genannten Räume kompakt und Hausdorffsch sind) und ist vor allem injektiv und deshalb ein Homöomorphismus auf die Bildräume  $A$  und  $B$ , die also homöomorph zu  $S^1 \times I$  sind.

Man beachte auch, dass für jedes einzelne  $t \in I$  die Abbildung

$$\pi_t := \pi|_{S^1 \times \{t\}}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild  $Y_t := \pi(S^1 \times \{t\}) \cong S^1$  in  $Y$  ist, und dass für jedes  $t$  gilt, dass das Komplement  $Z_t := Y \setminus Y_t \cong S^1 \times (0, 1)$ .

Für  $t = 0$  oder  $1$  ist diese letzte Behauptung klar. Für andere  $t$  drehen wir  $Y$  in sich entlang eines Kreises in der zweiten Koordinatenrichtung, bis  $Y_t$  auf  $Y_0 = Y_1$  zu liegen kommt. Diese „Drehung“ können wir in Koordinaten beschreiben als die Abbildung  $\Phi_t: Y \rightarrow Y$  definiert durch

$$\Phi_t\left([(x, s)]\right) := \begin{cases} [(\varphi(x), 1 - t + s)], & \text{wenn } 0 \leq s \leq t; \\ [(x, s - t)], & \text{wenn } t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert. Man prüft als Erstes leicht nach, dass die Koordinatenpaare für die Werte tatsächlich in  $S^1 \times I$  liegen.

Zweitens, wenn  $[(x, s)] = [(x', s')]$  aber  $(x, s) \neq (x', s')$ , dann gilt (eventuell nach Vertauschung der Paare), dass  $s = 0$ ,  $s' = 1$  und  $x' = \varphi(x)$ . Weil

$t$  weder 0 noch 1 ist, ist für jedes dieser Koordinatenpaare in (4.16) eine eindeutige Zeile für die Bestimmung des Wertes anwendbar, und wir finden

$$\Phi_t\left([(x, s)]\right) = \Phi_t\left([(x, 0)]\right) = [(\varphi(x), 1-t)] = [(x', s'-t)] = \Phi_t\left([(x', s')]\right).$$

Das heißt, verschiedene Koordinatendarstellungen des Argumentes von  $\Phi_t$  führen zum gleichen Wert.

Drittens, wenn  $s = t \neq 0$  und  $\neq 1$ , dann sind beide Zeilen der Fallunterscheidung in (4.16) anwendbar und bestimmen einen Wert, nämlich  $[(\varphi(x), 1)]$  in der oberen Zeile und  $[(x, 0)]$  in der unteren Zeile. Diese Werte sind aber der gleiche Punkt in  $Y$ . Damit ist gezeigt, dass  $\Phi_t$  wohldefiniert ist.

Wenn wir die Klassenklammern  $[\ ]$  auf der linken Seite in Gleichung (4.16) weglassen, wird aus dieser Gleichung die Definition der Abbildung  $\Phi_t \circ \pi$ , und man sieht anhand der Formeln, dass diese Abbildung stetig ist auf  $S^1 \times [0, t]$  und auf  $S^1 \times [t, 1]$ . Diese Mengen bilden eine abgeschlossene Überdeckung von  $S^1 \times I$ . Also ist  $\Phi_t \circ \pi$  auf ganz  $S^1 \times I$  stetig, und weil  $\pi$  identifizierend ist, heißt das, dass  $\Phi_t$  stetig ist auf  $Y$ .

Jede stetige Abbildung  $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$ , die mit  $\varphi$  kommutiert, bestimmt eine wohldefinierte und stetige Abbildung  $\mu_\alpha: Y \rightarrow Y$  gegeben durch

$$\mu_\alpha\left([(x, s)]\right) := [(\alpha(x), s)].$$

Die Wohldefiniertheit prüft man leicht nach, und die Stetigkeit ist dann anhand dieser Koordinatendarstellung offensichtlich. Wenn  $\alpha$  ein Homöomorphismus ist, dann ist auch  $\mu_\alpha$  ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung  $\mu_{\alpha^{-1}}$  (wobei  $\alpha^{-1}$  natürlich auch mit  $\varphi$  kommutiert).

Insbesondere gilt diese Behauptung für  $\alpha = \varphi$ . Anhand der Formeln (4.16) kann man direkt nachrechnen, dass

$$\Phi_{1-t} \circ \Phi_t = \mu_\varphi. \tag{4.17}$$

Weil die rechte Seite bijektiv ist, ist  $\Phi_t$  injektiv und  $\Phi_{1-t}$  surjektiv. Weil Gleichung (4.17) für jedes  $t$  gilt, gilt sie auch mit  $t$  und  $1-t$  vertauscht, so dass  $\Phi_t$  auch surjektiv und somit bijektiv ist. Nach (4.17) ist die Umkehrabbildung  $\mu_\varphi^{-1} \circ \Phi_{1-t}$  und somit stetig. Das heißt,  $\Phi_t$  ist ein Homöomorphismus  $Y \rightarrow Y$ .

Aus (4.16) ist klar, dass  $\Phi_t(Y_t) = Y_0 = Y_1$ . Somit bildet  $\Phi_t$  das Komplement  $Z_t$  homöomorph auf  $Z_0 = Z_1 \cong S^1 \times (0, 1)$  ab, was zeigt, dass  $Z_t$  für jedes  $t$  homöomorph zu  $S^1 \times (0, 1)$  ist, wie behauptet.

Nun beachte man, dass  $Y_{3/4} \cap A = \emptyset$  und dass  $A$  ein Deformationsretrakt von  $Z_{3/4}$  ist, denn der Homöomorphismus  $\Phi_{3/4}$  bildet  $Z_{3/4}$  auf  $Z_0 = S^1 \times (0, 1)$  ab und bildet dabei  $A$  auf  $S^1 \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  ab, wie man an der ersten Zeile von

(4.16) sofort ablesen kann. Entsprechend ist  $Y_{1/4} \cap B = \emptyset$  und  $B$  ist ein Deformationsretrakt von  $Z_{1/4}$ .

Der Homöomorphismus  $\Phi_{3/4}$  bildet  $A \cap B = Y_0 \cup Y_{1/2}$  auf  $Y_{1/4} \cup Y_{3/4}$  ab, und bildet  $Z_{3/4} \cap Z_{1/4}$  auf  $Z_1 \cap Z_{1/2}$  ab.

Unter dem Homöomorphismus zwischen  $Z_1$  und  $S^1 \times (0, 1)$  geht  $Y_{1/4} \cup Y_{3/4}$  auf  $(S^1 \times \{\frac{1}{4}\}) \cup (S^1 \times \{\frac{3}{4}\})$  und  $Z_1 \cap Z_{1/2}$  auf  $(S^1 \times (0, \frac{1}{2})) \cup (S^1 \times (\frac{1}{2}, 1))$ , woran man sofort sieht, dass  $Y_{1/4} \cup Y_{3/4}$  ein Deformationsretrakt von  $Z_1 \cap Z_{1/2}$  ist und somit  $A \cap B$  ein Deformationsretrakt von  $Z_{3/4} \cap Z_{1/4}$  ist.

Die Mengen  $Z_{1/4}$  und  $Z_{3/4}$  sind beide offen und sie überdecken  $Y$ , so dass  $(Y; Z_{3/4}, Z_{1/4})$  eine Mayer-Vietoris Triade ist. Aus Lemma 3.60 b) folgt, dass auch  $(Y; A, B)$  eine Mayer-Vietoris Triade ist.

Die Unterräume  $A$  und  $B$  haben beide den Homotopietyp eines Kreises und somit auch die Homologie von  $S^1$ . Ihr Durchschnitt  $A \cap B = Y_0 \cup Y_{1/2}$  ist die disjunkte Vereinigung von zwei Kreisen und hat Homologie  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  in Dimensionen 0 und 1 und  $\{0\}$  in allen anderen Dimensionen.

Weil die Homologiegruppen von  $A$ ,  $B$  und  $A \cap B$  ab Dimension 2 alle verschwinden, sieht man aus der Mayer-Vietoris Folge von  $(Y; A, B)$ , dass  $H_n(Y) = \{0\}$  für alle  $n \geq 3$ . Weil  $Y$  offenbar wegweise zusammenhängend ist, ist  $H_0(Y) = \mathbf{Z}$ . Wir müssen nur noch  $H_1$  und  $H_2$  ausrechnen, und der dafür relevante Teil der Mayer-Vietoris Folge ist

$$\begin{aligned} \{0\} \longrightarrow H_2(Y) \longrightarrow H_1(A \cap B) \xrightarrow{(i'_*, i''_*)} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{j'_* - j''_*} H_1(Y) \\ \xrightarrow{\beta} H_0(A \cap B) \xrightarrow{(i'_*, i''_*)} H_0(A) \oplus H_0(B) \longrightarrow \end{aligned} \tag{4.18}$$

Zunächst betrachten wir den Pfeil

$$(i'_*, i''_*): H_0(A \cap B) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = H_0(A) \oplus H_0(B).$$

Da  $A$  und  $B$  beide wegweise zusammenhängend sind, bildet  $i'_*$  nach Korollar 4.3 jeden Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_0(A \cap B)$  identisch auf  $\mathbf{Z} = H_0(A)$ , und die entsprechende Aussage gilt auch für  $i''_*$ . In anderen Worten,

$$(i'_*, i''_*)(m, n) = (m + n, m + n)$$

und der Kern dieses Homomorphismus (und das Bild von  $\beta$ ) ist

$$\{(m, n) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \mid n = -m\} \cong \mathbf{Z}. \tag{4.19}$$

Wir können also die untere Zeile in (4.18) ersetzen durch

$$\xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}, \tag{4.20}$$

ohne die erste Zeile und ihre Exaktheit zu verändern.

Wir schauen uns kurz die Konsequenz dieser Vereinfachung an. Wir sehen, dass  $\beta$  surjektiv ist und  $\text{Bild } \beta = \mathbf{Z}$ . Sei  $c \in H_1(Y)$  ein Element mit  $\beta(c) = 1$ .

Sei  $\kappa$  die Abbildung  $j'_* - j''_*$  am Ende der oberen Zeile in (4.18). Dann ist  $\text{Ker } \beta = \text{Bild } \kappa$ . Wir definieren eine Abbildung  $\delta: H_1(Y) \rightarrow \text{Ker } \beta$  durch

$$\delta(x) = x - \beta(x)c$$

Dieser Wert gehört tatsächlich zu  $\text{Ker } \beta$ , weil

$$\beta(x - \beta(x)c) = \beta(x) - \beta(x)\beta(c) = \beta(x) - \beta(x) \cdot 1 = 0.$$

Auf  $\text{Ker } \beta$  ist  $\delta$  offensichtlich die Identität. Außerdem ist  $\delta(c) = c - 1 \cdot c = 0$ .

Man prüft leicht nach, dass  $(\beta, \delta)$  ein Isomorphismus

$$H_1(Y) \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta = \mathbf{Z} \oplus \text{Bild } \kappa$$

ist. Erstens ist die Abbildung injektiv, denn wenn  $\beta(x) = \delta(x) = 0$ , dann ist  $x \in \text{Ker } \beta$  und somit  $x = 0$ , weil für  $x \in \text{Ker } \beta$  gilt  $\delta(x) = x$ . Die Abbildung ist auch surjektiv, denn sie bildet  $\text{Ker } \beta$  auf  $\{0\} \oplus \text{Ker } \beta$  ab und bildet die von  $c$  erzeugte Untergruppe von  $H_1(Y)$  auf  $\mathbf{Z} \oplus \{0\}$  ab. Ihr Gesamtbild ist also ganz  $\mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta$ . Damit ist gezeigt, dass  $(\beta, \delta)$  ein Isomorphismus ist und  $H_1(Y) \cong \mathbf{Z} \oplus \text{Bild } \kappa$ .

Wir sind an dieser Stelle natürlich nicht fertig. Dazu müssen wir die Gestalt von  $\text{Bild } \kappa$  bestimmen, und diese wird von der Verklebungsabbildung  $\varphi$  abhängen; wie, erklären wir in den einzelnen Fällen, die wir behandeln werden.

Jetzt betrachten wir den Pfeil

$$(i'_*, i''_*): H_1(A \cap B) = H_1(Y_0) \oplus H_1(Y_{\frac{1}{2}}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = H_1(A) \oplus H_1(B)$$

in Dimension 1. Um ihn auszurechnen, müssen wir feste Isomorphismen der genannten Homologiegruppen zu  $\mathbf{Z}$  wählen, und das machen wir, indem wir einen festen Isomorphismus  $H^1(S^1) \cong \mathbf{Z}$  als vorgegeben annehmen und für die genannten Räume  $M = Y_0, Y_{1/2}, A$  oder  $B$  folgende feste Homotopieäquivalenzen  $S^1 \rightarrow M$  wählen, die einen Isomorphismus  $\mathbf{Z} = H_1(S^1) \rightarrow H_1(M)$  bestimmen.

Für jedes  $t \in I$  sei  $h_t: S^1 \rightarrow S^1 \times I$  die Abbildung  $x \mapsto (x, t)$ , und sei  $k_t := \pi \circ h_t: S^1 \rightarrow Y$ ; dies ist eine Einbettung, also ein Homöomorphismus auf sein Bild  $Y_t$ .

Man beachte, dass  $k_0 = k_1 \circ \varphi$  wegen der Verklebungsvorschrift bei der Konstruktion von  $Y$ .

Wir identifizieren  $H_1(Y_0)$  und  $H_1(Y_{1/2})$  mit  $\mathbf{Z}$  durch die Isomorphismen  $H_1(k_t): \mathbf{Z} = H_1(S^1) \longrightarrow H_1(Y_t)$  für  $t = 0$  und  $t = 1/2$ .

Der Kreis  $Y_{1/2}$  ist ein Deformationsretrakt von  $A$  und von  $B$  und wir identifizieren  $H_1(A)$  und  $H_1(B)$  mit  $H_1(Y_{1/2}) \cong \mathbf{Z}$  durch den von der Inklusion induzierten Homologieisomorphismus.

Das bedeutet, dass wir letztendlich  $H_1(A)$  durch  $i'_*(k_{1/2})_*$  mit  $\mathbf{Z}$  identifizieren, und wir identifizieren  $H_1(B)$  mit  $\mathbf{Z}$  durch  $i''_*(k_{1/2})_*$ .

$H_1(Y_{1/2})$  ist auch der rechte Summand  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , so dass auf diesem Summanden  $i'_*$  und  $i''_*$  einfach die Identität sind.

Auf dem linken Summanden  $H_1(Y_0)$ , identifiziert mit  $\mathbf{Z}$  durch  $(k_0)_*$ , betrachten wir zunächst den von der Inklusion nach  $A$  induzierten Homomorphismus  $i'_*$ . Da  $h_0 \simeq h_{1/2}$  als Abbildungen  $S^1 \longrightarrow S^1 \times [0, \frac{1}{2}]$ , ist  $k_0 \simeq k_{1/2}$  als Abbildungen nach  $A$ , oder anders gesagt, wir haben  $i'k_0 \simeq i'k_{1/2}$  und somit ist

$$i'_*(k_0)_* = i'_*(k_{1/2})_*: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(A).$$

Bezüglich der von uns fest gewählten Isomorphismen der Homologiegruppen zu  $\mathbf{Z}$  ist  $i'_*$  auf dem linken Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B)$  also die Identität.

Für die entsprechenden Abbildungen nach  $B$  gilt stattdessen  $h_{1/2} \simeq h_1$  als Abbildungen  $S^1 \longrightarrow S^1 \times [\frac{1}{2}, 1]$ , und deshalb ist  $k_{1/2} \simeq k_1$  als Abbildungen nach  $B$ , oder anders gesagt,  $i''k_{1/2} = i''k_1$ .

Aus diesem Grund ist

$$i''_*(k_0)_* = i''_*(k_1)_*\varphi_* = i''_*(k_{1/2})_*\varphi_*: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(B).$$

Bezüglich der von uns fest gewählten Isomorphismen der Homologiegruppen zu  $\mathbf{Z}$  ist  $i''_*$  auf dem linken Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B)$  also nicht unbedingt die Identität, sondern ist gleich  $\varphi_*: H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ .

Zu Teil a): Im Falle des Torus ist  $\varphi_*$  die Identität und deshalb ist auch  $i''_* = \text{id}_{\mathbf{Z}}$  auf dem linken Summanden von  $H_1(A \cap B)$ . In diesem Fall sieht der Ausschnitt (4.18) aus der Mayer-Vietoris Folge mit der Vereinfachung (4.20) so aus:

$$\{0\} \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\kappa} H_1(T^2) \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}$$

wobei  $\iota(m, n) = (m + n, m + n)$ .

$H_2(T^2) \cong \text{Ker } \iota \cong \mathbf{Z}$  (wie der Kern dieser Abbildung  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  aussieht, haben wir in (4.19) schon gesehen).

$\text{Ker } \kappa = \text{Bild } \iota = \{(m, m) \mid m \in \mathbf{Z}\}$ , woraus folgt, dass  $\kappa$  injektiv ist auf  $H_1(A) = \mathbf{Z} \oplus \{0\}$ . Außerdem gilt für jedes  $m \in \mathbf{Z}$ , dass  $\kappa(0, m) = \kappa(-m, 0)$ , weil die Differenz der beiden Zahlenpaare in  $\text{Ker } \kappa$  liegt. Daraus ist klar, dass  $\kappa(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}) = \kappa(\mathbf{Z} \oplus \{0\})$  und dass  $\kappa$  die Gruppe  $\mathbf{Z} \oplus \{0\}$  *isomorph* auf

Bild  $\kappa = \text{Ker } \beta$  abbildet; diese Untergruppe von  $H_1(T^2)$  ist also isomorph zu  $\mathbf{Z}$ .

Wie auf auf Seite 158 hergeleitet wissen wir damit, dass, wie behauptet,

$$H_1(T^2) \cong \mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

Zu Teil b): Im Falle der Kleinschen Flasche  $K$  ist  $\varphi$  die Spiegelung  $s_1$  und nach Lemma 4.8 ist  $i_*'' = \varphi_*$  die Multiplikation mit  $-1$  auf dem linken Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $H_1(A \cap B)$ .

Jetzt sieht der Ausschnitt (4.18) aus der Mayer-Vietoris Folge mit der Vereinfachung (4.20) so aus:

$$\{0\} \longrightarrow H_2(K) \longrightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\kappa} H_1(K) \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}$$

mit  $\lambda(m, n) = (m + n, n - m)$ .

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker } \lambda &= \{ (m, n) \in \mathbf{Z}^2 \mid m + n = 0 \text{ und } n = m \} \\ &= \{ (m, m) \in \mathbf{Z}^2 \mid 2m = 0 \} \cong \{0\}. \end{aligned}$$

Also ist  $H_2(K) \cong \text{Ker } \lambda = \{0\}$ , wie wir behauptet haben.

$\text{Ker } \kappa = \text{Bild } \lambda$  besteht aus allen  $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$  mit  $p \equiv q \pmod{2}$ , denn die Differenz der beiden Koordinaten in  $\lambda(m, n)$  ist  $2m$ , also gerade, und für jedes Paar  $(p, q)$  mit  $p - q$  gerade (sagen wir  $p - q = 2k$ ) erhalten wir  $(p, q)$  als  $\lambda(k, q + k)$ .

Die Abbildung  $\kappa$  induziert einen Isomorphismus

$$\frac{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}}{\text{Ker } \kappa} \longrightarrow \text{Bild } \kappa.$$

Die Abbildung  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ , die  $(p, q)$  auf  $p - q \pmod{2} = p - q + 2\mathbf{Z}$  abbildet, ist surjektiv und hat den gleichen Kern, wie  $\kappa$ , so dass

$$\text{Ker } \beta = \text{Bild } \kappa \cong \frac{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}}{\text{Ker } \kappa} \cong \mathbf{Z}_2.$$

Wie auf auf Seite 158 hergeleitet, wissen wir jetzt also, dass

$$H_1(K) \cong \mathbf{Z} \oplus \text{Ker } \beta \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2,$$

wie behauptet. ■

# Kapitel 5

## Zelluläre Homologie

Im letzten Kapitel haben wir mit den in Kapitel 3 entwickelten Mitteln einige Homologieberechnungen durchgeführt, zum Beispiel für die Sphären beliebiger Dimension und, unter Anwendung der Mayer-Vietoris Folge, für den Torus und die Kleinsche Flasche.

Obwohl die Idee bei den letzten beiden Beispielen recht einfach war — man kann beide Räume in zwei an den Enden miteinander verklebte Zylinder zerlegen und erhält so eine Mayer-Vietoris Triade — verlangte die Detailberechnung genaue Kenntnisse der durch die Verklebung induzierten Homologiehomomorphismen der Inklusionen der verklebten Randkreise in die Zylinder und verursachte doch einen erheblichen Aufwand.

Schon für Räume, die nur geringfügig komplizierter sind als diese, zum Beispiel für die projektiven Räume (die Quotienten der Sphären nach der Identifizierung von Antipoden miteinander), kann sich dieser Aufwand ins Unermessliche steigern, so dass eine praktikable Berechnung der Homologie alleine mit den Grundmitteln der Eilenberg-Steenrod Axiome zwar nicht unmöglich, aber sehr unangenehm ist.

Die hier genannten topologischen Räume sind aber keine exotischen oder ungewöhnlichen Beispiele. Im Gegenteil, sie sind besonders schön und gehören zu einer großen Klasse von sich wohl verhaltenden Räumen, die auf eine für Homologieberechnungen sehr günstige Weise aufgebaut sind. Dieser Aufbau erlaubt eine vereinfachte Berechnung der Homologie, in der die Kettengruppen, wenn die Räume kompakt sind, sogar endlichen Rang haben und somit sehr viel kleiner sind, als die singulären Kettengruppen.

Die genannten Räume haben auch schöne homotopietheoretische Eigenschaften und bilden die Grundlage und den „Normalfall“ für viele Kernkonstruktionen der modernen algebraischen Topologie, in denen Homotopie und Homologie in enger Verbindung stehen. Auch deshalb lohnt es sich sehr, diese Räume kennen zu lernen.

Die Räume der genannten Klasse werden auf eine geregelte Weise aus Scheiben  $D^n$  verschiedener Dimensionen zusammengebaut, die man die **Zellen** dieser Konstruktion nennt. Aus diesem Grund heißen diese Räume unter anderem auch **Zellenkomplexe**. Ihre Homologie lässt sich mit Hilfe von Kettenkomplexen berechnen, die von den Zellen anstelle der singulären Simplizes frei erzeugt werden, weshalb diese Homologietheorie die **zelluläre Homologie** genannt wird.

Wir werden in diesem Kapitel die zelluläre Homologie entwickeln und zeigen, dass sie für Zellenkomplexe (genauer gesagt, für sich genügend wohl verhaltende Zellenkomplexe) isomorph ist zur singulären Homologie. Im Anschluss wenden wir die zelluläre Homologie in Beispielen an zur Berechnung der Homologiegruppen einiger wichtiger topologischer Räume. Leider erlaubt uns die Zeit und der Umfang des Themas nicht, die *homotopietheoretischen* Eigenschaften der Zellenkomplexe in Detail zu entwickeln.

**Notation 5.1** In diesem Abschnitt werden wir viel mit Scheiben  $D^n$  hantieren, und dabei insbesondere auch mit den offenen Scheiben gegeben durch das Innere der  $D^n$ . Um das deutlich zu kennzeichnen und dabei das Schriftbild möglichst einfach zu halten, führen wir die Notation  $E^n$  ein für die offene  $n$ -Scheibe

$$E^n := \overset{\circ}{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}.$$

**Definition 5.2** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $n \in \mathbf{N}$ . Eine  $n$ -**Zelle** in  $X$  ist ein Unterraum  $e$  von  $X$ , der homöomorph ist zu  $E^n$ .

Die Zahl  $n$  heißt die **Dimension** der Zelle  $e$  und sie ist eindeutig bestimmt, denn  $E^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ , und weil Sphären verschiedener Dimensionen verschiedene Homologiegruppen haben (nach Satz 4.5) können offene Scheiben verschiedener Dimensionen nicht zu ein und derselben Zelle homöomorph sein.

Um die Dimension einer Zelle kenntlich zu machen, hängt man sie manchmal als „Exponent“ an den Namen der Zelle an, d. h., man notiert die Zelle mit  $e^n$  statt mit  $e$  (und entsprechend für andere Zellennamen).

Eine **abgeschlossene  $n$ -Zelle** in  $X$  ist die abgeschlossene Hülle  $\bar{e}$  einer  $n$ -Zelle  $e$ .

Der **Rand**  $\partial e$  (oft auch  $\dot{e}$ ) einer  $n$ -Zelle  $e \subseteq X$  ist definiert als

$$\dot{e} := \partial e := \bar{e} \setminus e.$$

Man beachte, dass das *nicht* das Gleiche ist, wie der Rand im Sinne der mengentheoretischen Topologie von  $e$  als Teilmenge von  $X$ , weil die „offene“ Zelle  $e$  nicht wirklich offen sein muss im Raum  $X$ .

**Beispiel 5.3** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **0-Zelle** in  $X$  ist einfach ein Punkt  $x \in X$ , denn

$$\overset{\circ}{D}^0 = D^0 = \mathbf{R}^0 = \{0\}$$

ist einpunktig.

Wenn  $X$  Hausdorffsch ist, dann ist jede 0-Zelle gleichzeitig eine abgeschlossene 0-Zelle, und der Rand einer 0-Zelle ist leer.

**Definition 5.4** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **Zellenzerlegung** von  $X$  ist eine Familie  $\mathcal{Z}$  von Zellen in  $X$  von beliebiger Dimension, die disjunkt sind und die  $X$  überdecken.

Ein **Zellenkomplex** ist ein Paar  $(X, \mathcal{Z})$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $\mathcal{Z}$  eine Zellenzerlegung von  $X$  ist. Wenn eine feste Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$  gegeben ist, nennen wir aus Bequemlichkeit oft auch den topologischen Raum  $X$  selber einen **Zellenkomplex**.

Ein Zellenkomplex  $(X, \mathcal{Z})$  (oder die zugehörige Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$ ) heißt **endlich**, wenn  $\mathcal{Z}$  nur aus endlich vielen Zellen besteht.

Ein **Unterezellenkomplex** eines Zellenkomplexes  $(X, \mathcal{Z})$  ist ein Unterraum  $A$  von  $X$ , der eine Vereinigung von Zellen von  $\mathcal{Z}$  ist. In diesem Fall ist

$$\mathcal{Z}_A := \mathcal{Z}|_A := \{e \in \mathcal{Z} \mid e \subseteq A\}$$

eine Zellenzerlegung von  $A$  und  $(A, \mathcal{Z}_A)$  ist selber ein Zellenkomplex.

Die **Dimension** einer Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $X$  oder eines Zellenkomplexes  $(X, \mathcal{Z})$  ist definiert als das Supremum der Dimensionen der Zellen in  $\mathcal{Z}$ . Sie kann  $\infty$  sein.

Für  $n \in \mathbf{Z}$  definieren wir das  **$n$ -Skelett**  $X^n$  einer Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $X$  oder eines Zellenkomplexes  $(X, \mathcal{Z})$  als die Vereinigung

$$X^n := \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ \dim e \leq n}} e$$

der Zellen von Dimension höchstens  $n$  in der Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$ .

Offensichtlich ist  $X^n$  ein Unterezellenkomplex von  $X$  von Dimension höchstens  $n$ ; seine Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}|_{X^n}$  bezeichnen wir als Abkürzung mit  $\mathcal{Z}_n$ .

Wenn  $(X, \mathcal{Z})$  und  $(Y, \mathcal{Z}')$  zwei Zellenkomplexe sind, so nennen wir eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  **zellulär**, wenn für jedes  $n \in \mathbf{N}$  gilt

$$f(X^n) \subseteq Y^n.$$

Es wird *nicht* verlangt, dass  $f$  Zellen in Zellen abbildet!

**Beispiel 5.5** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein Zellenkomplex und  $A \subseteq X$  ein Unterezellenkomplex. Dann ist die Inklusion  $A \hookrightarrow X$  immer zellulär.

**Bemerkung 5.6** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein Zellenkomplex. Dann gilt für die Skelette  $X^n$  von  $X$ :

- a)  $X^n = \emptyset$  wenn  $n < 0$ .
- b)  $X^m \subseteq X^n$  wenn  $m \leq n$ .
- c)  $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X^n$ .
- d)  $X^n = X$  wenn  $n \geq \dim \mathcal{Z}$ .

Jeder topologische Raum  $X$  besitzt eine „triviale“ und sicher nicht besonders nützliche Zellenzerlegung als die Vereinigung der Einpunktmengen seiner Punkte; diese Zellenzerlegung verrät natürlich nichts über die Geometrie von  $X$  (sondern verschleiert sie).

Um etwas Sinnvolles mit Zellenzerlegungen anfangen zu können, müssen wir solche frivole Beispiele ausschließen. Wir brauchen eine Kontrolle über die Weise, wie verschiedene Zellen der Zellenzerlegung sich angrenzen und wie sie zueinander liegen. Diese Kontrolle gewinnen wir durch eine zusätzliche Struktur, die die Zellen an ihre Umgebung bindet.

**Definition 5.7** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $e \subseteq X$  eine  $n$ -Zelle in  $X$ . Eine *charakteristische Abbildung* für  $e$  ist eine stetige Abbildung

$$\Phi_e: D^n \longrightarrow X,$$

so dass  $\Phi_e|_{E^n}$  ein Homöomorphismus  $E^n \longrightarrow e$  ist.

Wenn  $\Phi_e$  eine charakteristische Abbildung für die Zelle  $e$  ist, so nennen wir die Abbildung

$$\varphi_e = \Phi_e|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \longrightarrow X$$

die zu  $\Phi_e$  gehörende *Anheftungsabbildung* der Zelle  $e$ .

**Bemerkung 5.8** Sei  $X$  ein Hausdorffscher topologischer Raum und sei  $e$  eine  $n$ -Zelle in  $X$ . Die Zelle  $e$  muss nicht unbedingt eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$  haben, aber wenn sie eine besitzt, so gilt folgendes:

- a)  $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$ .
- b)  $\Phi_e(D^n) = \bar{e}$ .

- c)  $\Phi_e: D^n \longrightarrow \bar{e}$  ist identifizierend.  
 d)  $\Phi_e$  und somit auch  $\varphi_e$  sind durch  $\Phi_e|_{E^n}$  eindeutig bestimmt.  
 e)  $\partial e = \Phi_e(S^{n-1})$  und ist abgeschlossen in  $X$ .  
 f)  $e$  ist offen in  $\bar{e}$ .

*Beweis.* a): Wenn die Behauptung nicht stimmt, so gibt es einen Punkt  $z$  in  $S^{n-1}$  mit  $\Phi_e(z) \in e$ , und da  $\Phi_e$  ein Homöomorphismus von  $E^n$  auf  $e$  ist, gibt es einen Punkt  $x \in E^n$  mit  $\Phi_e(x) = \Phi_e(z)$ .

Sei  $r \in (0, 1)$  eine Zahl, so dass  $r > |x|$  (hier ist die euklidische Norm gemeint). Sei  $U \subseteq E^n$  die offene Scheibe von Radius  $r$  um  $0 \in \mathbf{R}^n$  und sei  $V := E^n \setminus D_r^n$  das Komplement der abgeschlossenen Scheibe von Radius  $r$  um  $0$ . Offensichtlich ist  $S^{n-1} \subseteq \bar{V}$  in  $D^n$ .

Wir haben  $\Phi_e(z) = \Phi_e(x) \in \Phi_e(U)$  und  $\Phi_e(U)$  ist eine offene Umgebung von  $\Phi_e(z)$  in  $e$ . Es gibt eine in  $\bar{e}$  offene Menge  $U'$  mit  $\Phi_e(U) = U' \cap e$ . Weil  $\Phi_e$  auf ganz  $D^n$  stetig ist, ist  $W := \Phi_e^{-1}(U')$  offen in  $D^n$  und  $z \in W$  weil  $\Phi_e(z) \in \Phi_e(U) \subseteq U'$ . Ferner  $\Phi_e(W) \cap e \subseteq U' \cap e = \Phi_e(U)$ .

Weil  $z \in S^{n-1}$  ein Häufungspunkt von  $V$  ist, ist  $V \cap W \neq \emptyset$ . Das ist aber ein Widerspruch, denn weil  $\Phi_e$  auf  $E^n$  injektiv ist, ist  $\Phi_e(V) \cap \Phi_e(U) = \emptyset$ , aber im Gegensatz ist

$$\emptyset \neq \Phi_e(V \cap W) \subseteq e \cap \Phi_e(W) \subseteq \Phi_e(U).$$

Folglich kann es keinen solchen Punkt  $z \in S^{n-1}$  geben und  $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$ .

b): Weil  $D^n = \overline{E^n}$  und  $\Phi_e(E^n) = e$ , ist  $\Phi_e(D^n) \subseteq \bar{e}$ .

Weil  $D^n$  kompakt ist, ist  $\Phi_e(D^n)$  kompakt und da  $X$  Hausdorffsch ist, auch abgeschlossen in  $X$ . Daraus folgt  $\bar{e} \subseteq \Phi_e(D^n)$ .

c):  $\Phi_e$  ist surjektiv auf  $\bar{e}$  nach Teil b), und ist stetig nach Voraussetzung. Es muss nur noch gezeigt werden, dass eine Teilmenge  $A$  von  $\bar{e}$ , deren Urbild unter  $\Phi_e$  abgeschlossen ist, in  $\bar{e}$  abgeschlossen ist.

Aber wenn  $\Phi_e^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $D^n$  ist, ist es auch kompakt. Folglich ist  $\Phi_e(\Phi_e^{-1}(A))$  kompakt, weil  $\Phi_e$  stetig ist, und ist gleich  $A$ , weil  $\Phi_e$  surjektiv ist.

Also ist  $A$  kompakt und somit abgeschlossen im Hausdorffschen Raum  $X$ , deshalb auch in  $\bar{e}$ .

d) folgt sofort aus der Stetigkeit von  $\Phi_e$  und der Tatsache, dass  $D^n = \overline{E^n}$ .

e): Aus Teilen b) und a) folgt sofort, dass  $\partial e = \bar{e} \setminus e = \Phi_e(S^{n-1})$ , und dies ist eine kompakte und somit abgeschlossene Teilmenge des Hausdorffschen Raumes  $X$ .

f):  $e = \bar{e} \setminus \partial e$  ist offen in  $\bar{e}$ , weil  $\partial e$  abgeschlossen ist nach Teil e). ■

Charakteristische Abbildungen, wenn sie existieren, „halten einen Zellenkomplex zusammen“. Ein paar zusätzliche Eigenschaften, die verhindern, dass die Zusammenklebung zu wild wird, reichen aus für viele wichtige Konstruktionen in der algebraischen Topologie, die meisten in der Homotopietheorie, aber auch für die von uns angepeilte vereinfachte Berechnung der Homologie.

**Definition 5.9** Sei  $X$  ein Hausdorffscher topologischer Raum. Eine **CW-Zerlegung** von  $X$  ist eine Zellenzerlegung  $\mathcal{Z}$ , so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- a) Jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  besitzt eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$ .
- b) Für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  gilt  $\partial e \subseteq X^{\dim e - 1}$ .
- c) (Bedingung „C“=**closure-finite**) Für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  ist  $\partial e$  enthalten in einer endlichen Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$ , in anderen Worten,  $\partial e$  trifft nur endlich viele Zellen aus  $\mathcal{Z}$ .
- d) (Bedingung „W“=**weak topology**) Die Topologie von  $X$  ist die **schwache Topologie** erzeugt von den Unterräumen  $\bar{e}$  für  $e \in \mathcal{Z}$ ; sie ist definiert als die Finaltopologie der Familie der Inklusionen der abgeschlossenen Zellen  $\bar{e}$  in  $X$ .

Das bedeutet im Detail, dass eine Teilmenge  $A \subseteq X$  genau dann abgeschlossen ist in  $X$ , wenn  $A \cap \bar{e}$  abgeschlossen ist in  $\bar{e}$  für jede Zelle  $e$  von  $X$ .

Ein **CW-Komplex** ist ein Paar  $(X, \mathcal{Z})$ , wo  $X$  ein Hausdorffscher topologischer Raum ist und  $\mathcal{Z}$  eine CW-Zellenzerlegung von  $X$  ist.

Einen Hausdorffschen topologischen Raum  $X$ , der eine CW-Zerlegung besitzt, nennen wir einen **CW-Raum**.

Wie in der Liste der Eigenschaften schon angedeutet, ist „CW“ eine Abkürzung für „closure-finite in the weak topology“.

**Bemerkung 5.10** Da die charakteristischen Abbildungen der Zellen identifizierend sind, erlaubt Bedingung „W“ in Definition 5.9 folgende äquivalente Formulierung:

Eine Teilmenge  $A$  von  $X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $\Phi_e^{-1}(A)$  abgeschlossen ist in  $D^n$  für jede Zelle  $e$  (wo  $n$  die Dimension von  $e$  ist).

**Bemerkung 5.11** Eine endliche Zellenzerlegung eines topologischen Raumes  $X$  erfüllt automatisch die Bedingungen „C“ und „W“ (letztere weil  $X$  die Vereinigung der *endlich vielen* abgeschlossenen Teilmengen  $\bar{e}$  für  $e \in \mathcal{Z}$  ist).

Also ist ein endlicher CW-Komplex einfach ein Hausdorffscher Zellenkomplex, in dem jede Zelle  $e$ , von Dimension  $n$ , eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$  hat, so dass  $\Phi_e(S^{n-1})$  nur Zellen von Dimension  $< n$  trifft.

Wir wollen gleich einige Beispiele von CW-Komplexen geben, darunter auch CW-Zerlegungen von Quotientenräumen. Für Quotientenräume im Allgemeinen kann der Nachweis, dass sie *Hausdorffsch* sind, manchmal sehr schwierig sein, auch wenn sie tatsächlich diese Eigenschaft haben. Im Falle der beabsichtigten Beispiele können wir diese notwendige Voraussetzung, die jeder CW-Raum erfüllen muss, mit einem einfachen Hilfslemma nachprüfen, das wir deshalb vorweg behandeln.

**Lemma 5.12** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Angenommen, wir können für je zwei Punkte  $x \neq y \in X$  einen Hausdorffraum  $K$  und eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow K$  finden, so dass  $f(x) \neq f(y)$ .*

*Dann ist  $X$  Hausdorffsch.*

*Beweis.* Seien  $x \neq y \in X$ , und sei  $K$  ein Hausdorffraum und  $f: X \rightarrow K$  eine stetige Abbildung mit  $f(x) \neq f(y)$ . Dann gibt es disjunkte offene Mengen  $U$  und  $V$  in  $K$  mit  $f(x) \in U$  und  $f(y) \in V$ .

$U' := f^{-1}(U)$  und  $V' := f^{-1}(V)$  sind dann disjunkte offene Teilmengen von  $X$  mit  $x \in U'$  und  $y \in V'$ .

Also ist  $X$  Hausdorffsch. ■

**Beispiele 5.13** a) Die leere Menge  $\emptyset$  ist ein CW-Raum ohne Zellen (und aus diesem Grund von Dimension  $-\infty!$ ). Alle Skelette sind natürlich auch leer.

Man beachte, dass wegen Bedingung 5.9 b) jeder nichtleere CW-Raum auf jeden Fall 0-Zellen haben muss (da Zellen höherer Dimension nichtleere Ränder haben, von kleinerer Dimension als ihre eigene). Also ist  $\emptyset$  der einzige CW-Raum, der ein leeres Skelett nichtnegativer Dimension besitzt.

b) Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann ein nulldimensionaler CW-Raum, wenn  $X$  die diskrete Topologie trägt. Denn 0-Zellen sind Punkte und deshalb ist die einzige 0-dimensionale Zellenzerlegung, die ein Raum haben kann, die Zerlegung in seine einzelnen Punkte. Eine 0-Zelle  $\{x\}$  (für  $x \in X$ ) hat automatisch eine eindeutige charakteristische Abbildung, nämlich die eindeutige Abbildung von  $D^0 = \{0\} \rightarrow \{x\}$ .

Da 0-Zellen leere Ränder haben, sind Bedingungen 5.9 b) und c) auch erfüllt.

Eine nulldimensionale Zellenzerlegung kann also nur dann *keine* CW-Zerlegung sein, wenn der Raum nicht Hausdorffsch ist oder wenn Bedingung W verletzt ist.

Bedingung W ist genau dann erfüllt, wenn eine Menge  $A \subseteq X$  genau dann abgeschlossen ist in  $X$ , wenn  $A \cap \{x\}$  abgeschlossen ist in  $\{x\}$  für jedes  $x \in X$ . Da aber *jede* Teilmenge von  $X$  diese Eigenschaft hat, erfüllt die Zellenzerlegung genau dann Bedingung W, wenn jede Teilmenge von  $X$  abgeschlossen ist oder gleichbedeutend, wenn  $X$  die diskrete Topologie trägt.

In diesem Fall ist  $X$  auch Hausdorffsch und somit ein CW-Raum.

Wenn  $X$  nicht die diskrete Topologie trägt, gilt schon Bedingung W nicht und  $X$  ist also nicht CW.

- c) Jede Sphäre  $S^n$  hat eine CW-Zellenzerlegung mit zwei  $k$ -Zellen in jeder Dimension  $k$  im Bereich  $0 \leq k \leq n$ .

Das sieht man am einfachsten durch Induktion über  $n$ . Es gilt offensichtlich für  $n = 0$ , da  $S^0$  aus zwei Punkten, also aus zwei 0-Zellen besteht, mit der diskreten Topologie.

Ist  $n > 0$ , so hat der Äquator  $S^{n-1}$  von  $S^n$  nach der Induktionsannahme eine CW-Zerlegung mit zwei Zellen in jeder Dimension  $\leq n - 1$ . Die Sphäre  $S^n$  ist die Vereinigung von  $S^{n-1}$  mit den beiden  $n$ -Zellen  $E_+^n$  und  $E_-^n$  (siehe Beispiel 3.61), und die Homöomorphismen von  $D^n$  zu den abgeschlossenen oberen und unteren Halbsphären  $D_+^n$  und  $D_-^n$  liefern charakteristische Abbildungen für diese Zellen, die  $S^{n-1}$  auf den Äquator, also in das  $(n-1)$ -Skelett abbilden. Die ganze Zellenzerlegung ist endlich und erfüllt somit automatisch Bedingungen C und W.

- d) Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  ist  $D^n$  ein CW-Raum mit einer  $n$ -Zelle und mit zwei Zellen in jeder nichtnegativen Dimension  $< n$ . Denn  $S^{n-1}$  ist nach Teil c) ein CW-Komplex von Dimension  $n - 1$  mit zwei Zellen in jeder Dimension  $\leq n - 1$ , und  $D^n \setminus S^{n-1} = E^n$  ist eine  $n$ -Zelle mit  $\text{id}_{D^n}$  als charakteristische Abbildung. Der Rand  $\partial E^n = S^{n-1}$  dieser Zelle ist gleich dem  $n - 1$ -Skelett der Zellenzerlegung, so dass alle erforderlichen Eigenschaften erfüllt sind.
- e) Neben der CW-Zerlegung aus Teil c) hat jede Sphäre  $S^n$  auch eine einfachere CW-Zerlegung mit nur zwei Zellen, einer 0-Zelle gegeben durch den Südpol  $p_-$ , und der  $n$ -Zelle  $S_+^n$ , das Komplement des Südpols, das zu  $\mathbf{R}^n$  homöomorph ist vermöge der stereographischen Projektion und somit auch zu  $E^n \cong R^n$  homöomorph ist.

Der Homöomorphismus  $E^n \longrightarrow S_+^n$  erweitert sich zu einer charakteristischen Abbildung  $\Phi_{S_+^n}$ , die den ganzen Rand  $S^{n-1}$  von  $D^n$  auf den Südpol  $p_-$  von  $S^n$  abbildet, und somit sogar ins 0-Skelett. Diese Zellenzerlegung ist automatisch C und W.

- f) Entsprechend erhalten wir für jedes  $n > 0 \in \mathbf{N}$  eine CW-Zerlegung von  $D^n$  mit genau drei Zellen, einer  $n$ -Zelle  $E^n$ , einer  $n-1$ -Zelle  $S_+^{n-1}$  und einer 0-Zelle bestehend aus dem Südpol von  $S^{n-1}$ .

Die charakteristische Abbildung für die Zelle  $E^n$  ist die gleiche wie in Teil d); nur die Zellenzerlegung des  $n-1$ -Skeletts  $S^{n-1} \subseteq D^n$  hat sich geändert.

- g) Sei  $K = \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{C}$  und sei

$$G := \{ z \in K \mid |z| = 1 \}$$

die Gruppe der Elemente von Betrag 1 im normierten Körper  $K$ . Wenn  $K = \mathbf{R}$ , so ist  $G = \{ \pm 1 \} \cong \mathbf{Z}_2$ , und wenn  $K = \mathbf{C}$ , so ist  $G = S^1$ .

Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Auf

$$S := \{ w = (w_0, \dots, w_n) \in K^{n+1} \mid |w| = 1 \}$$

(diese Menge ist  $S^n$ , wenn  $K = \mathbf{R}$ , und  $S^{2n+1}$ , wenn  $K = \mathbf{C}$ ) definieren wir eine Äquivalenzrelation  $\sim$  durch die Bestimmung:  $w \sim v$  genau dann, wenn es ein  $z \in G$  gibt mit  $v = zw$ .

Der Quotientenraum  $S/\sim$ , der Orbitraum der  $G$ -Operation auf  $S$ , heißt der  *$n$ -dimensionale projektive Raum  $KP^n$*  über den Körper  $K$ . Wir bezeichnen mit  $\pi: S \longrightarrow KP^n$  die kanonische Projektion auf den Quotienten.

$KP^n$  ist auf jeden Fall ein Hausdorffscher Raum. Nämlich, seien  $x := \pi(x_0, \dots, x_n)$  und  $y := \pi(y_0, \dots, y_n)$  zwei verschiedene Punkte von  $KP^n$ .

Für jedes  $i$  mit  $0 \leq i \leq n$  ist die Abbildung  $\beta_i: S \longrightarrow \mathbf{R}$  mit

$$\beta_i(w_0, \dots, w_n) := |w_i|$$

eine stetige Abbildung, die auf jeder  $\sim$ -Äquivalenzklasse konstant ist und somit eine Abbildung  $\tilde{\beta}_i: KP^n \longrightarrow \mathbf{R}$  induziert mit  $\tilde{\beta}_i \circ \pi = \beta_i$ . Weil  $\pi$  identifizierend ist, ist  $\tilde{\beta}_i$  auch stetig.

Wenn es ein  $i$  gibt mit  $\tilde{\beta}_i(x) \neq \tilde{\beta}_i(y)$ , können wir sofort Lemma 5.12 anwenden, um disjunkte offene Mengen um  $x$  und  $y$  zu finden.

Wenn es kein solches  $i$  gibt, dann gibt es ein  $j$  mit

$$c := \tilde{\beta}_j(x) = \tilde{\beta}_j(y) \neq 0.$$

Die Abbildung  $\gamma: S \rightarrow \mathbf{C}^{n+1}$  mit

$$\gamma(w_0, \dots, w_n) := \left( \frac{w_0 \bar{w}_j}{c}, \dots, \frac{w_n \bar{w}_j}{c} \right)$$

ist eine stetige Abbildung, die auf jeder  $\sim$ -Äquivalenzklasse konstant ist und somit eine Abbildung  $\tilde{\gamma}: KP^n \rightarrow \mathbf{C}^{n+1}$  induziert mit  $\tilde{\gamma} \circ \pi = \gamma$ . Auch  $\tilde{\gamma}$  ist stetig, weil  $\pi$  identifizierend ist.

Ferner, für die Punkte  $(x_0, \dots, x_n)$  und  $(y_0, \dots, y_n) \in S$  und für  $j$  wie oben sind  $\bar{x}_j/c$  und  $\bar{y}_j/c \in G$ , so dass  $(x_0, \dots, x_n) \sim \gamma(x_0, \dots, x_n) \in S$  und  $(y_0, \dots, y_n) \sim \gamma(y_0, \dots, y_n) \in S$ .

Da  $(x_0, \dots, x_n) \not\sim (y_0, \dots, y_n)$ , muss also

$$\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x_0, \dots, x_n) \neq \tilde{\gamma}(y) = \gamma(y_0, \dots, y_n)$$

sein, und wir haben eine stetige Abbildung, die  $x$  und  $y$  trennt. Nach Lemma 5.12 ist  $KP^n$  Hausdorffsch.

Sei  $d$  die Dimension von  $K$  als Vektorraum über  $\mathbf{R}$ , also  $d = 1$  wenn  $K = \mathbf{R}$  und  $d = 2$  wenn  $K = \mathbf{C}$ . Dann ist  $KP^n$  ein  $dn$ -dimensionaler CW-Komplex mit insgesamt  $n + 1$  Zellen, bestehend aus genau einer Zelle  $e_k$  von Dimension  $dk$  für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$ . Diese Zellen und ihre charakteristischen Abbildungen sehen wie folgt aus.

Für jedes  $k$  sei

$$S_k := \{ (w_0, \dots, w_n) \in S \mid w_k \neq 0 \text{ aber } w_l = 0 \text{ für alle } l > k \}$$

und sei  $e_k := \pi(S_k)$ .

Wir zeigen, dass  $e_k$  eine  $dk$ -Zelle ist mit einer charakteristischen Abbildung  $\Phi_k: D^{dk} \rightarrow KP^n$  gegeben wie folgt. Wir fassen  $D^{dk}$  auf als eine Teilmenge von  $K^k$  und schreiben seine Elemente also nicht als  $dk$ -tupel von reellen Zahlen, sondern als  $k$ -tupel  $x = (x_0, \dots, x_{k-1})$  von Zahlen  $x_i$  im Körper  $K$ , mit  $|x| \leq 1$ . Dann setzen wir

$$\Phi_k(x_0, \dots, x_{k-1}) := \pi \left( x_0, \dots, x_{k-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, 0, \dots, 0 \right) \in \bigcup_{l \leq k} e_l.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich stetig und bildet  $S^{dk-1}$  ab in die Vereinigung der  $e_l$  für  $l < k$  und  $E^{dk}$  nach  $e_k$  (Letzteres weil in  $E^{dk}$  gilt

$|x| < 1$ , so dass die  $k$ -te Koordinate  $\sqrt{1 - |x|^2}$  des Tupels in  $S$ , dass  $\Phi_k(x_0, \dots, x_{k-1})$  repräsentiert, nicht verschwindet).

Wir müssen nur noch zeigen, dass  $\Phi_k|_{E^{dk}}$  ein Homöomorphismus auf  $e_k$  ist. Natürlich ist auch diese Einschränkung stetig, also müssen wir nur eine stetige Umkehrabbildung  $e_k \rightarrow E^{dk}$  finden.

Für jedes  $w \in S_k$  gibt es genau ein Element  $v = (v_0, \dots, v_n) \sim w$  in  $S$  mit  $v_k > 0$  (also  $v_k$  reell und positiv). Nämlich,  $v = w/r$  wo  $r := w_k/|w_k| \in G$ ; daraus folgt  $v_k = |w_k|$ .

Das Element  $v$  hängt stetig von  $w$  ab, und deshalb ist auch die Abbildung  $\Psi: S_k \rightarrow K^k$  mit  $\Psi(w) := (v_0, \dots, v_{k-1})$  eine stetige Abbildung, mit Werten in  $E^{dk}$  weil  $v_k > 0$ . Weil  $\Psi$  konstant auf den Äquivalenzklassen von  $\sim$  ist, gibt es eine stetige Abbildung  $\psi: e_k \rightarrow E^{dk}$  mit  $\psi \circ \pi = \Psi$ , und man prüft sofort nach, dass  $\psi$  und  $\Phi_k|_{E^{dk}}$  Umkehrabbildungen zueinander sind.

Damit ist klar, dass die  $e_k$  Zellen von Dimension  $dk$  sind, mit  $\Phi_k$  als charakteristische Abbildung. Da  $S$  offensichtlich die disjunkte Vereinigung der  $S_k$  ist, und die  $S_k$  invariant unter der  $G$ -Operation und somit eine Vereinigung von  $\sim$ -Äquivalenzklassen sind, ist  $KP^n$  die disjunkte Vereinigung der  $e_k$  und sie bilden eine Zellenzerlegung. Aus der Definition von  $\Phi_k$  ist klar, dass  $\partial e_k = \Phi_k(S^{dk-1})$  im  $(dk - 1)$ -Skelett der Zellenzerlegung enthalten ist. Die Eigenschaften C und W müssen nicht nachgeprüft werden, weil die Zellenzerlegung endlich ist.

Die Zellen  $e_k$  bilden also, wie behauptet, eine CW-Zerlegung von  $KP^n$ .

- h) Die offene Scheibe  $E^n$  von Dimension  $n$  hat natürlich eine Zellenzerlegung mit nur einer Zelle, aber dies ist keine CW-Zerlegung, da die einzige Zelle keine charakteristische Abbildung hat.

Es gibt allerdings CW-Zerlegungen von  $E^n \cong \mathbf{R}^n$ , aber sie haben notgedrungen *unendlich viele* Zellen, wie wir gleich sehen werden.

- i)  $D^n$  hat eine Zellenzerlegung bestehend aus einer  $n$ -Zelle, nämlich  $E^n$ , und den einzelnen Punkten von  $S^{n-1}$  als 0-Zellen. Jede Zelle hat offenbar eine charakteristische Abbildung (für  $E^n$  ist sie  $\text{id}_{D^n}$ ). Die Ränder aller Zellen sind im 0-Skelett enthalten, und die Zellenzerlegung erfüllt Bedingung W, weil der ganze Raum  $D^n = \overline{E^n}$  selber eine abgeschlossene Zelle ist. Aber diese Zerlegung ist nicht CW, weil die  $n$ -Zelle  $E^n$  Bedingung C verletzt.

j) Die Teilmenge

$$X := \left\{ t \in \mathbf{R} \mid t = 0 \text{ oder } \frac{1}{t} \in \mathbf{N} \right\}$$

mit der Unterraumtopologie von  $\mathbf{R}$  hat offensichtlich eine Zellenzerlegung durch 0-Zellen (und nur eine solche), aber diese Zerlegung ist keine CW-Zerlegung weil Bedingung W nicht gilt. Würde sie gelten, so wäre  $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$  abgeschlossen in  $X$ , was in der üblichen Topologie nicht der Fall ist.

Da neben der absoluten Homologie von Räumen auch die relative Homologie von Raumpaaren für uns wichtig ist, wollen wir auch den Begriff eines **CW-Paares** einführen, und dazu brauchen wir den Begriff eines **CW-Unterkomplexes**. Bevor wir die Definition (oder eher, einige äquivalente Definitionen) davon angeben, ist es nützlich, einen kleinen Hilfssatz zu beweisen:

**Lemma 5.14** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  ein Unterraum von  $X$ , der eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$  ist.

Sei  $C \subseteq A$  und für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \subseteq A$  sei  $C \cap \bar{e}$  abgeschlossen in  $\bar{e}$  (oder gleichbedeutend, in  $X$ , denn  $\bar{e}$  ist ja abgeschlossen in  $X$ ).

Dann ist  $C$  abgeschlossen in  $X$  (und somit auch in  $A$ ).

*Beweis.* Sei  $e$  eine beliebige Zelle aus  $\mathcal{Z}$ . Nach Bedingung „C“ trifft  $\bar{e}$  nur endlich viele Zellen aus  $\mathcal{Z}$ , und weil  $C \subseteq A$  und  $A$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$  ist, ist  $C \cap \bar{e}$  enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen Zellen  $e_1, \dots, e_k$  mit  $e_i \subseteq A$ . Wir haben also

$$C \cap \bar{e} \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_k \subseteq \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k.$$

Es folgt, dass

$$C \cap \bar{e} = (C \cap \bar{e}_1 \cap \bar{e}) \cup \dots \cup (C \cap \bar{e}_k \cap \bar{e}),$$

und weil nach Voraussetzung die  $C \cap \bar{e}_i$  abgeschlossen sind, ist dies eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  und somit abgeschlossen.

Das heißt,  $C \cap \bar{e}$  ist abgeschlossen für jede Zelle  $e$  in  $\mathcal{Z}$  (und nicht nur für die in  $A$  enthaltenen Zellen). Nach Bedingung „W“ ist  $C$  abgeschlossen in  $X$ .

■

**Lemma und Definition 5.15** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$ . Sei  $\mathcal{Z}_A := \{e \in \mathcal{Z} \mid e \subseteq A\}$ . Folgende Bedingungen für  $A$  sind äquivalent:

- a)  $A$  ist abgeschlossen in  $X$ ;
- b) Für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}_A$  ist  $\bar{e} \subseteq A$ ;
- c)  $\mathcal{Z}_A$  ist eine CW-Zerlegung von  $A$ .

Wenn diese Bedingungen für  $A$  gelten, so nennen wir  $(A, \mathcal{Z}_A)$  einen **CW-Unterkomplex** von  $(X, \mathcal{Z})$ , oder wir sagen,  $A$  ist ein **CW-Unterraum** von  $X$ . In diesem Fall nennen wir  $(X, A)$  ein **CW-Paar**.

Wenn  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist, so kann man für die Zellen von  $A$  die gleichen charakteristischen Abbildungen nehmen, die diese Zellen in  $X$  haben.

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b) ist trivial, denn wenn  $A$  abgeschlossen ist, so ist die abgeschlossene Hülle jeder Teilmenge von  $A$  wieder in  $A$  enthalten.

b)  $\Rightarrow$  c): Nach Voraussetzung ist  $A$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$ , also nach Definition von  $\mathcal{Z}_A$  die Vereinigung der Zellen von  $\mathcal{Z}_A$ .

Jede dieser Zellen  $e$  hat in  $X$  eine charakteristische Abbildung  $\Phi_e$  und nach Bemerkung 5.8 b) ist  $\text{Bild } \Phi_e = \bar{e}$  und somit enthalten in  $A$ ; es folgt, dass jedes  $\Phi_e$  für  $e \in \mathcal{Z}_A$  sogar eine Abbildung  $D^n \rightarrow A$  ist, und somit auch eine charakteristische Abbildung für  $e$  als Zelle von  $A$ . Dies beweist übrigens auch die Behauptung über charakteristische Abbildungen am Ende der Aussage des Lemmas.

Weil  $\partial e$  in  $X$  nur Zellen von Dimension kleiner als  $\dim e$  trifft, und davon nach Bedingung „C“ nur endlich viele, gilt das Gleiche automatisch auch in  $A$ .

Und schließlich folgt Bedingung „W“ für  $(A, \mathcal{Z}_A)$  sofort aus Lemma 5.14.

Damit erfüllt  $\mathcal{Z}_A$  alle Bedingungen für eine CW-Zerlegung.

c)  $\Rightarrow$  a): Wenn  $\mathcal{Z}_A$  eine CW-Zerlegung von  $A$  ist, dann hat jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}_A$  eine charakteristische Abbildung  $\Psi_e: D^n \rightarrow A$ , die auch eine charakteristische Abbildung in  $X$  ist und deren Bild also die  $X$ -abgeschlossene Hülle von  $e$  ist und in  $A$  enthalten ist.

Hieraus folgt, dass für jedes  $e \in \mathcal{Z}_A$  gilt  $A \cap \bar{e} = \bar{e}$ , und dies ist natürlich abgeschlossen in  $\bar{e}$ . Aus Lemma 5.14 folgt, dass  $A$  abgeschlossen ist in  $X$ . ■

**Bemerkung 5.16** Kriterium 5.15 b) für einen CW-Unterraum kann man wie folgt ein bisschen vereinfachen (so dass man nicht getrennt nachprüfen muss, dass der Unterraum eine Vereinigung von Zellen ist):

Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  eine Teilmenge.

Genau dann ist  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$ , wenn für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap A \neq \emptyset$  gilt  $\bar{e} \subseteq A$ .

*Beweis.* Dass  $A$  eine Vereinigung von Zellen aus  $\mathcal{Z}$  ist, ist gleichbedeutend damit, dass jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$ , die  $A$  schneidet, ganz in  $A$  enthalten ist. In diesem Fall (der insbesondere gilt, wenn  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist) besteht  $\mathcal{Z}_A$  genau aus den Zellen, die nichtleeren Durchschnitt mit  $A$  haben.

Der Rest ist nun trivial. Wenn  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist, dann gilt nach Bedingung 5.15 b), dass  $\bar{e} \subseteq A$  für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}_A$ , also für jede Zelle  $e$ , die  $A$  schneidet.

In der anderen Richtung, wenn für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap A \neq \emptyset$  gilt  $\bar{e} \subseteq A$ , dann gilt auch  $e \subseteq A$ , so dass  $A$  eine Vereinigung von Zellen ist, und zwar der Zellen  $e$ , die  $A$  schneiden. Für diese Zellen gilt sogar, dass  $\bar{e} \subseteq A$ , so dass 5.15 b) erfüllt ist und  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist. ■

**Bemerkung 5.17** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A \subseteq X$  ein CW-Unterraum. Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  ist

$$A^n = A \cap X^n.$$

*Beweis.* Weil  $A$  und  $X^n$  Vereinigungen von Zellen von  $X$  sind, ist jede Zelle aus  $\mathcal{Z}$ , die  $A \cap X^n$  schneidet, sowohl in  $A$  wie auch in  $X^n$  enthalten, und somit in  $A \cap X^n$  enthalten. Folglich ist auch  $A \cap X^n$  eine Vereinigung von Zellen, nämlich der Zellen von  $A$  von Dimension  $\leq n$ . Diese Vereinigung ist nach Definition aber  $A^n$ . ■

**Lemma 5.18** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex.

- a)  $X$  und  $\emptyset$  sind CW-Unterräume von  $X$ .
- b) Jedes Skelett  $X^n$  von  $X$  ist ein CW-Unterraum.
- c) Jedes Skelett  $X^n$  ist abgeschlossen in  $X$ .
- d)  $X$  trägt die schwache Topologie bezüglich der Familie seiner Skelette, d. h.,  $A \subseteq X$  ist genau dann abgeschlossen in  $X$ , wenn  $A \cap X^n$  abgeschlossen ist in  $X^n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ .

*Beweis.* Zu a):  $X$  ist eine Vereinigung von Zellen von  $\mathcal{Z}$  und ist abgeschlossen in  $X$ , ist also ein CW-Unterraum nach Bedingung a) in Definition 5.15.

Das Gleiche gilt für  $\emptyset$ .

Zu b):  $X^n$  ist die Vereinigung der Zellen  $e \in \mathcal{Z}$  von Dimension  $\leq n$ , und weil nach Bedingung 5.9 b) die abgeschlossene Hülle  $\bar{e}$  keine Zellen von höherer Dimension als  $n$  schneidet, erfüllt  $X^n$  Bedingung 5.15 b) und ist ein CW-Unterraum von  $X$ .

c) folgt sofort aus b) und aus Bedingung a) in Definition 5.15.

Zu d): Nur die Richtung „dann“ (also die Implikation „ $\Leftarrow$ “) erfordert einen Beweis.

Sei  $A \subseteq X$  mit  $A \cap X^n$  abgeschlossen in  $X^n$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$ . Sei  $e \in \mathcal{Z}$  und sei  $m := \dim e$ .

Nach Teil c) ist  $\bar{e} \subseteq X^m$  und weil  $A \cap X^m$  abgeschlossen ist in  $X^m$ , ist

$$A \cap \bar{e} = A \cap X^m \cap \bar{e}$$

abgeschlossen in  $\bar{e}$ .

Dies gilt für jede Zelle  $e$  von  $X$ . Aus Bedingung „W“ folgt, dass  $A$  abgeschlossen ist in  $X$ . ■

Mit CW-Unterkomplexen kann man einige wichtige Operationen ausführen.

**Lemma 5.19** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $\mathcal{A}$  eine Familie von CW-Unterräumen von  $X$ . Dann sind

$$A := \bigcap_{Y \in \mathcal{A}} Y \quad \text{und} \quad B := \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$$

auch CW-Unterräume von  $X$ .

*Beweis.* Sei  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap A \neq \emptyset$ . Dann ist  $e \cap Y \neq \emptyset$  für jedes  $Y \in \mathcal{A}$  und aus Bemerkung 5.16 folgt, dass  $\bar{e} \subseteq Y$  für jedes  $Y \in \mathcal{A}$  und somit auch  $\bar{e} \subseteq A$ .

Damit können wir umgekehrt aus Bemerkung 5.16 schließen, dass  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist.

Entsprechend, sei  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $e \cap B \neq \emptyset$ . Dann gibt es ein  $Y \in \mathcal{A}$  mit  $e \cap Y \neq \emptyset$  und Bemerkung 5.16 besagt, dass

$$\bar{e} \subseteq Y \subseteq B.$$

Wieder aus Bemerkung 5.16 folgt, dass  $B$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist. ■

**Korollar 5.20** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $Y \subseteq X$  eine beliebige Teilmenge. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten CW-Unterraum  $B$  von  $X$  mit  $Y \subseteq B$ , den wir mit  $|Y|$  bezeichnen wollen und den wir die **CW-Hülle** von  $Y$  nennen.

Ist  $A$  ein beliebiger CW-Unterraum von  $X$  mit  $Y \subseteq A$ , so gilt auch  $|Y| \subseteq A$ .

*Beweis.*  $|Y|$  ist der Durchschnitt aller CW-Unterräume  $A \subseteq X$  mit  $Y \subseteq A$  (und ist insbesondere in jedem solchen CW-Unterraum enthalten, was die zweite Aussage des Korollars beweist). Nach Lemma 5.19 ist dieser Durchschnitt selber ein CW-Unterraum von  $X$  und ist offensichtlich der kleinste, der  $Y$  enthält. ■

**Lemma 5.21** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex.

- a) Sei  $A$  ein CW-Unterraum von  $X$ . Dann ist  $|A| = A$ .
- b) Sei  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $||Y|| = |Y|$ .
- c) Seien  $Y \subseteq Z$  Teilmengen von  $X$ . Dann ist  $|Y| \subseteq |Z|$ .
- d) Sei  $\mathcal{A}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ . Dann ist

$$\left| \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y \right| = \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} |Y|.$$

*Beweis.* a) ist klar, denn  $A$  ist ja selber schon ein CW-Unterraum um  $A$  und somit der kleinste.

b) folgt aus a) mit  $|Y|$  in der Rolle von  $A$ .

c) ist trivial, da  $Y \subseteq Z \subseteq |Z| \Rightarrow |Y| \subseteq |Z|$ .

d): Sei  $B := \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} |Y|$ . Nach Lemma 5.19 ist  $B$  ein CW-Unterraum von  $X$  und er enthält jede Teilmenge  $Y \in \mathcal{A}$ , also ihre Vereinigung.

Aber jeder CW-Unterraum  $A$ , der  $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$  enthält, enthält auch  $|Y|$  für jedes  $Y \in \mathcal{A}$ , nach der zweiten Aussage von Korollar 5.20. Somit ist  $B \subseteq A$  und  $B$  ist tatsächlich der kleinste CW-Unterraum um  $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$ . ■

**Lemma 5.22** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ .

a)

$$|Y| = \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} |e| \tag{5.1}$$

b) Sei  $e \in \mathcal{Z}$ . Dann ist  $|e| = e \cup |\partial e|$ .

c) Sei  $e \in \mathcal{Z}$ . Dann ist  $|e|$  ein endlicher CW-Unterkomplex (enthält also nur endlich viele Zellen).

d) Wenn  $Y$  nur endlich viele Zellen von  $\mathcal{Z}$  berührt, dann ist  $|Y|$  ein endlicher CW-Komplex.

*Beweis.* Zu a): Die rechte Seite von (5.1) ist nach Lemma 5.19 ein CW-Unterraum von  $X$ , den wir kurz  $Y'$  nennen wollen.

Offensichtlich ist

$$Y \subseteq \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} e \subseteq \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} |e| = Y',$$

woraus nach Korollar 5.20 folgt, dass  $|Y| \subseteq Y'$ .

Umgekehrt, wenn  $e \in \mathcal{Z}$  und  $e \cap Y \neq \emptyset$ , so ist  $e \cap |Y| \neq \emptyset$ . Weil  $|Y|$  ein CW-Unterraum ist, haben wir  $e \subseteq |Y|$ . Nach Korollar 5.20 ist dann sogar  $|e| \subseteq |Y|$ . Das zeigt, dass  $Y' \subseteq |Y|$ .

Damit haben wir die Gleichheit.

Zu b): Sei  $e \in \mathcal{Z}$ . Da  $|\partial e|$  ein CW-Unterraum von  $X$  ist, ist es eine Vereinigung von Zellen und abgeschlossen. Also ist  $e \cup |\partial e|$  eine Vereinigung von Zellen, und da

$$e \cup |\partial e| = e \cup \partial e \cup |\partial e| = \bar{e} \cup |\partial e|,$$

ist  $e \cup |\partial e|$  auch abgeschlossen, also ein CW-Unterraum von  $X$ .

Da  $|e|$  ein  $e$  enthaltender CW-Unterraum von  $X$  ist, ist  $\bar{e} = e \cup \partial e \subseteq |e|$ , woraus folgt  $e \cup |\partial e| \subseteq |e|$ . Weil  $|e|$  der kleinste CW-Unterraum um  $e$  ist, gilt die Gleichheit.

Zu c) und d): Wir beweisen beide Teile gleichzeitig durch Induktion über  $\dim e$  oder über die maximale Dimension der endlich vielen von  $Y$  berührten Zellen.

Sobald wir c) für eine bestimmte Dimension  $n$  und alle kleineren bewiesen haben, folgt d) für die gleiche maximale Dimension der berührten Zellen mit Hilfe von Teil a).

Wir beginnen mit Dimension 0. Wenn  $e$  eine 0-Zelle ist, so bildet  $e$  selber schon einen CW-Unterkomplex, mit einer Zelle, also mit endlich vielen Zellen. Also gilt Teil c) für Dimension 0 und somit gilt Teil d), wenn die maximale Dimension der endlich vielen berührten Zellen 0 ist.

Für den Induktionsschritt sei  $n > 0$  und wir nehmen an, dass c) und d) gelten, wenn alle berührten Zellen Dimension  $< n$  haben.

Sei  $e \in \mathcal{Z}$  mit  $\dim e = n$ . Nach Teil b) ist  $|e| = e \cup |\partial e|$ . Weil die Zellenzerlegung CW ist, berührt  $\partial e$  nur endlich viele Zellen und diese haben Dimension  $< n$ . Nach der Induktionsannahme für Behauptung d) ist  $|\partial e|$  ein endlicher CW-Komplex und  $|e| = e \cup |\partial e|$  ist somit auch endlich, denn es hat nur eine Zelle mehr. Das beweist den Induktionsschritt für Behauptung c) und für d) folgt er, wie schon erklärt, gleich mit.

Durch Induktion erhalten wir c) und d) für alle Dimensionen. ■

**Lemma 5.23** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $C \subseteq X$  eine Teilmenge, so dass  $C \cap e$  endlich ist für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$ . Dann ist  $C$  abgeschlossen.

Ferner, als Unterraum von  $X$  trägt  $C$  die diskrete Topologie.

*Beweis.* Da nach Bedingung „C“ jede abgeschlossene Zelle  $\bar{e}$  von  $X$  nur endlich viele Zellen  $e'$  berührt, ist  $C \cap \bar{e}$  endlich für jedes  $e \in \mathcal{Z}$ . Aber endliche Teilmengen eines Hausdorffraumes sind immer abgeschlossen.

Also ist  $C \cap \bar{e}$  abgeschlossen für jedes  $e \in \mathcal{Z}$ , und nach Bedingung „W“ ist  $C$  abgeschlossen.

Da aber auch jede Teilmenge von  $C$  mit jeder Zelle endlichen Durchschnitt hat, gilt der gleiche Schluss auch für jede Teilmenge von  $C$ . Das bedeutet, dass jede Teilmenge von  $C$  abgeschlossen ist in  $X$  und somit auch in  $C$ . In anderen Worten,  $C$  trägt die diskrete Topologie. ■

**Lemma 5.24** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $C \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a)  $C$  ist kompakt;
- b)  $C$  berührt nur endlich viele Zellen;
- c)  $|C|$  ist ein endlicher CW-Unterkomplex von  $X$ ;
- d)  $C$  ist in einem endlichen CW-Unterkomplex von  $X$  enthalten.

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b): Wähle in jeder von  $C$  berührten Zelle  $e$  einen Punkt

$$x_e \in C \cap e.$$

Sei  $K$  die Menge der so gewählten Punkte.

Da  $K$  aus jeder Zelle höchstens einen Punkt enthält (denn verschiedene Zellen sind disjunkt), ist  $K$  abgeschlossen und diskret nach Lemma 5.23.

$K$  ist insbesondere eine abgeschlossene Teilmenge von  $C$  und wenn  $C$  kompakt ist, dann ist auch  $K$  kompakt. Aber die einzelnen Punkte von  $K$  bilden eine offene Überdeckung von  $K$  (wegen der diskreten Topologie), die keine echte Teilüberdeckung besitzt. Wenn  $C$  und somit  $K$  kompakt ist, muss diese Überdeckung selber schon endlich sein, d. h.,  $K$  ist endlich und  $C$  berührt nur endlich viele Zellen von  $X$ .

b)  $\Rightarrow$  c): Dies ist die Aussage von Lemma 5.22 d).

c)  $\Rightarrow$  d): Klar, denn  $C \subseteq |C|$ .

d)  $\Rightarrow$  a): Sei  $Y$  ein  $C$  enthaltender CW-Unterraum von  $X$  mit endlich vielen Zellen  $e_1, \dots, e_k$ . Da

$$Y = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$$

und da jede abgeschlossene Zelle  $\bar{e}_i$  als stetiges Bild von einem  $D^n$  kompakt ist, ist  $Y$  kompakt. Weil  $C$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $Y$  ist, ist auch  $C$  kompakt. ■

**Korollar 5.25** Jeder CW-Raum mit nur endlich vielen Zellen ist kompakt.

**Korollar 5.26** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und sei  $A$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbf{N}$  mit  $A \subseteq X^n$ .

*Beweis.* Nach Lemma 5.24 b) berührt  $A$  nur endlich viele Zellen von  $X$ , und wenn  $n$  die größte Dimension dieser Zellen ist, so ist  $A \subseteq X^n$ . ■

Das Wissen um kompakte Teilmengen eines CW-Raumes erlaubt uns noch, einen Satz über Produkte von CW-Komplexen zu beweisen:

**Satz 5.27** Seien  $(X, \mathcal{Z})$  und  $(Y, \mathcal{Z}')$  CW-Komplexe. Dann bildet

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{ e \times e' \mid e \in \mathcal{Z} \text{ und } e' \in \mathcal{Z}' \}$$

eine Zellenzerlegung von  $X \times Y$ .

Wenn  $X$  oder  $Y$  lokalkompakt ist, dann ist  $\tilde{\mathcal{Z}}$  eine CW-Zerlegung.

*Beweis.* Für jede  $m$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  und jede  $n$ -Zelle  $e' \in \mathcal{Z}'$  ist

$$e \times e' \cong E^m \times E^n \cong \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n} \cong E^{m+n}$$

eine  $m+n$ -Zelle in  $X \times Y$ , und offensichtlich ist  $X \times Y$  die disjunkte Vereinigung aller solcher Produktzellen, so dass  $\tilde{\mathcal{Z}}$  eine Zellenzerlegung von  $X \times Y$  ist.

Diese Zellenzerlegung hat ohne weitere Voraussetzungen fast alle Eigenschaften einer CW-Zerlegung. Nämlich, wenn  $\Phi_e: D^m \rightarrow X$  eine charakteristische Abbildung für die  $m$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}$  ist und wenn  $\Phi_{e'}: D^n \rightarrow Y$  eine charakteristische Abbildung für die  $n$ -Zelle  $e' \in \mathcal{Z}'$  ist, so gibt es einen Homöomorphismus  $\varphi: D^{m+n} \rightarrow D^m \times D^n$ , der  $E^{m+n}$  homöomorph auf  $E^m \times E^n$  abbildet und  $S^{m+n-1} = \partial D^{m+n}$  homöomorph auf  $\partial(D^m \times D^n) = (S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1})$  abbildet<sup>1</sup>, und wie man leicht nachprüft, ist  $(\Phi_e \times \Phi_{e'}) \circ \varphi$  eine charakteristische Abbildung für  $e \times e'$ .

<sup>1</sup>Dieser Homöomorphismus streckt jeden Radius von  $D^{m+n}$  linear gerade so weit, dass sein äußerer Endpunkt auf dem Rand von  $D^m \times D^n$  zu liegen kommt. In Formeln: wenn wir die Punkte von  $\mathbf{R}^{m+n}$  als Paare  $(x, y)$  mit  $x \in \mathbf{R}^m$  und  $y \in \mathbf{R}^n$  beschreiben, und wenn  $|\cdot|$  die euklidische Norm bezeichnet, dann ist  $\varphi(0, 0) = (0, 0)$  und für  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist

$$\varphi(x, y) = \frac{|(x, y)|}{\max(|x|, |y|)} \cdot (x, y).$$

Das Bild des Randes

$$((\Phi_e \times \Phi_{e'}) \circ \varphi)(S^{m+n-1}) = (\Phi_e \times \Phi_{e'})((S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1}))$$

ist enthalten in der Vereinigung der Produkte der endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}$  von Dimension  $< m$ , die  $\partial e$  trifft, mit den endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}'$  von Dimension  $\leq n$ , die  $\bar{e}'$  trifft, und der Produkte der endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}$  von Dimension  $\leq m$ , die  $\bar{e}$  trifft, mit den endlich vielen Zellen von  $\mathcal{Z}'$  von Dimension  $< n$ , die  $\partial e'$  trifft.

Das ist insgesamt eine Vereinigung von endlich vielen Zellen aus  $\tilde{\mathcal{Z}}$ , jeweils von Dimension  $< m+n$ , und es folgt, wenn wir die jeweilige Dimension  $m+n$  der Produktzelle mit  $k$  bezeichnen, dass der Rand von jeder  $k$ -Zelle von  $\tilde{\mathcal{Z}}$  nur endlich vielen Zellen trifft (so dass Bedingung „C“ gilt), und diese haben alle Dimension  $< k$  (so dass 5.9 b) gilt).

Es bleibt nur noch Bedingung „W“ zu prüfen, und dafür brauchen wir die Voraussetzung, dass  $X$  oder  $Y$  lokalkompakt ist. Nehmen wir an, dass  $Y$  lokalkompakt ist (der Beweis im anderen Fall geht ganz analog).

Sei  $A \subseteq X \times Y$  eine Teilmenge, so dass  $A \cap (\bar{e} \times \bar{e}')$  abgeschlossen ist in

$$\bar{e} \times \bar{e}' = \overline{e \times e'}$$

für jedes  $e \in \mathcal{Z}$  und jedes  $e' \in \mathcal{Z}'$ . Wir werden zeigen, dass  $A$  abgeschlossen ist, und das wird beweisen, dass  $X \times Y$  die schwache Topologie bezüglich der Zellenzerlegung  $\tilde{\mathcal{Z}}$  besitzt.

Sei  $(x, y) \notin A$ . Weil  $Y$  lokalkompakt ist, gibt es eine offene Menge  $W \subseteq Y$  mit  $y \in W$  und  $\bar{W}$  kompakt. Nach Lemma 5.24 d) ist  $\bar{W}$  und somit auch  $W$  in einem endlichen CW-Unterkomplex  $Y'$  von  $Y$  enthalten.

Sei

$$C := \{y' \in Y' \mid (x, y') \in A\}.$$

Da  $\{x\}$  kompakt ist, gibt es auch einen endlichen CW-Unterkomplex  $X' \subseteq X$  mit  $x \in X'$ .

Das Produkt  $X' \times Y'$  hat eine endliche Zellenzerlegung durch Produktzellen, die nach Bemerkung 5.11 automatisch Bedingungen „C“ und „W“ erfüllt. Aus Bedingung „W“ folgt, dass  $A \cap (X' \times Y')$  abgeschlossen ist in  $X' \times Y'$ . Die Abbildung  $i_x: Y' \rightarrow X' \times Y'$  mit  $i(y') := (x, y')$  ist stetig und deshalb ist  $C = i_x^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $Y'$ .

$Y'$  ist als endlicher CW-Raum kompakt und Hausdorffsch und natürlich auch lokalkompakt. Da  $y$  zu der offenen Menge  $Y' \setminus C$  gehört, gibt es nach Lemma 4.22 aus dem Skriptum *Einführung in die Topologie* eine offene Teilmenge  $V' \subseteq Y'$  mit  $y \in V' \subseteq \bar{V}' \subseteq Y' \setminus C$ .

Sei  $V := V' \cap W$ . Diese Menge ist offen in  $W \subseteq Y'$ , weil  $V'$  offen in  $Y'$  ist, aber weil  $W$  offen in  $Y$  ist, ist  $V$  auch offen in  $Y$ . Ferner  $\bar{V} \subseteq \bar{V}' \subseteq Y'$  und  $\bar{V} \cap C = \emptyset$ .

Sei

$$B := \{x' \in X \mid \text{es gibt ein } y' \in \bar{V} \text{ mit } (x', y') \in A\}.$$

Für jede Zelle  $e$  von  $X$  ist  $|e|$  ein endlicher CW-Unterkomplex von  $X$  nach Lemma 5.22 c). Der Unterraum  $|e| \times Y' \subseteq X \times Y$  hat also eine endliche Zellenzerlegung durch Produktzellen, die nach Bemerkung 5.11 und nach den am Anfang des jetzigen Beweises nachgeprüften Eigenschaften automatisch eine CW-Zerlegung ist. Sie erfüllt insbesondere Bedingung „W“, und deshalb ist  $A \cap (|e| \times Y')$  abgeschlossen in  $|e| \times Y'$ .

Da  $\bar{e} \times \bar{V}$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $|e| \times Y'$  ist, ist auch

$$A \cap (|e| \times Y') \cap (\bar{e} \times \bar{V}) = A \cap (\bar{e} \times \bar{V})$$

abgeschlossen in  $|e| \times Y'$ , welcher ein endlicher und somit kompakter CW-Komplex ist. Also ist auch  $A \cap (\bar{e} \times \bar{V})$  kompakt

Offenbar ist

$$B \cap \bar{e} = \pi_1(A \cap (\bar{e} \times \bar{V}))$$

(wo  $\pi_1$  die Projektion auf den ersten Faktor ist) und somit ist  $B \cap \bar{e}$  als stetiges Bild einer kompakten Menge auch kompakt und somit abgeschlossen in  $\bar{e}$ . Das gilt für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}$ ; also ist  $B$  abgeschlossen in  $X$  nach Bedingung „W“.

Wir haben  $x \notin B$  weil sonst  $\bar{V} \cap C \neq \emptyset$ . Also ist  $U := X \setminus B$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$  und  $V$  ist offen um  $y \in Y$ . Ferner  $(U \times V) \cap A = \emptyset$ , weil für  $x'$  mit  $(\{x'\} \times V) \cap A \neq \emptyset$  gilt, nach Definition, dass  $x' \in B$ , also  $x' \notin U$ .

Da wir eine solche von  $A$  disjunkte offene Menge  $U \times V$  um jedes  $(x, y) \notin A$  finden können, ist  $(X \times Y) \setminus A$  offen und  $A$  abgeschlossen in  $X \times Y$ .

Wir haben Bedingung „W“ bewiesen und  $\tilde{\mathcal{Z}}$  ist eine CW-Zerlegung. ■

Die Voraussetzung in Satz 5.27, dass einer der beiden Faktoren lokal-kompakt sein muss, damit die Produktzellenzerlegung eines Produktes von CW-Räumen wieder eine CW-Zerlegung für die Produkttopologie ist, ist wesentlich. Ohne diese Voraussetzung gilt der Satz nicht, aber wir verzichten auf die Angabe eines Gegenbeispiels, da die sehr technischen Details nichts Wesentliches zum Thema dieser Vorlesung beitragen würde.

Wir wollen jetzt den Turm der Skelette eines CW-Raumes in Bezug auf die Homologie näher untersuchen. Am Ende werden wir daraus eine vereinfachte Homologieberechnungsmöglichkeit gewinnen, mit Hilfe eines neuen Kettenkomplexes, der *wesentlich* kleiner als der singuläre sein wird.

Um dabei gleich von Anfang an die relative Homologie berücksichtigen zu können, formulieren wir folgende Definitionen für CW-Komplexe nicht in ihrer einfachsten Form, sondern in einer Variante, in der ein vorgegebener CW-Unterkomplex  $A$  von allen Konstruktionsdetails „ausgenommen“ wird. Die absolute, einfache Version erhält man mit, in dem man  $A = \emptyset$  setzt.

**Lemma und Definition 5.28** Sei  $n \in \mathbf{N}$ . Wir bezeichnen die offene gelochte  $n$ -dimensionale Einheitsscheibe  $E^n \setminus \{0\}$  mit  $E_*^n$ . Es gilt

$$H_k(E^n, E_*^n) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.2)$$

*Beweis.* Sei  $D_{1/2}^n := \{x \in E^n \mid |x| \leq \frac{1}{2}\}$  und  $S_{1/2}^{n-1} := \{x \in E^n \mid |x| = \frac{1}{2}\}$ .

Offensichtlich ist  $D_{1/2}^n$  ein starker Deformationsretrakt von  $E^n$  und  $S_{1/2}^{n-1}$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $E_*^n$ . Ferner  $(D_{1/2}^n, S_{1/2}^{n-1}) \cong (D^n, S^{n-1})$ .

Daraus folgt

$$H_*(E^n, E_*^n) \cong H_*(D_{1/2}^n, S_{1/2}^{n-1}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}),$$

und  $H_*(D^n, S^{n-1})$  ist nach Beispiel 4.4 b) und Satz 4.5 wie in (5.2). ■

**Definition 5.29** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex. Außerdem, sei  $(A, \mathcal{Z}_A)$  ein CW-Unterkomplex von  $(X, \mathcal{Z})$ .

Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  setzen wir

$$X_A^n := X^n \cup A.$$

Wir nennen dies das *relative  $n$ -Skelett von  $X$  modulo  $A$* .

Für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A := \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_A$ , also für jede  $n$ -Zelle, die nicht in  $A$  liegt, sei  $\Phi_e$  ihre charakteristische Abbildung und sei

$$0_e := \Phi_e(0)$$

der „Mittelpunkt“ der Zelle  $e$ . Sei  $e_* := e \setminus \{0_e\} \cong E_*^n$ .

Wir setzen

$$Z_A^n := \{0_e \mid e \in \mathcal{Z}'_A \text{ und } \dim e = n\}$$

und wir setzen

$$\tilde{X}_A^n := X_A^n \setminus Z_A^n = X_A^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e_*.$$

Wir nennen  $\tilde{X}_A^n$  das *gelochte relative  $n$ -Skelett von  $X$  modulo  $A$* .

**Lemma 5.30** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ .

- a)  $X_A^{n-1}$  ist ein starker Deformationsretrakt von  $\tilde{X}_A^n$ .
- b)  $(X_A^n, \tilde{X}_A^n, X_A^{n-1})$  ist ein Ausschneidungstripel.
- c) Wenn  $k \neq n$ , so ist

$$H_k(X_A^n, X_A^{n-1}) = \{0\}. \tag{5.3}$$

- d)

$$H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \cong \bigoplus_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} \mathbf{Z}. \tag{5.4}$$

Wenn  $e$  eine  $n$ -Zelle in  $\mathcal{Z}'_A$  ist und wenn  $\Phi_e: D^n \rightarrow X$  die charakteristische Abbildung der Zelle  $e$  ist, so ist

$$H_n(\Phi_e): H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \tag{5.5}$$

ein Isomorphismus von  $H_n(D^n, S^{n-1}) = \mathbf{Z}$  auf den  $e$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  in (5.4).

*Beweis.* Zu a): Für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  ist  $\Phi_e \times \text{id}_I: D^n \times I \rightarrow \bar{e} \times I$  identifizierend, denn sie ist eine stetige surjektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffschen Raum. (Wenn eine Teilmenge von  $\bar{e} \times I$  ein abgeschlossenes Urbild hat, ist dieses Urbild kompakt. Somit ist die Teilmenge selber als Bild ihres Urbildes auch kompakt und deshalb abgeschlossen. Das zeigt, dass  $\bar{e} \times I$  die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung  $\Phi_e \times \text{id}_I$  trägt.)

Ferner,  $\Phi_e$  bildet  $E^n$  homöomorph auf  $e$  ab und  $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$ .

Hieraus folgt, dass  $\Phi_e^{-1}(\{0_e\}) = \{0\}$ . Also ist  $(\Phi_e \times \text{id}_I)^{-1}(\{0_e\} \times I) = \{0\} \times I$ , und weil diese Mengen abgeschlossen sind ist auch die Abbildung

$$\Phi_e \times \text{id}_I: (D^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow (\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I = (\partial e \cup e_*) \times I$$

identifizierend.

Wir wissen (zum Beispiel aus Beispiel 6.6 c) des Skriptums *Einführung in die Topologie*), dass  $S^{n-1}$  ein starker Deformationsretrakt von  $D^n \setminus \{0\}$  ist. Sei  $h: (D^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow D^n$  eine Homotopie rel  $S^{n-1}$  von der Inklusion  $i: D^n \setminus \{0\} \rightarrow D^n$  zu einer Retraktion  $p: D^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ .

Für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  können wir eine Homotopie  $H_e: (\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I \rightarrow \bar{e}$  definieren, so dass

$$H_e \circ (\Phi_e \times \text{id}_I) = \Phi_e \circ h. \tag{5.6}$$

Nämlich, auf  $e_* \times I$  gibt es eine eindeutige solche Abbildung  $H_e$ , weil  $\Phi_e \times \text{id}_I$  ein Homöomorphismus  $E_*^n \times I \rightarrow e_* \times I$  ist; wir können also (5.6) auflösen und auf  $e_* \times I$  können wir  $H_e := \Phi_e \circ h \circ (\Phi_e \times \text{id}_I)^{-1}$  setzen.

Für  $(x, t) \in \partial e \times I$  setzen wir  $H_e(x, t) := x$ . Auch dieser Teil von  $H_e$  erfüllt (5.6), weil  $\partial e = \Phi_e(S^{n-1})$  und weil  $h$  eine Homotopie rel  $S^{n-1}$  ist.

Wir erhalten also insgesamt eine wohldefinierte *Abbildung*  $H_e$  auf ganz  $(\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I$ , die (5.6) erfüllt, und diese Abbildung ist stetig, weil die rechte Seite von (5.6) stetig ist und weil  $\Phi_e \times \text{id}_I$  in (5.6) identifizierend ist.  $H_e$  ist also tatsächlich eine Homotopie.

Aus (5.6) und den Eigenschaften von  $h$  prüft man leicht nach, dass  $(H_e)_0$  die Identität auf  $\bar{e} \setminus \{0_e\}$  ist und dass  $(H_e)_1$  eine Retraktion von  $\bar{e} \setminus \{0_e\}$  auf  $\partial e$  ist. Aus der Definition von  $H_e$  folgt, dass  $H_e$  eine Homotopie rel  $\partial e$  ist.

Jetzt definieren wir eine Homotopie

$$H: \tilde{X}_A^n \times I \rightarrow \tilde{X}_A^n,$$

in dem wir auf  $(\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I$  für jede  $n$ -Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  die Homotopie  $H$  als  $H_e$  definieren, und sie für  $(x, t) \in X_A^{n-1} \times I$  durch die Vorschrift  $H(x, t) := x$  definieren.

Weil die  $H_e$  Homotopien rel  $\partial e$  sind, und weil die offenen punktierten Zellen  $e_*$  disjunkt voneinander und auch disjunkt von  $X_A^{n-1}$  sind, stimmen alle Teildefinitionen an gemeinsamen Stellen überein und  $H$  ist eine wohldefinierte Abbildung auf ganz  $\tilde{X}_A^n \times I$ .

Diese Abbildung ist auch stetig. Das Intervall  $I$  ist ein kompakter CW-Raum und deshalb ist  $X_A^n \times I$  nach Satz 5.27 auch ein CW-Raum, mit Zellen  $e \times \{0\}$ ,  $e \times \{1\}$  und  $e \times (0, 1)$  für jede Zelle  $e$  von  $X_A^n$ , und mit zugehörigen abgeschlossenen Zellen  $\bar{e} \times I$  und darin enthalten  $\bar{e} \times \{0\}$  und  $\bar{e} \times \{1\}$ . Für die  $n$ -Zellen  $e$  ist  $H$  nicht auf ganz  $\bar{e} \times I$  definiert, sondern nur auf der offenen Teilmenge  $(\bar{e} \setminus \{0\}) \times I$ , aber dort ist  $H$  stetig. Und  $H$  ist definiert und stetig auf ganz  $X_A^{n-1} \times I$ .

Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\tilde{X}_A^n$ . Wir wollen zeigen, dass  $V := H^{-1}(U)$  offen ist in  $\tilde{X}_A^n \times I$ . Für jede  $n$ -Zelle  $e$  ist  $V \cap (\bar{e} \times I) = V \cap ((\bar{e} \setminus \{0\}) \times I)$ , da  $H$  nur auf  $(\bar{e} \setminus \{0\}) \times I$  definiert ist. Dort ist  $H$  aber stetig und deshalb ist  $V \cap (\bar{e} \times I) = V \cap ((\bar{e} \setminus \{0\}) \times I)$  offen in  $(\bar{e} \setminus \{0\}) \times I$ , welche wiederum eine offene Teilmenge von  $\bar{e} \times I$  ist. Also ist  $V \cap (\bar{e} \times I)$  auch offen in  $\bar{e} \times I$ . Daraus folgt, dass  $V$  auch die in  $\bar{e} \times I$  enthaltenen abgeschlossenen Zellen  $\bar{e} \times \{0\}$  und  $\bar{e} \times \{1\}$  in relativ offenen Teilmengen schneidet.

Weil  $H$  auf ganz  $X_A^{n-1} \times I$  stetig ist, schneidet  $V$  auch die darin enthaltenen abgeschlossenen Zellen von  $X_A^n \times I$  in relativ offenen Teilmengen. Weil  $X_A^n \times I$  die schwache Topologie bezüglich seiner abgeschlossenen Zellen trägt, ist  $V$  offen in  $X_A^n \times I$  und somit auch in  $\tilde{X}_A^n \times I$ . Das zeigt, dass  $H$  stetig ist.

Nach der Definition von  $H$  und wegen der Eigenschaften der  $H_e$  ist  $H$  eine Homotopie  $\text{rel } X_A^{n-1}$  von  $\text{id}_{\tilde{X}_A^n}$  zu einer Retraktion von  $\tilde{X}_A^n$  auf  $X_A^{n-1}$ .

Zu b): Die Behauptung ist klar nach Satz 3.55, denn  $X_A^{n-1}$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $X_A^n$  und ist enthalten im Innern von  $\tilde{X}_A^n$ , da  $\tilde{X}_A^n$  offen ist (das Komplement  $Z_A^n$  von  $\tilde{X}_A^n$  ist nach Lemma 5.23 nämlich abgeschlossen, da es jede Zelle in höchstens einem Punkt trifft).

Zu c) und d): Nach Teil a) ist  $X_A^{n-1} \simeq \tilde{X}_A^n$ . Mit dem Homotopieinvarianzlemma 3.30 b) und mit Ausschneidung erhalten wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_k(X_A^n, X_A^{n-1}) &\cong H_k(X_A^n, \tilde{X}_A^n) \\ &\cong H_k(X_A^n \setminus X_A^{n-1}, \tilde{X}_A^n \setminus X_A^{n-1}) \\ &= H_k\left(\bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e, \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e_*\right) \end{aligned} \tag{5.7a}$$

$$\cong \bigoplus_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} H_k(e, e_*), \tag{5.7b}$$

wobei Gleichung (5.7a) gilt, weil  $X_A^n \setminus X_A^{n-1}$  die Vereinigung der  $n$ -Zellen in  $\mathcal{Z}'_A$  ist, und (5.7b) daraus folgt, weil diese Zellen disjunkt und offen in  $X_A^n \setminus X_A^{n-1}$  sind und die singulären Kettengruppen ihrer Vereinigung die direkte Summe der singulären Kettengruppen der einzelnen Zellen sind. Man vergleiche dazu Bemerkung 4.1; die entsprechende Aussage für die relativen Kettengruppen  $C_k(e, e_*)$  und somit für die relative Homologie erhält man ähnlich wie in Lemma 2.30 d).

Jeder Summand in (5.7b) ist  $\mathbf{Z}$ , wenn  $k = n$ , und  $\{0\}$  sonst, nach Lemma 5.28 und weil das Paar  $(e, e_*)$  homöomorph ist zu  $(E^n, E_*^n)$  vermöge des Homöomorphismus  $\Phi_e$ .

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(E^n, E_*^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(D^n, D^n \setminus \{0\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(D^n, S^{n-1}) \\ H_n(\Phi_e) \downarrow \cong & & H_n(\Phi_e) \downarrow & & \downarrow H_n(\Phi_e) \\ H_n(e, e_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X_A^n, \tilde{X}_A^n) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \end{array} \tag{5.8}$$

wo die waagerechten Pfeile durch Inklusionen induziert werden. Einige der waagerechten Pfeile, wie auch der linke senkrechte Pfeil, sind Isomorphismen. Der linke obere waagerechte Pfeil ist ein Ausschneidungsisomorphismus (Ausschneidung von  $S^{n-1}$ ) und die rechten waagerechten Pfeile gehören zu Abbildungen von Raumpaaren, die Homotopieäquivalenzen der Unterräume sind

und Identitäten auf den Oberräumen sind, und deshalb nach Lemma 3.30 b) Isomorphismen in Homologie induzieren.

Die durch die Inklusion der Zelle  $e$  nach  $X_A^n$  induzierte Abbildung  $i_*$  unten links ist algebraisch die Inklusion des  $e$ -ten Summanden in die direkte Summe (5.7b). Bis auf die natürlichen Isomorphismen, die im Diagramm sichtbar sind, ist  $i_*$  aber nichts anderes als der rechte senkrechte Pfeil  $H_n(\Phi_e): H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ . Insbesondere ist dieser Pfeil, die Abbildung (5.5), eine Inklusion von  $\mathbf{Z}$  als den  $e$ -ten Summanden von (5.7b) für  $k = n$ . ■

**Definition 5.31** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **Filtrierung** von  $X$  ist eine durch die ganzen Zahlen indizierte Folge  $\mathcal{F} := \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  von Unterräumen von  $X$ , so dass  $X_n \subseteq X_{n+1}$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .

Eine Filtrierung  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  heißt **zellulär**, wenn

- a) für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt  $H_k(X_n, X_{n-1}) = \{0\}$  für alle  $k \neq n$ , und
- b) für jeden singulären Simplex  $\sigma$  in  $X$  gibt es ein  $n \in \mathbf{Z}$  mit  $\text{Bild } \sigma \subseteq X_n$ .

Ein **zellulärer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{F})$ , wo  $X$  ein topologischer Raum ist und  $\mathcal{F}$  eine zelluläre Filtrierung von  $X$  ist. Oft sprechen wir einfach von dem „zellulären Raum  $X$ ,“ wenn die Filtrierung  $\mathcal{F}$  fest vorgegeben ist oder wir sie nicht explizit nennen müssen oder wollen.

Sind  $(X, \mathcal{F})$  und  $(Y, \mathcal{F}')$  zwei zelluläre Räume, so nennen wir eine stetige Abbildung  $f: X \longrightarrow Y$  **zellulär**, wenn für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt  $f(X_n) \subseteq Y_n$ .

**Bemerkung 5.32** Bedingung 5.31 b) impliziert, dass eine zelluläre Filtrierung  $\{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eines Raumes  $X$  den ganzen Raum ausschöpft, d. h., dass

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} X_n.$$

Denn jeder einzelne Punkt von  $X$  ist ein 0-Simplex und liegt somit in einem der  $X_n$ .

**Beispiel 5.33** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ . Dann bilden die Unterkomplexe  $X_A^n$  für  $n \in \mathbf{Z}$  eine zelluläre Filtrierung  $\mathcal{F}_A$  von  $X$ .

Bedingung 5.31 a) ist genau die Aussage von Lemma 5.30 c), und Bedingung 5.31 b) folgt aus Korollar 5.26, denn für jeden singulären  $m$ -Simplex  $\sigma$  ist  $\sigma(\Delta_m)$  eine kompakte Teilmenge von  $X$  und somit gibt es ein  $n \in \mathbf{N}$  mit  $\sigma(\Delta_m) \subseteq X^n \subseteq X_A^n$ .

In der Filtrierung  $\mathcal{F}_A$  beachte man, dass  $X_A^n = A$  für alle  $n < 0$ .

Ist  $(Y, B)$  ein weiterer CW-Raum und  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, so ist für  $f$  der Begriff, zellulär zu sein als Abbildung zwischen Zellenkomplexen im Sinne von Definition 5.4, nicht das Gleiche, wie der Begriff, zellulär zu sein als Abbildung zwischen zellulären Räumen  $(X, \mathcal{F}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_B)$ . Nur wenn  $A = B = \emptyset$  stimmen beide Begriffe überein.

Eine stetige Abbildung, die zellulär ist als Abbildung zwischen den zellulären Räumen, muss wegen der Bemerkung oben über die Filtrierung in negativen Dimensionen auf jeden Fall  $A$  nach  $B$  abbilden und somit eine Abbildung von Raumpaaren  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  sein; sie muss aber die Skelette von  $X$  nicht in die entsprechenden Skelette von  $Y$  abbilden (außer für Zellen in  $X \setminus A$ , die nicht nach  $B$  abgebildet werden).

Allerdings, wenn  $f$  zellulär ist als Abbildung zwischen Zellenkomplexen und wenn  $f$  eine Abbildung von Raumpaaren  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist, dann ist  $f$  auch zellulär als Abbildung der zellulären Räume  $(X, \mathcal{F}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_B)$ .

Die Eigenschaften einer zellulären Filtrierung sind so gewählt, dass jede Homologiegruppe des ganzen Raumes schon in einer genügend großen Stufe  $X_n$  der Filtrierung berechnet werden kann.

Bevor wir das näher erläutern, brauchen wir eine kleine Verallgemeinerung des 5-er Lemmas:

**Lemma 5.34** Sei

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen, in dem die waagerechten Reihen exakt sind.

- a) Wenn  $\alpha$  surjektiv ist und  $\beta$  und  $\delta$  injektiv sind, dann ist auch  $\gamma$  injektiv.
- b) Wenn  $\alpha$  und  $\gamma$  surjektiv sind und  $\delta$  injektiv ist, dann ist auch  $\beta$  surjektiv.

*Beweis.* Der Beweis wurde als Beweis des 5-er Lemmas (Lemma 3.10) schon vorgeführt, an dessen Ende sogar darauf hingewiesen wurde, dass unter den hier genannten schwächeren Voraussetzungen die Injektivität und Surjektivität der mittleren senkrechten Abbildung im damaligen Diagramm getrennt bewiesen werden können.

Den Beweis von Teil a) kann man wörtlich übernehmen aus dem Teil des Beweises des 5-er Lemmas, in dem die Injektivität von  $\gamma$  bewiesen wird. Unser jetziges Diagramm mit vier Gruppen in jeder Zeile ist der unveränderte linke Teil des Diagramms für das 5-er Lemma.

Für Teil b) muss man unser jetziges „4-er“ Diagramm als den rechten Teil des Diagramms für das 5-er Lemma sehen, und nur die Namen der Gruppen und Homomorphismen haben sich geändert, indem jeder Buchstabe in den Bezeichnungen für das 5-er Lemma durch seinen Vorgänger im Alphabet ersetzt wurde. Mit dieser Übersetzung kann man auch für die Surjektivität den Beweis des 5-er Lemmas wörtlich übernehmen. ■

**Satz 5.35** Sei  $(X, \mathcal{F})$  ein zellulärer Raum mit  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ . Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  sei  $i_n$  die Inklusion  $X_n \rightarrow X$ , und für jedes  $m \leq n \in \mathbf{Z}$  sei  $i_{m,n}$  die Inklusion  $X_m \rightarrow X_n$  und sei  $j_{m,n}$  die Inklusion  $(X, X_m) \rightarrow (X, X_n)$ .

Für jede Teilmenge  $C \subseteq X_n$  sei  $i_n^C$  die Inklusion  $(X_n, C) \rightarrow (X, C)$ .

Sei  $k \in \mathbf{N}$ .

- a) Für  $k > n$  ist  $H_k(X_n)$  unabhängig von  $n$ , d. h., wenn auch  $m < k$ , so ist  $H_k(X_n) \cong H_k(X_m)$ .
- b) Auch für  $k < n$  ist  $H_k(X_n)$  unabhängig von  $n$ .
- c) Für  $k \leq n$  ist  $H_k(X, X_n) = \{0\}$ .
- d) Für  $n$  mit  $k > n + 1$  oder mit  $n < 0$  ist  $H_k(X, X_n)$  unabhängig von  $n$ .
- e)  $H_k(i_n): H_k(X_n) \rightarrow H_k(X)$  ist ein Isomorphismus für  $k < n$  und ist surjektiv für  $k = n$ .
- f)  $H_k(i_{m,n}): H_k(X_m) \rightarrow H_k(X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $k < m$  und für  $k > n$ , ist surjektiv für  $k = m$  und ist injektiv für  $k = n$ .
- g)  $H_k(i_n^C): H_k(X_n, C) \rightarrow H_k(X, C)$  ist ein Isomorphismus wenn  $k < n$  und ist surjektiv wenn  $k = n$ .
- h) Die Abbildung  $H_k(j_{m,n}): H_k(X, X_m) \rightarrow H_k(X, X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $k > n + 1$ , aber auch wenn  $m \leq n < 0$ , und  $H_k(j_{m,n})$  ist injektiv, wenn  $k = n + 1$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit Teil f).

Sei  $r \in \mathbf{Z}$ . Um die Notation ein wenig zu vereinfachen schreiben wir  $h_r$  als Kürzel für  $i_{r-1,r}$ . In der langen exakten Homologiefolge

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(X_r, X_{r-1}) \rightarrow H_k(X_{r-1}) \xrightarrow{H_k(h_r)} H_k(X_r) \rightarrow H_k(X_r, X_{r-1}) \rightarrow \cdots$$

des Paares  $(X_r, X_{r-1})$  sind nach Bedingung 5.31 a) die relativen Gruppen  $H_{k+1}(X_r, X_{r-1}) = \{0\}$  außer für  $k+1 = r$ , und  $H_k(X_r, X_{r-1}) = \{0\}$  außer für  $k = r$ .

Hieraus folgt, dass  $H_k(h_r)$  surjektiv ist für  $r = k+1$ , injektiv ist für  $r = k$ , und sogar ein Isomorphismus ist für alle anderen  $r$  und  $k$ .

Offensichtlich gilt für alle  $m < n \in \mathbf{Z}$ , dass

$$i_{m,n} = i_{n-1,n} \circ i_{n-2,n-1} \circ \cdots \circ i_{m,m+1} = h_n \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ h_{m+1}$$

und somit gilt für jedes  $k$ , dass

$$H_k(i_{m,n}) = H_k(h_n) \circ H_k(h_{n-1}) \circ \cdots \circ H_k(h_{m+1}). \quad (5.9)$$

Die Faktoren  $H_k(h_p)$  in (5.9) sind alle Isomorphismen, wenn unter den Indizes  $p$  mit  $m+1 \leq p \leq n$  weder  $k$  noch  $k+1$  vorkommt, also wenn  $k+1 < m+1$  (d. h., wenn  $k < m$ ) oder wenn  $k > n$ . In diesem Fall ist  $H_k(i_{m,n})$  ein Isomorphismus.

Wenn bis auf eine Ausnahme alle Faktoren  $H_k(h_p)$  in (5.9) Isomorphismen sind, dann können wir über die Verknüpfung immer noch etwas sagen. Diese Situation tritt auf, wenn  $k = m$  (dann ist  $k < k+1 = m+1$  und  $H_k(h_{m+1})$  ist surjektiv, die anderen Faktoren sind Isomorphismen, und  $H_k(i_{m,n})$  ist also surjektiv) oder wenn  $k = n$ , in welchem Fall  $H_k(h_n)$  injektiv ist, die anderen Faktoren  $H_k(h_p)$  Isomorphismen sind weil  $p < n = k < k+1$ , und  $H_k(i_{m,n})$  als Verknüpfung dieser Homomorphismen somit injektiv ist.

Damit haben wir f) bewiesen. Man beachte, dass die Aussage auch für  $m = n$  richtig ist (dann ist  $i_{m,n} = \text{id}_{X_m}$ ).

Als Nächstes beweisen wir e).

Sei  $k \leq n$ . Sei  $\gamma \in H_k(X)$  und sei  $c \in C_k(X)$  ein singulärer Zyklus mit  $\gamma = [c]$ .

Aus Bedingung 5.31 b) folgt, dass es ein  $m \in \mathbf{Z}$  gibt (das wir natürlich beliebig groß wählen können), so dass jeder singuläre Simplex in  $c$  sein Bild in  $X_m$  hat. Wir wählen ein solches  $m \geq n$ .

Wir schreiben  $c'$  für die Kette  $c$  aufgefasst als Kette in  $C_k(X_m)$ , und wir haben  $c = (i_m)_\#(c')$ . Natürlich hat  $c$  auch in  $C_k(X_m)$  den Rand 0, d. h., auch  $c'$  ist ein Zyklus. Wir haben

$$\gamma = [c] = [(i_m)_\#(c')] = H_k(i_m)([c'])$$

und insbesondere ist  $\gamma \in \text{Bild}(H_k(i_m))$ .

Dieses  $m$  kann von der Wahl von  $c$  abhängen, aber nach unserer Wahl gilt  $m \geq n$ . Offensichtlich ist  $i_n = i_m \circ i_{n,m}$ , also gilt auch

$$H_k(i_n) = H_k(i_m) \circ H_k(i_{n,m}), \quad (5.10)$$

und da  $H_k(i_{n,m})$  nach Teil f) surjektiv ist weil  $k \leq n$ , ist  $\text{Bild } H_k(i_n) = \text{Bild } H_k(i_m)$  und insbesondere  $\gamma \in \text{Bild}(H_k(i_n))$ .

Dies gilt für jedes  $\gamma \in H_k(X)$ , also ist  $H_k(i_n)$  surjektiv wenn  $k \leq n$ .

Nun sei  $k < n$  und sei  $\gamma \in H_k(X_n)$  mit  $H_k(i_n)(\gamma) = 0$ . Sei  $c$  ein Zyklus in  $C_k(X_n)$  mit  $\gamma = [c]$ .

$H_k(i_n)(\gamma) = 0$  bedeutet, dass  $(i_n)_\#(c)$  ein Rand ist in  $C_k(X)$ . Es gibt also eine Kette  $b \in C_k(X)$  mit  $(i_n)_\#(c) = \partial b$ .

Wieder folgt aus Bedingung 5.31 b), dass es ein  $m \in \mathbf{Z}$  gibt (das wir natürlich beliebig groß und insbesondere  $> n$  wählen können), so dass jeder singuläre Simplex in  $b$  sein Bild in  $X_m$  hat.

Wir schreiben  $b'$  für die Kette  $b$  aufgefasst als Kette in  $C_k(X_m)$ . Es gilt

$$(i_m)_\#(\partial b') = \partial((i_m)_\#(b')) = \partial b = (i_n)_\#(c) = ((i_m)_\# \circ (i_{n,m})_\#)(c).$$

Weil die Abbildung  $i_m$  als Inklusion injektiv ist, ist klar, dass auch  $(i_m)_\#$  injektiv ist und wir können deshalb folgern, dass  $\partial b' = (i_{n,m})_\#(c)$ .

Wir haben also  $H_k(i_{n,m})(\gamma) = [(i_{n,m})_\#(c)] = 0$  und weil  $H_k(i_{n,m})$  nach Teil f) ein Isomorphismus ist (denn  $k < n$ ), ist  $\gamma = 0$ . Dies zeigt, dass  $H_k(i_n)$  injektiv ist für  $n > k$ , also ein Isomorphismus ist, da wir schon wussten, dass es surjektiv ist.

Dies beweist Teil e).

Teile a) und b) folgen sofort aus Teil f), denn wenn  $m \leq n < k$  oder wenn  $k < m \leq n$ , so ist  $H_k(i_{m,n})$  ein Isomorphismus  $H_k(X_m) \rightarrow H_k(X_n)$ .

Teil c) folgt aus Teil e), denn wenn  $k \leq n$ , so enthält die lange exakte Homologiefolge des Paares  $(X, X_n)$  den Abschnitt

$$H_k(X_n) \xrightarrow{H_k(i_n)} H_k(X) \rightarrow H_k(X, X_n) \rightarrow H_{k-1}(X_n) \xrightarrow{H_{k-1}(i_n)} H_{k-1}(X),$$

in dem  $H_k(i_n)$  auf jeden Fall surjektiv und  $H_{k-1}(i_n)$  ein Isomorphismus ist.

Wegen der Exaktheit an den Stellen  $H_k(X)$  und  $H_{k-1}(X_n)$  müssen die beiden mittleren Pfeile die Nullabbildung sein, und somit ist  $H_k(X, X_n)$  (der Kern der rechten mittleren Nullabbildung) gleich  $\{0\}$  (dem Bild der linken mittleren Nullabbildung).

Betrachten wir jetzt Teil g). Als Paar von Abbildungen, also als Morphismus von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ , ist  $i_n^C := (i_n, \text{id}_C)$ .

Dieser  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismus induziert einen Morphismus eines Abschnitts der langen exakten Homologiefolge wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(C) & \longrightarrow & H_k(X_n) & \longrightarrow & H_k(X_n, C) & \longrightarrow & H_{k-1}(C) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_n) \\ \text{id} \downarrow & & H_k(i_n) \downarrow & & H_k(i_n^C) \downarrow & & \text{id} \downarrow & & H_{k-1}(i_n) \downarrow \\ H_k(C) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, C) & \longrightarrow & H_{k-1}(C) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \end{array}$$

Die äußeren vier senkrechten Abbildungen sind alle Isomorphismen wenn  $k < n$ , nach Teil e). Aus dem 5-er Lemma folgt, dass dann auch  $H_k(i_n^C)$  ein Isomorphismus ist.

Wenn  $k = n$ , dann ist  $H_n(i_n)$  noch surjektiv, aber  $H_{n-1}(i_n)$  und natürlich  $\text{id}_{H_{n-1}(C)}$  bleiben Isomorphismen. Anwendung von Lemma 5.34 b) in Bezug auf die rechten vier Spalten im Diagramm zeigt, dass  $H_n(i_n^C)$  surjektiv ist.

Teil h) wird auf ähnliche Weise bewiesen. Als Paar von Abbildungen, also als Morphismus von  $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ , ist  $j_{m,n} := (\text{id}_X, i_{m,n})$ .

Dieser  $\mathbf{Top}^2$ -Morphismus induziert einen Morphismus eines Abschnitts der langen exakten Homologiefolgen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_k(X_m) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, X_m) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_m) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\
 \downarrow H_k(i_{m,n}) & & \downarrow \text{id} & & \downarrow H_k(j_{m,n}) & & \downarrow H_{k-1}(i_{m,n}) & & \downarrow \text{id} \\
 H_k(X_n) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, X_n) & \longrightarrow & H_{k-1}(X_n) & \longrightarrow & H_{k-1}(X)
 \end{array}$$

Die äußeren vier senkrechten Abbildungen sind alle Isomorphismen wenn  $k - 1 > n$ , nach Teil f). Unabhängig von dem Wert von  $k \in \mathbf{N}$  sind sie auch Isomorphismen wenn  $n < 0$ , weil dann immer noch gilt  $k - 1 > n$ , außer eventuell für  $k = 0$ , und in diesem Fall ist zumindest  $H_0(i_{m,n})$  ein Isomorphismus nach Teil f), da  $n < 0$ , und  $H_{-1}(i_{m,n})$  ist die Abbildung  $\{0\} \longrightarrow \{0\}$  und somit auch ein Isomorphismus; die beiden anderen äußeren senkrechten Abbildungen sind Identitäten.

Aus dem 5-er Lemma folgt in den genannten Situationen, dass auch der mittlere senkrechte Pfeil  $H_k(j_{m,n})$  ein Isomorphismus ist.

Wenn  $k = n + 1$  (oder anders gesagt, wenn  $k - 1 = n$ ), so ist  $H_{k-1}(i_{m,n})$  noch injektiv nach Teil f) und alle anderen senkrechten Abbildungen im Diagramm sind noch Isomorphismen. Aus Lemma 5.34 a) angewendet auf den linken vier Spalten des Diagramms folgt, dass  $H_k(j_{m,n})$  injektiv ist.

Teil d) folgt, zum Schluss, sofort aus Teil h), denn wenn  $m < n$  Zahlen sind mit  $n + 1 < k$  oder  $n < 0$  (dann erfüllt  $m$  die gleiche Bedingung), so ist  $H_k(j_{m,n})$  ein Isomorphismus  $H_k(X, X_m) \longrightarrow H_k(X, X_n)$ . ■

Für einen zellulären Raum  $X$  können wir  $H_k(X)$  also schon mit der  $k + 1$ -ten Filtrierungsstufe genau ausrechnen, und wenn wir beobachten, wie  $H_k(X_n)$  sich mit steigendem  $n$  verhält, so nimmt diese Homologiegruppe bis einschließlich  $n = k - 1$  einen festen „Grundwert“ an, und verändert sich von diesem zum endgültigen Wert  $H_k(X)$  innerhalb von nur zwei Stufen.

Entsprechend ändern sich die relativen Homologiegruppen  $H_k(X, X_n)$  für steigendes  $n$  nur zwischen den Werten  $n = k - 2$  und  $n = k$ .

Weil die  $k$ -te Homologie eines zellulären Raumes in der Nähe der  $k$ -ten Filtrierungsstufe bestimmt wird, kann man das ausnutzen, um sie mit Hilfe der Filtrierung auf eine neue einfache Art zu berechnen.

**Definition 5.36** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eine Filtrierung von  $X$ . Wir definieren einen Kettenkomplex

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = (W_*(X), d)$$

wie folgt.

Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  definieren wir die  $n$ -te Kettengruppe von  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  als

$$W_n(X) := H_n(X_n, X_{n-1}).$$

Wir müssen noch den Randoperator konstruieren.

Für jedes  $k \in \mathbf{Z}$  sei

$$j_k: (X_k, \emptyset) \longrightarrow (X_k, X_{k-1})$$

die Inklusion und sei

$$\beta_k: H_k(X_k, X_{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(X_{k-1})$$

der verbindende Homomorphismus aus der langen exakten Homologiefolge des Paares  $(X_k, X_{k-1})$ . Uns interessieren nur die genannten, der Filtrierungsstufe entsprechenden Homologiegruppen, und deshalb vereinbaren wir, dass der Index  $k$  in den Bezeichnungen  $j_k$  und  $\beta_k$  nicht nur die Dimension der Homologiegruppen angibt, sondern auch, zwischen welchen Räumen oder der Homologie welcher Räume oder Raumpaare diese Abbildungen zu verstehen sind. Ändert man den Index, ändern sich die betrachteten Filtrierungsstufen gleich mit.

Die Inklusion  $j_{n-1}: (X_{n-1}, \emptyset) \longrightarrow (X_{n-1}, X_{n-2})$  induziert einen Homomorphismus

$$(j_{n-1})_* = H_{n-1}(j_{n-1}): H_{n-1}(X_{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$$

(der auch in der langen exakten Homologiefolge des Paares  $(X_{n-1}, X_{n-2})$  vorkommt).

Wir definieren den  $n$ -ten Randoperator des Kettenkomplexes  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  als

$$d_n := H_{n-1}(j_{n-1}) \circ \beta_n = (j_{n-1})_* \circ \beta_n.$$

Dies ist tatsächlich ein Homomorphismus

$$W_n(X) = H_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) = W_{n-1}(X).$$

Wir müssen nur noch nachprüfen, dass  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ . Das sieht man am einfachsten in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(X_n, X_{n-1}) & & & & & & \\
 \beta_n \downarrow & \searrow d_n & & & & & \\
 H_{n-1}(X_{n-1}) & \xrightarrow{(j_{n-1})_*} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & H_{n-2}(X_{n-2}) & & \\
 & & \searrow d_{n-1} & & \downarrow (j_{n-1})_* & & \\
 & & & & H_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-3}) & & 
 \end{array}$$

Der Homomorphismus  $d_{n-1} \circ d_n$  schreibt sich als eine Verknüpfung von vier Homomorphismen aus verschiedenen langen exakten Homologiefolgen, die aber insbesondere die Verknüpfung  $\beta_{n-1} \circ (j_{n-1})_*$  der beiden aufeinanderfolgenden Homomorphismen in der mittleren Zeile beinhaltet. Diese Zeile ist ein Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge des Raumpaars  $(X_{n-1}, X_{n-2})$ . Wegen der Exaktheit ist  $\beta_{n-1} \circ (j_{n-1})_* = 0$  und somit auch  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ .

Den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  nennt man den **zellulären Kettenkomplex** des topologischen Raumes  $X$  mit der Filtrierung  $\mathcal{F}$ .

Man beachte, dass auch für den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  die Kettengruppen in negativen Dimensionen  $n$  trivial sind (da sie als die  $n$ -te Homologie eines Raumpaars definiert sind und die singuläre Homologie in negativen Dimensionen verschwindet). Das gilt auch wenn die Filtrierung  $\mathcal{F}$  in negativen Dimensionen nicht trivial oder konstant ist!

**Lemma und Definition 5.37** *Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume.*

*Sei  $\mathcal{F} = \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eine Filtrierung auf  $X$  und sei  $\mathcal{F}' = \{Y_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  eine Filtrierung auf  $Y$ . Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine zelluläre stetige Abbildung, d. h., eine stetige Abbildung, so dass  $f(X_n) \subseteq Y_n$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ .*

*Dann ist  $f$  auch eine stetige Abbildung  $(X_n, X_{n-1}) \rightarrow (Y_n, Y_{n-1})$  für jedes  $n \in \mathbf{Z}$ . Setze*

$$W_n(f) := H_n(f): W_n(X) = H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow H_n(Y_n, Y_{n-1}) = W_n(Y).$$

*Die Abbildungen  $W_n(f)$  bilden eine Kettenabbildung*

$$W_*(f): \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{F}'}$$

*Beweis.* Die Randoperatoren  $d_n$  der beiden zellulären Kettenkomplexe sind Verknüpfungen von Homomorphismen aus den langen exakten Homologiefolgen von Raumpaaren von Filtrierungsstufen von  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$ , und diese

Homomorphismen kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen Homologiefolgen mit den  $H_n(f)$ . Deshalb kommutiert auch  $d$  mit  $W_*(f)$ .

Genauer haben wir für jedes  $n$ :

$$\begin{aligned} d_n(Y) \circ W_n(f) &= (j_{n-1}(Y))_* \circ \beta_n(Y) \circ H_n(f) \\ &= (j_{n-1}(Y))_* \circ H_{n-1}(f) \circ \beta_n(X) \\ &= H_{n-1}(f) \circ (j_{n-1}(X))_* \circ \beta_n(X) = W_{n-1}(f) \circ d_n(X) \end{aligned}$$

(wobei die Abbildungen  $H_k(f)$ , die hier erscheinen, auf verschiedenen Räumen und Raumpaaren definiert sind, was wir in der Notation nicht hervorheben). Diese Gleichung besagt, dass  $W_*(f)$  eine Kettenabbildung ist. ■

In Definition 5.36 muss die Filtrierung nicht zellulär sein — den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  erhält man auch ohne diese Voraussetzung. Aber weil die Konstruktion von  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  jeweils nur die speziellen Homologiegruppen  $H_n(X_n, X_{n-1})$  mit einbaut, kann dieser Kettenkomplex nur dann etwas sinnvolles über die singuläre Homologie von  $X$  aussagen, wenn die relative Homologie der Paare  $(X_n, X_{n-1})$  tatsächlich in der  $n$ -ten Dimension konzentriert ist, und das ist insbesondere der Fall, wenn die Filtrierung zellulär ist. Dann kann man mit dem zellulären Kettenkomplex die singuläre Homologie von  $X$  korrekt berechnen.

**Bemerkung und Definition 5.38** Wie man sehr leicht nachprüft, bilden die zellulären Räume und zellulären Abbildungen eine Kategorie **Zell**.

Man sieht auch sofort, dass die Zuordnung des zellulären Kettenkomplexes zu einem zellulären Raum, und der zellulären Kettenabbildung  $W_*(f)$  zu einer zellulären Abbildung  $f$ , einen kovarianten Funktor  $W_*: \mathbf{Zell} \rightarrow \mathbf{KK}$  bildet, genannt der **zelluläre Kettenkomplexfunktor**.

Das ist trivial, denn für jedes  $k$  ist  $W_k(f) = H_k(f)$  zwischen den Homologiegruppen bestimmter Raumpaare, und  $W_k(f)$  verhält sich richtig für Identitäten und bei Verknüpfung von Abbildungen, weil  $H_k(f)$  dies schon tut.

Genauere Details bleiben dem Leser überlassen.

**Lemma 5.39 (Exaktes Homologiedreieck eines Raumtripels)**

Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel und seien  $\tilde{i}: (A, B) \rightarrow (X, B)$  und  $\tilde{j}: (X, B) \rightarrow (X, A)$  die Inklusionen der genannten Raumpaare. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H_*(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_*(X, B) \\ & \searrow \tilde{\beta} & \swarrow \tilde{j}_* \\ & H_*(X, A) & \end{array} \quad (5.11)$$

Grad  $-1$

zwischen den graduierten Homologiegruppen der Paare  $(A, B)$ ,  $(X, B)$  und  $(X, A)$ , mit den von den Inklusionen induzierten Grad 0 Homomorphismen  $\tilde{i}_* = H_*(\tilde{i})$  und  $\tilde{j}_* = H_*(\tilde{j})$  und mit einem Grad  $-1$  Homomorphismus

$$\tilde{\beta}: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A, B),$$

den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen und der wie folgt leicht zu konstruieren ist.

Sei  $\gamma \in H_*(X, A)$  und sei  $z \in C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$  ein beliebiger Zyklus mit Homologieklassse  $\gamma$ . Nach der Definition von  $C_*(X, A)$  ist  $z$  die Restklasse  $c + C_*(A)$  einer Kette  $c \in C_*(X)$ . Dass  $z$  ein relativer Zyklus ist bedeutet, dass  $\partial c$  ein Element des Nenners  $C_*(A) \subseteq C_*(X)$  des Quotienten  $C_*(X, A)$  ist. Als Rand in  $C_*(X)$  ist  $\partial c$  ein Zyklus in  $C_*(A)$ , und somit ist  $\partial c + C_*(B)$  ein Zyklus in  $C_*(A, B)$ . Es ist

$$\tilde{\beta}(\gamma) = [\partial c + C_*(B)] \in H_*(A, B).$$

Das exakte Dreieck (5.11) heißt das **exakte Homologiedreieck** des topologischen Raumtripels  $(X, A, B)$ .

Wenn  $B = \emptyset$ , so ist das exakte Homologiedreieck des Tripels  $(X, A, B)$  nichts anderes als das exakte Homologiedreieck des Paares  $(X, A)$ .

*Beweis.* Die kurze Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_*(A, B) & \xrightarrow{C_*(\tilde{i})} & C_*(X, B) & \xrightarrow{C_*(\tilde{j})} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \frac{C_*(A)}{C_*(B)} & & \frac{C_*(X)}{C_*(B)} & & \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \end{array} \quad (5.12)$$

ist natürlich, weil die Inklusionen  $\tilde{i}$  und  $\tilde{j}$  offenbar natürliche Transformationen sind zwischen den Funktoren  $\mathbf{Top}^3 \longrightarrow \mathbf{Top}^2$ , die einem Tripel  $(X, A, B)$  die Paare  $(A, B)$ ,  $(X, B)$  und  $(X, A)$  zuordnen, und sie ist exakt, wie wir jetzt kurz nachprüfen.

$C_*(\tilde{i}) = \tilde{i}_\#$  ist injektiv, denn wenn  $c + C_*(B) \in C_*(A, B)$  und wenn

$$\tilde{i}_\#(c + C_*(B)) = 0 \in C_*(X, B),$$

so ist  $c + C_*(B) = 0 \in C_*(X, B)$ , also  $c \in C_*(B)$ , also  $c + C_*(B) = 0$  auch in  $C_*(A, B)$ .

Für eine relative Kette  $c + C_*(B) \in C_*(X, B)$  ist

$$\tilde{j}_\#(c + C_*(B)) = 0 \in C_*(X, A)$$

genau dann, wenn  $c + C_*(A) = 0 \in C_*(X, A)$ , also wenn  $c \in C_*(A) \subseteq C_*(X)$ , und das ist genau dann der Fall, wenn  $c + C_*(B) \in \tilde{i}_\#(C_*(A, B)) \subseteq C_*(X, B)$ . (Für die Richtung „ $\Leftarrow$ “ beachte man, dass wenn  $c + C_*(B) = \tilde{i}_\#(c' + C_*(B))$  für ein Element  $c' \in C_*(A)$ , dann ist  $c - c' \in C_*(B) \subseteq C_*(A)$  und somit ist auch  $c \in C_*(A)$ .)

Das bedeutet, dass die Folge an der Stelle  $C_*(X, B)$  exakt ist.

Und schließlich ist  $\tilde{j}_\#$  surjektiv, denn jede Restklasse  $c + C_*(A) \in C_*(X, A)$  kann man schreiben als  $\tilde{j}_\#(c + C_*(B))$  mit  $c + C_*(B) \in C_*(X, B)$ .

Also ist die kurze exakte Folge von Kettenkomplexen (5.12) exakt und natürlich. Nach Satz 3.14 hat sie ein natürliches exaktes Homologiedreieck (5.11). Wir müssen nur noch zeigen, dass  $\tilde{\beta}$  die angegebene Gestalt hat.

Das folgt sofort aus der Beschreibung des verbindenden Homomorphismus in der Aussage von Satz 3.14. Sei  $\gamma \in H_*(X, A)$  und sei  $z \in C_*(X, A)$  ein beliebiger Zyklus mit Homologiekategorie  $\gamma$ . Nach der Definition von  $C_*(X, A)$  ist  $z$  die Restklasse  $c + C_*(A)$  einer Kette  $c \in C_*(X)$ . Dass  $c + C_*(A)$  ein relativer Zyklus ist bedeutet, dass  $\partial c \in C_*(A)$ .

Wir müssen zunächst ein Urbild von  $z$  unter  $\tilde{j}$  finden; die relative Kette  $c + C_*(B)$  ist ein solches Urbild.

Wir müssen dann den Rand  $\partial c + C_*(B)$  dieses Urbilds bilden; diese Kette liegt automatisch im Bild von  $\tilde{i}$ , und zwar ist sie Bild unter  $\tilde{i}$  einer eindeutig bestimmten Kette von  $C_*(A, B)$ , und diese Kette ist ein relativer Zyklus und repräsentiert die Homologiekategorie  $\tilde{\beta}(\gamma)$ .

In unserem Fall ist  $\partial c + C_*(B)$  das Bild unter  $\tilde{i}$  der entsprechenden Kette  $\partial c + C_*(B) \in C_*(A, B)$ . Also ist  $\tilde{\beta}(\gamma) = [\partial c + C_*(B)]$ , wie behauptet.

Wenn  $B = \emptyset$ , so verschwinden die Nenner in den Quotienten  $C_*(A, B)$  und  $C_*(X, B)$  und die kurze exakte Folge (5.12) wird zur kurzen exakten Folge (3.14) aus Bemerkung 3.15, der kurzen exakten Kettenkomplexfolge des Raumpaars  $(X, A)$ . Deshalb wird das exakte Homologiedreieck (5.11) in dieser Situation zum exakten Homologiedreieck (3.15) des Paares  $(X, A)$ . ■

**Bemerkung 5.40** Analog zur Situation für Raumpaare (vergleiche Bemerkung 3.17) kann man das exakte Homologiedreieck eines Tripels „abwickeln“ zu einer langen exakten Homologiefolge

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\tilde{j}_*} & H_{n+1}(X, A) & & & & \\
 & & \downarrow \tilde{\beta}_{n+1} & & & & \\
 & & H_n(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_n(X, B) & \xrightarrow{\tilde{j}_*} & H_n(X, A) & (5.13) \\
 & & & & & & \downarrow \tilde{\beta}_n & \\
 & & & & & & H_{n-1}(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} \cdots
 \end{array}$$

der Homologiegruppen der drei beteiligten Raumpaare in den einzelnen Dimensionen.

Diese exakte Folge heißt die **lange exakte Homologiefolge** des Raumtripels  $(X, A, B)$ .

Neben der expliziten Beschreibung in Lemma 5.39 des verbindenden Homomorphismus  $\tilde{\beta}$  ist folgende Faktorisierung dieses Homomorphismus nützlich.

**Bemerkung 5.41** Sei  $(X, A, B)$  ein topologisches Raumtripel und sei

$$\tilde{\beta}: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A, B)$$

der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks dieses Tripels.

Sei  $\lambda$  die Inklusion  $A = (A, \emptyset) \longrightarrow (A, B)$  und sei  $\beta: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(X)$  der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks des Paares  $(X, A)$ .

Dann ist

$$\tilde{\beta} = H_*(\lambda) \circ \beta. \tag{5.14}$$

*Beweis.* Die Inklusion  $(X, A, \emptyset) \longrightarrow (X, A, B)$  und damit verbunden die Inklusionen  $\lambda: (A, \emptyset) \longrightarrow (A, B)$  und  $\mu: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, B)$  zusammen mit der Identität von  $(X, A)$  induzieren einen Morphismus

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_*(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \\ & & \lambda_\# \downarrow & & \mu_\# \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & C_*(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_\#} & C_*(X, B) & \xrightarrow{\tilde{j}_\#} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

zwischen den kurzen exakten Kettenkomplexfolgen der Tripel  $(X, A, \emptyset)$  und  $(X, A, B)$ , der wiederum wegen der Natürlichkeit einen Morphismus zwischen den exakten Homologiedreiecken der beiden Raumtripel induziert.

Dieser Morphismus der Homologiedreiecke beinhaltet für die Dreiecksseite mit dem verbindenden Homomorphismus ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} C_*(X, A) & \xrightarrow{\beta} & C_*(A) \\ \text{id} \downarrow & & \lambda_* \downarrow \\ C_*(X, A) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & C_*(A, B) \end{array}$$

und die Kommutativität besagt, dass  $\lambda_* \circ \beta = \tilde{\beta}$ . ■

**Satz 5.42** Sei  $(X, \mathcal{F})$  ein zellulärer Raum und sei  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = (W_*(X), d)$  sein zellulärer Kettenkomplex.

Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) \cong H_*(X, X_{-1})$$

(in anderen Worten, eine natürliche Äquivalenz zwischen dem Funktor  $H \circ W_*$  und dem Funktor  $H_* \circ R_{-1}$ , wo für jedes  $p \in \mathbf{Z}$  der Funktor  $R_p: \mathbf{Zell} \rightarrow \mathbf{Top}^2$  gegeben ist durch  $R_p(X, \mathcal{F}) := (X, X_p)$ ).

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbf{Z}$ . Für  $n < 0$  ist nichts zu beweisen, denn in negativen Dimensionen verschwinden schon die Kettengruppen von  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  und  $C_*(X, X_{-1})$  und somit auch die Homologie. Wir können also annehmen, dass  $n \in \mathbf{N}$ .

Wir betrachten die  $n$ -te zelluläre Kettengruppe von  $(X, \mathcal{F})$  und die dort eingehenden und ausgehenden Randoperatoren  $d_{n+1}$  und  $d_n$ , und wir untersuchen diese Abbildungen und ihr Umfeld in der Homologie von  $X$  und seinen Filtrierungsstufen.

Für jedes  $k \in \mathbf{N}$  sei  $\lambda_k$  die Inklusion  $(X_k, \emptyset) \rightarrow (X_k, X_{-1})$  und sei  $\tilde{j}_k$  die Inklusion  $(X_k, X_{-1}) \rightarrow (X_k, X_{k-1})$  (so dass  $j_k = \tilde{j}_k \circ \lambda_k$ ).

Ferner sei  $\tilde{h}_k$  die Inklusion  $(X_{k-1}, X_{-1}) \rightarrow (X_k, X_{-1})$  und sei  $\tilde{i}_k$  die Inklusion  $(X_k, X_{-1}) \rightarrow (X, X_{-1})$ .

Sei

$$\tilde{\beta}_k = H_{k-1}(\lambda_{k-1}) \circ \beta_k: H_k(X_k, X_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X_{k-1}, X_{-1}).$$

Nach Bemerkung 5.41 ist  $\tilde{\beta}_k$  der  $k$ -te verbindende Homomorphismus aus der langen exakten Homologiefolge des Tripels  $(X_k, X_{k-1}, X_{-1})$ .

Für jedes  $k \geq 1 \in \mathbf{N}$  ist

$$d_k = H_{k-1}(j_{k-1}) \circ \beta_k = H_{k-1}(\tilde{j}_{k-1}) \circ H_{k-1}(\lambda_{k-1}) \circ \beta_k = H_{k-1}(\tilde{j}_{k-1}) \circ \tilde{\beta}_k$$

und wir werden fortan mit dieser neuen Faktorisierung von  $d_k$  arbeiten.

Für  $k = 0$  ist  $\tilde{j}_{k-1}$  nicht definiert, aber in diesem Fall brauchen wir kein Analogon zur oben genannten Faktorisierung, denn es ist ohnehin  $d_0 = \mathbf{0}$ .

Als Erstes bemerken wir, dass  $H_k(\tilde{j}_k)$  für jedes  $k \geq 0$  injektiv ist, denn wenn wir den großen Raum  $X$  (und alle Filtrierungsstufen  $X_l$  für  $l > k$ ) durch den neuen Raum  $X' := X_k$  ersetzen, so ist die sich ergebende Filtrierung von  $X'$  immer noch zellulär und  $\tilde{j}_k$  können wir auffassen als die Abbildung  $j_{-1, k-1}$  aus Satz 5.35 (für den zellulären Raum  $X' = X_k$ ); nach Teil h) jenes Satzes ist  $H_k(\tilde{j}_k) = H_k(j_{-1, k-1})$  injektiv.

Zweitens ist die Folge

$$H_k(X_k, X_{-1}) \xrightarrow{H_k(\tilde{j}_k)} H_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\tilde{\beta}_k} H_k(X_{k-1}, X_{-1})$$

an der Stelle  $H_k(X_k, X_{k-1})$  exakt, denn dies ist ein Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge des Raumtripels  $(X_k, X_{k-1}, X_{-1})$ .

Drittens,  $H_k(\tilde{i}_{k+1})$  ist für  $k \in \mathbf{N}$  ein Isomorphismus nach Satz 5.35 g), denn  $\tilde{i}_{k+1} = i_{k+1}^C$  für die Teilmenge  $C = X_{-1}$ .

Die Berechnung der Homologie des zellulären Kettenkomplexes  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  lässt sich in folgendem kommutativen Diagramm nachvollziehen:

$$\begin{array}{ccccc}
 W_{n+1}(X) & & & & \\
 \parallel & \searrow^{d_{n+1}} & & & \\
 H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & & & & \\
 \tilde{\beta}_{n+1} \downarrow & & & & \\
 H_n(X_n, X_{-1}) & \xrightarrow{H_n(\tilde{j}_n)} & H_n(X_n, X_{n-1}) = W_n(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_n} & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{-1}) \\
 (\tilde{h}_{n+1})_* \downarrow & & & & \downarrow H_{n-1}(\tilde{j}_{n-1}) \\
 H_n(X_{n+1}, X_{-1}) & & & & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\
 \downarrow & & \searrow^{d_n} & & \parallel \\
 H_n(X_{n+1}, X_n) & \xrightarrow{H_n(\tilde{i}_{n+1})} & & & W_{n-1}(X) \\
 \parallel & \cong & & & \\
 \{0\} & & H_n(X, X_{-1}) & & 
 \end{array}$$

Hier sind die waagerechten und senkrechten Folgen von Gruppen und Homomorphismen Abschnitte aus den langen exakten Homologiefolgen von Raumtripeln und deshalb exakt (der Homomorphismus  $H_{n-1}(\tilde{j}_{n-1})$  in der rechten senkrechten Folge ist nicht definiert für  $n = 0$ , aber in dem Fall sind alle Gruppen in diesem Teil des Diagramms  $\{0\}$ ).

In der linken Spalte ist  $H_n(X_{n+1}, X_n) = \{0\}$  weil die Filtrierung zellulär ist. Wegen der Exaktheit dieser Spalte ist der Homomorphismus  $(\tilde{h}_{n+1})_*$  surjektiv und somit induziert er einen Isomorphismus

$$\overline{(\tilde{h}_{n+1})_*}: \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Ker}(\tilde{h}_{n+1})_*} = \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow \text{Bild}(\tilde{h}_{n+1})_* = H_n(X_{n+1}, X_{-1}).$$

Verknüpft man diesen mit dem Isomorphismus  $H_n(\tilde{i}_{n+1})$  so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\varphi_n := H_n(\tilde{i}_{n+1}) \circ \overline{(\tilde{h}_{n+1})_*}: \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow H_n(X, X_{-1}). \quad (5.15)$$

Dieser Isomorphismus ist natürlich, da er durch die Anwendung von Funktoren auf Inklusionen von Raumpaaren entsteht, und diese Inklusionen sind natürliche Transformationen zwischen verschiedenen Funktoren  $\mathbf{Zell} \rightarrow \mathbf{Top}^2$ .

Wir haben schon gesehen, dass  $H_k(\tilde{j}_k)$  injektiv ist für jedes  $k \geq 0$ . Für  $n \geq 1$  folgt daraus und weil  $d_n = H_{n-1}(\tilde{j}_{n-1}) \circ \tilde{\beta}_n$ , dass

$$Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) = \text{Ker } d_n = \text{Ker } \tilde{\beta}_n;$$

das gilt aber auch für  $n = 0$ , da  $d_0 = \mathbf{0} = \tilde{\beta}_0$ .

Aus der Injektivität folgt auch (für alle  $n \in \mathbf{N}$ ), dass  $H_n(\tilde{j}_n)$  die Untergruppe  $\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1} \subseteq H_n(X_n, X_{-1})$  isomorph auf

$$B_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) = \text{Bild } d_{n+1}$$

abbildet, während es die ganze Gruppe  $H_n(X_n, X_{-1})$  isomorph auf

$$\text{Bild } H_n(\tilde{j}_n) = \text{Ker } \tilde{\beta}_n = Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

abbildet.

Somit induziert  $H_n(\tilde{j}_n)$  einen Isomorphismus der Quotienten

$$\overline{H_n(\tilde{j}_n)}: \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow \frac{Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})}{B_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})} = H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}),$$

und dieser Isomorphismus ist auch natürlich, weil in seine Konstruktion nur die natürlichen Transformationen  $\tilde{j}_n$  und  $\tilde{\beta}_{n+1}$  eingehen, sowie Funktoren auf den Filtrierungsstufen von  $\mathcal{F}$ , die letztendlich Funktoren auf  $\mathbf{Zell}$  sind.

Die Verknüpfung der natürlichen Isomorphismen

$$H_n(X, X_{-1}) \xleftarrow[\cong]{\varphi_n} \frac{H_n(X_n, X_{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \xrightarrow[\cong]{\overline{H_n(\tilde{j}_n)}} H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

(das heißt genauer, die Verknüpfung einer dieser Isomorphismen mit der Umkehrabbildung des anderen) liefert einen natürlichen Isomorphismus

$$H_n(X, X_{-1}) \cong H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

für jedes  $n \in \mathbf{N}$ . ■

**Korollar und Definition 5.43** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex und  $(A, \mathcal{Z}_A)$  ein CW-Unterkomplex von  $(X, \mathcal{Z})$ . Sei  $\mathcal{F}_A$  die durch die relativen  $n$ -Skelette  $X_A^n$  gegebene zelluläre Filtrierung von  $X$ .

Den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A} =: (W_*(X, A), d)$  nennen wir den (relativen) zellulären Kettenkomplex des CW-Paares  $(X, A)$ .

Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A}) \cong H_*(X, A).$$

Wenn  $A = \emptyset$  und wenn  $\mathcal{F}$  die durch die Skelette  $X^n$  gegebene Filtrierung von  $X$  ist, so nennen wir den Kettenkomplex  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} =: (W_*(X), d)$  den (absoluten) **zellulären Kettenkomplex des CW-Raumes  $X$** .

Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) \cong H_*(X).$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt direkt aus Satz 5.42, da

$$X_A^{-1} = X^{-1} \cup A = \emptyset \cup A = A$$

nach Definition 5.29.

Die Aussage für den Fall  $A = \emptyset$  ist nur ein Spezialfall hiervon. ■

Wir wollen dieses neue Werkzeug gleich ausprobieren und einige bisher schwer zu erschließende Homologiegruppen ausrechnen. Eine kleine Vorbereitung wird uns die Arbeit erleichtern.

In Lemma 5.30 d) haben wir die einzelnen zellulären Kettengruppen genau beschrieben. Im folgenden Lemma geben wir noch eine nützliche explizite Beschreibung des zellulären Randoperators.

**Lemma 5.44** a) Sei  $n > 0 \in \mathbf{N}$  und sei  $\mathcal{Z}$  die CW-Zerlegung von  $D^n$  aus Beispiel 5.13 f). Diese Zerlegung hat genau drei Zellen, eine  $n$ -Zelle  $e_2 := E^n$ , eine  $n-1$ -Zelle  $e_1 := S_+^{n-1}$  und eine 0-Zelle  $e_0$  bestehend aus dem Südpol von  $S^{n-1}$ .

Sei  $\mathcal{W} = (W_*(D^n), d)$  der zelluläre Kettenkomplex des CW-Raumes  $D^n$ .

Sei  $\gamma_n$  ein Erzeugendes der  $n$ -ten zellulären Kettengruppe

$$W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z},$$

und sei  $c_n$  eine Kette in  $C_n(D^n)$ , so dass  $c_n + C_n(S^{n-1})$  ein relativer Zyklus in  $C_n(D^n, S^{n-1})$  ist mit  $\gamma_n = [c_n + C_n(S^{n-1})]$ .

Dann ist  $d_n(\gamma_n)$  die von der Kette  $\partial c_n$  repräsentierte Homologiekategorie, in folgendem Sinne. Wir unterscheiden zwischen den Fällen  $n = 1$  und  $n > 1$ .

Wenn  $n = 1$ , so sind beide Zellen  $e_0$  und  $e_1$  nulldimensional, und

$$W_0(D^1) = H_0((D^1)^0, (D^1)^{-1}) = H_0(S^0, \emptyset) = H_0(S^0) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z},$$

wobei die Summanden  $\mathbf{Z}$  erzeugt werden von den Klassen der 0-Ketten  $e_0 = -1$  und  $e_1 = 1$ . Man kann  $c_1$  (nach eventuellem Vorzeichenwechsel wenn erforderlich) so wählen, dass

$$\partial c_1 = e_1 - e_0 \in C_0((D^1)^0, (D^1)^{-1}) = C_0(S^0), \quad (5.16)$$

und es gilt

$$d_1 \gamma_1 = [\partial c_1] = (1, -1) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = H_0(S^0). \quad (5.17)$$

Wenn  $n > 1$ , so ist  $((D^n)^{n-1}, (D^n)^{n-2}) = (S^{n-1}, \{e_0\})$  und die Inklusion  $j_{n-1}: (S^{n-1}, \emptyset) \rightarrow (S^{n-1}, \{e_0\})$  induziert einen Isomorphismus

$$H_{n-1}(j_{n-1}): \mathbf{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}). \quad (5.18)$$

Die Homologieklassse  $[\partial c_n]$  erzeugt die linke Gruppe  $H_{n-1}(S^{n-1})$  und wird durch  $H_{n-1}(j_{n-1})$  auf

$$d_n \gamma_n = [\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\})] \quad (5.19)$$

abgebildet, welches die rechte Gruppe  $H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}) = W_{n-1}(D^n)$  erzeugt.

- b) Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ . Sei  $e \in \mathcal{Z}'_A$  eine  $n$ -Zelle von  $\mathcal{Z}$ , die nicht in  $A$  liegt, und sei  $\Phi_e: D^n \rightarrow X$  eine charakteristische Abbildung der Zelle  $e$ .

Der  $e$ -te Summand von

$$W_n(X, A) = H_n(X^n_A, X^{n-1}_A) \cong \bigoplus_{\substack{\zeta \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim \zeta = n}} \mathbf{Z}$$

wird erzeugt von

$$\gamma_e := H_n(\Phi_e)(\gamma_n) = [c_e + C_n(X^{n-1}_A)],$$

wo  $c_e = (\Phi_e)_\#(c_n)$ .

Wir nennen  $c_e$  die **Grundkette** der Zelle  $e$ .

Es gilt

$$d_n(\gamma_e) = [\partial c_e + C_{n-1}(X^{n-2}_A)]. \quad (5.20)$$

*Beweis.* a), Fall  $n = 1$ : Sei  $i: S^0 \rightarrow D^1$  die Inklusion. Wir betrachten folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge von  $(D^1, S^0)$ :

$$\{0\} = H_1(D^1) \rightarrow H_1(D^1, S^0) \xrightarrow{\beta_1} H_0(S^0) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{H_0(i)} H_0(D^1) = \mathbf{Z}.$$

Weil  $(D^1)^{-1} = \emptyset$ , ist die Inklusion  $j_0: ((D^1)^0, \emptyset) \rightarrow ((D^1)^0, (D^1)^{-1})$  einfach die Identität, und deshalb ist  $d_1 = H_0(j_0) \circ \beta_1 = \beta_1$ .

Aus der Exaktheit folgt, dass  $\beta_1$  ein Isomorphismus

$$\mathbf{Z} = H_1(D^1, S^0) \rightarrow \text{Bild } \beta_1 = \text{Ker } H_0(i)$$

ist.

Nach Beispiel 4.4 c) ist  $H_0(i)(k, l) = k + l$  und folglich ist

$$\text{Ker } H_0(i) = \{ (k, l) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \mid k + l = 0 \} = \{ (k, -k) \mid k \in \mathbf{Z} \}$$

und dies wird von  $(-1, 1)$  erzeugt.

Wir finden also ein Erzeugendes  $\gamma_1$  von  $H_1(D^1, S^0)$  mit

$$d_1 \gamma_1 = \beta_1 \gamma_1 = (-1, 1).$$

Nach der Beschreibung von  $\beta_1$  in Korollar 3.16 sehen wir, dass wenn  $c_1 \in C_1(D^1)$  mit  $\gamma_1 = [c_1 + C_1(S^0)]$ , so ist

$$\beta_1 \gamma_1 = [\partial c_1] = (-1, 1) = [e_1 - e_0].$$

Da  $B_0(S^0) = \{0\}$ , ist die Projektion  $Z_0(S^0) \rightarrow H_0(S^0)$  injektiv, und aus der Gleichheit der Homologieklassen folgt somit  $\partial c_1 = e_1 - e_0$ .

a), Fall  $n > 1$ : Weil  $\mathcal{Z}$  nur eine  $n$ -Zelle enthält, ist

$$W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}.$$

Wie in der Aussage des Lemmas, sei  $\gamma_n$  ein Erzeugendes von  $H_n(D^n, S^{n-1})$  und sei  $c_n$  eine Kette in  $C_n(D^n)$  mit  $\gamma_n = [c_n + C_n(S^{n-1})]$ .

Für  $n > 1$  ist der verbindende Homomorphismus

$$\beta_n: \mathbf{Z} = W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

ein Isomorphismus, weil die angrenzenden Gruppen  $H_n(D^n)$  und  $H_{n-1}(D^n)$  in der langen exakten Homologiefolge von  $(D^n, S^{n-1})$  beide  $\{0\}$  sind.

Aus einem ähnlichen Grund ist

$$H_{n-1}(j_{n-1}): H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$$

ein Isomorphismus. Der diese Abbildung umgebende Abschnitt aus der langen exakten Homologiefolge von  $(S^{n-1}, \{e_0\})$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \{0\} = H_{n-1}(\{e_0\}) &\rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(j_{n-1})} \\ &H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}) \xrightarrow{\beta} H_{n-2}(\{e_0\}) \xrightarrow{H_{n-2}(i)} H_{n-2}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Für  $n > 1$  ist  $H_{n-1}(\{e_0\})$  immer  $\{0\}$ . Und  $H_{n-2}(\{e_0\})$  ist  $\{0\}$  außer für  $n = 2$ , aber dann ist  $H_{n-2}(i) = H_0(i)$  und  $H_0(i)$  ist injektiv nach Lemma 4.2, da  $\{e_0\}$  wegweise zusammenhängend ist. Da  $\text{Bild } \beta = \text{Ker } H_0(i) = \{0\}$ , ist  $\beta$  auf jeden Fall die Nullabbildung und die Exaktheit der Homologiefolge bedingt, dass  $H_{n-1}(j_{n-1})$  ein Isomorphismus ist.

Nach der Beschreibung von  $\beta_n$  in Korollar 3.16 ist  $\beta_n(\gamma_n) = [\partial c_n]$  und dies erzeugt  $H_{n-1}(S^{n-1})$ , weil  $\beta_n$  ein Isomorphismus ist und  $\gamma_n$  die Gruppe  $H_n(D^n, S^{n-1})$  erzeugt.

$(j_{n-1})_{\#}$  bildet  $\partial c_n$  nach Definition auf

$$\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\}) \in C_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$$

ab und  $d_n = H_{n-1}(j_{n-1}) \circ \beta_n$  bildet  $\gamma_n$  somit auf  $[\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\})]$  ab. Dies ist ein erzeugendes Element von  $H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$ , weil  $\beta_n$  und  $H_{n-1}(j_{n-1})$  Isomorphismen sind.

b) Nach Lemma 5.30 d) ist  $H_n(\Phi_e)$  ein Isomorphismus von  $H_n(D^n, S^{n-1})$  auf den  $e$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $W_n(X, A) = H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ . Deshalb wird dieser Summand erzeugt von  $\gamma_e := H_n(\Phi_e)(\gamma_n)$ .

$\Phi_e$  ist eine Abbildung  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X_A^n, X_A^{n-1})$ , und weil die lange exakte Homologiefolge eines Raumpaars natürlich ist, kommutiert  $H_*(\Phi_e)$  mit  $\beta_n$ , d. h.,

$$\begin{aligned} \beta_n(\gamma_e) &= \beta_n H_n(\Phi_e)(\gamma_n) = H_{n-1}(\Phi_e) \beta_n(\gamma_n) \\ &= H_{n-1}(\Phi_e)[\partial c_n] \\ &= [(\Phi_e)_{\#}(\partial c_n)] \\ &= [\partial((\Phi_e)_{\#} c_n)] = [\partial c_e]. \end{aligned}$$

Daraus folgt Gleichung (5.20)

$$d_n(\gamma_e) = H_{n-1}(j_{n-1}) \beta_n(\gamma_e) = H_{n-1}(j_{n-1})[\partial c_e] = [\partial c_e + C_{n-1}(X_A^{n-2})].$$

■

**Notation 5.45** Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$ .

Die graduierte Kettengruppe

$$W_*(X, A) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$$

des zellulären Kettenkomplexes  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A}$  ist eine freie abelsche Gruppe, mit einem Erzeugenden  $\gamma_e$  für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A = \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_A$ .

Um es angenehmer zu machen, in diesem Kettenkomplex zu rechnen, wollen wir eine vereinfachte Notation für Ketten einführen, in dem wir  $W_*(X, A)$  mit der zu ihr isomorphen Gruppe  $F(\mathcal{Z}'_A)$  identifizieren.

Die Identifikation wird vorgenommen vermöge des Isomorphismus, der für jede Zelle  $e \in \mathcal{Z}'_A$  den gemäß Lemma 5.44 b) gewählten Erzeugenden  $\gamma_e$  des  $e$ -ten Summanden  $\mathbf{Z}$  von  $W_*(X, A)$  auf den entsprechenden formalen Erzeugenden  $e$  von  $F(\mathcal{Z}'_A)$  abbildet.

Das bedeutet, das wir fortan zelluläre Ketten als formale Linearkombinationen von *Zellen* schreiben werden, statt wörtlich nach der Definition von  $W_*(X, A)$  als Summen von Homologieklassen aus den homogenen Anteilen  $H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ .

Diese Notation behalten wir auch bei, wenn wir tatsächlich über die Homologieklassen oder über die sie repräsentierenden Ketten in  $C_n(X_A^n, X_A^{n-1})$  oder  $C_n(X_A^n)$  sprechen müssen.

Das heißt, wir benutzen die gleiche Bezeichnung  $e$  für die Zelle  $e$ , für ihre Grundkette  $c_e$  und für die von  $c_e$  bestimmte Homologieklassse  $\gamma_e$ . Aus dem Umfeld wird immer klar sein, welche Bedeutung gemeint ist, und Formeln mit zellulären Ketten werden in dieser vereinfachten Schreibweise viel lesbarer.

Für 1-dimensionale Zellen kann man die Beschreibung des Randoperators aus Lemma 5.44 b) noch präziser machen.

### Bemerkung 5.46

Sei  $(X, \mathcal{Z})$  ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex  $(A, \mathcal{Z}_A)$  und sei  $e \in \mathcal{Z}'_A$  eine 1-Zelle. Sei  $\Phi_e: [-1, 1] = D^1 \rightarrow X$  ihre charakteristische Abbildung.

Dann gilt

$$d_1 e = \Phi_e(1) - \Phi_e(-1)$$

(in der vereinfachten Notation 5.45).

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 5.44.

Die Grundkette  $c_e$  der Zelle  $e$  ist  $(\Phi_e)_\#(c_1)$ , wo  $c_1 \in C_1(D^1)$  gewählt ist gemäß Lemma 5.44 a), Fall  $n = 1$ , und zwar so, dass  $[c_1 + C_1(S^0)]$  die

Gruppe  $W_1(D^1)$  erzeugt und Formel (5.16) gilt, also in unserer vereinfachten Notation so dass  $\partial c_1 = e_1 - e_0 := (1) - (-1)$ .

Nach Teil b) von Lemma 5.44 haben wir dann

$$\begin{aligned}
 d_1 e &= [\partial c_e + C_0(X_A^0)] && \text{nach Formel (5.20)} \\
 &= [\partial((\Phi_e)_\#(c_1)) + C_0(X_A^0)] \\
 &= [(\Phi_e)_\#(\partial c_1) + C_0(X_A^0)] \\
 &= [(\Phi_e)_\#(e_1 - e_0) + C_0(X_A^0)] && \text{nach Formel (5.16)} \\
 &= [(\Phi_e)_\#(e_1) - (\Phi_e)_\#(e_0) + C_0(X_A^0)] \\
 &= \Phi_e(1) - \Phi_e(-1) && \text{in der vereinfachten Notation.}
 \end{aligned}$$

■

Um dieses Kapitel zu schließen wollen wir noch mit der zellulären Methode die Homologie der projektiven Räume  $\mathbf{R}P^n$  und  $\mathbf{C}P^n$  berechnen, die in Beispiel 5.13 g) mit ihrer CW-Zerlegung beschrieben wurden. Mit den klassischen Werkzeugen (lange exakte Homologiefolge, Satz von Mayer-Vietoris oder Ausschneidung) ist diese Homologie sehr schwer zu bestimmen.

**Beispiel 5.47** Sei  $n \in \mathbf{N}$  und sei  $k \in \mathbf{Z}$ .

a)

$$H_k(\mathbf{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } 0 \leq k \leq 2n \text{ und } k \text{ gerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b)

$$H_k(\mathbf{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 1 \leq k < n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* a): Laut Beispiel 5.13 g) hat  $\mathbf{C}P^n$  eine CW-Zerlegung mit einer Zelle  $e_m$  von Dimension  $2m$  für jedes  $m$  mit  $0 \leq m \leq n$  (und mit keinen weiteren Zellen).

Es folgt, dass  $W_{2m}(\mathbf{C}P^n) = \mathbf{Z}$  für jedes  $m$  mit  $0 \leq m \leq n$ , und alle anderen zellulären Kettengruppen sind  $\{0\}$ .

Insbesondere sind alle ungeradedimensionalen zellulären Kettengruppen trivial und aus diesem Grund sind alle Randoperatoren  $d_k = 0$ . Deshalb ist  $Z_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) = W_*(\mathbf{C}P^n)$  und  $B_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) = \{0\}$ , also

$$H_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) \cong Z_*(W_*(\mathbf{C}P^n)) = W_*(\mathbf{C}P^n).$$

Diese graduierte Gruppe ist wie unter a) angegeben.

b): Weil  $\mathbf{R}P^0$  ein Einpunktraum ist (und tatsächlich die angegebene Homologie hat), brauchen wir diesen Fall hier nicht ausführlich zu behandeln und können in der Folge annehmen, dass  $n > 0$ .

Laut Beispiel 5.13 g) hat  $\mathbf{R}P^n$  eine CW-Zerlegung mit einer Zelle  $e_k$  von Dimension  $k$  für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$  (und mit keinen weiteren Zellen).

Es folgt, dass  $W_k(\mathbf{R}P^n) = \mathbf{Z}$  für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$ , und alle anderen zellulären Kettengruppen sind  $\{0\}$ .

Um die Homologie ausrechnen zu können, müssen wir noch den zellulären Randoperator bestimmen.

Dazu nehmen wir zur Hilfe einen CW-Raum, dessen Homologie wir schon kennen, und zwar den  $S^n$  mit der CW-Zerlegung aus Beispiel 5.13 c), die zwei Zellen in jeder Dimension  $k$  von 0 bis  $n$  hat. Diese Zellen sind  $E_+^k$  und  $E_-^k$ .

Sei  $\tau_n: S^n \rightarrow S^n$  die Antipodenabbildung mit  $\tau_n(x) = -x$  für jedes  $x \in S^n$ . Diese Abbildung bildet für jedes  $k \leq n$  das Raumpaars  $(\bar{E}_+^k, \partial E_+^k) = (D_+^k, S^{k-1})$  homöomorph auf  $(\bar{E}_-^k, \partial E_-^k) = (D_-^k, S^{k-1})$  ab, und ihre Einschränkung auf  $\partial E_+^k = \partial E_-^k = S^{k-1}$  ist  $\tau_{k-1}$ . Ferner gilt  $\tau_n^2 = \text{id}_{S^n}$ , d. h.,  $\tau_n$  ist ihre eigene Umkehrabbildung.

Insbesondere ist  $H_k(\tau_n): H_k(D_+^k, S^{k-1}) \rightarrow H_k(D_-^k, S^{k-1}) \cong \mathbf{Z}$  ein Isomorphismus, und wir können die Erzeugenden dieser Homologiegruppen (die Summanden von  $W_k(S^n)$  sind) und die Grundketten der  $k$ -Zellen so wählen, dass

$$W_k(\tau_n)(E_+^k) = E_-^k \quad \text{und umgekehrt} \quad (5.21a)$$

und

$$C_k(\tau_n)(c_{E_+^k}) = c_{E_-^k} \quad \text{und umgekehrt.} \quad (5.21b)$$

Die „umgekehrte“ Beziehung gilt jeweils sogar automatisch, weil  $\tau_n^2 = \text{id}_{S^n}$ .

$\mathbf{R}P^n$  ist ein Quotient von  $S^n$  und die Projektion  $\pi: S^n \rightarrow \mathbf{R}P^n$  identifiziert antipodische Punkte, d. h.,

$$\pi \circ \tau_n = \pi. \quad (5.22)$$

Nach der Definition der Zellen von  $\mathbf{R}P^n$  auf Seite 170 ist

$$e_k = \pi(S^k \setminus S^{k-1}) = \pi(E_+^k \cup E_-^k),$$

und  $\pi$  bildet jede der offenen  $k$ -Zellen  $E_{\pm}^k$  von  $S^n$  homöomorph auf  $e_k$  ab.

Hieraus folgt erstens, dass  $\pi$  zellulär ist, denn das  $k$ -Skelett  $S^k$  von  $S^n$  wird durch  $\pi$  in das  $k$ -Skelett von  $\mathbf{R}P^n$  abgebildet. Und weil  $\pi$  die offenen

$k$ -Zellen  $E_{\pm}^k$  homöomorph auf  $e_k$  abbildet, ist  $\pi|D_{\pm}^k$  eine charakteristische Abbildung für  $e_k$ .

Folglich ist

$$H_k(\pi): H_k(D_{\pm}^k, S^{k-1}) \longrightarrow H_k(\bar{e}_k, \partial e_k)$$

für jede Wahl des Vorzeichens ein Isomorphismus, und wir können das Erzeugende von

$$H_k(\bar{e}_k, \partial e_k) = H_k(\mathbf{R}P^k, \mathbf{R}P^{k-1}) = W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}$$

so wählen, dass  $e_k = W_k(\pi)(E_+^k)$  (in der vereinfachten Notation 5.45). Wegen (5.21a) und (5.22) gilt dann automatisch auch  $e_k = W_k(\pi)(E_-^k)$ .

Um das bisher ermittelte kurz zusammenzufassen,  $\pi$  ist eine zelluläre Abbildung und  $W_k(\pi)$  bildet jedes der beiden Erzeugenden von  $W_k(S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  auf das gewählte Erzeugende von  $W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}$  ab. Mit Hilfe dieser Kettenabbildung wollen wir jetzt den Randoperator von  $W_*(\mathbf{R}P^n)$  berechnen.

Betrachten wir zunächst den Randoperator von  $W_*(S^n)$ .

Lemma 5.44 b) besagt, dass  $d_k E_{\pm}^k$  von der Kette  $\partial c_{E_{\pm}^k} \in C_{k-1}(S^{k-1})$  repräsentiert wird. Genauer gilt

$$d_k E_{\pm}^k = (j_{k-1})_*([\partial c_{E_{\pm}^k}]),$$

wo  $j_{k-1}$  im jetzigen Fall die Inklusion  $(S^{k-1}, \emptyset) \longrightarrow (S^{k-1}, S^{k-2})$  ist.

Weil die Grundketten Bedingung (5.21b) erfüllen, haben wir

$$\begin{aligned} d_k E_-^k &= (j_{k-1})_*([\partial c_{E_-^k}]) \\ &= (j_{k-1})_*\left(\left[\partial((\tau_n)_{\#} c_{E_+^k})\right]\right) \\ &= (j_{k-1})_*\left(\left[(\tau_n)_{\#} \partial c_{E_+^k}\right]\right) \\ &= (j_{k-1})_*\left(\left[(\tau_{k-1})_{\#} \partial c_{E_+^k}\right]\right) && \text{(weil } \tau_n|S^{k-1} = \tau_{k-1}) \\ &= (j_{k-1})_*(\tau_{k-1})_*([\partial c_{E_+^k}]) \\ &= (\tau_{k-1})_*(j_{k-1})_*([\partial c_{E_+^k}]) \\ &= (\tau_{k-1})_*(d_k E_+^k) \end{aligned}$$

Aber Korollar 4.9 besagt, dass  $(\tau_{k-1})_*$  auf  $H_{k-1}(S^{k-1})$  die Multiplikation mit  $(-1)^k$  ist, und weil  $j_{k-1}$  eine natürliche Transformation ist gilt das Gleiche für  $(\tau_{k-1})_*$  auf  $\text{Bild}(j_{k-1})_* \subseteq H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-2})$ , d. h.,

$$d_k E_-^k = (-1)^k d_k E_+^k \tag{5.23}$$

für jedes  $k$  mit  $1 \leq k \leq n$  (natürlich ist  $d_0 = 0$ ).

Aus (5.23) folgt, dass Bild  $d_k$  von  $d_k(E_+^k)$  erzeugt wird und dass

$$d_k(E_-^k + (-1)^{k+1}E_+^k) = 0$$

und somit

$$E_-^k + (-1)^{k+1}E_+^k \in Z_k(W_*(S^n)).$$

Insbesondere sind die zellulären Zyklengruppen in Dimensionen  $1 \leq k \leq n$  nicht  $\{0\}$ .

Nun ist aber  $d_k \neq 0$  für  $1 \leq k \leq n$ , denn sonst ist  $B_{k-1}(W_*(S^n)) = \{0\}$  und  $H_{k-1}(S^n) \cong Z_{k-1}(W_*(S^n))$ .

Für  $1 < k \leq n$  ist das nicht möglich, weil für diese Dimensionen bekanntlich  $H_{k-1}(S^n) = \{0\}$ , aber die Zyklengruppe ist nicht  $\{0\}$ .

Für  $k = 1$  ist es nicht möglich, weil dann auf Grund der Tatsache, dass  $d_0 = 0$  ist, gilt  $H_0(S^n) \cong Z_0(W_*(S^n)) = W_0(S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ . Wir wissen aber, dass  $H_0(S^n) \cong \mathbf{Z}$ , da  $n > 0$ .

Also ist  $B_{k-1}(W_*(S^n))$  eine nichttriviale zyklische Gruppe, erzeugt von  $d_k(E_+^k)$ .

Für  $1 < k \leq n$  ist  $B_{k-1}(W_*(S^n)) = Z_{k-1}(W_*(S^n))$ , weil  $H_{k-1}(S^n) = \{0\}$ . Somit enthält die Rändergruppe, als Vielfaches des Erzeugenden  $d_k(E_+^k)$ , den Zyklus  $E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}$ . Aber dieses Element von  $W_{k-1}(S^n)$  ist Vielfaches nur von  $\pm$  sich selber, woraus folgt, dass

$$d_k(E_+^k) = \pm(E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}) \tag{5.24}$$

wenn  $1 < k \leq n$ . Die Gleichung (5.24) gilt aber auch für  $k = 1$ , denn Bemerkung 5.46 besagt, dass  $d_1(E_+^1) = \pm(E_+^0 - E_-^0)$  (mit Vorzeichen je nachdem in welcher Richtung die charakteristische Abbildung der Zelle  $E_+^1$  den oberen Halbkreis durchläuft).

Betrachten wir jetzt das Bild des Kettenkomplexes  $W_*(S^n)$  unter der Kettenabbildung  $W_*(\pi)$ . Wir schreiben  $d'$  für den Randoperator von  $W_*(\mathbf{R}P^n)$ .

Da wir es so eingerichtet haben, dass  $W_*(\pi)(E_\pm^k) = e_k$ , erhalten wir aus (5.23) und (5.24) für  $1 \leq k \leq n$ , dass

$$\begin{aligned} d'_k(e_k) &= W_*(\pi)(d_k E_+^k) \\ &= \pm W_*(\pi)(E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}) \\ &= \pm(e_{k-1} + (-1)^k e_{k-1}) \end{aligned}$$

oder in anderen Worten,

$$d'_k(e_k) = \begin{cases} \pm 2e_{k-1}, & \text{wenn } k \text{ gerade ist und } 1 < k \leq n; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.25}$$

Und natürlich ist  $d'(0) = 0$ .

Hieraus erhalten wir

$$Z_k(W_*(\mathbf{R}P^n)) = \begin{cases} W_0(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}, & \text{wenn } 1 \leq k \leq n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$B_k(W_*(\mathbf{R}P^n)) = \begin{cases} 2W_k(\mathbf{R}P^n), & \text{wenn } 1 \leq k < n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bedeutet  $2W_k(\mathbf{R}P^n)$  die Untergruppe von  $W_k(\mathbf{R}P^n)$  bestehend aus allen „durch 2 teilbaren“ Elementen (die also 2 mal ein anderes Element sind). Da  $W_k(\mathbf{R}P^n)$  zyklisch ist, sind das in diesem Fall alle geraden Vielfachen des Erzeugenden.

Bildet man den Quotienten  $H_k(\mathbf{R}P^n) = Z_k/B_k$ , so erhält man genau die behauptete Homologie des reellen projektiven Raumes. Die Homologie kann nur in Dimension 0 oder in den ungeraden Dimensionen von 1 bis  $n$  nichttrivial sein, weil in allen anderen Dimensionen schon die zellulären Zyklengruppen  $\{0\}$  sind. In Dimension 0 oder in Dimension  $n$ , wenn dies ungerade ist, sind die Rändergruppen  $\{0\}$  und die Homologie ist also isomorph zur Zyklengruppe, die unendlich zyklisch ist. In den ungeraden Dimensionen  $k$  mit  $1 \leq k < n$  ist

$$H_k(\mathbf{R}P^n) = \frac{W_k(\mathbf{R}P^n)}{2W_k(\mathbf{R}P^n)} \cong \frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_2.$$

■

Es gibt viele andere Räume, deren Homologie sich bequem mit der zellulären Methode berechnen lässt. Dazu gehören der Torus und die Kleinsche Flasche, deren Homologie wir in Kapitel 4 schon mit Hilfe der Mayer-Vietoris Folge berechnet haben. Beide dieser Räume haben eine CW-Zerlegung mit einer 2-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 0-Zelle und unterscheiden sich nur in der Anheftungsabbildung der 2-Zelle. Die Details überlassen wir dem Leser als eine sinnvolle und nicht schwere Übung.