

Skriptum zur Vorlesung
Algebraische Topologie

Prof. Dr. Gordon Wassermann

akademisches Jahr 2002–2003¹

¹aus T_EX neu übersetzt im September 2007, jetzt mit Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, buchgerechter Seitenzählung und verbesserter Einbindung der Bilder.

Inhaltsverzeichnis

Was ist Algebraische Topologie?	iii
1 Kategorien und Funktoren	1
2 Homotopie	41
3 Die Homotopiegruppen	61
4 Überlagerungen	95
5 Anwendungen der Fundamentalgruppe	135
6 Singuläre Homologie	147
7 Die Eilenberg-Steenrod Axiome	185
8 Berechnungen und Anwendungen	245
9 Zelluläre Homologie	257
10 Homologische Algebra	315
11 Die Künneth Formel	401
12 Produkte	443

Was ist Algebraische Topologie?

Bevor Sie sich entscheiden können, ob Sie wirklich an einer zweisemestrigen Vorlesung über algebraische Topologie oder auch nur an einem Semester teilnehmen wollen, möchten Sie sicher ein bisschen etwas darüber erfahren, was Sie in der Vorlesung erwartet und warum das zu lernen interessant oder lohnend sein könnte. Deshalb möchte ich, wie immer in der ersten Vorlesung des Semesters, einen kurzen Überblick über die Themen dieser Vorlesung und ihre Einordnung in der Mathematik allgemein geben.

Offensichtlich ist algebraische Topologie, wie der Name schon sagt, ein Teilgebiet der Topologie. Wodurch unterscheidet es sich von anderen Gebieten der Topologie und wie ordnet es sich dort ein? Und was ist das „algebraische“ an der algebraischen Topologie?

Topologie, wie Sie vermutlich wissen, ist eine sehr abstrakte Art von Geometrie, in der Begriffe von Nähe, Konvergenz, und Stetigkeit von Abbildungen eine prägende Rolle bilden. Gerade das letzte Merkmal sagt sehr genau aus, worin topologische Struktur besteht: die Struktur erhaltenden Abbildungen in der Topologie sind genau die stetigen Abbildungen. Eine grundlegende Frage der Topologie ist deshalb die Frage, in gewissen Situationen, nach der Existenz stetiger Abbildungen mit speziellen Eigenschaften, und als wichtigster Spezialfall davon, die Homöomorphiefrage, d.h., die Frage nach der Existenz von Homöomorphismen (also stetiger bijektiver Abbildungen mit stetiger Umkehrabbildungen) zwischen gegebenen topologischen Räumen.

Die mengentheoretische Topologie bietet einige Hilfsmittel, um solche Fragen zu beantworten, darunter die so genannten „topologischen“ Eigenschaften wie Zusammenhang und Kompaktheit, die geschickt angewendet und mit einigen Tricks in manchen Fällen zur Entscheidung solcher Fragen ausreichen. Allerdings nur in wenigen Fällen. Betrachten wir, zum Beispiel, die euklidischen Räume \mathbf{R}^n und die Sphären S^n verschiedener Dimensionen $n \geq 2$, so sind keine zwei dieser Räume zueinander homöomorph, aber so einleuchtend das sein mag, es lässt sich mit rein topologischen Mitteln kaum zeigen. Und wenn solche Fragen topologisch lösbar sind, dann sind die Lösungen oft äußerst kompliziert und mit sehr kniffligen Hilfskonstruktionen und kombi-

natorischen Argumenten verbunden.

Die algebraische Topologie bietet, so kann man das sehen, eine *allgemeine* „knifflige Hilfskonstruktion“, die man nur einmal verstehen muss, um mit ihrer Hilfe viele solche Fragen, darunter die oben genannten, sehr einfach beantworten zu können. Die Konstruktionen der algebraischen Topologie liefern *algebraische* Objekte (Gruppen und Ringe), die aus der topologischen Struktur gewonnen werden können und die sie (mit ein wenig Detailverlust) beschreiben und charakterisieren. Zu stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen gehören entsprechende Homomorphismen dieser algebraischen Objekte, zu Homöomorphismen gehören algebraische Isomorphismen. Wenn man die algebraischen Objekte einmal berechnet hat (und das ist der schwierigste Teil der Anwendung, wenngleich es dafür gute Methoden und Hilfsmittel gibt), ist es ein Kinderspiel, durch einen algebraischen und somit oft sehr einfachen Vergleich die Unmöglichkeit gewisser stetiger Abbildungen oder Homöomorphismen zu zeigen.

Das ist also, wenn Sie wollen, der vordergründige Inhalt und die Intention der algebraischen Topologie: sie löst topologische Fragen auf einfache und einheitliche Weise, indem sie sie in algebraische Fragen verwandelt, die viel einfacher sind, als die ursprünglichen topologischen (wie diese Verwandlung vorgenommen wird, werde ich gleich kurz skizzieren).

Aber diese Beschreibung ist noch eine sehr oberflächliche und trifft noch nicht den Kern, denn sie unterstreicht nicht die große Bedeutung der algebraischen Topologie für die Mathematik, ihre Faszination und ihre Schönheit.

Wenn ein Student mir erklären würde, er hätte, aus welchen Gründen auch immer, genau ein Semester Zeit, um eine Vorlesung über Topologie zu hören, und sich wünschte, in dieser Zeit die wichtigsten Kenntnisse aus diesem Gebiet zu erlangen und auch jene mit der größtmöglichen Bedeutung für seine weitere mathematische Laufbahn, so würde ich ihm nicht die Grundvorlesung *Einführung in die Topologie* empfehlen, sondern die *Algebraische Topologie I*, auch wenn er keinerlei Vorkenntnisse über Topologie hätte.

Das soll nicht heißen, das allgemeine Grundkenntnisse über Topologie, wie sie in der Einführung vermittelt werden, überflüssig sind oder das man sie für ein Verständnis der algebraischen Topologie nicht braucht. Topologische Begriffe erscheinen vielerorts in der Mathematik, weshalb man ja schon in der Anfängervorlesung Analysis mit einigen topologischen Begriffen konfrontiert wird. Und die algebraische Topologie setzt natürlich Grundkenntnisse aus der allgemeinen Topologie voraus. Die topologischen Grundkenntnisse bilden das Substrat, das alle Teile der Topologie trägt, aber sie bilden nicht das Zentrum der Topologie und sie sind weder als Forschungsgebiet noch für die Anwendungen der Topologie in der Mathematik allgemein der interessanteste oder verbreitetste Teil der Topologie. Der Teil der Topologie, der in der

Mathematik am häufigsten zum Vorschein kommt und der die breitesten Auswirkungen hat, ist sicher die algebraische Topologie, denn für viele wichtige topologische Fragen bildet sie das einzig vorhandene effektive Werkzeug, und ihre Methoden und Grundgedanken lassen sich auch in anderen Gebieten der Mathematik sehr produktiv anwenden. So sind die anderen Spezialgebiete der Topologie gar nicht erforschbar ohne algebraisch topologische Methoden und auch dort, wo die Topologie anderswo in der Mathematik in Erscheinung tritt, trägt dieses Erscheinungsbild fast immer algebraisch topologische Züge oder in diesen Gebieten benutzt man Strukturen, die von denen der algebraischen Topologie inspiriert wurden, mit ihnen nahe verwandt sind, ähnliche Eigenschaften haben und nach ähnlichen Ideen aufgebaut sind.

Grundkenntnisse über allgemeine Topologie braucht jeder Mathematiker, aber die, die er wirklich braucht, sind wenige und sie können leicht notfalls im Selbststudium erlernt werden (das gilt auch für die Grundkenntnisse, die man in der algebraischen Topologie braucht, weshalb der Besuch der *Einführung in die Topologie* keine zwingende Voraussetzung für die Teilnahme an der jetzigen Vorlesung ist). Aber Grundkenntnisse zumindest über Teile der algebraischen Topologie sind noch wichtiger, wenn man in irgendein Gebiet der Mathematik tiefer eindringen will, denn fast überall erscheinen irgendwann Argumente, die Mittel aus der algebraischen Topologie verwenden oder zumindest nachmachen.

Darüber hinaus besteht algebraische Topologie auch aus sehr schöner Mathematik, deren Faszination gerade darin liegt, dass in ihr Strukturen und Methoden aus zwei in ihren Grundzügen einander völlig fremden Gebieten der Mathematik ein elegantes Zusammenspiel eingehen, das nicht nur sehr fruchtbar ist, sondern auch die erstaunliche und immer wieder an den unerwartetsten Stellen zu Tage tretende Einheit der Mathematik unterstreicht. Unsere vordergründige Unterteilung der Mathematik in vielfältige scheinbar kaum verwandte Einzelgebiete wie Algebra, Geometrie, Analysis, Kombinatorik ist eigentlich eine Fiktion und die Mathematik führt uns das immer wieder vor Augen — insbesondere auch in der algebraischen Topologie in ihrer modernen Ausprägung.

Die am Anfang stehende etwas schematische Beschreibung der algebraischen Topologie als ein Werkzeug, um mit algebraischen Mitteln schwere geometrische Probleme zu lösen, erklärt zwar, wofür die algebraische Topologie gut ist, aber wahrscheinlich sind Sie auch neugierig auf ein paar Details darüber, wie das funktioniert. Werfen wir also kurz einen Blick unter die Motorhaube dieser Maschine. Wie sehen die Strukturen und Konstruktionen der algebraischen Topologie genau aus und wie spiegelt sich die topologische Struktur in ihnen wieder? Was genau ist es, das wir in dieser Vorlesung und in ihrer Fortsetzung im Sommersemester untersuchen werden?

Sehr vereinfachend formuliert versucht die algebraische Topologie „Löcher“ in topologischen Räumen sichtbar zu machen und durch „Invarianten“ zu charakterisieren, wann und wo in einem Raum ein Loch vorhanden ist (z.B., die fehlenden Punkte, wenn man aus \mathbf{R}^n einige Punkte entfernt und den so entstehenden Raum betrachtet) oder wann der Raum gewissermaßen ein außer sich liegendes Gebiet irgendwie umschließt, wie das beim Kreis oder der Sphäre, aber auch beim Torus (Reifenschlauch) der Fall ist. Ursprünglich, im 19. Jahrhundert, waren diese Invarianten einfach Zahlen, die aus einer Betrachtung der Geometrie gewonnen wurden, aber die geometrischen Konstruktionen, die diese Zahlen lieferten, ließen sich zur Definition von Gruppen leicht verwenden und diese geben wegen ihrer komplizierteren Struktur eine detailliertere und genauere Charakterisierung der Geometrie.

Diese Konstruktionen basieren auf zwei ganz verschiedene Grundideen, die entsprechend zu zwei verschiedenartigen algebraischen Zuordnungen führen, die aber entfernt verwandt miteinander und nicht ganz unabhängig voneinander sind.

Die früheste Idee, die man hatte, war, die Geometrie eines Raumes zu erforschen, in dem man geschlossene Kurven (so genannte Schleifen) in den Raum legte und versuchte, sie durch stetige Verschiebung zu einem Punkt zusammenzuziehen. Diese stetige Verschiebung einer Kurve oder einer anderen Abbildung in den Raum hinein nennt man eine Homotopie, und Kurven, die sich zu einem Punkt durch Homotopie zusammenziehen lassen nennt man „nullhomotop“. Wenn aber die Schleife ein Loch in dem Raum umschließt, so kann man die Kurve nicht stetig über das Loch hinweg schieben und die Kurve ist nicht nullhomotop. Kurven, die sich mehrmals kreuzen, kann man auch in mehrere Teilschleifen zerlegen, und die gesamte Kurve kann auch dann nullhomotop sein, wenn keine dieser Teilschleifen nullhomotop ist. Umgekehrt kann man auch mehrere einzelne geschlossene Kurven, die durch einen Punkt gehen, zusammenkleben zu einer großen Kurve, die den Punkt mehrmals durchläuft.

Schleifen kann man nicht nur versuchen, zu einem Punkt zusammenzuziehen, sondern man kann eine geschlossene Kurve durch eine Homotopie in eine andere geschlossene Kurve verwandeln, und diese wird die gleichen Eigenschaften in Bezug auf Nullhomotopie haben wie die ursprüngliche.

Diese Aufzählung von Gedanken und Manipulationen zur Homotopie von geschlossenen Kurven liefert aber schon, wenn man sich's genau ansieht, eine Gruppenstruktur! Die Elemente der Gruppe sind nicht die Schleifen selber, sondern ihre Homotopieklassen, d.h., die Äquivalenzklassen der durch Homotopie ineinander verwandelbare Kurven, und die Gruppenoperation besteht aus dem Zusammenkleben oder Hintereinanderdurchlaufen von Kurven (nach der Identifikation durch Homotopie ist das tatsächlich eine Gruppenoperati-

on, mit der Klasse eines Punktes als neutrales Element). Diese Gruppe heißt die **Fundamentalgruppe** oder die **erste Homotopiegruppe** des Raumes. Als Verallgemeinerung dieser Konstruktion kann man die Schleifen, die ja im Wesentlichen stetige Bilder des Kreises sind, durch stetige Bilder höher dimensionaler Sphären ersetzen und man erhält so die höheren Homotopiegruppen des Raumes.

Dies ist die erste Art von Gruppenkonstruktion in der algebraischen Topologie, und ihre wichtigen Merkmale sind: Erfassung von Löchern, in dem man versucht, sie in einer sich zusammenziehenden Schlinge zu „fangen“; relativ einfache Konstruktion aber dafür relativ komplizierte Gruppen, die im Falle der Fundamentalgruppe auch nicht abelsch sein müssen, sehr schwierige Berechenbarkeit der Gruppen und oft überraschende Details ihrer Struktur. Es kann z.B. vorkommen, auch wenn man die Gründe dafür in der Geometrie überhaupt nicht sehen kann, dass eine Schleife nicht nullhomotop ist, aber nullhomotop wird wenn man sie zweimal durchläuft.

Die zweite Konstruktionsart, die sich Homologietheorie nennt, ist viel abstrakter, als die der Homotopiegruppen. Hier geht es darum, den Raum auszufüllen mit einfachen Bausteinen. Beim Wort „Baustein“ denkt man zuerst an ein Quader, oder in zwei Dimensionen entsprechend an ein Rechteck, in höheren Dimensionen an ähnliche Gebilde, aber die mathematische Beschreibung wird wesentlich einfacher, wenn wir wirklich möglichst simple Bausteine verwenden, also Dreiecke statt Vierecke, als einfachste dreidimensionale Bausteine Tetraeder statt Quader, und so weiter. Bausteine dieser einfachen Form heißen sinnvollerweise **Simplizes** (und einer davon wird ein **Simplex** genannt). Ein n -dimensionaler Simplex ist einfach die komplexe Hülle von $n + 1$ affin unabhängiger Punkte im euklidischen Raum, und er hat eine Oberfläche oder einen Rand, der aus den konvexen Hüllen von jeweils n dieser $n + 1$ Eckpunkte besteht, also einen Rand, der aus gewissen n -dimensionalen Simplizes zusammengesetzt ist. Dieser Rand sieht insgesamt aus wie eine Sphäre und ist selber „randlos“.

Wie werden Löcher in der Homologietheorie erkannt? Dort wo *kein* Loch ist, kann man einen Simplex hinstellen, und der Rand dieses Simplexes ist eine Konglomeration von Simplizes, die selber keinen Rand hat (so etwas nennt man einen **Zykel**). Wenn ein Loch vorhanden ist, so kann man sich einen Simplex denken, der mit seinem Innern das Loch überdeckt, und der selber (wegen des Lochs, das er berührt) nicht ganz im Raum enthalten ist, dessen Rand aber im Raum liegt, da nur das Innere des gedachten Simplexes das Loch abdeckt.

In dem Raum gibt es diesen Simplex natürlich nicht, aber er hinterlässt trotzdem eine Spur, die man in dem Raum sehen kann, nämlich seinen Rand, der wie jeder andere Rand ein Zykel ist. Dieser Zykel unterscheidet sich aber

von anderen Zykeln im Raum dadurch, dass man *innerhalb* des Raumes nichts finden kann, dessen Rand er ist; er ist mehr oder weniger Rand des *Lochs*.

Auf dieses Skelett einer Konstruktion packen wir nun ein bisschen Fleisch, um daraus einen gut funktionierenden Mechanismus zu machen. Da der Rand eines Simplexes aus mehreren Simplizes besteht, reicht die Betrachtung einzelner Simplizes ohnehin nicht aus, und wir betrachten deshalb allgemein Kombinationen aus Simplizes. Irgendwie müssen wir beschreiben wie diese zueinander liegen und wie sie miteinander verklebt sind, aber statt dies auf geometrische Art umständlich zu beschreiben, lassen wir uns von unserer Faulheit zu einem faulen aber sehr wirkungsvollen Trick verleiten: wir addieren sie rein formal miteinander, betrachten also *formale Summen* oder *formale Linearkombinationen* von Simplizes (diese nennen wir **Ketten**). Auf diese Weise erhalten wir automatisch eine algebraische Struktur geschenkt; die Ketten bilden per Definition eine additive abelsche Gruppe. Die Vorzeichen in den Summen beschreiben mit welchem Drehsinn die einzelnen Simplizes miteinander verklebt sind, und der Rand eines Simplexes lässt sich schreiben als eine alternierende Summe der in ihm enthaltenen niederdimensionalen Simplizes, die die Seiten des ursprünglichen Simplexes sind. Diese Zuordnung erweitert sich linear zu einem Gruppenhomomorphismus, dem Randoperator, der jeder Kette ihren Rand zuordnet. Randlose Ketten, d.h., Ketten, deren Rand 0 ist, heißen Zykeln und jeder Rand ist insbesondere ein Zykeln, aber nicht jeder Zykeln ist ein Rand.

Die Zykeln einer gewissen Dimension n , als Kern des Randoperators, und die Ränder der Dimension n , als Bild des Randoperators, bilden jeweils eine Untergruppe der n -dimensionalen Kettengruppe, wobei die Randgruppe selber eine Untergruppe der Zykelngruppe ist, weil jeder Rand automatisch ein Zykeln ist. Der Quotient der Zykelngruppe nach der Randgruppe heißt die n -te **Homologiegruppe** des Raumes, und ihre nichttrivialen Elemente entsprechen nicht berandenden Zykeln und somit „nicht auffüllbare Löcher“ im topologischen Raum.

Es gibt verschiedene Varianten dieser Konstruktion, je nachdem ob man den Raum vorher auf starre Weise in Simplizes zerlegt hat, die auf eine feste Art miteinander verklebt sind (**simpliziale Homologie**), oder ob man ohne weitere Einschränkungen nur stetige aber womöglich ausgeartete Bilder von Simplizes in dem Raum betrachtet (**singuläre Homologie**), oder ob man andere spezielle Zerlegungen der Räume vornimmt (z.B., die **zellulären** Kettengruppen, die eine vereinfachte Berechnung der Homologie für eine spezielle aber sehr weit verbreitete Klasse von Räumen erlauben, die man **CW-Komplexe** nennt). Je nachdem erhält man andere Kettengruppen, Zykelngruppen und Randgruppen, aber die Homologiegruppen als Quotienten der Zykelngruppen nach den Randgruppen sind immer gleich. Sie

hängen nicht von diesen Details ab und beschreiben wirklich die Topologie des Raumes und nicht nur Eigenheiten der Konstruktion.

In der Vorlesung werden wir übrigens der singulären Homologie den Vorzug geben. Zwar hat die simpliziale Homologie den Vorteil, intuitiv zugänglicher und auf eine greifbarere und direktere Art berechenbar zu sein, aber sie ist nicht für alle Räume definiert und sie erfordert zur Anwendung eine Vorarbeit, nämlich die Anbringung eines simplizialen Gitters in dem Raum, aus dem die Gruppen gewonnen werden, und der Nachweis, dass die Gruppen nicht von der Wahl dieses Gitters abhängen, ist sehr technisch, deshalb auch nicht sonderlich interessant, und kostet unnötig Zeit. Alle Varianten der Homologie haben einen gewissen Katalog von gemeinsamen Grundeigenschaften, die wir auf jeden Fall behandeln müssen, und diese können als Werkzeuge eingesetzt werden, um die singulären Homologiegruppen mit kaum mehr Aufwand zu berechnen, als im simplizialen Fall. Und die singuläre Homologie ist für alle topologischen Räume unmittelbar erklärt und erfordert keine später behindernde Hilfsstruktur, die aus der fertigen Konstruktion durch einen Invarianzbeweis mühsam wieder „herausgepuhlt“ werden muss.

So viel zur zweiten Art von Gruppenkonstruktion in der algebraischen Topologie. Die wichtigen Merkmale der Homologiegruppen sind: Erfassung von Löchern durch das Scheitern eines Versuchs, sie mit Simplizes auszufüllen; relativ komplizierte und umständliche Konstruktion der Homologiegruppen aber dafür relativ einfache Gruppen, die nach Konstruktion automatisch abelsch sind; Existenz einer Reihe von leistungsfähigen Standardmethoden für die Berechnung der Gruppen und deshalb relativ problemlose Berechenbarkeit der Homologiegruppen.

Die beiden genannten Konstruktionen, zusammen mit den wichtigsten Berechnungshilfsmitteln und Grundeigenschaften der (singulären) Homologie, bilden den Gegenstand der *Algebraischen Topologie I*. Die Homologiegruppen haben als Quotienten von Untergruppen der Kettengruppen die gleiche algebraische Struktur wie diese, und obwohl wir von Gruppen sprechen, sind die Ketten eigentlich *Linearkombinationen von Simplizes* (mit Koeffizienten aus einem Ring) und nicht unbedingt nur Summen und Differenzen (dann ist der Ring auf \mathbf{Z} spezialisiert). Das heißt, die Homologiegruppen sind in Wirklichkeit Moduln über einen Koeffizientenring. Man kann deshalb fragen, wie sich die Gruppen ändern, wenn man den Ring ändert, und es stellt sich heraus, dass man die Gruppen für beliebige Koeffizienten aus der \mathbf{Z} -Homologie berechnen kann; das ist aber ein tief liegender und durchaus kein trivialer Satz, den wir am Anfang des zweiten Semesters nach der erforderlichen algebraischen Vorbereitung behandeln werden. Verwandt damit ist ein Satz, der es erlaubt, die Homologie von Produkträumen aus der Homologie der Faktoren zu berechnen, auch das erstaunlich schwierig.

Das wichtigste Thema des zweiten Semesters wird aber die duale Version der Homologietheorie sein, die **Kohomologie**. Ein Raum hat in jeder nichtnegativen Dimension eine Homologiegruppe, und das Gleiche gilt für die Kohomologie. Die Kohomologiegruppen lassen sich auch einfach aus den Homologiegruppen berechnen. Sie liefern aber trotzdem eine wesentlich neue Struktur, denn anders als bei der Homologie bildet die Gesamtheit der Kohomologiegruppen eines Raumes (über alle Dimensionen) einen *Ring*, d.h., sie hat auch eine multiplikative Struktur und ist deshalb leistungsfähiger als die Homologie alleine.

Das zweite Semester endet mit einem wichtigen Satz über eine besonders schöne spiegelbildliche Beziehung zwischen dem Turm der Homologiegruppen und dem Turm der Kohomologiegruppen einer kompakten Mannigfaltigkeit, dem *Poincaré Dualitätssatz*.

Schließlich werden wir noch, am Ende der *Algebraischen Topologie I* oder am Anfang der *Algebraischen Topologie II*, die wichtige Klasse der CW-Komplexe betrachten, zu der fast alle im Alltagsleben vorkommende topologische Räume gehören. Diese Räume werden aus einfachen Bausteinen, nämlich aus Scheiben (oder Bällen) verschiedener Dimensionen zusammengeklebt (man nennt diese Bausteine **Zellen**) und die Zellenzerlegung spiegelt sich wieder in einer vereinfachten Berechnung der Homologie über kleinere und deshalb einfachere Kettengruppen als die singulären, die man direkt aus der Zellenzerlegung ablesen kann.

Soweit zum Aufbau des zweisemestrigen Vorlesungszyklus und zu den Themen, die wir behandeln werden. Der Inhalt des zweiten Semesters ist natürlich etwas spezieller, aber der Inhalt des ersten Semesters ist ein Grundstoff, den Fachleute aus allen Richtungen der Mathematik eigentlich kennen sollten; wem dieses Grundwissen reicht, kann auch nur die erste Vorlesung mit Gewinn hören.

Da die algebraische Topologie zwei Gebiete der Mathematik berührt (Topologie und Algebra) und eine Zuordnung von algebraischen Objekten zu topologischen Objekten beinhaltet, ist es sinnvoll, eine eigene Sprache zu entwickeln, um über solche Zuordnungen zwischen verschiedenartigen Gebieten der Mathematik präzise und einfach reden zu können. Diese Sprache gibt es seit einiger Zeit — sie nennt sich Kategorientheorie und bringt für Mathematik, die die Grenzen zwischen Fachgebieten sprengt, einen ähnlichen Nutzen wie die Sprache der Mengenlehre für die Mathematik insgesamt. Da wir nun „professionell“ algebraische Topologie lernen und beschreiben wollen, ist es sinnvoll, wenn wir uns die Mühe machen, vorher diese nützliche Sprache zu erlernen, und das werden wir ab Donnerstag in den ersten zwei oder drei „richtigen“ Vorlesungen dieses Semesters tun. Danach beginnen wir mit einem Abschnitt über Homotopie, der dann hinüberführt in die Definition der

Homologiegruppen, die Beschreibung ihrer Eigenschaften und die Erläuterung der ersten und einfachsten Berechnungsmethoden für sie (insbesondere die Theorie der Überlagerungen).

Zum Schluss führe ich noch eine kurze Literaturliste auf; für das Verständnis der Vorlesung und der Übungen reicht aber die Vorlesungsmitschrift voll aus!

Literatur

- [1] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1994.
- [2] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 119. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1988.
- [3] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, Nachdruck der 2. Auflage (1980), 1995. Nur Homologie- und Kohomologietheorie, aber für diesen Teil der Vorlesung ausgezeichnet.
- [4] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1. Auflage 1981, korrigierter 3. Druck, 1995. Ein Klassiker, der den Stoff der Vorlesung vollständig und ausführlich abdeckt.
- [5] James W. Vick. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2. Auflage, 1994.

Kapitel 1

Kategorien und Funktoren

In der algebraischen Topologie geht es darum, topologische Fragen zu beantworten, in dem man sie in algebraische Fragen verwandelt, die wesentlich leichter durch Berechnungen zu entscheiden sind, als die ursprünglichen geometrischen Fragen. Diese Erleichterung erhält man nicht ganz kostenlos, denn bei dieser Umwandlung geht ein Teil der geometrischen Information verloren—darüber werden wir im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen. Aber es lohnt sich auf jeden Fall, diesen Preis zu zahlen, denn die Fragen, um die es geht, sind mit rein topologischen Methoden oft überhaupt nicht lösbar.

Das bedeutet allerdings, dass wir in dieser Vorlesung ständig dabei sein werden, topologischen Dingen (Räumen, stetigen Abbildungen) entsprechende algebraische Dinge (Gruppen oder Ringe, Homomorphismen) zuzuordnen und aus dieser Zuordnung Rückschlüsse zu ziehen; das geht aber nur, wenn diese Zuordnung nicht ganz willkürlich ist und das Wort *entsprechend* auch mit einem gewissen Inhalt gefüllt ist, dahingehend, dass topologische Eigenschaften oder Besonderheiten sich in ähnlichen algebraischen Eigenschaften oder Besonderheiten widerspiegeln.

Wir werden nicht nur eine solche Übersetzung Topologie \longrightarrow Algebra anwenden, sondern mehrere verschiedene und mehrere Varianten von jeder Sorte. Auch anderswo in der Mathematik kann es nützlich sein, eine Struktur in eine andere und eventuell ganz andersartige Struktur zu verwandeln, um damit Fragen leichter beantworten zu können, und auch da sollen Rückschlüsse aus dieser Übersetzung möglich sein, so dass die Art der Übersetzung gewisse allgemeine Regeln erfüllen sollte und erfüllen wird.

Weil wir diese Methode nicht nur einmal für einen bestimmten Zweck, sondern intensiv und ständig und in allen möglichen Varianten anwenden werden, wobei, damit wir daraus einen Nutzen ziehen können, immer die gleichen Grundeigenschaften eingehalten werden, die es erst ermöglichen, die

Übersetzung zu einem gewissen Grad wieder umzukehren, bedeutet es eine wesentliche Hilfe, wenn wir dafür eine eigene Sprache einführen (in die diese immer gleichen Grundeigenschaften gewissermaßen schon eingebaut sind).

Auch wenn das alles ein bisschen abstrakt anmuten wird, so lange wir nicht die eigentliche Anwendung eingeführt haben, auf die diese Sprache sich beziehen wird, erscheint es mir doch am sinnvollsten und effizientesten, jetzt gleich diese Sprache einzuführen, damit wir sie schon von Beginn an zur Verfügung haben, statt mit algebraischer Topologie unmittelbar zu beginnen und dann anhand der dort eintretenden Beispiele diese Sprache nur allmählich zu entwickeln. Illustrative Beispiele werden wir eben aus anderen Gebieten der Mathematik nehmen, die wir schon kennen—einen Mangel daran werden wir nicht haben. Es ist ein bisschen so, als wolle ein deutscher Geschäftsmann, sagen wir, einen Absatzmarkt für seine Ware in England eröffnen. Er könnte natürlich nur mit seinem Schulenglisch ausgestattet einfach dorthin fahren und im Umgang mit seinen englischen Geschäftspartnern die technischen Bezeichnungen, die er braucht, um seine Ware anzupreisen, nach und nach erraten oder erfragen, aber geschickter und erfolgversprechender wäre es, sich vorher, auch wenn's in einem trockenen Sprachkurs ist, die entsprechende Fachsprache anzueignen, um gleich zu Anfang entsprechend gerüstet zu sein.

Genau das werden wir tun. Die Fachsprache die man braucht, um über Übertragungen zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik oder verschiedenen Arten von mathematischer Struktur zu reden, ist die Sprache der **Kategorien und Funktoren**. In diesem ersten Abschnitt der Vorlesung wollen wir also noch gar keine algebraische Topologie machen, sondern als Vorbereitung dazu und damit wir später schneller vorankommen zunächst etwas *Kategorientheorie* lernen. Es handelt sich aber nur um die Grunddefinitionen und nur ganz wenige allgemeine Eigenschaften. Wir werden es kurz halten (zwei oder drei Vorlesungssitzungen), damit wir möglichst bald unser eigentliches Thema eröffnen können.

Eine **Kategorie** ist ein mathematischer Begriff, der eine mathematische Struktur modellieren soll. Damit ist gemeint eine bestimmte *Art* mathematischer Struktur (wie etwa Gruppen oder abelsche Gruppen oder topologische Räume usw.) und nicht eine bestimmte Instanz dieser Art. Allerdings ist diese Intention zwar die Motivation für folgende Definition, was sich leicht nachvollziehen lässt, aber sie wird in der Definition nicht offen genannt; die Definition ist bewusst so formuliert, dass auch „exotische“ und sehr abstrakte Anwendungen möglich sind und durchaus ihren Nutzen haben.

Definition 1.1 (Kategorie) Eine **Kategorie** \mathcal{K} besteht aus folgenden Bestandteilen:

- a) Eine Klasse $\text{Ob}(\mathcal{K})$, deren Elemente die **Objekte** von \mathcal{K} heißen;

- b) für je zwei Elemente von $\text{Ob}(\mathcal{K})$, also für je zwei Objekte A und B von \mathcal{K} eine (eventuell auch leere) Menge $\text{Mor}(A, B)$, deren Elemente die **Morphismen von A nach B** heißen. A heißt das **Quellobjekt** und B das **Zielobjekt** eines solchen Morphismus.

Es soll ferner gelten, dass die Morphismenmengen $\text{Mor}(A, B)$ für verschiedene Objektpaare (A, B) zueinander disjunkt sind, d.h., dass das Quell- und das Zielobjekt eines Morphismus eindeutig bestimmt sind;

- c) für je drei Objekte A, B und C von \mathcal{K} eine Abbildung

$$\circ: \text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, C),$$

genannt die **Verknüpfungsabbildung** oder die **Verknüpfung**,

so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind (hier schreiben wir die Verknüpfung in Infix-Notation, wie man es üblicherweise tut, also statt $\circ(g, f)$ schreiben wir $g \circ f$):

- i) \circ ist assoziativ, d.h., wenn A, B, C und $D \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ und wenn $f \in \text{Mor}(A, B)$, $g \in \text{Mor}(B, C)$ und $h \in \text{Mor}(C, D)$, dann ist $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- ii) für jedes Objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ existiert ein Morphismus $\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$, genannt der **Identitätsmorphismus von A** oder die **Identität von A** , so dass für jedes Objekt $B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ und für jeden Morphismus $g \in \text{Mor}(A, B)$ gilt $g \circ \text{id}_A = g$, und für jedes Objekt $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ und für jeden Morphismus $h \in \text{Mor}(C, A)$ gilt $\text{id}_A \circ h = h$.

Bemerkung 1.2 Der Identitätsmorphismus eines Objektes A ist offenbar eindeutig bestimmt, denn wenn i und i' zwei Morphismen in $\text{Mor}(A, A)$ sind, die die Eigenschaft 1.1 c ii) der Identität haben, so gilt $i = i \circ i'$ (weil i' eine Identität ist) und $i \circ i' = i'$ (weil i eine Identität ist), also $i = i'$.

Bemerkung 1.3 a) Dieser Begriff wurde erfunden, um eine mathematische Theorie oder eine mathematische Struktur zu modellieren und somit selber für mathematische Untersuchungen zugänglich zu machen und es ist nicht sehr schwer zu verstehen, welche Bestandteile des Kategorienbegriffs welchen Merkmalen einer mathematischen Struktur entsprechen, hier einmal am Beispiel der Gruppentheorie erläutert: die *Objekte* der Kategorie sind normalerweise die Struktur tragenden Mengen, die in der Theorie vorkommen (in der Gruppentheorie also die Gruppen) und wenn A und B zwei Objekte der Kategorie sind, dann sind

die *Morphismen* von A nach B normalerweise die Struktur erhaltenden Abbildungen zwischen diesen Mengen, also im Falle der Gruppentheorie die Gruppenhomomorphismen von der Gruppe A in die Gruppe B . Die Verknüpfung der Kategorie ist normalerweise auch nichts anderes als die übliche Verknüpfung von Abbildungen und erfüllt deshalb automatisch die Eigenschaften aus Definition 1.1 Teil c).

- b) Wichtig ist es, das Wort *normalerweise* in Teil a) nicht zu übersehen. Nirgendwo in der Definition von *Kategorie* wird verlangt, dass Objekte wirklich Mengen sein müssen und dass Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen sein müssen. Die Objekte können irgendwelche mathematischen Gegenstände sein und müssen nicht unbedingt Mengen, geschweige denn Mengen mit Struktur sein (außer in dem Sinne, dass alle mathematischen Gegenstände sich als Mengen definieren lassen). Die Morphismen müssen, sogar wenn die Objekte Mengen sind, nicht Abbildungen zwischen diesen Mengen oder überhaupt Abbildungen sein. Und die Verknüpfungsabbildung muss nicht identisch mit der Verknüpfung von Abbildungen sein. Nicht nur sind solche „exotische“ Kategorien durchaus erlaubt, sie haben sogar nützliche Anwendungen und kommen gar nicht so selten vor. Beispiele werden wir gleich präsentieren.
- c) Die „normale“ Situation aus Teil a) ist dennoch die häufigste, und da jede Struktur auf Mengen sich als isomorphes Abbild auf jede andere Menge der gleichen Mächtigkeit übertragen lässt, gibt es in solchen Kategorien mindest so viele verschiedene Objekte, wie es Mengen einer gegebenen Mächtigkeit gibt. Ausser im Falle der leeren Menge ist diese Anzahl so groß, dass ohne Widersprüche in der Mengenlehre heraufzubeschwören die Gesamtheit der Objekte einer solchen Kategorie gar nicht selber eine Menge sein darf, sondern nur eine Klasse (also eine Ansammlung von Mengen, die aber nicht selber als Element einer anderen Menge in Erscheinung treten darf). Deshalb wird in Definition 1.1 a) $\text{Ob}(\mathcal{K})$ auch explizit als Klasse und nicht als Menge vorausgesetzt. Die *Morphismen* zwischen zwei Objekten bilden aber tatsächlich immer eine *Menge*, und nicht nur eine Klasse.
- d) Es kann aber durchaus vorkommen, dass die Objekte einer Kategorie wirklich eine Menge bilden. Solche Kategorien nennt man ***kleine Kategorien***.
- e) Es mag ein bisschen pedantisch klingen, in 1.1 b) zu verlangen, dass die Morphismenmengen alle disjunkt sein müssen, aber es wird in unseren

Anwendungen in der Tat so sein, dass die Eigenschaften von stetigen Abbildungen (wichtige Morphismen für uns) in Bezug auf die algebraische Topologie sehr stark davon abhängen, welchen Quellraum und insbesondere auch welchen Zielraum sie haben.

Wir werden in den Beispielen, die wir unten bringen, aber nicht immer streng auf Erfüllung dieser Bedingung achten, weil sonst die Definitionen einiger Beispiele durch technische und nicht wesentlich inhaltliche Einzelheiten sehr unverständlich werden. Da wo die Bedingung aber scheinbar verletzt ist, muss man nur die angegebenen Morphismenmengen $\text{Mor}(A, B)$ ersetzen durch $\text{Mor}(A, B) \times \{A\} \times \{B\}$, um sie disjunkt zu machen (und natürlich muss man die Definition der Verknüpfung entsprechend anpassen, was aber die anderen verlangten Eigenschaften nicht zerstört).

Notation 1.4 a) Weil die Situation in Bemerkung 1.3 a) so häufig vorkommt, benutzt man oft einen gewohnteren Namen für die Morphismenmengen, nämlich $\text{Hom}(A, B)$ statt $\text{Mor}(A, B)$.

b) Statt $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ schreibt man oft einfach $A \in \mathcal{K}$.

c) Statt $f \in \text{Mor}(A, B)$ schreibt man oft $f: A \longrightarrow B$. Wichtig ist es, in Erinnerung zu halten, dass f trotzdem nicht eine Abbildung sein muss!

d) Wir werden es sehr oft mit mehreren Kategorien gleichzeitig zu tun haben, manchmal auch in Situationen, wo gewisse Objekte sowohl zu der einen als auch zu einer anderen Kategorie gehören können. In diesen Fällen schreiben wir $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ statt einfach $\text{Mor}(A, B)$, um genau zu kennzeichnen, in welcher Kategorie wir die Morphismen betrachten.

e) Eine manchmal verwendete noch einfachere Notation für die Morphismenmengen, die automatisch den Namen der Kategorie in sich trägt, besteht darin, $\mathcal{K}(A, B)$ für $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ zu schreiben.

Um ein Gefühl für den Begriff der Kategorie zu bekommen und auch die (nützlichen und weniger nützlichen) exotischen Varianten kennen zu lernen, betrachten wir folgende

Beispiele 1.5 a) Die Kategorie *Men* der Mengen und Mengenabbildungen. $\text{Ob}(\text{Men})$ ist die Klasse aller Mengen, und für je zwei Mengen A und B ist $\text{Mor}_{\text{Men}}(A, B)$ die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen $A \longrightarrow B$.

- b) Die Kategorie Gp der Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Die Objekte von Gp sind alle Gruppen und für je zwei Gruppen A und B ist $\text{Mor}_{Gp}(A, B)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen $A \longrightarrow B$.
- c) Die Kategorie $AbGp$ der *abelschen* Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Die Objekte von $AbGp$ sind alle abelschen Gruppen und für je zwei abelsche Gruppen A und B ist $\text{Mor}_{AbGp}(A, B)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen $A \longrightarrow B$. Beachte, dass A und B auch Objekte der Kategorie Gp sind, und $\text{Mor}(A, B)$ ist in beiden Kategorien die gleiche Menge; nur die Klassen der Objekte unterscheiden sich.
- d) Die Kategorie Top der topologischen Räume und stetigen Abbildungen, die wir auch, weil sie für uns ja vordergründig wichtig ist, mit Kosennamen die *topologische Kategorie* nennen werden. Die Objekte von Top sind alle topologischen Räume und für je zwei Räume A und B ist $\text{Mor}_{Top}(A, B)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $A \longrightarrow B$.
- e) Wer die vorangegangenen Beispiele verstanden hat, braucht keine explizite Definition mehr der ähnlich aufgebauten Kategorie *Ring* aller Ringe, der Kategorie *KR1* aller kommutativen Ringe mit 1, der Kategorie *Körp* aller Körper, der Kategorie *K-VR* aller Vektorräume über einen gegebenen Körper K , der Kategorie *DMf* aller differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, usw.

Bisher haben wir nur ganz normale Beispiele genannt, der Sorte wie in Bemerkung 1.3 a) (Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen). Hier nun einige andersartige:

- f) Wir definieren wie folgt eine Kategorie *Teil*, die das Teilverhältnis zwischen den natürlichen Zahlen gewissermaßen modelliert. Wir setzen $\text{Ob}(\text{Teil})$ als die Menge \mathbf{N}_+ der positiven natürlichen Zahlen, und für je zwei Elemente a und b von $\text{Ob}(\text{Teil})$ setzen wir

$$\text{Mor}_{\text{Teil}}(a, b) := \{p \in \mathbf{N}_+ \mid ap \text{ teilt } b\}.$$

(Diese Morphismenmenge ist natürlich nichtleer genau dann, wenn a ein Teiler von b ist.) Die Verknüpfungsabbildung definieren wir einfach als das Produkt, d.h., wenn a, b und c Objekte von *Teil* sind und wenn $p \in \text{Mor}(a, b)$ (d. h., ap teilt b) und $q \in \text{Mor}(b, c)$ (d. h., bq teilt c), so setzen wir $q \circ p := pq \in \text{Mor}(a, c)$ und stellen sofort fest, dass dies tatsächlich ein Morphismus von a nach c ist, denn $ap \mid b$ und deshalb gilt $apq \mid bq \mid c$, also $a(pq) \mid c$ (wir benutzen hier die übliche Notation „ $x \mid y$ “ für „ x teilt y “).

Die Eigenschaften i) und ii) aus Teil c) von Definition 1.1 sind offensichtlich erfüllt: i) gilt, weil die Multiplikation von Zahlen assoziativ ist, und ii) gilt offenbar mit $\text{id}_a := 1 \in \text{Mor}(a, a)$ für jedes Objekt a von Teil.

Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass die hier definierten Morphismenmengen entgegen Bedingung 1.1 b) nicht disjunkt sind, aber dass ist kein wesentliches Problem, denn sie lassen sich wie in Bemerkung 1.3 e) erläutern leicht disjunkt machen, ohne die anderen wichtigen Eigenschaften zu zerstören (aber dennoch zum Schaden der Klarheit der Definition, weshalb wir auf die Ausführung verzichtet haben).

- g) Sei G eine fest gewählte Gruppe. Wir definieren eine Kategorie \mathcal{G} mit genau einem Objekt $*$, so dass $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$ ist und die Verknüpfung die Gruppenmultiplikation ist; sie ist assoziativ und das neutrale Element $e \in G$ ist der Identitätsmorphismus.
- h) Sei K eine beliebige Klasse. Wir definieren eine Kategorie \mathcal{K} , indem wir $\text{Ob}(\mathcal{K}) = K$ setzen und für je zwei Objekte A und B von \mathcal{K} die Morphismenmenge $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ als eine einelementige Menge wählen, dessen Element wir mit f_{AB} bezeichnen; diese Elemente wählen wir alle verschieden, damit die Morphismenmengen disjunkt werden. Die Verknüpfung lässt sich nur auf eine Weise definieren, nämlich $f_{BC} \circ f_{AB} = f_{AC}$. Dies erfüllt offensichtlich die Bedingungen aus Definition 1.1 c).
- i) Als Beispiel einer nützlichen exotischen Kategorie betrachten wir Kob_n , die *Kobordismuskategorie* in einer gegebenen Dimension n . Die Objekte von Kob_n sind n -dimensionale kompakte unberandete differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ein Morphismus zwischen zwei solcher Mannigfaltigkeiten M und N ist eine Homöomorphieklasse (bei festem Rand) von $n+1$ -dimensionalen kompakten berandeten Mannigfaltigkeiten P , deren Rand aus $M \overset{D}{\cup} N$, der disjunkten Vereinigung von M und N , besteht (auch hier berufen wir uns auf Bemerkung 1.3 e) um nicht auf die Frage eingehen zu müssen, ob diese Morphismenmengen disjunkt sind). Die Verknüpfung zweier Morphismen $P: M \longrightarrow N$ und $Q: N \longrightarrow K$ wird erhalten durch Zusammenkleben von P und Q entlang der gemeinsamen Randkomponente N (wodurch N nicht mehr zum Rand des Ergebnisses gehört, sondern jetzt nur $M \overset{D}{\cup} K$). Der Identitätsmorphismus von M ist die Homöomorphieklasse von $M \times I$ (wo I das Intervall $[0, 1]$ ist). Ein Satz der Differentialtopologie besagt, dass eine Randkomponente M einer Mannigfaltigkeit P eine sogenannte *Kragen-umgebung* in P besitzt, eine Umgebung, die homöomorph ist zu $M \times I$.

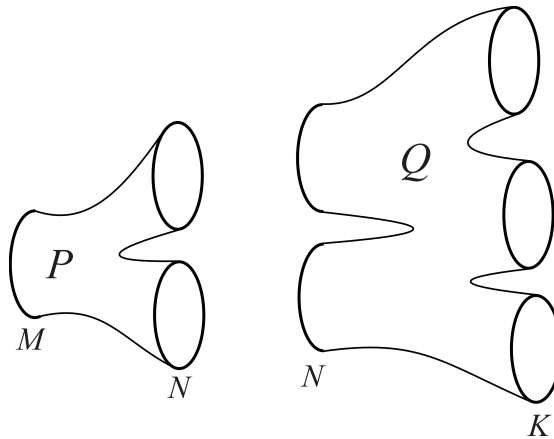


Abbildung 1.1: Kobordismen

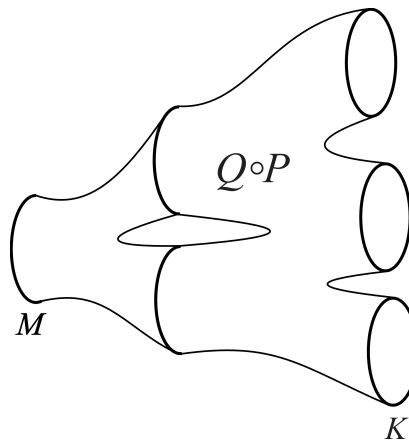
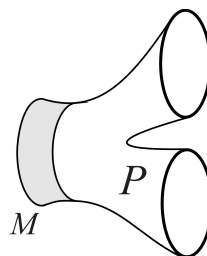


Abbildung 1.2: Verknüpfung von Kobordismen

Abbildung 1.3: Eine Kragenumgebung, homöomorph zu $M \times I$

Deshalb fungiert $M \times I$ tatsächlich als Identitätselement—wenn man in P eine zu $M \times I$ homöomorphe Umgebung von M findet, heißt das, dass Ankleben von $M \times I$ an die Randkomponente M von P eine zu P homöomorphe Mannigfaltigkeit ergibt, also die Verknüpfung mit dem Morphismus $M \times I$ ändert den Homöomorphietyp der Mannigfaltigkeit P nicht.

Die Kobordismuskategorie hat Anwendungen in der Differentialtopologie. Hier noch einige zumindest zu einem gewissen Grad „exotische“ Kategorien, die für uns in dieser Vorlesung sehr wichtig sein werden. Es handelt sich um kleine Abwandlungen der topologischen Kategorie, die auf die Konstruktion und die Eigenschaften der Homotopiegruppen und der Homologiegruppen angepasst sind. In allen Fällen muss Bemerkung 1.3 e) angewendet werden, um die Disjunktheit der Morphismenmengen einzurichten; wir gehen bei den einzelnen Beispielen nicht mehr explizit darauf ein.

- j) Die Kategorie Top_* der **punktierten topologischen Räume**. Die Objekte von Top_* sind Paare (X, p) , wo X ein topologischer Raum ist und p ein Punkt von X (man nennt ihn den **ausgezeichneten Punkt** oder den **Basispunkt** des punktierten Raumes (X, p)). Die Morphismen $(X, p) \rightarrow (Y, q)$ sind die stetigen Abbildungen $f: X \rightarrow Y$, so dass $f(p) = q$. Die Verknüpfung ist die normale Verknüpfung von Abbildungen und respektiert automatisch die ausgezeichneten Punkte. Der Identitätsmorphismus von (X, p) ist die normale Identität von X (die p ja nach p abbildet). Offensichtlich erfüllt diese Struktur alle Eigenschaften von Definition 1.1. Da der ausgezeichnete Punkt in die Struktur eingebaut ist, ist diese Kategorie geeignet für Konstruktionen, die von einem vorher ausgewählten Punkt ausgehen, wie es für die Konstruktion der Homotopiegruppen der Fall sein wird. Eine feste Wahl eines Grundpunktes wird in Top_* automatisch mitgeliefert. Weil in Anwendungen dieser Kategorie der ausgezeichnete Punkt tatsächlich eine besondere Rolle spielt, ist es üblich, ihn mit $*$ zu bezeichnen, und man kann die ausgezeichneten Punkte verschiedener Objekte der Kategorie durch einen Index unterscheiden, der den topologischen Raum nennt oder auf eine sonstige Art die Zeichen unterscheiden: $(X, *X)$ und $(Y, *Y)$, oder $(X, *)$ und $(X', *)$, zum Beispiel.
- k) Die Kategorie Top^2 der **topologischen Raumpaare**. Die Objekte von Top^2 sind Paare (X, A) , wo X ein topologischer Raum ist und $A \subseteq X$ ist ein Unterraum von X . Die Morphismen $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ sind die stetigen Abbildungen $f: X \rightarrow Y$, so dass $f(A) \subseteq B$, die Verknüpfung

ist wieder die normale Verknüpfung von Abbildungen und der Identitätsmorphismus von (X, A) ist wieder die normale Identität von X , die automatisch A in sich abbildet. Die Eigenschaften von Definition 1.1 sind wieder trivialerweise erfüllt. Auch für die Objekte dieser Kategorie lassen sich Homologie- und Kohomologiegruppen definieren, und es gibt eine nützliche Beziehung zwischen diesen Gruppen und den Homologiegruppen oder Kohomologiegruppen der einzelnen Räume X und A im Paar (X, A) , die für die Berechnung dieser Gruppen eingesetzt werden kann.

- l) Beispiel k) läßt sich verallgemeinern zu einer Kategorie Top^n für beliebiges $n \geq 1 \in \mathbf{N}$. Die Objekte von Top^n sind n -Tupel (X_1, X_2, \dots, X_n) von topologischen Räumen, so dass $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n$, und ein Morphismus $f: (X_1, X_2, \dots, X_n) \longrightarrow (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ist einfach eine stetige Abbildung $f: X_1 \longrightarrow Y_1$, so dass für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ gilt $f(X_k) \subseteq Y_k$. Tatsächlich benutzen werden wir diese Verallgemeinerung nur ganz selten und nur noch für den Fall $n = 3$; die entsprechende Kategorie Top^3 nennt sich die Kategorie der topologischen **Raumtripel**.
- m) Beispiel l) hat eine Variante $Top^{[n]}$, die sich auch für jedes n definieren läßt aber praktisch nur für den Fall $n = 3$ tatsächlich benutzt wird. Hier sind die Objekte zwar auch n -Tupel $(X, A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$ von topologischen Räumen, wo die A_i alle Unterräume von X sind, aber diesmal müssen die A_i nicht ineinander verschachtelt sein, sondern es wird stattdessen verlangt, dass sie X überdecken, d.h., die A_i sind beliebige Unterräume von X , so dass $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Die Morphismen $(X, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) \longrightarrow (Y, B_1, B_2, \dots, B_{n-1})$ sind wieder stetige Abbildungen $f: (X, A_1, \dots, A_n) \longrightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$, so dass $f(A_i) \subseteq B_i$ für alle i . Im einzig wichtigen Fall $n = 3$ nennt man die Objekte dieser Kategorie **Triaden**, und um in der Notation gleich zu kennzeichnen, dass es sich um eine Triade handelt, ersetzt man das erste Komma in der Auflistung durch ein Semikolon, d.h., man notiert Triaden als $(X; A_1, A_2)$ oder $(X; A, B)$. Auch die Triaden kommen eigentlich nur an einer bestimmten Stelle in der Homologietheorie vor.
- n) Ein letztes Beispiel kombiniert die Ideen von Beispiel j) und k); man kann es auch als ein Spezialfall von Beispiel l) betrachten, in dem der kleinste Unterraum einpunktig ist. Es handelt sich um die Kategorie Top_*^2 der **punktierten Raumpaare**. Die Objekte dieser Kategorie sind Tripel (X, A, p) , wo X ein topologischer Raum ist, A ein Unterraum von X ist und p ein Punkt von A ist. Morphismen $f: (X, A, p) \longrightarrow (Y, B, q)$ sind stetige Abbildungen $f: X \longrightarrow Y$, so dass $f(A) \subseteq B$ und $f(p) = q$.

Die Verknüpfung ist wieder die übliche Verknüpfung von stetigen Abbildungen und alle erforderlichen Eigenschaften sind sehr leicht nachzuprüfen. Diese Kategorie findet Verwendung bei der Konstruktion der Homotopiegruppen von Raumpaaren, und wie bei der Homologie gibt es eine nützliche und bei der Berechnung der Homotopiegruppen hilfreiche Beziehung zwischen der Homotopiegruppe eines punktierten Raumpaares und den Homotopiegruppen der einzelnen an ihm beteiligten punktierten Räume.

Durch ähnliche Spielereien könnte man noch ganz viele andere Varianten der Kategorie *Top* konstruieren. Die speziellen genannten Beispiele sind aber keine Spielereien; sie werden tatsächlich intensiv verwendet in der algebraischen Topologie.

In den Beispielen 1.5 j)–n) haben wir gesehen, dass man aus bekannten Kategorien durch kleine Abwandlungen leicht neue nützliche Kategorien gewinnen kann. Hier sind noch einige weitere solche Konstruktionsideen.

Definition 1.6 Sei \mathcal{K} eine Kategorie.

- a) Wir konstruieren eine neue Kategorie \mathcal{K}^- , genannt die **duale Kategorie** zu \mathcal{K} . Wir setzen $\text{Ob}(\mathcal{K}^-) := \text{Ob}(\mathcal{K})$, aber für je zwei Objekte A und B setzen wir $\text{Mor}_{\mathcal{K}^-}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A)$ und wir kehren entsprechend die Reihenfolge der Verknüpfung um. Wenn $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}^-}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A)$ und $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}^-}(B, C) := \text{Mor}_{\mathcal{K}}(C, B)$, so definieren wir $g \circ_{\mathcal{K}^-} f := f \circ_{\mathcal{K}} g$.

Die Verknüpfung auf der rechten Seite ist in \mathcal{K} tatsächlich definiert und alle gewünschten Eigenschaften der Verknüpfung in \mathcal{K}^- folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften in \mathcal{K} . Für jedes Objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}^-) = \text{Ob}(\mathcal{K})$ ist $\text{Mor}(A, A)$ die gleiche Menge in \mathcal{K}^- wie in \mathcal{K} , und id_A ist der gleiche Morphismus in beiden Kategorien. Diese Konstruktion behält das Grundgerüst der alten Kategorie bei und macht im Wesentlichen nichts anderes, als die „Pfeilrichtung“ der Morphismen umzukehren.

- b) Eine **Kongruenz** auf \mathcal{K} ist eine Klasse \sim von Äquivalenzrelationen, die für je zwei Objekte A und B von \mathcal{K} genau eine Äquivalenzrelation auf $\text{Mor}(A, B)$ enthält (die wir auch mit \sim bezeichnen), so dass wenn A, B , und $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ und wenn $f \sim f' \in \text{Mor}(A, B)$ und $g \sim g' \in \text{Mor}(B, C)$, dann gilt auch $g \circ f \sim g' \circ f' \in \text{Mor}(A, C)$.

Die \sim -Äquivalenzklasse eines Morphismus f bezeichnen wir mit $[f]$ und wir nennen sie die **Kongruenzklasse** von f . Wenn \sim eine Kongruenz

ist, dann können wir eine wohldefinierte Verknüpfung \circ für Kongruenzklassen von Morphismen definieren durch die Vorschrift $[g] \circ [f] := [g \circ f]$.

Dies erlaubt die Konstruktion einer neuen Kategorie $\mathcal{K}' := \mathcal{K}/\sim$ durch folgende Festlegungen. Wir setzen $\text{Ob}(\mathcal{K}') := \text{Ob}(\mathcal{K})$. Für je zwei Objekte A und B dieser Kategorien setzen wir $\text{Mor}_{\mathcal{K}'}$ gleich der Menge $\text{Mor}(A, B)/\sim$ der \sim -Äquivalenzklassen auf $\text{Mor}(A, B)$. Die Verknüpfung von solchen Äquivalenzklassen definieren wir wie oben beschrieben und man prüft sofort nach, dass diese Verknüpfung assoziativ ist und dass für jedes Objekt A die Klasse $[\text{id}_A]$ ein Identitätsmorphismus für die Kategorie \mathcal{K}' ist. Diese neue Kategorie $\mathcal{K}' := \mathcal{K}/\sim$ heißt die **Quotientenkategorie** von \mathcal{K} nach der Kongruenz \sim . Die Morphismenmengen von einer Quotientenkategorie notiert man oft mit $[A, B]$ statt $\text{Mor}(A, B)$.

Es wird sich später herausstellen, dass die wichtigen Kategorien der algebraischen Topologie eigentlich nicht die in Beispiele 1.5 beschriebenen Kategorien Top_* und Top^2 usw. sind, sondern Quotientenkategorien davon nach einer Äquivalenzrelation, die man *Homotopie* nennt. Es wurde in der Einleitung erwähnt, dass der Preis, der für die Segen der algebraischen Topologie zu zahlen ist, in einem Informationsverlust besteht, und es ist eben so, dass die algebraische Topologie „homotopieblind“ ist und homotope stetige Abbildungen nicht voneinander unterscheiden kann.

- c) Sei \mathcal{L} eine weitere Kategorie. Wir können die **Produktkategorie** $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ von \mathcal{K} und \mathcal{L} wie folgt definieren. Die Objekte von $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ sind Paare (A, B) , wo $A \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ und $B \in \text{Ob}(\mathcal{L})$. Sind (A, B) und (C, D) Objekte von $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$, so setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}}((A, B), (C, D)) := \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{L}}(B, D),$$

d.h., die Morphismen der Produktkategorie sind Paare von Morphismen der einzelnen Kategorien. Die Verknüpfung wird „koordinatenweise“ erklärt:

$$(h, k) \circ_{\mathcal{K} \times \mathcal{L}} (f, g) := (h \circ_{\mathcal{K}} f, k \circ_{\mathcal{L}} g).$$

Man prüft sehr leicht nach, dass alle erforderlichen Eigenschaften erfüllt sind.

- d) Die verschiedenen Abwandlungen der Kategorie Top , die wir in Beispiele 1.5 eingeführt haben, kann man auf entsprechende Weise auf

jede Kategorie \mathcal{K} anwenden, deren Objekte Mengen sind und deren Morphismen Abbildungen sind. Da für uns aber nur die auf *Top* basierenden Varianten von Bedeutung sind, wollen wir nicht näher darauf eingehen.

Beispiele 1.7 Sei K ein Körper und sei $\mathcal{V} := VR_0$ die Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume über K und der K -linearen Abbildungen.

- a) Die duale Kategorie \mathcal{V}^- hat die gleichen Vektorräume als Objekte, aber im Wesentlichen die Morphismen der *dualen* Vektorräume, denn es gibt wegen der Voraussetzung der endlichen Dimension eine bijektive Beziehung zwischen linearen Abbildungen und den zu ihnen dualen linearen Abbildungen der Dualräume. (Natürlich verstecken die Wörter „im Wesentlichen“ die Details dieser Bijektion.)
- b) Sei K ein Körper und sei Aff die Kategorie der affinen Räume über K und der affinen Abbildungen zwischen solchen Räumen. Zur Struktur eines affinen Raumes A gehört ein K -Vektorraum V (der *Richtungsraum* von A) und eine Addition $+$ zwischen Punkten aus A und Vektoren in V , oder gleichbedeutend, eine „Subtraktion“ zwischen Punkten aus A , die als Ergebnis einen Vektor aus V liefert. Die Addition hat die Eigenschaften

- i) $(p + v) + w = p + (v + w)$ für $p \in A$ und $v, w \in V$;
- ii) $p + 0 = p$ für jedes $p \in A$, woraus folgt:
- iii) Wenn $p + v = q$, dann ist $q - v = p$.

Für die Subtraktion folgt daraus: $p - p = 0$, $q - p = -(p - q)$ und $(p - q) + (q - r) = p - r$ für je drei Punkte p, q und $r \in A$.

Bezüglich des „Vektorsummanden“ einer Summe $p + v$ verhalten sich affine Abbildungen *linear*, d.h., jede affine Abbildung α zwischen zwei affinen Räumen hat einen „linearen Anteil“, eine lineare Abbildung λ zwischen den Richtungsvektorräumen dieser affinen Räume, so dass

$$\alpha(p + v) = \alpha(p) + \lambda(v).$$

Sei A ein affiner Raum mit Richtungsraum V und sei B ein affiner Raum mit Richtungsraum W . Seien α und β affine Abbildungen $A \longrightarrow B$. Wir setzen $\alpha \sim \beta$ genau dann, wenn $(\alpha - \beta): A \longrightarrow W$ konstant ist.

Aus den genannten Eigenschaften affiner Räume und Abbildungen folgt leicht, dass \sim eine Kongruenz ist. Die oben erwähnten Eigenschaften

der Subtraktion bedingen, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf jeder einzelnen Morphismenmenge ist.

Man prüft wie folgt leicht nach, dass \sim mit der Verknüpfung erträglich ist: Wenn $\alpha \sim \beta$ und wenn $\alpha - \beta$ den konstanten Wert w annimmt, und wenn C ein affiner Raum ist mit Richtungsraum U und $\gamma \sim \delta$ affine Abbildungen $B \rightarrow C$ sind, so dass $\gamma - \delta$ den konstanten Wert $u \in U$ annimmt, und wenn $\mu: W \rightarrow U$ der lineare Anteil von γ ist, so gilt für jedes $a \in A$:

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \alpha)(a) - (\delta \circ \beta)(a) &= (\gamma \circ \alpha)(a) - (\gamma \circ \beta)(a) + (\gamma \circ \beta)(a) - (\delta \circ \beta)(a) \\ &= \mu(w) + u \end{aligned}$$

und dies ist konstant, also ist $\gamma \circ \alpha \sim \delta \circ \beta$.

Die Quotientenkategorie Aff/\sim hat affine Räume als Objekte, aber nur den linearen oder *Richtungsanteil* der affinen Abbildung als Morphismen (der Translationsanteil wird ignoriert).

Kategorien können viele Gestalten haben, aber manche sind eng miteinander verwandt. Folgende mögliche Beziehung ist dabei von besonderer Bedeutung:

Definition 1.8 Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} Kategorien. Wir nennen \mathcal{L} eine **Unterkategorie** von \mathcal{K} , wenn gilt:

- a) $\text{Ob}(\mathcal{L}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{K})$.
- b) Für je zwei Objekte A und B der „kleineren“ Kategorie \mathcal{L} ist

$$\text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B).$$

- c) Für je drei Objekte A, B und C von \mathcal{L} und für je zwei Morphismen $f \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B)$ und $g \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(B, C)$ ist $g \circ f$ der gleiche Morphismus $A \rightarrow C$ in \mathcal{L} , wie in \mathcal{K} .
- d) Für jedes Objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{L})$ ist id_A der gleiche Morphismus in \mathcal{L} , wie in \mathcal{K} .

Wenn für je zwei Objekte A und B von \mathcal{L} es in b) sogar der Fall ist, dass $\text{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$, so nennen wir \mathcal{L} eine **volle Unterkategorie** von \mathcal{K} .

Beispiele 1.9 a) Die Kategorie $AbGp$ ist eine volle Unterkategorie der Kategorie Gp .

- b) Top_* ist eine volle Unterkategorie von Top^2 , wenn man den ausgezeichneten Punkt $*$ eines punktierten topologischen Raumes mit dem topologischen Unterraum $\{*\}$ identifiziert.
- c) Top ist eine volle Unterkategorie der Kategorie Top^2 , wenn man einen topologischen Raum X mit dem Raumpaars (X, \emptyset) identifiziert.
- d) Top^2 wird zu einer Unterkategorie von $Top \times Top$, wenn man jeden Morphismus $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ von Top^2 mit dem Morphismus $(f, f|_A): (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ der Kategorie $Top \times Top$ identifiziert. (Es wäre ohnehin formal richtiger gewesen, die Morphismen von Top^2 so zu definieren, denn nach unserer Definition in Beispiel 1.5 k) sind die Morphismenmengen nicht disjunkt; wir haben nur deshalb eine „falsche“ Definition der Morphismen von Top^2 gewählt, weil sie unkomplizierter und deshalb leichter zu verstehen ist, als die „richtige“.)

Für die Objekte (X, A) von Top^2 muss gelten $A \subseteq X$, so dass

$$\text{Ob}(Top^2) \subsetneq \text{Ob}(Top \times Top),$$

und wenn (X, A) und (Y, B) Objekte von Top^2 sind, so gilt auch

$$\text{Mor}_{Top^2}((X, A), (Y, B)) \subsetneq \text{Mor}_{Top \times Top}((X, A), (Y, B)),$$

denn ein $Top \times Top$ -Morphismus $(f, g): (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ ist nur dann auch ein Top^2 -Morphismus, wenn $g = f|_A$. Deshalb ist insbesondere Top^2 keine *volle* Unterkategorie von $Top \times Top$.

- e) Auf die gleiche Weise kann man Top_* als eine Unterkategorie von $Top \times Top$ auffassen (schließlich ist Top_* nach b) eine Unterkategorie von Top^2).
- f) Sei Inj die Kategorie, die beliebige Mengen als ihre Objekte hat, aber deren Morphismen nur die *injektiven* mengentheoretischen Abbildungen zwischen zwei Mengen sind (da Identitätsabbildungen injektiv sind, ist dies tatsächlich eine Kategorie). Dann ist Inj eine Unterkategorie von Men , aber keine volle Unterkategorie.
- g) $Körp$ ist eine volle Unterkategorie von $KR1$, und $KR1$ ist eine Unterkategorie von $Ring$, aber keine volle Unterkategorie, weil die Morphismen von $KR1$ Einselemente in Einselemente abbilden müssen, aber allgemeine Ringhomomorphismen, auch zwischen Ringen mit 1, müssen das nicht.

Wenn man nur eine Kategorie auf einmal betrachten will, braucht man den Begriff Kategorie gar nicht erst einzuführen. Sie haben ja jahrelang Vektorraumtheorie, Gruppentheorie, Topologie und andere Gebiete der Mathematik mit den ihnen inne liegenden mathematischen Strukturen kennen gelernt und ausgiebig untersucht, ohne von Kategorien etwas zu wissen. Aber in der algebraischen Topologie wollen wir ja gerade mit verschiedenen Strukturen gleichzeitig arbeiten und somit mehrere Kategorien miteinander in Verbindung bringen. Das ist überhaupt der Grund, warum wir Kategorientheorie eingeführt haben, und uns geht es ganz besonders um „Struktur erhaltende“ Abbildungen zwischen verschiedenen Kategorien. Solche Abbildungen heißen **Funktoren**, und es gibt sie in zwei Ausprägungen, je nachdem ob sie die Pfeilrichtung von Morphismen erhalten oder umkehren:

Definition 1.10 (Funktor) Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} Kategorien.

- I. Ein **kovarianter Funktor** $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ist eine Zuordnung, die
 - a) jedem Objekt A von \mathcal{K} ein Objekt $F(A)$ von \mathcal{L} zuordnet, und
 - b) für jedes Paar von Objekten $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ jedem Morphismus $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ einen Morphismus $F(g) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A), F(B))$ zuordnet, so dass
 - i) $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$, wenn $A, B, C \in \mathcal{K}$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ und $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$;
 - ii) $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ für jedes $A \in \mathcal{K}$.
- II. Ein **kontravarianter Funktor** $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ist eine Zuordnung, die
 - a) jedem Objekt A von \mathcal{K} ein Objekt $F(A)$ von \mathcal{L} zuordnet, und
 - b) für jedes Paar von Objekten $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ jedem Morphismus $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ einen Morphismus $F(g) \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(F(B), F(A))$ zuordnet, so dass
 - i) $F(h \circ g) = F(g) \circ F(h)$, wenn $A, B, C \in \mathcal{K}$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ und $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$;
 - ii) $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ für jedes $A \in \mathcal{K}$.

Ko- und kontravariante Funktoren haben die gleichen Eigenschaften, bis auf die Tatsache, dass ein kontravarianter Funktor, angewendet auf Morphismen, die Reihenfolge von Quell- und Zielraum vertauscht und entsprechend auch die Reihenfolge der Faktoren in einer Verknüpfung vertauscht. Bei kovarianten Funktoren bleibt diese Reihenfolge in der Bildkategorie \mathcal{L} so, wie sie in der Quellkategorie war.

Der Sammelbegriff für kovariante und kontravariante Funktoren ist einfach **Funktor**, und wir sprechen schlicht von einem *Funktor* in Situationen, wo wir uns nicht festlegen wollen oder wo es momentan irrelevant ist, ob der Funktor ko- oder kontravariant ist; er muss aber trotzdem eine dieser beiden Eigenschaften haben (aber siehe die Einschränkung in Bemerkung 1.11 c) unten).

Bemerkung 1.11 a) Sind \mathcal{K} , \mathcal{L} und \mathcal{M} Kategorien und sind $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ und $G: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ Funktoren, so können wir die *Verknüpfung* $G \circ F$ von F und G auf die naheliegende Art bilden, und $G \circ F$ ist ein Funktor $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$; hierbei verhält sich die Unterscheidung kovariant–kontravariant wie ein Vorzeichen (wo Kontravarianz dem negativen Vorzeichen entspricht), d.h., $G \circ F$ ist genau dann kontravariant, wenn genau einer von F und G ein kontravarianter Funktor ist. Das prüft man sehr leicht nach.

Diese Regel erweitert sich entsprechend auf Verknüpfungen von mehr als zwei Funktoren—eine solche Verknüpfung ist kovariant genau dann, wenn die Anzahl der kontravarianten Faktoren gerade ist.

b) Sei \mathcal{K} eine Kategorie. Wenn man die Definition 1.6 a) der dualen Kategorie \mathcal{K}^- betrachtet, sieht man, dass die identische Zuordnung ein *kontravarianter* Funktor $D_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^-$ (oder $D_{\mathcal{K}}^-: \mathcal{K}^- \longrightarrow \mathcal{K}$) ist, und $D_{\mathcal{K}}$ und $D_{\mathcal{K}}^-$ sind Umkehrungen zueinander. Diese Funktoren sind in gewissem Sinne universelle oder atomare kontravariante Funktoren, wegen folgender Betrachtungen.

Wenn $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ein beliebiger Funktor zwischen zwei Kategorien ist, so sind

$$_F := F \circ D_{\mathcal{K}}^-: \mathcal{K}^- \longrightarrow \mathcal{L}$$

und

$$F_- := D_{\mathcal{L}} \circ F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}^-$$

Funktoren der umgekehrten Varianz zu F . Auf diese Weise kann man jeden kovarianten Funktor mit Hilfe der Funktoren D oder D^- ganz einfach zu einem kontravarianten Funktor umwandeln und umgekehrt.

Ferner

$$F = D_{\mathcal{K}} \circ _F = F_- \circ D_{\mathcal{L}}^-,$$

so dass man *jeden* kontravarianten Funktor zerlegen kann als eine Verknüpfung von einem *kovarianten* Funktor mit einem dieser kontravarianten Grundfunktoren D oder D^- . Deshalb würde es an manchen Stellen in der Theorie der Funktoren eigentlich reichen, als Vereinfachung nur kovariante Funktoren zu betrachten. Eine Anwendung dieser Idee sehen wir in:

- c) Seien \mathcal{K} , \mathcal{L} und \mathcal{M} Kategorien. In Definition 1.6 c) wurde die Produktkategorie $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ definiert. Einen Funktor $F: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ nennen wir einen **Funktor von zwei Variablen**, und solche Funktoren können wie jeder andere Funktor ko- oder kontravariant sein.

Hier wollen wir aber auch die Möglichkeit zulassen, dass ein Funktor von zwei Variablen nur bezüglich *einer* dieser Variablen kovariant und bezüglich der anderen kontravariant ist. In Definition 1.10 ist diese Möglichkeit gar nicht vorgesehen, denn ein Funktor F gemischter Varianz in zwei Variablen müsste einen Morphismus $f: (A, B) \longrightarrow (C, D)$ überführen in einen Morphismus $F(f): F(A, D) \longrightarrow F(C, B)$ oder $F(C, B) \longrightarrow F(A, D)$, und nicht in einen Morphismus zwischen den eigentlichen Bildobjekten $F(A, B)$ und $F(C, D)$, in welcher Richtung auch immer. Natürlich versteht jeder sofort, was gewollt ist, wenn man von einem Funktor gemischter Varianz spricht, aber die bisherige Definition von Funktor passt für diesen Fall nicht genau.

Der einfachste und eleganteste Ausweg aus diesem Dilemma besteht in der Anwendung der Idee aus Teil b), und das klappt auch für Funktoren von beliebig vielen, also eventuell mehr als zwei, Variablen:

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und seien $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ und \mathcal{L} Kategorien. Einen Funktor F von n Variablen von $\mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_n$ nach \mathcal{L} , der in den Variablen i_1, \dots, i_k kontravariant und in den anderen Variablen kovariant ist, definieren wir als die Verknüpfung eines *kovarianten* Funktors

$$\tilde{F}: \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \dots \times \tilde{\mathcal{K}}_n \longrightarrow \mathcal{L}, \quad \text{wo } \tilde{\mathcal{K}}_i = \begin{cases} \mathcal{K}_i^-, & \text{wenn } i \in \{i_1, \dots, i_k\}; \\ \mathcal{K}_i & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der Abbildung

$$\tilde{D}_1 \times \dots \times \tilde{D}_n: \mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_n \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \dots \times \tilde{\mathcal{K}}_n,$$

wo

$$\tilde{D}_i = \begin{cases} D_{\mathcal{K}_i}, & \text{wenn } i \in \{i_1, \dots, i_k\}; \\ \text{id}_{\mathcal{K}_i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies beschreibt korrekt genau die Wirkung von F , und ansonsten verstehen wir ja sehr wohl, wie F wirken soll, so dass wir uns nie auf die grausamen Details dieser Definition berufen werden müssen.

Beispiele 1.12 a) Sei \mathcal{K} eine Kategorie. Dann ist $\text{id}_{\mathcal{K}}$, die Identität von \mathcal{K} , ein kovarianter Funktor $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$.

b) Sei \mathcal{K} eine Kategorie und \mathcal{L} eine Unterkategorie von \mathcal{K} . Aus Definition 1.8 c) und d) folgt, dass die Inklusion $i: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ ein kovarianter Funktor ist.

c) Sei \mathcal{K} eine Kategorie und sei \sim eine Kongruenz auf \mathcal{K} . Wir haben eine Projektion $P: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}/\sim$, die jedem Objekt A von \mathcal{K} das gleiche Objekt A von \mathcal{K}/\sim zuordnet, und jedem Morphismus $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ seine Kongruenzklasse $[f] \in [A, B]$. Aus den Eigenschaften 1.6 b) einer Kongruenz folgt leicht, dass diese Projektion ein kovarianter Funktor ist.

d) Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} zwei Kategorien. Sowohl die Objekte wie auch die Morphismen der Produktkategorie $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ sind Paare von Objekten bzw. von Morphismen der Kategorien \mathcal{K} und \mathcal{L} , und wenn wir jedem solchen Paar sein erstes Element zuordnen (oder jedem Paar sein zweites Element) so erhalten wir Projektionen $P_1: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ bzw. $P_2: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Offensichtlich sind diese Projektionen kovariante Funktoren.

e) Sei \mathcal{K} eine Kategorie wie Gp oder Top , deren Objekte Mengen sind und deren Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen sind. Dann können wir einen kovarianten Funktor $F: \mathcal{K} \rightarrow Men$ definieren, der jedem Objekt A von \mathcal{K} die Menge A zuordnet, und jedem Morphismus $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ die Abbildung f als *mengentheoretische Abbildung* $A \rightarrow B$ zuordnet.

Dieser Funktor „vergisst“ einfach die zusätzliche Struktur der Objekte von \mathcal{K} ; man nennt ihn deshalb den **vergesslichen Funktor**.

f) Es gibt viele andere Paare \mathcal{K} und \mathcal{L} von Kategorien, die sich dadurch unterscheiden, dass alle Objekte von \mathcal{K} auch Objekte von \mathcal{L} sind, aber zusätzliche Struktur tragen, und auch in diesen Fällen gibt es einen kovarianten **vergesslichen Funktor** $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$. Zum Beispiel gibt es einen vergesslichen Funktor $F: Top_* \rightarrow Top$, der jedem punktierten Raum (X, x) den zugehörigen topologischen Raum X zuordnet, und jeder Basispunkt treuen stetigen Abbildung $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ die Abbildung f als Abbildung $X \rightarrow Y$.

Entsprechend gibt es einen vergesslichen Funktor $G: Top^2 \rightarrow Top$, der den Unterraum vergisst und jedem topologischen Raumpaare (X, A) den „großen“ Raum X zuordnet, und so dass für jede stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ gilt: $G(f) = f$ als Abbildung $X \rightarrow Y$.

Man erinnere sich daran, dass nach Beispiele 1.9 d) und e) die Kategorien Top^2 und Top_* Unterkategorien von $Top \times Top$ sind. Die hier erwähnten vergesslichen Funktoren sind nichts anderes, als die Verknüpfung der Projektion $P_1: Top \times Top \rightarrow Top$ mit den Inklusionen dieser Unterkategorien in $Top \times Top$ (in anderen Worten, sie sind die Einschränkung von P_1 auf die Unterkategorien Top^2 und Top_*).

- g) Sei K ein fest gewählter Körper und VR die Kategorie der Vektorräume über K (um die Notation zu vereinfachen erwähnen wir K nicht mehr explizit im Namen der Kategorie). Ähnlich wie in Beispiel 1.5 k) können wir die Kategorie VR^2 der Paare (V, W) von K -Vektorräumen und Unterräumen definieren (also bei einem Objekt (V, W) von VR^2 ist V ein Vektorraum über K und W ein Untervektorraum von V).

Wir können dann einen Funktor $Q: VR^2 \rightarrow VR$ definieren durch die Zuordnungen $Q(V, W) := V/W$ (der Quotientenvektorraum), und wenn $f: (V, W) \rightarrow (U, T)$ eine lineare Abbildung von Vektorraum-paaren ist (d.h., f ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow U$ mit $f(W) \subseteq T$), dann ist $Q(f)$ die von f induzierte lineare Abbildung $\bar{f}: V/W \rightarrow U/T$. Dies ist ein kovarianter Funktor.

- h) Sei K ein fest gewählter Körper und VR die Kategorie der Vektorräume über K . Die Zuordnung $*$, die jedem K -Vektorraum V den Dualraum $V^* := \text{Hom}(V, K)$ zuordnet, und jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ die von f induzierte duale Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$ (mit $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$), ist ein *kontravarianter* Funktor $VR \rightarrow VR$, wie man aus den Eigenschaften der Dualräume und dualen linearen Abbildungen f^* leicht sieht.
- i) Wenn V und W Vektorräume über K sind, so ist auch $\text{Hom}(V, W)$, die Menge der K -linearen Abbildungen $V \rightarrow W$, ein Vektorraum über K . Wenn T und U zwei weitere Vektorräume sind und $f: T \rightarrow V$ und $g: W \rightarrow U$ lineare Abbildungen sind, so ist für $\alpha \in \text{Hom}(V, W)$ die Verknüpfung $g \circ \alpha \circ f$ eine lineare Abbildung $T \rightarrow U$, und sie hängt K -linear von α ab, d.h., die Zuordnung $\alpha \mapsto g \circ \alpha \circ f$ ist eine lineare Abbildung $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(T, U)$.

Wenn wir diese Zuordnung mit $\text{Hom}(f, g)$ bezeichnen, so wird

$$\text{Hom}: VR \times VR \rightarrow VR$$

zu einem Funktor in zwei Variablen, der kontravariant ist in der ersten Variablen und kovariant in der zweiten. Die erforderlichen Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.

In dieser Vorlesung werden wir noch viele weitere und wesentlich kompliziertere Funktoren kennen lernen, insbesondere Funktoren von den Kategorien Top , Top_* und Top^2 in die algebraischen Kategorien Gp , $AbGp$ und $Ring$.

Die Funktoren spielen in der Kategorientheorie die gleiche Rolle, die die Morphismen in einer einzelnen Kategorie spielen. In anderen Worten, mit dem Funktorbegriff wird die Kategorientheorie praktisch zu ihrem eigenen Objekt; bis auf die Problematik, dass eine Kategorie im allgemeinen keine Menge ist und somit nicht Element einer Klasse sein kann (die Klasse der „Objekte“ der Kategorientheorie), bildet die Kategorientheorie selber eine Art Kategorie, deren Morphismen die Funktoren sind.

Es gibt aber dennoch einen wichtigen qualitativen Unterschied zwischen den Funktoren und den Morphismen einer einzelnen Kategorie: Morphismen sind im Wesentlichen mathematische Atome und haben keine Unterstruktur, während Funktoren einen zweilagigen Aufbau haben, in dem sie sowohl eine Zuordnung von Objekten wie eine Zuordnung von Morphismen beinhalten. Die Tatsache, dass ein Funktor unter anderem Objekte der Zielkategorie als Werte annimmt, ermöglicht es, verschiedene Funktoren mit der gleichen Zielkategorie durch Morphismen dieser Kategorie zu vergleichen oder zu verbinden.

Dieser Gedanke wird uns zu dem dritten wichtigen Grundbegriff der Kategorientheorie führen, aber damit wir diesen Begriff möglichst klar und einfach beschreiben können, lohnt sich vorher ein kleiner Abstecher zu einer Struktur, die ohnehin in der algebraischen Topologie eine allgegenwärtige Rolle spielt. Es handelt sich bei dieser Struktur um den Begriff eines **Diagrams** in (oder über) einer Kategorie.

Salopp gesagt ist ein Diagramm nichts anderes als eine „räumliche Anordnung“ von Objekten und Morphismen einer Kategorie. Wir werden sie in dieser Vorlesung ständig benutzen und ganze Tafeln damit füllen. Es ist nämlich so, dass die Funktoren der algebraischen Topologie nur mit einigem Aufwand zu berechnen sind, und diese Berechnung lässt sich fast nie direkt ausführen, sondern erfordert eine ganze Menge Detektivarbeit und eine Art „Spurensuche“ in vielen anderen Objekten, als den gerade zu berechnenden. Man bettet ein zu untersuchendes Objekt ein in ein kompliziertes Netz von bekannten Objekten und Morphismen und schließt aus den Beziehungen der vielen Bildobjekte und Bildmorphismen zueinander und zum Bild des untersuchten Objekts wie der Funktor darauf wirkt.

Diese Art von Untersuchung kann leicht sehr unübersichtlich werden, wenn man sich nicht eine Möglichkeit verschafft, alle beteiligten Objekte und Morphismen auf einmal zu überblicken und die Beziehungen zwischen ihnen sich klar und deutlich vor Augen zu führen. Das geschieht am Besten durch eine graphische und bildliche Erfassung dieser Beziehungen, also durch eine klar gegliederte, gedachte oder auf einem Blatt Papier oder auf der Tafel hingeschriebene räumliche Anordnung, und dazu dienen die Diagramme.

Ein Diagramm trägt zwei Informationsschichten, die sich von einander trennen lassen. Eine dieser Schichten besteht aus den Angaben der genauen Objekte und Morphismen, die am Diagramm beteiligt sind und deren Beziehung zueinander sie aufzeigt.

Die zweite Schicht, die die eigentliche Diagrammstruktur in sich trägt, besteht nur aus der Angabe der räumlichen Anordnung, in der diese Objekte und Morphismen zueinander stehen, ganz unabhängig davon, um welche speziellen Objekte und Morphismen es sich handelt. Diese zweite Schicht nennen wir die *Gestalt* oder das *Muster* des Diagramms und man kann sie hinzeichnen oder modellieren, in dem man im Diagramm alle Objekte durch Punkte und alle Morphismen durch Pfeile oder gerichtete Strecken vom Punkt am Quellort zum Punkt am Zielort ersetzt; diese Punkte und Pfeile kann man sich als Platzhalter für die eigentlichen Objekte und Morphismen denken, die ihre logische Anordnung zueinander beschreiben.

Die Trennung dieser beiden Schichten wird es später erlauben, mehrere Diagramme mit dem gleichen Muster zu vergleichen und Abbildungen zwischen ihnen zu definieren, womit wir zu jeder festen Gestalt eine entsprechende Kategorie der Diagramme dieser Gestalt erhalten werden.

Das mathematische Modell für ein solches System von Punkten und Pfeilen, das die Gestalt eines Diagramms beschreibt, ist ein *gerichteter Graph*. Wir wählen eine geringfügig eingeschränkte Definition des gerichteten Graphen, bei der es nicht erlaubt ist, dass ein Pfeil von einem Punkt ausgeht und zum gleichen Punkt zurückkehrt oder dass mehrere Pfeile ein Punktpaar verbinden. Diese Definition ist einfacher zu formulieren, vermeidet technischen Ballast, und ist völlig ausreichend für unsere Zwecke:

Definition 1.13 Ein *gerichteter Graph* \mathcal{G} ist ein Paar (E, K) , wo E eine Menge ist und K ist eine Teilmenge von $E \times E$. Die Elemente von E heißen **Knoten** oder **Eckpunkte** des Graphen \mathcal{G} , und die Elemente von K heißen seine (gerichteten) **Kanten**. Speziell, wir nennen ein Element $(x, y) \in K$ (wo $x, y \in E$) eine **Kante von x nach y** , und wir nennen x den **Anfangspunkt** oder **Ausgangspunkt** der Kante und y ihr **Endpunkt** oder **Zielpunkt**.

Bildlich kann man sich die Knoten als Punkte in der Ebene oder im Raum

vorstellen, und eine Kante (x, y) als einen Pfeil vom Punkte x zum Punkte y , und man zeichnet Graphen auch so hin.

Es ist bequem, K als eine Teilmenge von $E \times E$ zu wählen, aber der Preis dafür ist, dass zwischen zwei Punkten in einer gegebenen Richtung höchstens eine gerichtete Kante liegen kann; will man mehrere Kanten mit gleichen Endpunkten zulassen, so muss man K unabhängig von E wählen und die Kanten durch eine Abbildung $K \longrightarrow E \times E$ darstellen, was den Umgang mit Graphen verkomplizieren würde.

Definition 1.14 Sei $\mathcal{G} := (E, K)$ ein gerichteter Graph. Ein **Pfad** in \mathcal{G} ist eine endliche Folge $\kappa_1 := (x_0, x_1), \kappa_2 := (x_1, x_2), \dots, \kappa_n := (x_{n-1}, x_n)$ von Kanten von \mathcal{G} , so dass, wie hier angegeben, der Endpunkt jeder Kante κ_i in der Folge, bis auf der letzten, gleich dem Anfangspunkt der darauffolgenden Kante κ_{i+1} ist. (Wir sagen dazu, die Kanten *stoßen aneinander an*.) Wir nennen den Anfangspunkt x_0 der ersten Kante κ_1 im Pfad den **Anfangspunkt** oder **Ausgangspunkt des Pfades** und wir nennen den Endpunkt x_n der letzten Kante κ_n im Pfad den **Endpunkt** oder **Zielpunkt des Pfades**.

Graphen interessieren uns in dieser Vorlesung in erster Linie als *Muster für Systeme aus Objekten und Morphismen einer Kategorie*:

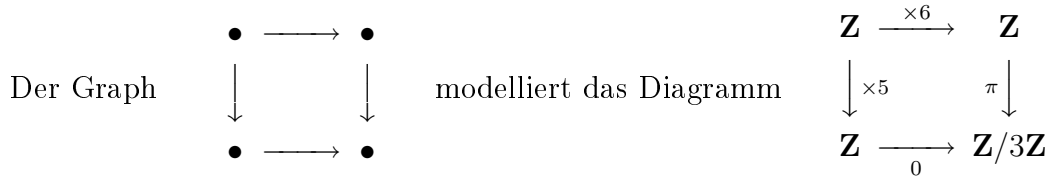
Definition 1.15 Sei \mathcal{K} eine Kategorie und sei $\mathcal{G} := (E, K)$ ein gerichteter Graph. Ein auf \mathcal{G} modelliertes **Diagramm** (oder kurz: ein **\mathcal{G} -Diagramm**) in \mathcal{K} besteht aus einer Abbildung $p: E \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{K})$ und einer weiteren Abbildung

$$P: K \longrightarrow \bigcup_{\substack{(A,B) \in \\ \text{Bild } p \times \text{Bild } p}} \text{Mor}(A, B),$$

so dass für jede Kante (x, y) von \mathcal{G} gilt: $P(x, y)$ ist ein Morphismus $p(x) \longrightarrow p(y)$. Wir nennen \mathcal{G} das **Muster** oder die **Gestalt** des Diagramms (p, P) .

Die Abbildung p in dieser Definition ist nichts anderes als eine Belegung der Knoten von \mathcal{G} mit Objekten aus \mathcal{K} , und P ist nichts anderes als eine Belegung der gerichteten Kanten von \mathcal{G} mit Morphismen vom Anfangsobjekt zum Zielobjekt der Kante (bezüglich der Belegung p). So wie in dieser Beschreibung schreibt man Diagramme auch hin:

Beispiel 1.16 Hier ist ein einfaches Beispiel aus der Kategorie $AbGr$:



Bemerkung 1.17 Man beachte, dass *Pfade* in Graphen so definiert wurden, dass in einem \mathcal{G} -Diagramm über einer Kategorie \mathcal{K} die Morphismen entlang eines Pfades in \mathcal{G} in der Kategorie verknüpft werden können. Genau dann, sogar, ist eine Folge von Kanten im Muster eines Diagramms ein Pfad, wenn die Verknüpfung der Morphismen, mit denen die Kanten belegt sind, in der Kategorie definiert ist.

Die verschiedenen Morphismen in einem Diagramm sind an und für sich ganz unabhängig von einander und können beliebig gewählt werden. Aber Diagramme sind ja eigentlich ein Werkzeug, um Information über die darin enthaltenen Morphismen zu gewinnen, und zu diesem Zweck besteht in den praktischen Anwendungen von Diagrammen meistens doch folgende schöne Beziehung zwischen den Morphismen (oder man versucht sie zumindest einzurichten):

Definition 1.18 Sei \mathcal{K} eine Kategorie und sei $D := (p, P)$ ein auf den Graphen \mathcal{G} modelliertes Diagramm über \mathcal{K} . Wir sagen, dass das Diagramm D **kommutiert**, oder nennen D ein **kommutatives Diagramm**, wenn für je zwei Pfade in \mathcal{G} , die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt haben, gilt, dass die Verknüpfung der Morphismen in D entlang dieser Pfade gleich ist.

Auch wenn ein Diagramm als Ganzes nicht kommutiert, können Teile davon oder bestimmte Pfade in \mathcal{G} kommutieren. Als Notation dafür ist es üblich, wenn die beiden Pfade im aufgezeichneten Diagramm ein Quadrat, Dreieck oder anderes „zusammenhängendes“ Gebiet umranden, in dieses Gebiet einen kreisförmigen Pfeil \circlearrowright zu schreiben.

Beispiel. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Z} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbf{Z} \\
 \times 5 \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi \\
 \mathbf{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}
 \end{array}$$

aus Beispiel 1.16 ist offensichtlich kommutativ, wie man leicht nachrechnet.

Obwohl wir manchmal sehr komplizierte Diagramme verwenden werden, gibt es gewisse einfache Gestalten, die am häufigsten vorkommen und die deshalb eigene Namen haben:

Definition 1.19 Sei \mathcal{K} eine Kategorie. Ein Diagramm D über \mathcal{K} heißt

- a) eine **Folge**, wenn D eine der Gestalten

$$\dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

oder

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

oder

$$\dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

oder

$$\bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \bullet$$

hat. Dies ist einfach eine lineare Anordnung von Objekten und Morphismen.

In den ersten drei Fällen ist die Folge auf beiden Seiten oder nur nach einer Seite hin unendlich, und diese Diagramme nennen wir **lange Folgen**. Eine Folge kann aber auch wie im letzten Fall nur aus endlich vielen Objekten und Morphismen bestehen (die Bezeichnung *kurze Folge* wird aber für ein Spezialfall reserviert und wird nicht für alle endlichen Folgen verwendet);

- b) ein **Quadrat**, wenn D die Gestalt
$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$
 aus Beispiel 1.16 hat;

- c) ein **Dreieck**, wenn D eine der Gestalten

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bullet & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \swarrow & \searrow \\ & \bullet & \end{array}$$

oder eine dazu äquivalente Gestalt hat (äquivalent in Bezug auf die Reihenfolge der Objekte und Morphismen).

Diagramme sind mehr als nur zufällig auftretende und für manche Zwecke nützliche Werkzeuge, oder schöne und leicht zu verstehende Darstellungen von Zusammenhängen innerhalb einer Kategorie, sondern wenn man die Gestalt festlegt, dann bilden die Diagramme dieser Gestalt selber die Objekte einer Kategorie (so dass wir später in der Lage sein werden, auch mit diagrammwertigen Funktoren zu arbeiten):

Definition 1.20 Sei \mathcal{K} eine Kategorie und sei $\mathcal{G} := (E, K)$ ein gerichteter Graph. Wir gewinnen aus \mathcal{K} wie folgt eine neue Kategorie $\mathcal{G}\text{-DK}$, die Kategorie der *\mathcal{G} -Diagramme über \mathcal{K}* .

Die Objekte dieser Kategorie sind alle Diagramme $D := (p, P)$ von Gestalt \mathcal{G} über \mathcal{K} .

Wenn $D := (p, P)$ und $C := (q, Q)$ zwei solche Diagramme sind (p und q belegen die Knoten von \mathcal{G} mit Objekten aus \mathcal{K} und P und Q belegen die Kanten zwischen den Knoten mit Morphismen zwischen den entsprechenden Objekten), so definieren wir einen Morphismus $D \rightarrow C$ in $\mathcal{G}\text{-DK}$ als eine Abbildung

$$\mu: E \rightarrow \bigcup_{a \in E} \text{Mor}_{\mathcal{K}}(p(a), q(a)),$$

so dass für jeden Knoten $x \in E$ gilt, dass $\mu(x)$ ein \mathcal{K} -Morphismus $p(x) \rightarrow q(x)$ ist, und so dass für jede Kante $(x, y) \in K$ das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} p(x) & \xrightarrow{P(x,y)} & p(y) \\ \mu(x) \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \mu(y) \\ q(x) & \xrightarrow{Q(x,y)} & q(y) \end{array} \quad (1.1)$$

kommutiert.

In anderen Worten, die Morphismen zwischen zwei Diagrammen in der Diagrammkategorie bestehen aus einer Familie von Morphismen der einfachen Kategorie jeweils zwischen den Objekten an gleicher Stelle in den beiden Diagrammen, so dass alle durch diese Morphismen und den Morphismen in den beiden Diagrammen gebildeten kleinen Quadrate kommutieren.

Sind $B := (r, R)$, $C := (q, Q)$ und $D := (p, P)$ drei Diagramme mit Gestalt \mathcal{G} und sind $\mu: D \rightarrow C$ und $\nu: C \rightarrow B$ Morphismen von $\mathcal{G}\text{-DK}$, so definieren wir auf naheliegende Weise $\nu \circ \mu: D \rightarrow B$ als die Zuordnung, die jedem Knoten $a \in E$ den \mathcal{K} -Morphismus $\nu(a) \circ \mu(a): p(a) \rightarrow r(a)$ zuordnet.

Für ein Diagramm $D := (p, P)$ definieren wir den Identitätsmorphismus id_D in $\mathcal{G}\text{-DK}$ als die Zuordnung, die jedem Knoten $a \in E$ die \mathcal{K} -Identität $\text{id}_{p(a)}$ zuordnet.

Die so definierten Verknüpfung und Identitätsmorphisme erfüllen offenbar die Bedingungen aus Definition 1.1 c) (die Kommutativität der durch die verknüpften Morphisme gebildeten kleinen Quadrate ist sehr leicht nachzuprüfen).

Gerade die durch einen Morphismus der Diagrammkategorie entstehenden kommutierenden Quadrate machen diagrammwertige Funktoren so nützlich, denn sie liefern sehr viel Information über die verschiedenen Morphisme, die in den Diagrammen und als Funktorwerte auftreten.

Eine weitere schöne Eigenschaft ist, dass jeder Funktor auf der Grundkategorie automatisch einen Funktor auf den entsprechenden Diagrammkategorien liefert:

Definition 1.21 Sei $\mathcal{G} := (E, K)$ ein gerichteter Graph. Sei

$$K^- := \{ (y, x) \mid (x, y) \in K \}$$

Wir nennen $\mathcal{G}^- := (E, K^-)$ den *umgekehrten* oder *umgerichteten* Graph zu \mathcal{G} (denn K^- besteht aus den Kanten von \mathcal{G} mit Anfangs- und Endpunkt vertauscht, also aus den „umgerichteten“ Kanten von \mathcal{G}).

Bemerkung und Definition 1.22 Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} Kategorien und sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein gerichteter Graph. Sei F ein kovarianter oder kontravarianter Funktor $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Dann induziert F wie unten in a) beschrieben einen **Diagrammfunktor**

$$\mathcal{G}F: \begin{cases} \mathcal{G}\text{-}DK \longrightarrow \mathcal{G}\text{-}D\mathcal{L} & \text{wenn } F \text{ kovariant ist;} \\ \mathcal{G}\text{-}DK \longrightarrow \mathcal{G}^- \text{-}D\mathcal{L} & \text{wenn } F \text{ kontravariant ist,} \end{cases}$$

und $\mathcal{G}F$ hat die gleiche Varianz, wie F .

a) Wenn $D := (p, P)$ ein auf den Graphen \mathcal{G} modelliertes Diagramm über \mathcal{K} ist, so erhalten wir das Bilddiagramm $\mathcal{G}F(D) =: (p', P')$, in dem wir die Knoten von D und die Kanten von D (die ja Objekte bzw. Morphisme von \mathcal{K} sind) durch ihre Bilder unter F ersetzen. D.h.,

i) für jeden Knoten $x \in E$ von \mathcal{G} oder von \mathcal{G}^- (sie haben die gleichen Knoten) ist

$$p'(x) := F(p(x))$$

- ii) wenn F kovariant ist, dann ist für jede Kante (x, y) von \mathcal{G}

$$P'(x, y) := F(P(x, y))$$

und dies ist tatsächlich ein \mathcal{L} -Morphismus $F(p(x)) \longrightarrow F(p(y))$. Wenn F kontravariant ist, dann ist für jede Kante (x, y) von \mathcal{G} die Umkehrung (y, x) eine Kante von \mathcal{G} und $P(y, x)$ ist ein \mathcal{K} -Morphismus $p(y) \longrightarrow p(x)$. Wir setzen

$$P'(x, y) := F(P(y, x))$$

und dies ist tatsächlich ein \mathcal{L} -Morphismus $F(p(x)) \longrightarrow F(p(y))$, da F kontravariant ist.

- b) Wenn D ein *kommutatives* Diagramm ist, dann ist auch $\mathcal{G}F(D)$ kommutativ (und wenn nur Teile von D kommutieren, dann kommutiert zumindest das Bild dieses Teils unter $\mathcal{G}F$), denn die Kommutativitätsbedingung besagt nur, dass zwei verschiedene Verknüpfungen von Morphismen übereinstimmen. Wendet man F auf diese Verknüpfungen an, so gehen sie über in die Verknüpfungen der Bildmorphismen, in gleicher Reihenfolge wenn F kovariant ist, oder in umgekehrter Reihenfolge wenn F kontravariant ist.

Die Verknüpfungen waren vor der Abbildung mit F gleich, und gleiche Morphismen gehen unter F wieder in gleiche über, also gilt nach der Abbildung mit F wieder die Gleichheit der Verknüpfungen der Bildmorphismen, d.h., das Bilddiagramm (oder Teildiagramm) kommutiert auch.

- c) Hieraus folgt schließlich, dass $\mathcal{G}F$ tatsächlich ein Funktor ist. In a) haben wir nur beschrieben, wie $\mathcal{G}F$ auf Diagramme wirkt, also auf die Objekte der Diagrammkategorie.

Wenn $D := (p, P)$ und $C := (q, Q)$ zwei solche Objekte sind, so ist ein Morphismus $\mu: D \longrightarrow C$ eine Abbildung, die jedem Knoten $x \in E$ ein \mathcal{K} -Morphismus $\mu(x): p(x) \longrightarrow q(x)$ zuordnet, und wir definieren $\mathcal{G}F(\mu)$ als die Abbildung ν auf E , die jedem Knoten x den \mathcal{L} -Morphismus

$$F(\mu(x)): \begin{cases} F(p(x)) \longrightarrow F(q(x)) & \text{im kovarianten Fall,} \\ F(q(x)) \longrightarrow F(p(x)) & \text{im kontravarianten Fall} \end{cases}$$

zuordnet.

Damit ν ein Morphismus von Diagrammen ist, muss es mit den Pfeilen vom Diagramm kommutieren, wie im Quadrat (1.1) in Definition 1.20

verlangt. Aber die Morphismen der Zuordnung μ kommutieren mit den Morphismen entlang den Kanten des Diagramms D wie in (1.1), und diese Kommutativität bleibt erhalten, wie wir gerade in b) gesehen haben, wenn wir alle Morphismen mit F abbilden, wie in der Definition von $\mathcal{G}F$ festgelegt. Aus diesem Grund ist ν tatsächlich ein Morphismus von Diagrammen, so dass $\mathcal{G}F$ zumindest aus der richtigen Art von Zuordnungen besteht.

Man muss jetzt nur noch zeigen, dass $\mathcal{G}F$ Verknüpfung von Diagrammmorphismen respektiert und Identitätsmorphismen wieder in Identitätsmorphismen abbildet, aber das ist aus der Definition klar.

Notation 1.23 In Definition 1.22 haben wir den von F induzierten Diagrammfunktor $\mathcal{G}F$ genannt, um eine Verwechslung mit F zu vermeiden, weil sonst die Definition kaum zu verstehen gewesen wäre. Diese Definition haben wir jetzt hoffentlich verstanden, und deshalb wollen wir uns in Zukunft die Bequemlichkeit erlauben, den Diagrammfunktor genauso zu benennen, wie der einfache Funktor, der ihn induziert. Aus dem Kontext wird immer klar sein, welche Variante des Funktors gemeint ist, so dass dies kaum zu Verwirrung führen kann.

Der Gedanke, der in der Definition der Morphismen einer Diagrammkategorie steckt, kann auf sehr ähnliche Weise und mit ähnlich nützlichen Auswirkungen benutzt werden, um so etwas wie ein „Morphismus zwischen Funktoren“ zu definieren. Diese „Morphismen zwischen Funktoren“ nennt man *natürliche Transformationen*, und sie bilden neben den Kategorien selber und den Funktoren den dritten wichtigen Grundbegriff der Kategorientheorie, den wir auf Seite 21 vor der Einführung der Diagramme angekündigt haben.

Definition 1.24 (natürliche Transformation) Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} Kategorien und seien F und G zwei Funktoren $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ von gleicher Varianz (also beide kovariant oder beide kontravariant).

Eine *natürliche Transformation* $T: F \rightarrow G$ zwischen F und G ist eine auf $\text{Ob}(\mathcal{K})$ definierte Abbildung, die jedem Objekt A von \mathcal{K} einen Morphismus $T(A): F(A) \rightarrow G(A)$ der Kategorie \mathcal{L} zuordnet, so dass für jedes Paar A, B von Objekten von \mathcal{K} und für jeden Morphismus $f \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$

das der Varianz entsprechende folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ T(A) \downarrow & & \downarrow T(B) \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array} \quad (F \text{ und } G \text{ kovariant}),$$

bzw.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xleftarrow{F(f)} & F(B) \\ T(A) \downarrow & & \downarrow T(B) \\ G(A) & \xleftarrow{G(f)} & G(B) \end{array} \quad (F \text{ und } G \text{ kontravariant}).$$

Nur aus technischen Gründen ist es nicht wirklich möglich, zu zwei gegebenen Kategorien \mathcal{K} und \mathcal{L} eine Funktorkategorie zu definieren, deren Objekte die Funktoren $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ sind. Da Funktoren auf der ganzen Objektklasse von \mathcal{K} definiert sind, sind sie im Allgemeinen Unmengen (also keine Mengen), und können daher nicht selber zu einer Klasse zusammengefasst werden, die die Objektklasse einer Kategorie wäre, mit den natürlichen Transformationen als Morphismen. Das ist nicht weiter schlimm, denn wir können zumindest festhalten, dass die natürlichen Transformationen, so wie sie in 1.24 definiert werden, die *Eigenschaften* 1.1 c) besitzen, die man von Morphismen verlangt:

Lemma 1.25 Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} zwei Kategorien und seien F, G und H drei Funktoren gleicher Varianz $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$. Seien $S: F \rightarrow G$ und $T: G \rightarrow H$ natürliche Transformationen.

- a) Sei U die auf $\text{Ob}(\mathcal{K})$ definierte Abbildung, die jedem Objekt A von \mathcal{K} den Morphismus $T(A) \circ S(A): F(A) \rightarrow H(A)$ in \mathcal{L} zuordnet. Dann ist U eine natürliche Transformation $F \rightarrow H$; wir nennen U die **Verknüpfung** der natürlichen Transformationen S und T und wir schreiben dafür $U = T \circ S$.
- b) Die Abbildung auf $\text{Ob}(\mathcal{K})$, die jedem Objekt A von \mathcal{K} den Morphismus $\text{id}_{G(A)}$ in \mathcal{L} zuordnet, ist eine natürliche Transformation $G \rightarrow G$, die wir die **identische Transformation** von G nennen und mit id_G bezeichnen. Für sie gilt

$$\text{id}_G \circ S = S \quad \text{und} \quad T \circ \text{id}_G = T$$

für jede Wahl der natürlichen Transformationen S und T (id_G benimmt sich also wie eine Identität).

Beweis.

- a) Nachzuprüfen ist nur die Kommutativität des für U und den Funktoren F und H passenden Diagramms aus Definition 1.24.

Im kovarianten Fall ist also zu zeigen, dass $U(B) \circ F(f) = G(f) \circ U(A)$.

Wir haben

$$S(B) \circ F(f) = G(f) \circ S(A), \quad \text{weil } S \text{ eine natürliche Transformation ist;} \quad (1.2)$$

$$T(B) \circ G(f) = H(f) \circ T(A), \quad \text{weil } T \text{ eine natürliche Transformation ist;} \quad (1.3)$$

also

$$\begin{aligned} U(B) \circ F(f) &= T(B) \circ S(B) \circ F(f) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} T(B) \circ G(f) \circ S(A) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} H(f) \circ T(A) \circ S(A) \\ &= H(f) \circ U(A) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Den Beweis für kontravarianten Fall erhält man wörtlich, wenn man in den Gleichungen A und B vertauscht. (Im Diagramm hat das die Wirkung, das Diagramm zu spiegeln und die waagerechten Pfeile umzukehren. Die Spiegelung wirkt sich nur optisch aus; inhaltlich ändert sich nur durch die Umkehrung der Pfeile etwas, und zwar wie verlangt die Varianz der Funktoren. Der Morphismus f geht nach wie vor von A nach B .)

- b) ist trivial. ■

Wenn \mathcal{K} eine kleine Kategorie ist, dann kann man tatsächlich eine Kategorie $\text{Funkt}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ definieren, deren Objekte die Funktoren $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ sind und deren Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen diesen Funktoren sind; die erforderlichen Eigenschaften folgen sofort aus dem Lemma. Aber das ist nur eine kategorientheoretische Spielerei, auf die wir nicht weiter eingehen wollen.

Beispiel 1.26 Sei K ein Körper und sei $\mathcal{K} := VR^2$ die Kategorie der Paare von K -Vektorräumen und Untervektorräumen; d.h., wenn (V, W) ein Objekt von \mathcal{K} ist, dann ist V ein Vektorraum über K und W ist ein Untervektorraum von V . Sei $\mathcal{L} := VR$ die Kategorie der Vektorräume über K .

Wir haben den vergesslichen Funktor $P_1: VR^2 \rightarrow VR$, der jedem Vektorraumpaar (V, W) den oberen Vektorraum V zuordnet und jedem Morphismus f von Vektorraumpaaren den gleichen Morphismus zuordnet, aber aufgefasst als lineare Abbildung der oberen Vektorräume.

In Beispiel 1.12 g) hatten wir den Quotientenfunktor $Q: VR^2 \rightarrow VR$ definiert, der jedem Vektorraumpaar (V, W) den Quotientenraum V/W zuordnet und jedem Morphismus $f: (V, W) \rightarrow (V', W')$ von Vektorraumpaaren die induzierte lineare Abbildung $\bar{f}: V/W \rightarrow V'/W'$ zuordnet.

Für jedes Vektorraumpaar (V, W) ist die Projektion $\pi: V \rightarrow V/W$ eine „kanonisch definierte“ lineare Abbildung (was immer das heissen mag, siehe dazu Bemerkung 1.27 unten). Diese Projektion ist eine natürliche Transformation $\pi: P_1 \rightarrow Q$, denn für jede lineare Abbildung von Vektorraumpaaren $f: (V, W) \rightarrow (V', W')$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\bar{f}} & V'/W' \end{array}$$

Bemerkung 1.27 („natürlich“) Eine sehr geläufige Redewendung in der Mathematik behauptet, dass es eine *natürlich definierte* Struktur einer gewissen Art gibt, oder eine *natürliche* Konstruktion eines gewissen Objekts, oder zu gewissen Daten gibt es eine *natürliche* Abbildung mit gewissen Eigenschaften, oder man spricht auch von *kanonischen* oder *kanonisch definierten* Objekten oder Abbildungen, die man aus gewissen Angaben gewinnt. Zunächst interpretiert man diese Ausdrücke ganz naiv, etwa in dem Sinne, dass diese Konstruktionen sich „wie von selbst“ anbieten, oder dass sie geradlinig definiert sind, oder dass einem einfach keine andere Möglichkeit einfallen kann, wie die vorgegebene, so etwas zu konstruieren oder zu definieren.

Vorsicht! Sie müssten eigentlich bis jetzt bemerkt haben, dass Mathematiker im Allgemeinen nicht schwätzen und sich immer möglichst präzise ausdrücken, und das ist auch hier der Fall (nur konnten Sie bisher die Bedeutung dieses Sprachgebrauchs noch nicht würdigen). Die Wörter **natürlich** und **kanonisch** (wörtlich: *gesetzmäßig*) haben in diesen Ausdrücken eine genaue technische Bedeutung, nämlich die, dass es sich bei der angegebenen Konstruktion je nach den Gegebenheiten entweder um einen *Funktor* handelt (wenn Objekte, oder Morphismen *und* Objekte konstruiert werden) oder

um eine *natürliche Transformation* (wenn zwischen vorher schon bekannten Objekten einer bestimmten Art nur ein Morphismus konstruiert wird).

Das „kanonische“ daran ist eben die Einhaltung der Gesetze, denen Funktoren und natürliche Transformationen unterliegen, die Verträglichkeit mit Verknüpfungen bzw. die Kommutativität mit den als Funktorwerte auftretenden Morphismen der Zielkategorie.

So gibt es zu jedem Paar bestehend aus einem Vektorraum V und einem Untervektorraum W die *natürliche* Konstruktion des Quotientenraumes, mit der Angabe, dass lineare Abbildungen von Vektorraumpaaren eine *kanonische* lineare Abbildung zwischen den Quotientenräumen induzieren — hier handelt es sich um den in Beispiel 1.26 erwähnten Quotientenfunktor $VR^2 \rightarrow VR$. Und es gibt für jedes Vektorraumpaar (V, W) eine *natürliche* lineare Projektion $\pi: V \rightarrow V/W$ — hier wird nur ein Morphismus konstruiert und es handelt sich um die natürliche Transformation, die in Beispiel 1.26 präsentiert wird.

Wann immer wir in Zukunft von „natürlichen“ Objekten oder Morphismen reden, werden wir das mit der hier erklärten technischen Bedeutung meinen, und daraus können Sie selbstverständlich Rückschlüsse ziehen, die man auch in Beweisen verwenden kann, denn Funktoren und natürliche Transformationen erfüllen ja gewisse feste nützliche Eigenschaften.

Mit einem Funktor kann man eine natürliche Transformation in eine neue Kategorie übertragen:

Lemma 1.28 *Seien \mathcal{K} , \mathcal{L} und \mathcal{M} Kategorien, seien F und G gleichvariante Funktoren $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ und sei $T: F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation.*

Sei H ein Funktor beliebiger Varianz $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$. Wir definieren auf $\text{Ob}(\mathcal{K})$ eine Zuordnung S , die jedem Objekt A von \mathcal{K} den Morphismus

$$H(T(A)): H(F(A)) \rightarrow H(G(A))$$

von \mathcal{M} zuordnet (bzw. $H(G(A)) \rightarrow H(F(A))$, wenn H kontravariant ist).

Dann ist S eine natürliche Transformation $H \circ F \rightarrow H \circ G$, wenn H kovariant ist, oder $H \circ G \rightarrow H \circ F$, wenn H kontravariant ist.

*Wir nennen S die **Verknüpfung des Funktors H mit der natürlichen Transformation T** , und schreiben dafür $H \circ T$.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass für S und den Funktoren $H \circ F$ und $H \circ G$ das der Varianz dieser Funktoren entsprechende Diagramm aus Definition 1.24 kommutiert. Aber für die natürliche Transformation T und den ursprünglichen Funktoren F und G kommutiert dieses Diagramm für jedes Paar von Objekten von \mathcal{K} , und das neue Diagramm entsteht daraus durch Anwendung des Funktors H , also kommutiert es auch nach Bemerkung 1.22 b). ■

Jede natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren lässt sich auf einfache Weise erweitern zu einer natürlichen Transformation zwischen den entsprechenden Diagrammfunktoren für Diagramme einer festen Gestalt, definiert in Definition 1.22:

Lemma 1.29 *Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} Kategorien und sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein gerichteter Graph. Seien F und G gleichvariante Funktoren $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ und sei $T: F \longrightarrow G$ eine natürliche Transformation.*

Die Funktoren F und G induzieren Funktoren $\mathcal{G}F$ und $\mathcal{G}G$ zwischen den Diagrammkategorien $\mathcal{G}\text{-DK} \longrightarrow \mathcal{G}\text{-DL}$.

Wir definieren eine Zuordnung $\mathcal{G}T$, die jedem Diagramm $D := (p, P)$ von Gestalt \mathcal{G} über \mathcal{K} den Diagrammmorphismus μ von $\mathcal{G}\text{-DL}$ zuordnet, so dass für jeden Knoten $x \in E$ gilt

$$\mu(x) := T(p(x)): F(p(x)) \longrightarrow G(p(x)).$$

Das so definierte $\mathcal{G}T$ ist eine natürliche Transformation $\mathcal{G}F \longrightarrow \mathcal{G}G$.

Beweis. Zunächst ist μ tatsächlich ein Diagrammmorphismus, denn für jede Kante (x, y) von \mathcal{G} kommutiert (im kovarianten Fall) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(p(x)) & \xrightarrow{F(P(x,y))} & F(p(y)) \\ T(p(x))=\mu(x) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mu(y)=T(p(y)) \\ G(p(x)) & \xrightarrow{G(P(x,y))} & G(p(y)) \end{array}$$

weil T eine natürliche Transformation ist (im kontravarianten Fall gilt der gleiche Schluss; der einzige Unterschied besteht darin, dass die waagerechten Pfeile im Diagramm von rechts nach links gehen).

Wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{G}T$ wie in Definition 1.24 mit den Bildern unter F und G eines Diagrammmorphismus kommutiert. Sei also $C := (q, Q)$ ein weiteres \mathcal{G} -Diagramm und $\nu: D \longrightarrow C$ ein Diagrammmorphismus. Wir gehen wieder vom kovarianten Fall aus, aber der Beweis im kontravarianten Fall geht genauso. Zu zeigen ist, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(D) & \xrightarrow{F(\nu)} & F(C) \\ \mathcal{G}T(D) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}T(C) \\ G(D) & \xrightarrow{G(\nu)} & G(C) \end{array}$$

von Diagrammmorphismen kommutiert, und dazu reicht es, für jeden Knoten x von \mathcal{G} die Kommutativität des entsprechenden Diagramms nachzuweisen, das zwischen den an diesem Knoten sitzenden Objekten entsteht:

$$\begin{array}{ccc} F(p(x)) & \xrightarrow{F(\nu(x))} & F(q(x)) \\ T(p(x)) \downarrow & & \downarrow T(q(x)) \\ G(p(x)) & \xrightarrow{G(\nu(x))} & G(q(x)) \end{array}$$

Dies aber folgt wieder sofort aus der Tatsache, dass T eine natürliche Transformation $F \rightarrow G$ ist. ■

Obwohl wir in diesem Kapitel fast ausschließlich Definitionen und Beispiele besprochen haben, kann man innerhalb der Kategorientheorie tatsächlich etwas Mathematik machen und Sätze beweisen, die dann in jeder Kategorie gelten, oder zumindest in jeder, die die Satz Voraussetzungen erfüllt.

In der *Algebraischen Topologie II* werden wir tatsächlich solche Sätze benötigen, wobei es um die Erzeugung von natürlichen Transformationen durch die Angabe ihrer Werte auf einigen Grundobjekten gehen wird. Es wäre allerdings viel zu früh, diese Sätze hier schon zu präsentieren — Sie würden sie längst wieder vergessen haben, wenn wir sie tatsächlich brauchen. Deshalb wollen wir jetzt nicht sehr tief in die Kategorientheorie einsteigen, sondern nur noch ein paar allgemeine Begriffe erwähnen, die man kennen sollte, die wir aber nur sehr selten benutzen werden.

Definition 1.30 Sei \mathcal{K} eine Kategorie und seien A und B Objekte von \mathcal{K} und $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus. Durch Verknüpfung mit f erhalten wir mengentheoretische Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda_f: \text{Mor}(C, A) &\longrightarrow \text{Mor}(C, B) \\ h &\longmapsto f \circ h \end{aligned}$$

für jedes Objekt C von \mathcal{K} und

$$\begin{aligned} \rho_f: \text{Mor}(B, D) &\longrightarrow \text{Mor}(A, D) \\ k &\longmapsto k \circ f \end{aligned}$$

für jedes Objekt D von \mathcal{K} . (Der Name λ benennt die Verknüpfung mit f von *links*, der Name ρ die Verknüpfung mit f von *rechts*.)

Wir nennen f einen

Monomorphismus, wenn λ_f für jede Wahl des Objekts C injektiv ist;

Epimorphismus, wenn ρ_f für jede Wahl des Objekts D injektiv ist;

Isomorphismus, wenn es einen Morphismus $g: B \longrightarrow A$ gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_B. \quad (1.5)$$

Einen solchen Morphismus g nennen wir einen **Umkehrmorphismus** oder einen **inversen Morphismus** zu f , und wir notieren ihn oft mit f^{-1} .

Wichtig ist für uns hauptsächlich der Begriff des *Isomorphismus* in einer beliebigen Kategorie, dessen Definition Ihnen bekannt vorkommen sollte, da die Isomorphismen, die Sie schon kennen, in der Regel genau so definiert wurden. Die Definitionen von Monomorphismus und Epimorphismus sehen etwas seltsam aus, aber von Injektivität oder Surjektivität der Morphismen dürfen wir ja gar nicht sprechen, da Morphismen nicht unbedingt Abbildungen sind!

Bemerkung 1.31 a) Wenn $f: A \longrightarrow B$ ein Morphismus ist, der ein Linksinverses g und ein (vielleicht von g verschiedenes) Rechtsinverses $g': B \longrightarrow A$ besitzt (also $g \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ g' = \text{id}_B$), dann ist tatsächlich $g = g'$ und f ist somit ein Isomorphismus mit dem Umkehrmorphismus $g (= g')$. Denn es gilt

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'.$$

- b) Wenn $f: A \longrightarrow B$ ein Isomorphismus ist, dann ist der Umkehrmorphismus g eindeutig bestimmt, denn zwei verschiedene Umkehrmorphismen wären insbesondere ein Linksinverses und ein Rechtsinverses wie in Teil a). Diese Tatsache rechtfertigt die Verwendung einer festen Notation f^{-1} für den (ja eindeutigen) Umkehrmorphismus zu f .
- c) Für jedes Objekt A ist die Identität id_A offenbar ein Isomorphismus mit sich selber als Umkehrmorphismus.
- d) Wenn f ein Isomorphismus ist mit Umkehrmorphismus g , dann folgt aus Gleichung (1.5) auch, dass g ein Isomorphismus ist mit Umkehrmorphismus f .
- e) Seien $f: A \longrightarrow B$ und $h: B \longrightarrow C$ Morphismen. Dann gilt:

- i) Wenn f und h Monomorphismen sind, ist auch $h \circ f$ ein Monomorphismus (weil $\lambda_{h \circ f} = \lambda_h \circ \lambda_f$ injektiv ist).
 - ii) Wenn f und h Epimorphismen sind, ist auch $h \circ f$ ein Epimorphismus (weil $\rho_{h \circ f} = \rho_f \circ \rho_h$ injektiv ist).
 - iii) Wenn f und h Isomorphismen sind, ist auch $h \circ f$ ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus $f^{-1} \circ h^{-1}$, wie man sofort nachrechnen kann.
- f) Seien $f: A \longrightarrow B$ und $h: B \longrightarrow C$ Morphismen, so dass $h \circ f$ ein Isomorphismus ist, und so dass h oder f ein Isomorphismus ist. Dann sind h und f beide Isomorphismen.

Denn wenn f ein Isomorphismus ist, ist f^{-1} nach Teil d) ein Isomorphismus, also ist nach Teil e iii) auch $(h \circ f) \circ f^{-1} = h$ ein Isomorphismus. Und wenn h ein Isomorphismus ist, ist h^{-1} nach Teil d) ein Isomorphismus, also nach Teil e iii) auch $h^{-1} \circ (h \circ f) = f$.

- g) Jeder Isomorphismus f ist immer ein Monomorphismus und ein Epimorphismus, denn

$$\lambda_{f^{-1}} \circ \lambda_f = \lambda_{\text{id}_A} = \text{id},$$

also ist λ_f injektiv, und

$$\rho_{f^{-1}} \circ \rho_f = \rho_{\text{id}_B} = \text{id},$$

also ist ρ_f injektiv.

- h) Von der Injektivität oder Surjektivität von Monomorphismen oder Epimorphismen kann man nur sprechen, wenn die Objekte der Kategorie Mengen sind (eventuell mit Struktur) und die Morphismen Abbildungen. Wenn dies der Fall ist, und wenn die Morphismen zwar vielleicht eine zusätzliche Struktur der Objekte respektieren, aber sich untereinander nur durch ihre Struktur als mengentheoretische Abbildungen unterscheiden und nicht durch weitere extrinsische Merkmale, dann gilt:
- i) Ein injektiver Morphismus $f: A \longrightarrow B$ ist immer ein Monomorphismus, denn $f \circ h = f \circ h' \Rightarrow f(h(c)) = f(h'(c))$ für jedes $c \in C$ (wenn h und h' Morphismen $C \longrightarrow A$ sind), und da f injektiv ist, folgt daraus $h(c) = h'(c)$ für jedes $c \in C$, also $h = h'$.
 - ii) Ein surjektiver Morphismus $f: A \longrightarrow B$ ist immer ein Epimorphismus, denn $k \circ f = k' \circ f \Rightarrow k(f(a)) = k'(f(a))$ für jedes $a \in A$, also $k = k'$ auf Bild f . Da f surjektiv ist, folgt daraus $k = k'$.

- i) Die *Umkehrung* der Behauptungen in Teilen g) und h) gilt im allgemeinen nicht, auch wenn die Morphismen der Kategorie Abbildungen sind.
- i) Sei \mathcal{C} die Kategorie, deren einziges Objekt die Menge \mathbf{C} der komplexen Zahlen ist, und deren einzige Morphismen $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ die Abbildungen $z \mapsto z^n$ sind, für $n \in \mathbf{N}$. Diese Abbildung für gegebenes n wollen wir mit μ_n bezeichnen. Es gilt $\mu_n \circ \mu_m = \mu_{mn}$, woraus klar ist, dass μ_1 die Identität in $\text{Mor}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ ist. Wenn $n \neq 0$ und $m_1 n = m_2 n$, dann ist $m_1 = m_2$ (denn $\mathbf{Z} \supseteq \mathbf{N}$ ist ein Integritätsbereich), und daraus folgt, dass die μ_n für $n > 0$ Monomorphismen (und Epimorphismen) sind, aber außer $\mu_1 = \text{id}_{\mathbf{C}}$ ist keine dieser Abbildungen injektiv ($1 \in \mathbf{C}$ hat genau n verschiedene n -te Wurzeln).
- ii) Sei Hausd die Kategorie der *Hausdorffschen* topologischen Räume und stetigen Abbildungen. In Hausd ist jede stetige Abbildung eindeutig bestimmt durch ihre Werte auf einer dichten Teilmenge des Definitionsbereichs (weil die Teilmenge des Definitionsbereichs, auf der zwei stetige Abbildungen gleiche Werte annehmen, abgeschlossen ist). Eine stetige Abbildung definiert auf \mathbf{R} ist zum Beispiel eindeutig bestimmt durch ihre Werte auf \mathbf{Q} . Es folgt, dass die Inklusion $i: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ ein Epimorphismus ist, obwohl sie nicht surjektiv ist.
- iii) In Top ist nicht jede bijektive stetige Abbildung ein Homöomorphismus, sprich ein Isomorphismus der Kategorie, aber wegen h) ist sie ein Monomorphismus und ein Epimorphismus zugleich.

Definition 1.32 Sei \mathcal{K} eine Kategorie und seien A und B Objekte von \mathcal{K} . Wir sagen A ist *isomorph* zu B in der Kategorie \mathcal{K} , und wir schreiben $A \cong B$ oder wo nötig zur Deutlichkeit $A \cong_{\mathcal{K}} B$, wenn es einen Isomorphismus $f \in \text{Mor}(A, B)$ gibt.

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse $\text{Ob}(\mathcal{K})$, denn Bemerkung 1.31 c) zeigt, dass die Relation \cong reflexiv ist, 1.31 d) zeigt, dass sie symmetrisch ist, und 1.31 e iii) zeigt, dass sie transitiv ist.

Lemma 1.33 Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} Kategorien und sei $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ ein kovarianter oder kontravarianter Funktor. Seien A und B Objekte von \mathcal{K} und $f: A \rightarrow B$ ein Isomorphismus von \mathcal{K} . Dann ist $F(f)$ ein Isomorphismus mit $F(f^{-1})$ als seinen Umkehrmorphismus.

Insbesondere gehen isomorphe Objekte unter jedem Funktor wieder in isomorphe Objekte über, und Isomorphie bleibt unter der Anwendung von Funktoren erhalten.

Beweis. Wenn F kovariant ist haben wir

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

und

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

Wenn F kontravariant ist haben wir

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

und

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

■

Isomorphie haben Sie schon in vielen Situationen kennengelernt, in der Vektorraumtheorie, in der Gruppentheorie, in der Topologie (unter dem Namen Homöomorphie), und so ziemlich in jedem anderen Gebiet der Mathematik. In der Kategorientheorie kann man eine einzige Definition davon angeben, die für alle Kategorien passt und die das Wiederholen dieser Definition für jede neue Struktur, die man kennen lernt, überflüssig macht.

Ähnliches gilt für viele andere bekannte strukturelle Begriffe der Mathematik, für den Begriff eines Unterobjekts, eines Quotienten, eines Produkts oder einer Summe von Objekten. Diese Begriffe lassen sich charakterisieren durch allgemeine kategorientheoretische Eigenschaften, die oft die Gestalt haben, dass es Morphismen mit gewissen Eigenschaften gibt, oder Morphismen die sich immer durch weitere zu einem kommutativen Diagramm ergänzen lassen. Allerdings würde es uns zu weit vom Thema abbringen, wenn wir in die Details dieser Konstruktionen eingingen. Wir benötigen zwar diese Begriffe, aber nur in Kategorien, in denen wir sie schon kennen, nämlich in den algebraischen und topologischen Kategorien. In neuen Varianten dieser Kategorien (z.B., in Top^2 oder in Top_*) werden wir die nötigen Anpassungen dieser Begriffe direkt definieren, weil das insbesondere einfacher sein wird, als die Auswirkung der recht abstrakten kategorietheoretischen Definitionen in der jeweiligen Situation zu verstehen.

Der Isomorphiebegriff, aber, ist so wichtig, dass wir ihn hier noch in Verbindung mit natürlichen Transformationen betrachten wollen:

Definition 1.34 Seien \mathcal{K} und \mathcal{L} Kategorien und seien F und G gleichvariante Funktoren $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$. Wir nennen eine natürliche Transformation $T: F \rightarrow G$ eine **natürliche Äquivalenz**, wenn für jedes Objekt A von \mathcal{K} gilt, dass $T(A): F(A) \rightarrow G(A)$ ein Isomorphismus in \mathcal{L} ist.

In diesem Fall kann man auf $\text{Ob}(\mathcal{K})$ eine Abbildung S definieren, die jedem Objekt A von \mathcal{K} den Morphismus $T(A)^{-1}: G(A) \rightarrow F(A)$ zuordnet.

Man kann sehr leicht nachprüfen, dass auch S eine natürliche Transformation (und wegen Bemerkung 1.31 d) sogar eine natürliche Äquivalenz) ist:

Sei $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus von \mathcal{K} . Im kovarianten Fall folgt aus $T(B) \circ F(f) = G(f) \circ T(A)$, dass

$$S(B) \circ T(B) \circ F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f) \circ T(A) \circ S(A),$$

d.h.,

$$T(B)^{-1} \circ T(B) \circ F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f) \circ T(A) \circ T(A)^{-1},$$

also

$$F(f) \circ S(A) = S(B) \circ G(f),$$

was zu zeigen ist.

Der Beweis im kontravarianten Fall geht genauso.

Für die natürliche Transformation S gilt offensichtlich $S \circ T = \text{id}_F$ und $T \circ S = \text{id}_G$. Wir nennen S die **Umkehrtransformation** oder die **inverse Transformation** zu T und schreiben dafür T^{-1} .

So wie die natürlichen Transformationen die „Morphismen“ der gedachten Funktorkategorie sind, sind die natürlichen Äquivalenzen ihre „Isomorphismen“. Natürlich äquivalente Funktoren haben im wesentlichen die gleiche Struktur, auch wenn sie nicht im Detail gleich sind, und sie bilden Objekte ihrer Quellkategorie immer in isomorphe Objekte der Zielkategorie ab.

Lemma 1.35 Seien \mathcal{K} , \mathcal{L} und \mathcal{M} Kategorien, seien F und G gleichvariante Funktoren $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ und sei $T: F \rightarrow G$ eine natürliche Äquivalenz mit Umkehrtransformation $S: G \rightarrow F$

Sei H ein Funktor beliebiger Varianz $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$. Dann ist die natürliche Transformation $H \circ T$ (definiert in Lemma 1.28) auch eine natürliche Äquivalenz, mit $H \circ S$ als Umkehrtransformation.

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 1.33 und der Definition von $H \circ T$. ■

Kapitel 2

Homotopie

In diesem Abschnitt geht es nun endlich um Topologie, aber noch nicht ganz um die Konstruktion der Funktoren der algebraischen Topologie, sondern um eine wichtige Vorbereitung für die gesamte algebraische Topologie, um den Homotopiebegriff.

Es handelt sich dabei um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen zwischen zwei Räumen; zwei Abbildungen heißen homotop zueinander, wenn sie sich durch stetige Veränderungen ineinander überführen lassen. Im Sinne der Homotopietheorie sehen stetige Abbildungen also schon gleich aus, wenn man sie ineinander verschieben kann, solange die Verschiebung stetig ist!

Da die ersten Funktoren, die wir konstruieren werden, die *Homotopiegruppen* sein werden, könnte man vermuten, die Homotopie wird jetzt behandelt, weil wir sie für die Konstruktion der Homotopiegruppen brauchen. Das stimmt aber nur zum Teil, denn obwohl der Homotopiebegriff tatsächlich in die Definition der Homotopiegruppen eingeht, spielt er in der algebraischen Topologie eine viel wichtigere Rolle als nur das (und verdient deshalb ein Kapitel ganz für sich und ganz zu Anfang).

Die Homotopie bestimmt die Grenzen der gesamten algebraischen Topologie, auch der Homologie- und Kohomologietheorie, denn alle Funktoren der algebraischen Topologie sind homotopieinvariant, d.h., sie sind blind für die Unterschiede zwischen Abbildungen, die zueinander homotop sind.

Das ist einerseits sicher ein Nachteil, denn homotope Abbildungen können sehr verschieden aussehen, aber die algebraische Topologie kann uns prinzipiell nicht dabei helfen, diese Unterschiede zu erkennen. Aber für die Berechnung der Funktoren ist es ein Vorteil, denn in jeder Überlegung und in jedem Beweis kann man stetige Abbildungen schadlos durch homotope Abbildungen ersetzen, die in ihrer Struktur eventuell viel einfacher sind als die ursprünglichen, so dass der Umgang mit ihnen wesentlich leichter ist.

Im jetzigen Kapitel wollen wir die Homotopierelation definieren und ihre Grundeigenschaften kurz aufzählen. Ihre Anwendung zur Konstruktion gruppenwertiger Funktoren erfolgt in den Folgeabschnitten.

Wir beginnen mit einigen Konventionen und etwas Standardnotation.

Notation 2.1 a) Mit I werden wir das Einheitsintervall $[0, 1] \subseteq \mathbf{R}$ bezeichnen, dass wir ständig benutzen werden.

b) Wir bezeichnen mit ∂I die Menge $\{0, 1\}$ der beiden Endpunkte oder Randpunkte des Intervalls.

c) Die Kategorien Top , Top^2 , Top_* und ihre Erweiterungen Top^n , $Top^{[n]}$, Top_*^2 aus Definition 1.5 werden wir als die *topologischen Kategorien* bezeichnen, so dass wir oft Definitionen oder Beweise für alle diese Kategorien gleichzeitig formulieren können, in dem wir sagen: „Sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie ...“

Die Morphismen der topologischen Kategorien werden wir schlicht „stetige Abbildungen“ nennen, auch wenn es sich um stetige Abbildungen von Raumpaaren oder von punktierten Räumen handelt.

Die Objekte einer topologischen Kategorie \mathcal{K} werden wir oft einfach „Räume in \mathcal{K} “ nennen.

Bei Aussagen, die für eine beliebige, nicht näher spezifizierte topologische Kategorie \mathcal{K} gelten sollen, werden wir die Räume wie in Top mit einzelnen Buchstaben X , Y usw. bezeichnen, auch wenn es sich dabei um Raumpaare (X, A) , (Y, B) oder punktierte Räume (X, x) , (Y, y) handelt.

Die Bezeichnung, die wir in dieser generellen Situation schreiben, ist immer der Name des oberen Raums X des eigentlichen Objekts in \mathcal{K} , denn die Objekte der topologischen Kategorien außer Top bestehen ja aus Tupeln, deren erstes Element ein gewöhnlicher topologischer Raum X ist, und deren weitere Elemente Unterräume von X oder Punkte aus X sind. Die stetigen Abbildungen $f: X \longrightarrow Y$ der Kategorie \mathcal{K} sind immer auch stetige Abbildungen f der Kategorie Top , definiert auf dem topologischen Raum X , die auf gewisse Weise die Unterräume oder ausgezeichneten Punkte verträglich abbilden. Aus diesem Grund nimmt f auf Punkten des topologischen Raumes X wohldefinierte Werte im topologischen Raum Y an, und diese Werte können wir auch nennen und verwenden in Aussagen oder Definitionen, die sich auf die Kategorie \mathcal{K} beziehen, ohne dass wir genau festlegen müssen, an welche topologische Kategorie \mathcal{K} wir denken.

- d) Seien (X, A) und (Y, B) zwei topologische Raumpaare (also Objekte von Top^2). Wir definieren ihr Produkt $(X, A) \times (Y, B)$ als das Raumpaar $(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$.
- e) Nach Beispiel 1.9 c) können wir Top als Unterkategorie von Top^2 auffassen, wenn wir jeden topologischen Raum X mit dem Raumpaar (X, \emptyset) identifizieren. Dies erlaubt uns, Produkte von Raumpaaren mit einfachen Räumen zu definieren, und wenn wir Räume nach dieser Identifikation in die Definition des Produkts in Teil d) einsetzen, erhalten wir die Notationskonvention

$$(X, A) \times Z := (X \times Z, A \times Z)$$

für ein Raumpaar (X, A) und einen topologischen Raum Z .

Diese Notation werden wir insbesondere sehr oft benutzen mit $Z = I$. Wir werden sie auch benutzen für den Fall, wo A nur aus einem Punkt besteht, d.h., für Produkte von punktierten Räumen mit topologischen Räumen:

$$(X, *) \times Z := (X \times Z, \{*\} \times Z)$$

Definition 2.2 Seien X und Y topologische Räume (oder Objekte einer anderen topologischen Kategorie \mathcal{K}). Eine **Homotopie** von X nach Y ist eine stetige Abbildung

$$H: X \times I \longrightarrow Y$$

in \mathcal{K} . Für jedes $t \in I$ erhalten wir eine Abbildung $H_t: X \longrightarrow Y$ durch die Festlegung

$$H_t(x) := H(x, t) \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Wir nennen H_t den *Zustand von H zur Zeit t* . Die H_t können wir auffassen als Stadien einer mit der Zeit sich stetig verändernden Schar von stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$, und die Homotopie H selber können wir somit interpretieren als eine stetige Schar von Abbildungen, oder als einen stetigen Weg im Raum der stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.

Speziell bezeichnen wir H_0 als den **Anfangszustand** von H und H_1 als den **Endzustand** von H ; wir sagen dann, H ist eine Homotopie von H_0 zu H_1 .

Sind f und g zwei stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$ (oder im allgemeineren Fall, Morphismen der Kategorie \mathcal{K}), so sagen wir, f ist **homotop** zu g , wenn es eine Homotopie H von X nach Y gibt, mit

$$H_0 = f \quad \text{und} \quad H_1 = g.$$

Wir schreiben als Notation dafür $f \simeq g$, oder wenn es auf die Nennung der Homotopie H ankommt, $f \simeq_H g$.

Bemerkung und Definition 2.3 a) Oft, wenn wir Homotopien anwenden, werden wir von ihnen mehr Struktur verlangen als nur die einer Homotopie in Top . Auch wenn wir in Top arbeiten, werden wir manchmal Homotopien betrachten, die einen gewissen wichtigen Unterraum respektieren, die also eigentlich Homotopien von Top^2 sind. Solche Homotopien (egal in welcher Grundkategorie wir uns befinden) nennen wir **Homotopien von Paaren**.

- b) Seien X und Y topologische Räume und sei $A \subseteq X$. Wir nennen eine Homotopie $H: X \times I \longrightarrow Y$ eine **Homotopie relativ zu A** , oder eine **Homotopie mit A fest**, wenn H auf A nichts verändert, d.h., wenn für jedes $a \in A$ gilt, dass $H(a, t)$ nicht von t abhängt, also für alle $t \in I$ gleich ist (aber dieser in t konstante Wert kann für verschiedene $a \in A$ verschieden sein).

Sind f und g stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$, so nennen wir f und g **homotop relativ zu A** oder **homotop mit A fest**, wenn es eine Homotopie H relativ zu A gibt, mit $f \simeq_H g$. Wir schreiben dann

$$f \simeq g \text{ rel } A \quad \text{oder spezifischer} \quad f \simeq_H g \text{ rel } A.$$

Natürlich ist das nur möglich, wenn $f|_A = g|_A$.

- c) Homotopien relativ zu einem Unterraum A kann man genauso betrachten in den anderen topologischen Kategorien. Jedes Objekt einer topologischen Kategorie besteht aus einem topologischen Raum X mit weiterer Struktur (einem ausgezeichneten Punkt, einem Unterraum oder mehreren), und man kann die Bedingung aus Teil b) wörtlich anwenden, wobei A ein beliebiger topologischer Unterraum von X sein kann und nichts zu tun haben muss mit der weiteren Struktur in der Kategorie, also mit den Unterräumen der Raumpaare oder mit den ausgezeichneten Punkten, usw.
- d) Sehr oft werden wir Homotopien betrachten, wo I nicht nur den „Zeitraum“ der Homotopie darstellt, sondern wo auch $X = I$. Eine solche Homotopie nennen wir eine Homotopie **mit festen Endpunkten**, wenn sie eine Homotopie $\text{rel } \{0, 1\} \subseteq I$ ist.

Definition 2.4 Nicht nur bei der Definition von Homotopien, sondern in vielen anderen Situationen werden wir es in dieser Vorlesung mit kartesischen Produkten von I mit anderen topologischen Räumen zu tun haben, und für stetige Abbildungen auf solchen Räumen wollen wir eine „Hintereinanderreichungs“- oder „Verkettungsoperation“ einführen, die die I -Richtung

praktisch wie eine Zeitrichtung auffasst und definiert was passiert, wenn wir zwei solche Abbildungen „zeitlich hintereinander“ durchlaufen, zunächst die erste, anschließend die zweite, aber mit einer Umskalierung, so dass die Gesamtlaufzeit weiterhin 1 beträgt. Die Operation soll definiert sein, wenn der Endzustand der ersten Zeitspanne mit dem Anfangszustand der zweiten Zeitspanne übereinstimmt.

Seien A , B und C topologische Räume und seien v und w stetige Abbildungen $A \times I \times B \longrightarrow C$, so dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt

$$v(a, 1, b) = w(a, 0, b). \quad (2.1)$$

Wir definieren eine Abbildung $v * w: A \times I \times B \longrightarrow C$ durch

$$(v * w)(a, t, b) := \begin{cases} v(a, 2t, b), & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ w(a, 2t - 1, b), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

für $a \in A$, $t \in I$, $b \in B$.

Man beachte, dass für $(v * w)(a, \frac{1}{2}, b)$ beide Fälle anwendbar sind, aber wegen (2.1) stimmen beide Werte überein, so dass $v * w$ auch für $t = \frac{1}{2}$ wohldefiniert ist. Und $v * w$ ist offensichtlich stetig auf den abgeschlossenen Unterräumen $A \times [0, \frac{1}{2}] \times B$ und $A \times [\frac{1}{2}, 1] \times B$, und somit auf ganz $A \times I \times B$.

Wir nennen $v * w$ die **Verkettung** von v und w .

Es ist natürlich denkbar, dass auch A und B kartesische Produkte sein können, in denen der Faktor I auftaucht, und dann könnte es unklar sein, auf welchen Faktor I im Gesamtprodukt sich die Operation $*$ bezieht. In diesem Fall erlauben wir uns, durch einen Index am Zeichen $*$ den richtigen Faktor I zu kennzeichnen, so dass wir zum Beispiel für Abbildungen auf I^2 zwei Verkettungsoperationen $*_1$ und $*_2$ haben, die auf die erste bzw. auf die zweite Richtung wirken.

Beispiele und Konstruktionen 2.5 Im Folgenden sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie und seien X , Y und Z Räume in \mathcal{K} . (Bei \mathcal{K} denken wir speziell an Top , Top^2 und Top_* , aber die Behauptungen gelten auch für andere.)

- a) Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung in \mathcal{K} . Wir definieren eine Abbildung $C_f: X \times I \longrightarrow Y$ durch die Vorschrift

$$C_f(x, t) := f(x) \quad \text{für alle } t \in I \text{ und jedes } x \in X.$$

C_f ist eine Homotopie von f zu f ; wir nennen sie die **konstante Homotopie** bei f , da $(C_f)_t = f$ ist für jedes $t \in I$.

Es ist leicht zu sehen, dass C_f die gleichen Bedingungen für die Abbildung von Unterräumen oder ausgezeichneten Punkten erfüllt, wie f , so dass C_f automatisch ein Morphismus der Kategorie \mathcal{K} ist.

- b) Seien f und g stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$ in \mathcal{K} . Sei $H: X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie von f zu g . Definiere eine Homotopie H^- durch

$$H^-(x, t) := H(x, 1 - t) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } t \in I.$$

H^- ist stetig, und wie man sich leicht überzeugt, auch ein Morphismus der Kategorie \mathcal{K} . Offenbar ist H^- eine Homotopie von g zu f , denn $H_0^- = H_{1-0} = H_1 = g$ und $H_1^- = H_{1-1} = H_0 = f$. Wir nennen H^- die **umgekehrte** oder **rückwärts verlaufende** Homotopie zu H .

- c) Seien f, g und h stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$ in \mathcal{K} und sei $H: X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie von f zu g und $K: X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie von g zu h . Da $H_1 = g = K_0$, ist für diese Abbildungen auf $X \times I$ die Voraussetzung (2.1) erfüllt und die Verkettung $H * K: X \times I \longrightarrow Y$ ist definiert. Man überzeugt sich leicht, dass auch $H * K$ ein Morphismus der Kategorie \mathcal{K} ist.

Offenbar ist $H * K$ eine Homotopie von f zu h , denn

$$(H * K)_0 = H_{2,0} = H_0 = f$$

und

$$(H * K)_1 = K_{2,1-1} = K_1 = h.$$

- d) Seien f und g stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$ und seien h und k stetige Abbildungen $Y \longrightarrow Z$ in \mathcal{K} . Sei $H: X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie von f zu g und sei $K: Y \times I \longrightarrow Z$ eine Homotopie von h zu k in \mathcal{K} .

Definiere eine Abbildung $K \circ H: X \times I \longrightarrow Z$ durch die Vorschrift

$$(K \circ H)(x, t) := K(H(x, t), t) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } t \in I.$$

Offenbar ist $K \circ H$ stetig und man überzeugt sich leicht, für die verschiedenen topologischen Kategorien \mathcal{K} , dass auch $K \circ H$ ein Morphismus von \mathcal{K} ist, da H und K es sind.

Wir nennen $K \circ H$ die **Verknüpfung der Homotopien** H und K . Obwohl $K \circ H$ nicht die Verknüpfung der Abbildungen H und K ist, ist dieser Name gerechtfertigt, denn es gilt für jedes $t \in I$, dass

$$(K \circ H)_t = K_t \circ H_t.$$

Insbesondere ist $K \circ H$ eine Homotopie von $K_0 \circ H_0 = h \circ f$ nach $K_1 \circ H_1 = k \circ g$.

Bemerkung 2.6 Wir verwenden die Bezeichnungen von Konstruktion 2.5. Sei A ein Unterraum von X .

Die konstante Homotopie C_f ist offensichtlich eine Homotopie $\text{rel } A$ für jeden Unterraum $A \subseteq X$.

In 2.5 b), wenn H eine Homotopie $\text{rel } A$ ist für einen bestimmten Unterraum A von X , dann gilt das auch für H^- .

Entsprechend, in 2.5 c), wenn H und K Homotopien $\text{rel } A$ sind, ist es auch $H * K$.

Für die Verknüpfung in 2.5 d) müssen wir ein bisschen vorsichtiger sein. Wenn H eine Homotopie $\text{rel } A$ ist, und wenn K eine Homotopie $\text{rel } f(A)$ ist, dann ist $K \circ H$ eine Homotopie $\text{rel } A$, denn

- für $a \in A$ hängt $H(a, t)$ nicht von t ab,
- $H(a, t)$ ist also für alle $t \in I$ gleich $f(a) \in f(A)$,
- also hängt $K(H(a, t), t) = K(f(a), t)$ nicht von t ab.

Aus den Konstruktionen 2.5 folgt sofort

Korollar 2.7 Sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie. Dann ist die Homotopierelation \simeq eine Kongruenz auf \mathcal{K} .

Ferner, für je zwei Objekte X und Y von \mathcal{K} und für jeden topologischen Unterraum $A \subseteq X$ ist Homotopie $\text{rel } A$ eine Äquivalenzrelation auf $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X, Y)$.

Beweis. Zunächst ist \simeq eine Äquivalenzrelation auf jeder Morphismenmenge von \mathcal{K} . Konstruktion 2.5 a) zeigt, dass die Relation reflexiv ist, 2.5 b) zeigt, dass sie symmetrisch ist, 2.5 c) zeigt, dass sie transitiv ist. Schließlich zeigt Konstruktion 2.5 d), dass \simeq mit Verknüpfung von Morphismen verträglich ist. Also ist \simeq eine Kongruenz.

Wenn wir feste Objekte X und Y haben und einen festen topologischen Unterraum $A \subseteq X$, so besagt Bemerkung 2.6, dass auch $\simeq \text{rel } A$ auf $\text{Mor}(X, Y)$ die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt.

Die Verknüpfungsbedingung *kann* hier übrigens nicht gelten, da A ein Unterraum eines festen Objekts X ist und es somit keinen Sinn macht, in diesem Zusammenhang von Verknüpfungen von Abbildungen zu reden. ■

Wir können jetzt die Quotientenkategorie nach dieser Kongruenz definieren:

Definition 2.8 Sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie. Die Quotientenkategorie \mathcal{K}/\simeq heißt die **Homotopiekategorie** zu \mathcal{K} und wird mit HK bezeichnet.

Die \simeq -Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung $f: X \longrightarrow Q$ in \mathcal{K} nennen wir ihre **Homotopieklasse** und wir bezeichnen sie, wie in Definition 1.6 b), mit $[f]$. Die Menge aller Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$ bezeichnen wir mit $[X, Y]$.

Wie in Beispiel 1.12 c) haben wir einen **Projektionsfunktork** $[\]$ von \mathcal{K} nach HK . Da aber HK die gleichen Objekte hat, wie \mathcal{K} , werden wir den Funktornamen $[\]$ nicht auf Objekte anwenden, sondern die entsprechende Notation, die hier überflüssig wäre, für einen anderen Zweck reservieren.

Wir haben also jetzt insbesondere drei neue Kategorien $HTop$, $HTop^2$ und $HTop_*$, und es wird sich später herausstellen, dass dies die eigentlichen Quellkategorien der algebraischen Topologie sind und nicht die topologischen Kategorien selber.

Beispiele 2.9 a) Sei X ein topologischer Raum und n eine natürliche Zahl. Jede Abbildung $f: X \longrightarrow \mathbf{R}^n$ ist homotop zur konstanten Abbildung 0 , denn

$$H(x, t) := t \cdot f(x)$$

ist eine Homotopie von 0 nach f .

b) Allgemeiner, sei Y eine konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n (zur Erinnerung: das heißt, dass für je zwei Punkte y und z von Y die gerade Verbindungsstrecke $\{(1-t)y + tz \mid t \in I\}$ ganz in Y enthalten ist). Dann sind je zwei stetige Abbildungen f und $g: X \longrightarrow Y$ zueinander homotop.

Für $x \in X$ und $t \in I$ setze man

$$H(x, t) := tg(x) + (1-t)f(x).$$

Dann ist H eine Homotopie von $H_0 = f$ zu $H_1 = g$.

Man beachte ferner: wenn $A \subseteq X$ eine Teilmenge ist, so dass $f|A = g|A$, dann ist H sogar eine Homotopie rel A .

c) Sei D^n die abgeschlossene Einheitsscheibe in \mathbf{R}^n :

$$D^n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\},$$

sei $X := D^n \setminus \{0\}$, und sei S^{n-1} die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre in \mathbf{R}^n :

$$S^{n-1} := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

X ist ein Unterraum von D^n und S^{n-1} ist ein Unterraum von X , und wir haben eine Art Projektion p von X auf S^{n-1} (genannt eine *Retraktion*), gegeben durch

$$p(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Die Identität von X , oder die Inklusion von X nach D^n (beide Abbildungen nehmen ja die gleichen Werte an) sind homotop zu p vermöge einer der Homotopien

$$H(x, t) := \left((1-t) \|x\| + t \right) \frac{x}{\|x\|}$$

oder

$$K(x, t) := \frac{x}{\|x\|^t}.$$

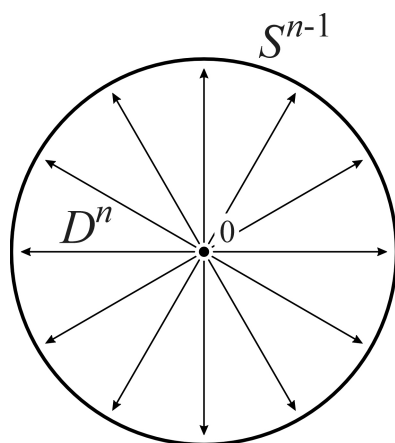


Abbildung 2.1: Eine Homotopie auf $D^n \setminus \{0\}$

Man beachte, dass diese Homotopien relativ zu S^{n-1} sind, d.h., die Punkte von S^{n-1} werden während der ganzen Homotopie nicht bewegt (und werden identisch abgebildet).

Auf ganz D^n gibt es *keine* stetigen Abbildungen nach S^{n-1} , die auf S^{n-1} die Identität sind. Und id_{D^n} ist rel S^{n-1} zu keiner Abbildung homotop, deren Bild nicht ganz D^n ist. Das zu beweisen ist aber (noch) nicht leicht; es wird uns erst möglich sein mit den Hilfsmitteln der algebraischen Topologie, also mit Hilfe der algebraischen Funktoren, die wir definieren werden.

- d) Sei $X = \{*\}$ ein Einpunktraum und sei Y ein beliebiger topologischer Raum. Eine Homotopie $H: X \times I \longrightarrow Y$ ist nichts anderes, als ein *Weg* w in Y (mit $w(t) = H(*, t)$).

Die einfache Feststellung in Beispiel 2.9 d) lässt sich benutzen, um Bedingungen für „relative“ Homotopien zu erkennen:

Bemerkung 2.10

- a) Seien X und Y topologische Räume und sei $H: X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie. Das Bild, während der Homotopie, eines Punktes $x \in X$ ist eine wegzusammenhängende Teilmenge $H(\{x\} \times I)$ von Y und folglich kann während der Homotopie kein Punkt die *Wegkomponente* von Y verlassen, in der er angefangen hat. Daraus folgt:
- b) Seien X und Y topologische Räume und Y sei *total unzusammenhängend* (d.h., jede Zusammenhangskomponente von Y besteht aus nur einem Punkt; \mathbf{Q} ist ein Beispiel von einem total unzusammenhängenden Raum, und natürlich ist auch jeder diskrete Raum total unzusammenhängend).

Dann ist auf Grund von a) jede Homotopie von X nach Y konstant.

- c) Seien (X, A) und (Y, B) topologische Raumpaare, und B sei total unzusammenhängend. Dann ist jede Homotopie von (X, A) nach (Y, B) eine Homotopie rel A , denn nach b) ist jede Homotopie von A nach B konstant.

Sie sehen schon, dass die Wege aus offensichtlichen Gründen eine wichtige Rolle in der Homotopietheorie spielen. Wir werden deshalb folgende Klassifizierung der Homotopieklassen „mit festen Endpunkten“ auf I sehr nützlich finden (zur Erinnerung: ∂I bezeichnet die Menge $\{0, 1\}$, den Rand von I).

Lemma 2.11 Seien f und g stetige Abbildungen $(I, \partial I) \longrightarrow (I, \partial I)$. Dann ist $f \simeq g$ in der Kategorie Top^2 genau dann, wenn f und g auf ∂I übereinstimmen.

Beweis. Die genannte Bedingung ist notwendig wegen Bemerkung 2.10 c). Wir müssen nur noch zeigen, dass sie hinreichend ist.

Seien also f und $g: (I, \partial I) \longrightarrow (I, \partial I)$ zwei Abbildungen mit $f|_{\partial I} = g|_{\partial I}$. Da I konvex ist und f und g auf ∂I übereinstimmen, ist nach Beispiel 2.9 b) $f \simeq g$ zwar nur in Top , aber rel ∂I und somit sind sie doch homotop als Abbildungen von Raumpaaren. ■

Bemerkung 2.12 Lemma 2.11 besagt nebenbei, dass die Homotopiemenge $[(I, \partial I), (I, \partial I)]$ genau 4 Elemente hat. Diese vier Homotopieklassen werden repräsentiert durch die Identität, die Spiegelung $t \mapsto 1 - t$, die konstante Abbildung 0 und die konstante Abbildung 1.

Korollar 2.13 Sei (X, A) ein beliebiges topologisches Raumpaard und seien f und g stetige Abbildungen $(I, \partial I) \rightarrow (X, A)$, so dass es eine stetige Abbildung $\varphi: (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$ gibt mit $g \circ \varphi = f$ (in anderen Worten, f geht durch Umparametrisierung aus g hervor).

- a) Wenn $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, dann ist $f \simeq g$ in Top^2 und $rel \partial I$.
- b) Sei $c: (I, \partial I) \rightarrow (X, A)$ die konstante Abbildung mit Wert $g(0)$. Wenn $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, dann ist $f \simeq c$ in Top^2 und $rel \partial I$.

Beweis. Aus Lemma 2.11 folgt in Fall a), dass $\varphi \simeq id_I$ in Top^2 , und in Fall b), wenn wir 0 auch für die konstante Abbildung mit Wert 0 schreiben, dass $\varphi \simeq 0$ in Top^2 , also ist

$$f = g \circ \varphi \simeq \begin{cases} g \circ id_I = g & \text{in Fall a)} \\ g \circ 0 = c & \text{in Fall b)} \end{cases}$$

(da sie eine Kongruenz ist, bleibt die Relation \simeq unter Verknüpfung erhalten).

■

Wir werden dieses Korollar bei der Konstruktion der Homotopiegruppen sehr nützlich finden.

Homotopie ist eine Äquivalenzrelation unter stetigen Abbildungen zwischen zwei Räumen, aber mit ihrer Hilfe können wir auch topologische Objekte vergleichen (mit teils erstaunlichen Ergebnissen):

Definition 2.14 Sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie, seien X und Y zwei Objekte von \mathcal{K} und sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus der Kategorie \mathcal{K} .

Wir nennen f eine **Homotopieäquivalenz** in der Kategorie \mathcal{K} , wenn $[f]$ ein Isomorphismus der Kategorie $H\mathcal{K}$ ist.

Wenn man das als eine Bedingung der Kategorie \mathcal{K} übersetzt, besagt es, dass es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ von \mathcal{K} gibt, so dass

$$g \circ f \simeq id_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq id_Y$$

(denn dies ist gleichbedeutend damit, dass $[g] \circ [f] = [id_X] = id_X$ in $H\mathcal{K}$ und $[f] \circ [g] = [id_Y] = id_Y$ in $H\mathcal{K}$).

Jede solche Abbildung g nennen wir ein **Homotopieinverses** zu f .

Die Objekte von HK sind die gleichen, wie die Objekte von \mathcal{K} . Wir sagen, dass Objekte X und Y **den gleichen Homotopietyp haben**, wenn sie isomorph sind als Objekte von HK , oder als Bedingung in \mathcal{K} , wenn es eine Homotopieäquivalenz von X nach Y gibt. Dafür werden wir schreiben $X \simeq Y$ oder

$$[X] = [Y].$$

(Aber beachte, dass $[X]$ *nicht* zu lesen ist als das Bild von X unter dem Funktor $[\]$!)

Aus den allgemeinen Eigenschaften von Isomorphismen in Kategorien folgt nun:

Lemma 2.15 *Sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie und seien X und Y Objekte in \mathcal{K} und $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von \mathcal{K} .*

- a) *Wenn es \mathcal{K} -Morphismen g und $h: Y \rightarrow X$ gibt, so dass*

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ h \simeq \text{id}_Y$$

(also g ist ein Homotopielinksinverses zu f und h ein Homotopierechtsinverses, aber sie müssen nicht gleich sein), dann ist f eine Homotopieäquivalenz, $g \simeq h$ und beide sind Homotopieinverse zu f .

- b) *Wenn f eine Homotopieäquivalenz ist und g ein Homotopieinverses zu f , dann ist auch $g: Y \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz und f ist ein Homotopieinverses zu g .*
- c) *Wenn f eine Homotopieäquivalenz ist und $f \simeq f': X \rightarrow Y$, dann ist auch f' eine Homotopieäquivalenz.*
- d) *Wenn f eine Homotopieäquivalenz ist und g ein Homotopieinverses zu f , dann gilt für jeden anderen Morphismus $h: Y \rightarrow X$, dass h genau dann ein Homotopieinverses zu f ist, wenn $h \simeq g$.*
- e) *Wenn f eine Homotopieäquivalenz ist, und wenn Z ein weiteres Objekt von \mathcal{K} ist und $h: Y \rightarrow Z$ ist eine Homotopieäquivalenz, dann ist $h \circ f$ eine Homotopieäquivalenz $X \rightarrow Z$. Ferner, wenn $g: Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f ist und $k: Z \rightarrow Y$ ein Homotopieinverses zu h ist, dann ist $g \circ k$ ein Homotopieinverses zu $h \circ f$.*
- f) *Wenn Z ein weiteres Objekt von \mathcal{K} ist und $h: Y \rightarrow Z$ ein Morphismus, so dass $(h \circ f): X \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz ist und mindestens einer von h oder f eine Homotopieäquivalenz ist, dann sind beide, f und h , Homotopieäquivalenzen.*

g) Jeder Homöomorphismus (Isomorphismus der Kategorie \mathcal{K}) ist auch eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Diese Behauptungen folgen aus der Tatsache, dass ein Morphismus f von \mathcal{K} genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn $[f]$ ein Isomorphismus von $H\mathcal{K}$ ist, und aus Bemerkung 1.31 über Isomorphismen.

Teil c) folgt direkt aus der genannten Tatsache, Teil a) folgt aus 1.31 a), Teil b) folgt aus 1.31 d), Teil d) aus 1.31 b), Teil e) folgt aus 1.31 e iii) und Teil f) aus 1.31 f). Teil g) ist trivial. ■

Beispiele 2.16 a) Sei $X = \mathbf{R}^n$ oder D^n oder allgemeiner, eine nichtleere konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n . Dann hat X den Homotopietyp eines Einpunktraumes. Ferner, für jeden Punkt $x \in X$ sind die Inklusion $i: \{x\} \rightarrow X$ und die konstante Abbildung $c: X \rightarrow \{x\}$ Homotopieäquivalenzen und Homotopieinverse zueinander.

Denn $c \circ i = \text{id}_{\{x\}}$ und $i \circ c \simeq \text{id}_X$, da wir in Beispiel 2.9 b) gesehen haben, dass je zwei stetige Abbildungen in eine konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n zueinander homotop sind. Die Homotopie zwischen $i \circ c$ und id_X ist sogar $\text{rel } \{x\}$, weil $(i \circ c)(x) = x$.

b) Die Inklusion $j: D^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine Homotopieäquivalenz.

Am einfachsten sieht man das, in dem man Lemma 2.15 f) anwendet auf die Verknüpfung von j mit der konstanten Abbildung $c: \mathbf{R}^n \rightarrow \{0\}$. Nach a) sind c und $c \circ j$ Homotopieäquivalenzen, also ist auch j eine.

Hier ein direkter Beweis, an den wir uns ein später erinnern wollen: Sei $r: \mathbf{R}^n \rightarrow D^n$ die Abbildung

$$r(x) := \begin{cases} x, & \text{wenn } \|x\| \leq 1; \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{wenn } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Offenbar ist $r \circ j = \text{id}_{D^n}$, und $j \circ r \simeq \text{id}_{\mathbf{R}^n}$, weil wieder je zwei Abbildungen nach \mathbf{R}^n homotop sind. Da aber $j \circ r$ auf D^n mit der Identität übereinstimmt, sind sie nach Beispiel 2.9 b) sogar homotop $\text{rel } D^n$.

Wie Sie sehen, folgt die Tatsache, dass die genannten Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind, aus ganz allgemeinen Sätzen über Abbildungen in konvexe Räume hinein. Der eigentliche Kernpunkt des vorgeführten Beweises ist nicht der Nachweis der Homotopieäquivalenzeigenschaft, sondern *die Konstruktion der Abbildung r* . Siehe dazu auch Teil f).

- c) Für jedes $n \geq 1$ ist die Inklusion $i: S^{n-1} \longrightarrow D^n \setminus \{0\}$ eine Homotopieäquivalenz, und ein Homotopieinverses dazu ist gegeben durch die in Beispiel 2.9 c) definierte Abbildung $p: D^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ mit $p(x) := x / \|x\|$.

Denn offensichtlich ist $p \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ und in Beispiel 2.9 c) haben wir schon gesehen, dass $i \circ p \simeq \text{id}_{D^n \setminus \{0\}}$.

- d) In \mathbf{R}^2 sei X der Kreis von Radius 1 um den Punkt $(-1, 0)$, und sei $Y = I \times \{0\}$. Sei $Z := X \cup Y$ (siehe Abbildung 2.2). Dann ist die Inklusion

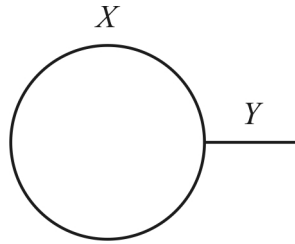


Abbildung 2.2: Ein Kreis mit angeheftetem Intervall

sion $j: X \longrightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz; die Abbildung r , die den Kreis identisch auf sich und das Intervall auf seinen linken Endpunkt abbildet ist ein Homotopieinverses zu j , denn durch stetiges Stauchen des „Stachels“ Y , unter Festhaltung des Kreises, erhält man offensichtlich eine Homotopie von id_Z zu $j \circ r$, und $r \circ j$ ist sogar gleich id_X .

- e) In \mathbf{R}^2 sei V die Vereinigung des Intervalls $I \times \{0\}$ mit dem Kreis von Radius 1 um $(-1, 0)$ und dem Kreis von Radius 1 um $(2, 0)$. Sei W die Vereinigung des Kreises von Radius 1 um $(-1, 0)$ mit dem Kreis von Radius 1 um $(1, 0)$ (diese beiden Kreise berühren sich am Koordinatenursprung). Dann haben diese beiden Räume den gleichen Homotopietyp.

Dieses Beispiel sieht ähnlich aus wie d), aber es ist wesentlich komplizierter, weil der zweite Kreis am rechten Ende des Intervalls verhindert, dass man das Intervall einfach zusammenstaucht; anders als in Teil d) kann sich das rechte Ende des Intervalls während der Homotopie nicht mehr frei bewegen, ohne dass man dem angehängten Kreis Rechnung trägt.

Um die Behauptung zu beweisen, müssen wir zunächst überhaupt Abbildungen finden zwischen V und W , und dann hoffen, dass die Abbildungen, die wir gewählt haben, Homotopieäquivalenzen sind.

Eine Abbildung $p: V \longrightarrow W$ ist leicht zu finden: man bilde den linken Kreis identisch ab, bilde das ganze Intervall auf seinen linken Endpunkt ab und verschiebe den rechten Kreis von V um eine Einheit nach links, so dass er auf den rechten Kreis von W zu stehen kommt. Für die Abbildung q in die andere Richtung muss man sich ein bisschen mehr einfallen lassen: man bilde den linken Kreis wieder identisch ab, man projiziere die linke Hälfte des rechten Kreises senkrecht auf die x -Achse, oder genauer auf $I \times \{0\}$, und man dehne die rechte Hälfte des rechten Kreises in W auf den ganzen Kreis aus (durch die Abbildung, die für den Einheitskreis um 0 in \mathbb{C} die Gestalt $z \mapsto z^2$ hat), und verschiebe das Ergebnis um eine Einheit nach rechts auf den rechten Kreis von V .

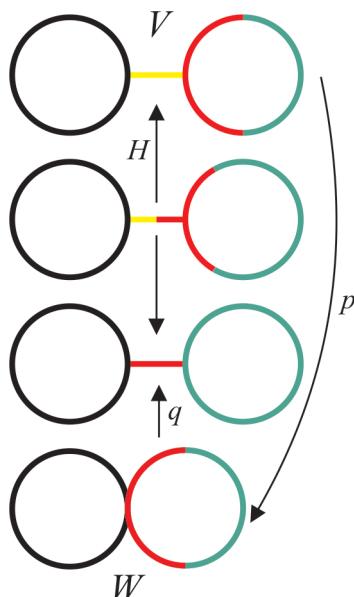


Abbildung 2.3: Das mittlere Intervall kann zusammengezogen werden.

Diese beiden Räume und die Abbildungen p und q sind in Abbildung 2.3 zu sehen, wo Raum V dreimal abgebildet ist um die Homotopie H zwischen id_V und $q \circ p$ zu zeigen. Diese Homotopie staucht das Intervall vom rechten Ende her zusammen und zieht die linke Hälfte des rechten Kreises mit, die in das Intervall „nachfließt“ (wobei der obere und untere Halbkreis auf der x -Achse miteinander verschmelzen); gleichzeitig dehnt sich die rechte Hälfte des rechten Kreises aus, um den „weggeflossenen“ Teil des Kreises auszufüllen. Es ist noch nicht einmal schwer, eine Formel für diese Homotopie hinzuschreiben, aber ich glaube, man versteht auch sehr gut (oder sogar besser) anhand des Bildes, was hier passiert.

Man findet auch leicht eine Homotopie zwischen id_W und $p \circ q$, die hier aber nicht abgebildet ist. Sie staucht die linke Hälfte des rechten Kreises von W einfach zu einem Punkt zusammen (dem Schnittpunkt der beiden Kreise), während die rechte Hälfte des rechten Kreises sich ausdehnt, um den Kreis auszufüllen.

- f) Die Inklusion $i: S^{n-1} \longrightarrow D^n$ ist für *kein* n eine Homotopieäquivalenz und das hängt mit der Tatsache zusammen, dass es *keine* stetige Abbildung $D^n \longrightarrow S^{n-1}$ geben kann, die auf S^{n-1} die Identität ist.

Wo solche Abbildungen existieren, ist es auch nicht schwer, sie zu finden. Wo zwei Räume vom gleichen Homotopietyp sind, ist es meistens auch nicht schwer, eine Homotopieäquivalenz anzugeben und die Homotopien zu konstruieren, die man braucht, um zu zeigen, dass die Abbildung eine Homotopieäquivalenz ist. Wo all das aber *nicht* gilt, ist es oft außerordentlich schwer, die Unmöglichkeit zu beweisen. So werden wir auch in diesem Fall erst nach der Konstruktion und Berechnung geeigneter algebraisch topologischer Funktoren dazu in der Lage sein.

Wenn wir diese Beispiele betrachten, sehen wir, dass die einfachsten Zustände, die es bezüglich Homotopie und Homotopieäquivalenzen geben kann, die folgenden sind, die aus diesem Grund auch einen besonderen Namen verdienen:

Definition 2.17 a) Sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie, seien X und Y Objekte von \mathcal{K} und sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Wir nennen f **nullhomotop** in \mathcal{K} , wenn f homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

- b) Ein Objekt X einer topologischen Kategorie \mathcal{K} heißt **zusammenziehbar** in \mathcal{K} , wenn X in \mathcal{K} den gleichen Homotopietyp hat, wie ein Einpunktraum $\{x\}$ (wenn $\mathcal{K} \neq \text{Top}$, so ist darunter zu verstehen ein Raumpaars (X, A) oder ein punktierter Raum $(X, *)$, für den X nur aus einem Punkt besteht).

Lemma 2.18 Sei \mathcal{K} eine topologische Kategorie und sein $X \neq \emptyset$ ein Objekt von \mathcal{K} . Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a) X ist zusammenziehbar in \mathcal{K} .
- b) id_X ist nullhomotop in \mathcal{K} .
- c) Jeder \mathcal{K} -Morphismus $f: Y \longrightarrow X$ mit Zielobjekt X ist nullhomotop.

d) Jeder \mathcal{K} -Morphismus $g: X \longrightarrow Z$ mit Quellobjekt X ist nullhomotop.

Der Beweis ist sehr einfach und wird als Übungsaufgabe dem Leser überlassen.

Beispiel 2.19 Jede stetige Abbildung nach \mathbf{R}^n oder in eine konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n hinein ist nullhomotop (Beispiel 2.9 a) und b)). Mit Lemma 2.18 folgt daraus, dass jede konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n zusammenziehbar ist (das wurde aber auch schon in Beispiel 2.16 a) gezeigt).

Zum Schluß besprechen wir noch kurz eine Klasse von Abbildungen eines topologischen Raumes auf einen Unterraum, die in unseren Beispielen, wie Beispiele 2.16 b), c) und d), sehr oft aufgetreten sind, und die für die Homotopietheorie manchmal eine wichtige und angenehme Rolle spielen:

Definition 2.20 Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ ein Unterraum von X und $i: A \longrightarrow X$ die Inklusion.

Eine **Retraktion** von X auf A ist eine stetige Abbildung $r: X \longrightarrow A$, so dass $r|_A = \text{id}_A$, oder anders gesagt, so dass $r \circ i = \text{id}_A$ (daraus folgt automatisch, dass r surjektiv ist). Man nennt den Unterraum A einen **Retrakt** von X , wenn es eine Retraktion $r: X \longrightarrow A$ gibt.

Eine Retraktion r , die eine Homotopieäquivalenz ist, nennt man eine **Deformationsretraktion**. Eine äquivalente Bedingung dafür ist, dass

$$i \circ r \simeq \text{id}_X \quad (2.3)$$

(denn jede Retraktion erfüllt $r \circ i = \text{id}_A$, d.h., r hat i als Rechtsinverses, und nach Lemma 2.15 a) ist r genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn es i auch als Homotopielinksinverses hat).

Wenn in (2.3) sogar Homotopie $\text{rel } A$ gilt, dann nennt man r eine **starke Deformationsretraktion**.

Den Unterraum A nennt man einen **(starken) Deformationsretrakt** von X , wenn es eine (starke) Deformationsretraktion $X \longrightarrow A$ gibt.

Bemerkung 2.21 Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ ein Unterraum von X und $i: A \longrightarrow X$ die Inklusion. Genau dann ist A ein Retrakt von X , wenn id_A sich zu einer Abbildung $X \longrightarrow A$ erweitern lässt. Das kann man mit Hilfen von Diagrammen auch so ausdrücken:

A ist genau dann ein Retrakt von X , wenn in folgendem Diagramm der

gestrichelte Pfeil sich so einfügen lässt, dass das Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i \uparrow & \searrow r & \\ A & \xrightarrow{\text{id}_A} & A \end{array}$$

A ist genau dann ein Deformationsretrakt von X , wenn in folgendem Diagramm der gestrichelte Pfeil sich so einfügen lässt, dass das untere Dreieck kommutativ und das obere Dreieck homotopiekommutativ wird:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & & \\ i \uparrow & \searrow r & \swarrow i & & \\ A & \xrightarrow{\text{id}_A} & A & & \end{array}$$

Folgende Charakterisierungen dieser Begriffe sind sehr nützlich:

Lemma 2.22 Sei X ein topologischer Raum und A ein Unterraum von X .

- a) A ist genau dann ein Retrakt von X , wenn jede auf A definierte stetige Abbildung $f: A \rightarrow Y$ (in einen beliebigen anderen Raum Y) sich zu X erweitern lässt, oder in anderen Worten, wenn in folgendem Diagramm der gestrichelte Pfeil sich immer so einfügen lässt, dass das Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i \uparrow & \searrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

- b) A ist genau dann ein Deformationsretrakt von X , wenn jede auf A definierte stetige Abbildung $f: A \rightarrow Y$ in einen beliebigen anderen Raum Y sich bis auf Homotopie auf genau eine Weise zu X erweitern lässt (d.h., sie lässt sich erweitern, und je zwei Erweiterungen sind zueinander homotop).

Beweis. Sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion. Eine Erweiterung von f zu X ist eine Abbildung $g: X \rightarrow Y$ mit $g \circ i = f$.

Zu a): Eine Retraktion $r: X \rightarrow A$ ist nichts anderes als eine Erweiterung von id_A , also wenn jede Abbildung auf A sich zu X erweitern lässt, dann existiert eine Retraktion und A ist ein Retrakt von X . Umgekehrt, wenn

es eine Retraktion $r: X \longrightarrow A$ gibt, so kann man eine beliebige Abbildung $f: A \longrightarrow Y$ mit $g := f \circ r$ zu ganz X erweitern, denn

$$g \circ i = f \circ r \circ i = f \circ \text{id}_A = f.$$

Zu b): Sei A ein Retrakt von X . Wenn jede Erweiterung zu X einer Abbildung auf A eindeutig ist bis auf Homotopie, und wenn r eine Retraktion $X \longrightarrow A$ ist, dann sind $i \circ r$ und id_X zwei Erweiterungen von id_A und somit homotop, d.h., (2.3) ist erfüllt und r ist eine Deformationsretraktion. Umgekehrt, wenn r eine Deformationsretraktion ist, so gilt $i \circ r \simeq \text{id}_X$ und somit gilt für jede Abbildung $f: A \longrightarrow Y$ und jede Erweiterung $g: X \longrightarrow Y$ von f , dass

$$g = g \circ \text{id}_X \simeq g \circ i \circ r = f \circ r,$$

d.h., jede Erweiterung von f ist homotop zur speziellen Erweiterung $f \circ r$, und somit bilden alle Erweiterungen von f eine einzige Homotopieklasse und sind zueinander homotop. ■

Kapitel 3

Die Fundamentalgruppe und die höheren Homotopiegruppen

Mit Hilfe der Begriffe und der Konstruktionen aus Kapitel 2 sind wir nun in der Lage, mit wenig Arbeit unseren ersten algebraischen Funktor zu konstruieren. Wir beginnen zunächst mit der einfachsten Variante, der sogenannten *Fundamentalgruppe*, die sich aber leicht verallgemeinern lässt zu einer unendlichen Folge von ähnlich aufgebauten Funktoren, den *Homotopiegruppen* beliebiger Dimension (wobei die Fundamentalgruppe der Dimension 1 entspricht), die wir gleich anschließend definieren und sofort mitbehandeln.

Die Fundamentalgruppe erhält man aus der Betrachtung von *Wegen* in einem topologischen Raum und der Untersuchung, welche Wege zueinander homotop sind, wenn man ihre Endpunkte festhält; nur der Pfad dazwischen darf bei der Homotopie bewegt werden. Wir erinnern kurz daran, was ein Weg ist:

Definition 3.1 Sei X ein topologischer Raum.

- a) Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $w: I \longrightarrow X$. Wir nennen $w(0)$ den **Anfangspunkt** und $w(1)$ den **Schlusspunkt** des Weges w , und diese beiden Punkte nennen wir kollektiv die **Endpunkte** des Weges.

Wir sagen auch, w ist ein Weg **von** $w(0)$ **nach** $w(1)$.

Die Menge aller Wege von x nach y in X bezeichnen wir mit $\Omega(x, y)$.

- b) Wir nennen zwei Wege v und w in X **homotop mit festen Endpunkten**, wenn $v \simeq w \text{ rel } \partial I$, und in diesem Fall schreiben wir dazu auch

$$v \simeq w \text{ mfe},$$

so wie wir generell die Abkürzung *mfE* für „mit festen Endpunkten“ zulassen wollen. Natürlich können zwei Wege nur dann mit festen Endpunkten homotop sein, wenn sie den gleichen Anfangspunkt haben und den gleichen Schlusspunkt haben.

Die Homotopieklasse mit festen Endpunkten eines Weges w bezeichnen wir mit $[w]$; da es sich in diesem Kontext immer um Homotopie mit festen Endpunkten handeln wird, kennzeichnen wir das nicht extra in der Notation.

Die Menge aller Homotopieklassen mit festen Endpunkten von Wegen von x nach y in X bezeichnen wir mit $\pi(x, y)$.

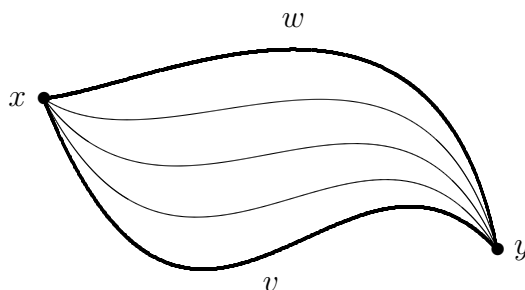


Abbildung 3.1: Homotopie mit festen Endpunkten

In Beispiel 2.9 d) wurde bemerkt, dass man einen Weg w in einem topologischen Raum X auch als eine Homotopie von Abbildungen eines Einpunktraumes $\{*\}$ nach X betrachten kann. Aus diesem Grund sind alle Konstruktionen und Operationen, die wir in Beispiele 2.5 für Homotopien definiert haben, auch für Wege erklärt, insbesondere, neben dem konstanten Weg c_x bei x mit $c_x(t) = x$ für alle $t \in I$ und dem umgekehrten Weg w^- zu w mit $w^-(t) = w(1 - t)$, auch die Verkettung $*$. Dabei gelten folgende nützliche Grundeigenschaften:

Lemma 3.2 Sei X ein topologischer Raum und seien p, x, y und z Punkte von X . Sei u ein Weg in X von p nach x , sei v ein Weg von x nach y und w ein Weg von y nach z .

a)

$$u * (v * w) \simeq (u * v) * w \text{ mfE.}$$

b)

$$c_x * v \simeq v \simeq v * c_y \text{ mfE.}$$

c)

$$v * v^- \simeq c_x \text{ mfE} \quad \text{und} \quad v^- * v \simeq c_y \text{ mfE}.$$

- d) Wenn $v': I \longrightarrow X$ ein anderer Weg von x nach y ist mit $v \simeq v' \text{ mfE}$, und wenn $w': I \longrightarrow X$ ein anderer Weg von y nach z ist, so dass $w \simeq w' \text{ mfE}$, dann ist

$$v * w \simeq v' * w' \text{ mfE}.$$

Beweis.

- a) Wenn man die Details der Definition außer Acht lässt (die hier auch nicht wichtig sind!), sieht man, dass die Verkettung $w_1 * w_2$ von zwei Wegen so definiert ist, dass man I in zwei Teilintervalle I_1 und I_2 zerlegt und die Verkettung auf jedem Teilintervall I_i definiert als die Verknüpfung $w_i \circ \varphi_i$ des i -ten Weges w_i mit der linearen Abbildung φ_i , die I_i monoton steigend auf ganz I abbildet.

Wenn man mehr als zwei Wege verkettet, so werden in obiger Beschreibung die Teilintervalle I_i je nach Klammerung weiter unterteilt, aber die Gesamtverkettung ist auf jedem der neuen, kleineren Teilintervallen wieder definiert als die Verknüpfung einer der Faktorwege mit der monoton steigenden linearen Abbildung, die das Teilintervall auf ganz I abbildet.

In unserem Fall besteht der Unterschied zwischen den zwei möglichen Klammerungen $(u * v) * w$ und $u * (v * w)$ nur in der Größe der Teilintervalle für u , v und w (in einem Fall $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und im anderen Fall $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$), so dass diese Verkettungen sich nur unterscheiden durch eine Umparametrisierung des Intervalls I durch die stetige stückweise lineare Abbildung φ , die $[0, \frac{1}{4}]$ auf $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ auf $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ auf $[\frac{3}{4}, 1]$ abbildet. Da φ die Randpunkte 0 nach 0 und 1 nach 1 abbildet, folgt aus Korollar 2.13 a), dass $u * (v * w)$ und $(u * v) * w$ homotop sind rel ∂I , also mit festen Endpunkten.

(Für diejenigen, die es ganz genau wissen wollen:

$$(u * v) * w = (u * (v * w)) \circ \varphi,$$

wo $\varphi: I \longrightarrow I$ gegeben ist durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ t + \frac{1}{4}, & \text{wenn } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung kann man anhand der Definition von $u * (v * w)$ und $(u * v) * w$ explizit nachrechnen.)

b) Für $t \in I$ sei

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

und sei

$$\rho(t) = \begin{cases} 2t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $c_x * v = v \circ \lambda$ und $v * c_y = v \circ \rho$, und da λ und ρ stetige Abbildungen $I \rightarrow I$ sind, die die Endpunkte 0 und 1 festlassen, folgt wieder aus Korollar 2.13 a), dass $c_x * v \simeq v$ und $v * c_y \simeq v \text{ rel } \partial I$, also mit festen Endpunkten.

c) Man prüft sofort nach, dass $v * v^- = v \circ \psi$, wo für $t \in I$ gilt

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2t, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Da $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ist $v * v^- \simeq c_{v(0)} = c_x \text{ mfE}$ oder $\text{rel } \partial I$, nach Korollar 2.13 b).

Die Aussage für die andere Reihenfolge der Verkettung beweist man genauso, oder man ersetzt in der schon bewiesenen Aussage v durch v^- . Da $(v^-)^- = v$ und da $v^-(0) = v(1) = y$ erhält man $v^- * v \simeq c_y \text{ mfE}$.

d) Sei H eine Homotopie mit festen Endpunkten von v nach v' und sei K eine Homotopie mit festen Endpunkten von w nach w' . Es sind H und K Abbildungen $I \times I \rightarrow I$, und wir verketteten sie nun nicht als Homotopien, sondern (wie in Definition 2.4 mit berücksichtigt) bezüglich der *ersten* Koordinate, also mit der Verkettung $*_1$:

$$(H *_1 K)(s, t) = \begin{cases} H(2s, t), & \text{wenn } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(2s - 1, t), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $t \in I$, dass $(H *_1 K)_t = H_t * K_t$ und insbesondere ist $H *_1 K$ eine Homotopie von $(H *_1 K)_0 = v * w$ nach $(H *_1 K)_1 = v' * w'$. Da

$(H *_1 K)(0, t) = H(0, t) = x$ für alle t und $(H *_1 K)(1, t) = K(1, t) = z$ für alle t , ist $H *_1 K$ eine Homotopie mit festen Endpunkten, wie behauptet. ■

Wir können mit dem Ergebnis dieses Lemmas zwei Dinge anfangen, wovon das erste eine kleine (aber nicht ganz unnutze) Spielerei ist:

Definition 3.3 Sei X ein topologischer Raum. Wir konstruieren aus X eine Kategorie \mathcal{X} mit $\text{Ob}(\mathcal{X}) = X$, indem wir für je zwei „Objekte“ x und $y \in X$ die Morphismenmenge $\text{Mor}(x, y)$ als $\pi(x, y) = \Omega(x, y)/\simeq$ erklären, die Menge der Homotopieklassen mfE von Wegen in X von x nach y .

Die Verknüpfung wird auf diesen Quotienten von der Verkettung von Wegen induziert, d.h., für Wege $v \in \Omega(x, y)$ und $w \in \Omega(y, z)$ definieren wir

$$[w] \circ [v] := [v * w]. \quad (3.1)$$

Die Aussage von Lemma 3.2 d) ist, dass dies wohldefiniert ist und nur von den Homotopieklassen von v und w mit festen Endpunkten abhängt.

Der Einfachheit halber schreiben wir auch $[v] * [w]$ für diese Klasse $[v * w]$.

Die Verknüpfung muss einige Eigenschaften erfüllen, die aber schon nachgeprüft wurden: Lemma 3.2 a) besagt, dass die Verknüpfung assoziativ ist — das ist Bedingung 1.1 c i) — und Lemma 3.2 b) besagt, dass $[c_x]$ ein Identitätsmorphismus für das Objekt $x \in X$ ist — das ist Bedingung 1.1 c ii).

Man beachte, dass in der Kategorie \mathcal{X} jeder Morphismus ein Isomorphismus ist; das ist die Aussage von Lemma 3.2 c), und es gilt, dass $[v]^{-1} = [v^-]$.

Korollar 3.4 Sei X ein topologischer Raum und seien x, y und $z \in X$. Seien v und w Wege in X von x nach y und sei u ein Weg von y nach z .

a) $(v * u)^- = u^- * v^-$.

b) Wenn $v \simeq w$ mfE , dann ist auch $v^- \simeq w^-$ mfE .

Beweis. Teil a) kann man anhand der Definition von $*$ direkt nachrechnen. Teil b) kann man analog zum Beweis von Lemma 3.2 d) durch Konstruktion einer Homotopie beweisen: Wenn H eine Homotopie von v nach w ist, und wenn K gleich H^- bezüglich der *ersten* Koordinate ist, so ist K eine Homotopie zwischen v^- und w^- . Noch einfacher ist folgendes Argument: in der soeben konstruierten Kategorie \mathcal{X} ist $[v^-] = [v]^{-1}$ und $[w^-] = [w]^{-1}$, und da $[v] = [w]$ und das Inverse eines Isomorphismus eindeutig bestimmt ist nach Lemma 1.31 b), gilt auch $[v^-] = [w^-]$. ■

Die Kategorie, die wir gerade konstruiert haben, ist nicht von erstrangiger Bedeutung. Wichtig sind die Eigenschaften aus Lemma 3.2. Die Behauptung, dass jeder topologische Raum eine Kategorie liefert, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, wobei die Morphismen als Homotopieklassen mFE von Wegen definiert sind, sollte man als eine knappe und kompakte Formulierung der Aussage von Lemma 3.2 verstehen, statt umgekehrt das Lemma bloß zu einem Beweis der Kategorieneigenschaft zu degradieren.

Die Aussage des Lemmas sollte sie auch an etwas anderes erinnert haben, nämlich an die Gruppenaxiome, und das ist seine zweite und wichtigere Verwendung. In der soeben konstruierten Kategorie sind zwei Morphismen nur dann verknüpfbar, wenn der Zielpunkt des ersten gleich dem Quellpunkt des zweiten Morphismus ist. Mit einer kleinen Einschränkung können wir dieses Hindernis umgehen:

Definition 3.5 Sei X ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Einen Weg w in X von x zurück zum gleichen Punkt x nennen wir eine **Schleife** bei x . Die Menge aller Schleifen in X bei x bezeichnen wir mit $\Omega(X, x)$, und wir nennen dies den **Schleifenraum in X bei x** .

Wir definieren

$$\pi_1(X, x) := \pi(x, x),$$

die Menge aller Homotopieklassen mit festen Endpunkten von Schleifen bei x .

Da alle Schleifen bei x an diesem Punkt beginnen *und* enden, ist die Verkettung von zwei Schleifen bei x *immer* definiert, und somit ist auch auf $\pi_1(X, x)$ die Operation $*$ wie in Gleichung (3.1) für je zwei Elemente definiert.

Lemma 3.2 oder die Eigenschaften, die in Definition 3.3 festgehalten wurden, besagen, dass die Operation $*$ auf $\pi_1(X, x)$ die Gruppenaxiome erfüllt, mit $[c_x]$ als das neutrale Element der Gruppe und $[w^-]$ als das inverse Element zu $[w]$.

Die Gruppe $\pi_1(X, x)$ heißt die **Fundamentalgruppe** oder die **erste Homotopiegruppe** des punktierten Raumes (X, x) .

Die Fundamentalgruppe hängt nicht nur vom topologischen Raum X ab, sondern auch vom Basispunkt $x \in X$, allerdings nicht sehr stark, wie wir etwas später sehen werden.

Wir sind also auf dem Weg zu einem Funktor auf der Kategorie Top_* . Ein Merkmal fehlt uns noch:

Definition 3.6 Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume und sei $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ eine stetige Abbildung von punktierten Räumen.

Dann induziert f eine mengentheoretische Abbildung

$$f_{\#}: \Omega(X, x) \longrightarrow \Omega(Y, y),$$

die wir auch $\Omega(f)$ nennen, durch die Vorschrift

$$f_{\#}(w) := f \circ w.$$

Wenn nämlich w eine stetige Abbildung $(I, \partial I) \longrightarrow (X, x)$ ist, dann ist $f \circ w$ eine stetige Abbildung $(I, \partial I) \longrightarrow (Y, y)$, also eine Schleife bei $y \in Y$. Aus der Definition von $f_{\#} = \Omega(f)$ ist klar, dass Ω ein Funktor $Top_* \longrightarrow Men$ ist.

Aus Lemma 2.5 d) folgt, dass die Homotopieklasse von $f \circ w$ mit festen Endpunkten nur von der Homotopieklasse mit festen Endpunkten von w und der Homotopieklasse von f in Top_* abhängt. Daraus folgt, dass $f_{\#}$ eine wohldefinierte Abbildung

$$f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

definiert, wenn wir

$$f_*([w]) := [f_{\#}(w)]$$

setzen. Für f_* schreiben wir auch $\pi_1(f)$; es hängt nur von $[f] \in [(X, x), (Y, y)]$ ab.

Lemma 3.7 *Die Zuordnungen π_1 bilden einen kovarianten Funktor*

$$\pi_1: Top_* \longrightarrow Gp.$$

Ferner, wenn $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ ein Morphismus von punktierten Räumen ist, dann hängt $\pi_1(f)$ nur von der Homotopieklasse $[f]$ von f als Abbildung von punktierten Räumen ab.

Beweis. Zunächst ordnet π_1 jedem punktierten topologischen Raum (X, x) tatsächlich eine Gruppe $\pi_1(X, x)$ zu, und es ordnet jeder stetigen Abbildung $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ von punktierten Räumen zumindest eine wohldefinierte mengentheoretische Abbildung $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ zu.

Aus der Definition von $*$ ist klar, dass wenn v und w Schleifen bei $x \in X$ sind, dann gilt

$$f \circ (v * w) = (f \circ v) * (f \circ w).$$

Daraus folgt sofort

$$[f \circ (v * w)] = [f \circ v] * [f \circ w],$$

oder in anderen Worten

$$\pi_1(f)([v] * [w]) = \pi_1(f)([v * w]) = \pi_1(f)([v]) * \pi_1(f)([w]),$$

d.h., $f_* = \pi_1(f)$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ (also ein Gp -Morphismus und nicht nur eine mengentheoretische Abbildung).

Da $\pi(f)$ aus der Verknüpfung mit f entsteht, ist es trivial zu sehen, dass $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ und dass $\pi_1(\text{id}_{(X,x)}) = \text{id}_{\pi_1(X,x)}$, dass also Eigenschaften 1.10 I b) gelten.

Somit ist π_1 ein (kovarianter) Funktor. In Definition 3.6 wurde schon bemerkt, dass $\pi_1(f)$ nur von der Homotopieklasse von f abhängt. ■

Korollar 3.8 *Den Funktor π_1 können wir auch als einen kovarianten Funktor $HTop_* \longrightarrow Gp$ auffassen, wenn wir für jeden Morphismus*

$$[f]: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$$

von $HTop_*$

$$\pi_1([f]) := \pi_1(f)$$

setzen.

Beweis. $\pi_1([f])$ ist wohldefiniert, da $\pi_1(f)$ nur von $[f]$ abhängt, und alles andere ist klar aus Lemma 3.7 und der Definition der Kategorie $HTop_*$. ■

Lemma 3.9 *Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume und sei $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ eine Homotopieäquivalenz (in der Kategorie Top_*). Dann ist*

$$\pi_1(f) = f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

ein Gruppenisomorphismus, und wenn $g: (Y, y) \longrightarrow (X, x)$ ein Homotopieinverses zu f ist, dann ist $f_^{-1} = g_*$.*

Beweis. Unter Bezug auf Korollar 3.8 folgt dies sofort aus der Tatsache, dass $[f]$ ein Isomorphismus von $HTop_*$ ist mit $[f]^{-1} = [g]$, und aus Lemma 1.33. ■

Lemma 3.9 ist sehr einfach und folgt sofort aus allgemeinen Tatsachen über Funktoren, aber die Voraussetzung, dass f eine Homotopieäquivalenz von Top_* sein muss, ist sehr einschränkend und wie wir bald sehen werden unnötig stark. Überhaupt stört es bei dem Funktor π_1 , dass er auf der Kategorie Top_* und nicht Top definiert ist, aber obwohl man auch „freie Homotopie“ von Schleifen betrachten kann, bei der die Wege während der Homotopie

geschlossene Kurven sind, aber nicht durch einen festen Basispunkt gehen, ist es dann sehr umständlich, die Gruppenstruktur zu definieren, weil man verschiedene Schleifen nicht unmittelbar verketteten kann.

Deshalb nehmen wir es hin, dass die Fundamentalgruppe nur für punktierte Räume erklärt ist. Man ist aber trotzdem berechtigt zu fragen, in wie weit $\pi_1(X, x)$ von der Wahl des Basispunktes x abhängt. Antwort darauf gibt folgendes Lemma:

Lemma und Definition 3.10 *Sei X ein topologischer Raum und seien x_0 und x_1 Punkte von X . Sei α ein Weg in X von x_0 nach x_1 . Wir definieren eine Abbildung*

$$\hat{\alpha}: \Omega(X, x_1) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$$

*durch die Vorschrift $\hat{\alpha}(w) := (\alpha * w) * \alpha^-$ für jede Schleife w bei x_1 . Die*

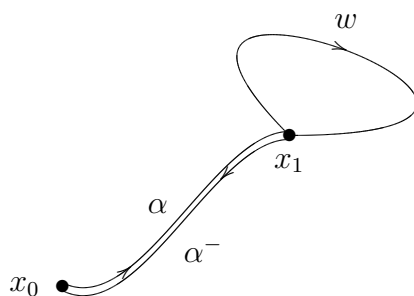


Abbildung 3.2: $\hat{\alpha}(w)$, die Schleife w zurückgeholt von x_1 nach x_0 entlang α .

Homotopieklasse mit festen Endpunkten von $\hat{\alpha}(w)$ hängt nur von den Homotopieklassen von α und w ab. Deshalb induziert $\hat{\alpha}$ eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, die wir auch $\hat{\alpha}$ nennen, und die für eine Homotopieklasse $[w] \in \pi_1(X, x_1)$ den Wert

$$\hat{\alpha}([w]) := [\hat{\alpha}(w)]$$

annimmt. Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften:

- a) $\hat{\alpha}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$;
- b) $\hat{\alpha}$ hängt nur von $[\alpha] \in \pi(x_0, x_1)$ ab;
- c) Wenn x_2 ein weiterer Punkt von X ist und β ein Weg von x_1 nach x_2 ist, dann ist

$$\widehat{\alpha * \beta} = (\hat{\alpha} \circ \hat{\beta}): \pi_1(X, x_2) \longrightarrow \pi_1(X, x_0);$$

- d) $\widehat{c_{x_0}}$ ist die Identität von $\pi_1(X, x_0)$;
- e) $\hat{\alpha}$ ist ein Gruppenisomorphismus;
- f) Wenn Y ein zweiter topologischer Raum ist und $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x_1) = y_1 \in Y$, und wenn $\beta = f \circ \alpha: I \longrightarrow Y$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_1) \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \hat{\beta} \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

Bemerkung zur Notation. Bei der Verkettung von mehr als zwei Wegen muss eine Klammerung festgelegt werden, da die genaue Abbildung auf I , die den resultierenden Weg darstellt, davon abhängt (im Gegensatz zu ihrer Homotopieklasse). Um trotzdem im folgenden Beweis und auch später nicht Unmengen an Klammern schreiben zu müssen, führen wir die Konvention ein, dass in einem Ausdruck ohne Klammern eine Klammerung von links nach rechts zu verstehen ist, d.h., $w_1 * w_2 * \dots * w_n$ ist eine Abkürzung für $((w_1 * w_2) * w_3) * \dots * w_n$.

Beweis. Zunächst zur Wohldefiniertheit von $\hat{\alpha}$: Nach Lemma 3.2 d) hängt die Homotopieklasse mit festen Endpunkten von $\hat{\alpha}(w)$ nur von den Homotopieklassen von α , w und α^- ab, aber nach Korollar 3.4 b) hängt $[\alpha^-]$ nur von $[\alpha]$ ab, also hängt $[\hat{\alpha}(w)]$ nur von $[\alpha]$ und von $[w]$ ab.

Deshalb ist $\hat{\alpha}$ auf $\pi_1(X, x_1)$ wohldefiniert, und nur von $[\alpha]$ abhängig, was gleichzeitig auch b) beweist.

Zu a): Wenn v und $w \in \Omega(X, x_1)$ so ist

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([v] * [w]) &= \hat{\alpha}([v * w]) = [\hat{\alpha}(v * w)] \\ &= [\alpha * v * w * \alpha^-] \\ &\stackrel[3.2]{b,d)}{=} [\alpha * v * c_{x_1} * w * \alpha^-] \\ &\stackrel[3.2]{c,d)}{=} [\alpha * v * \alpha^- * \alpha * w * \alpha^-] = [\alpha * v * \alpha^-] * [\alpha * w * \alpha^-] \\ &= [\hat{\alpha}(v)] * [\hat{\alpha}(w)] = \hat{\alpha}([v]) * \hat{\alpha}([w]) \end{aligned}$$

Zu c): Wenn $w \in \Omega(X, x_2)$ so ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha * \beta}(w) &= (\alpha * \beta) * w * (\alpha * \beta)^- \\ &\stackrel{3.4 \text{ a)}}{=} (\alpha * \beta) * w * (\beta^- * \alpha^-) \simeq \alpha * (\beta * w * \beta^-) * \alpha^- \\ &= \alpha * \hat{\beta}(w) * \alpha^- = \hat{\alpha}(\hat{\beta}(w)). \end{aligned}$$

Übergang zu Homotopieklassen liefert die Gleichheit der Abbildungen $\widehat{\alpha * \beta}$ und $\hat{\alpha} \circ \hat{\beta}$ auf $\pi_1(X, x_2)$.

Zu d): Für jede Schleife $w \in \Omega(X, x_0)$ ist

$$\widehat{c_{x_0}}([w]) = [c_{x_0} * w * (c_{x_0})^-] = [c_{x_0} * w * c_{x_0}] = [w]$$

wegen Lemma 3.2 b) (offensichtlich ist $(c_{x_0})^- = c_{x_0}$).

Zu e): Da die $\widehat{}$ -Operation homotopieinvariant ist, haben wir

$$\hat{\alpha} \circ \widehat{\alpha^-} \stackrel{c)}{=} \widehat{\alpha * \alpha^-} \stackrel{3.2 \text{ c)}}{=} \widehat{c_{x_0}} \stackrel{d)}{=} \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}.$$

Wendet man diese Gleichung auf α^- an, so folgt auch $\widehat{\alpha^-} \circ \hat{\alpha} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$. Also hat der Gruppenhomomorphismus $\hat{\alpha}$ ein Inverses und ist daher ein Isomorphismus.

Zu f): Sei $w \in \Omega(X, x_1)$. Dann ist $f_{\#}(w) \in \Omega(Y, y_1)$ und $\beta = f \circ \alpha = f_{\#}(\alpha)$ ist ein Weg in Y von y_0 nach y_1 . Es gilt

$$\begin{aligned} f_{\#}(\hat{\alpha}(w)) &= f_{\#}(\alpha * w * \alpha^-) \\ &= f_{\#}(\alpha) * f_{\#}(w) * f_{\#}(\alpha^-) \\ &= \beta * f_{\#}(w) * \beta^- = \hat{\beta}(f_{\#}(w)). \end{aligned}$$

Die Kommutativität des angegebenen Diagramms folgt sofort durch Übergang zu Homotopieklassen. ■

Mit Hilfe von $\hat{\alpha}$ können wir, für eine stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$, die in Definition 3.6 erwähnte Homotopieinvarianz von f_* sinnvoll verallgemeinern zu einer Invarianzaussage bezüglich Homotopien in Top :

Lemma 3.11 *Sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum, sei Y ein topologischer Raum und seien f und g stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$, die homotop sind in der Kategorie Top . Sei $y_0 = f(x)$ und $y_1 = g(x)$ und sei $H: X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g .*

Definiere einen Weg $\alpha: I \longrightarrow Y$ von y_0 nach y_1 durch

$$\alpha(t) := H(x, t).$$

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow g_* & \uparrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Beweis. α ist tatsächlich ein Weg von $H(x, 0) = H_0(x) = f(x) = y_0$ nach $H(x, 1) = H_1(x) = g(x) = y_1$.

Für jedes $t \in I$ definieren wir einen Weg α_t in Y von y_0 nach $H(x, t)$ durch die Vorschrift

$$\alpha_t(s) := H(x, st)$$

für alle $s \in I$. Wir haben $\alpha_0 = c_{y_0}$ und $\alpha_1 = \alpha$.

Sei $w \in \Omega(X, x)$. Die Schar von Wegen $\hat{\alpha}_t(H_t \circ w)$ bildet eine Homotopie mit festen Endpunkten K von Schleifen bei y_0 in Y , wie man an der genauen Definition von K sofort nachprüfen kann:

$$K(s, t) := \begin{cases} H(x, 4st), & \text{wenn } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}; \\ H(w(4s - 1), t), & \text{wenn } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H(x, (2 - 2s)t), & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

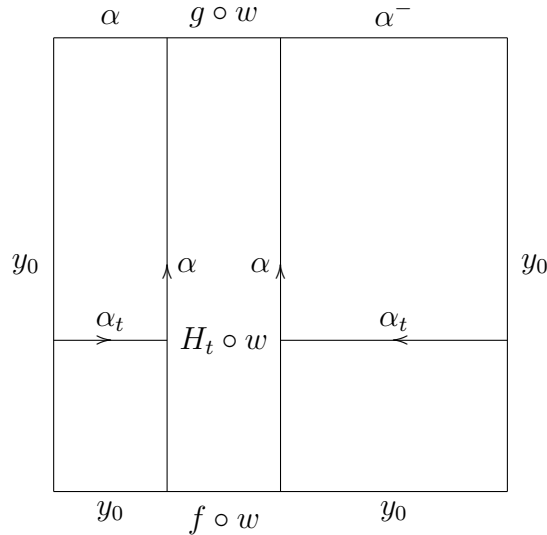


Abbildung 3.3: Die Homotopie K von Schleifen bei y_0 .

Bei $s = \frac{1}{4}$ ist $H(x, 4st) = H(x, t) = H(w(0), t) = H(w(4s - 1), t)$ und bei $s = \frac{1}{2}$ ist $H(w(4s - 1), t) = H(w(1), t) = H(x, t) = H(x, (2 - 2s)t)$, so dass die obige Fallunterscheidung eine wohldefinierte stetige Abbildung $I \times I \longrightarrow Y$ bestimmt (oder in anderen Worten, $\hat{\alpha}_t(H_t \circ w)$ ist tatsächlich definiert für jedes t).

$K(0, t) = H(x, 0) = f(x) = y_0$ und auch $K(1, t) = H(x, 0) = y_0$, so dass K tatsächlich eine Homotopie mFE von Schleifen bei $y_0 \in Y$ ist.

Nach Konstruktion ist $K_0 = \widehat{\alpha_0}(f \circ w) = \widehat{c_{y_0}}(f_\#(w))$ und $K_1 = \hat{\alpha}(g \circ w) = \hat{\alpha}(g_\#(w))$, also gilt, wenn wir zu den Homotopieklassen übergehen,

$$f_* = \widehat{c_{y_0}} \circ f_* = \hat{\alpha} \circ g_*.$$

■

Hieraus folgt sofort folgende Verallgemeinerung von Lemma 3.9.

Korollar 3.12 *Seien X und Y topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz in Top . Sei $x \in X$ und sei $y = f(x) \in Y$. Dann ist*

$$f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g: Y \longrightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f und sei $z = g(y) \in X$. Sei H eine Homotopie von id_X zu $g \circ f$ (in Top), und definiere einen Weg α in X von x nach z durch die Vorschrift $\alpha(t) := H(x, t)$ für alle $t \in I$.

Nach Lemma 3.11 gilt

$$\text{id}_{\pi_1(X, x)} = (\text{id}_X)_* = \hat{\alpha} \circ (g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (g_* \circ f_*).$$

Da $\hat{\alpha}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $g_* \circ f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, z)$ ein Isomorphismus und somit ist $f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ injektiv und $g_*: \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, z)$ ist surjektiv.

Wenn wir die Rollen von f und g vertauschen, folgt auf gleiche Weise, dass g_* injektiv ist (und $f_*: \pi_1(X, z) \longrightarrow \pi_1(Y, f(z))$ surjektiv — man beachte die geänderten Basispunkte, weshalb diese Information uns unmittelbar nicht viel bringt!). Auf jeden Fall ist aber $g_*: \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, z)$ ein Isomorphismus, und da auch $g_* \circ f_*$ einer ist, können wir nun daraus schließen, dass $f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ ein Isomorphismus ist. ■

Der Unterschied zu Lemma 3.9 besteht darin, dass jetzt die Homotopieäquivalenz und die Homotopie zur Identität die Basispunkte nicht mehr respektieren müssen, und trotzdem gilt ein Schluss, der nur für einen Funktor auf Top_* einen Sinn ergibt.

Korollar 3.13 Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum und sei $x \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x) = \{1\}$, die triviale Gruppe.

Beweis. Sei $Y = \{*\}$ ein Einpunktraum. Dann ist c_* die einzige Schleife bei $*$ und da $\Omega(Y, *)$ nur ein Element hat, kann auch $\pi_1(Y, *)$ nicht mehr als ein Element haben und ist trivial. Wenn X zusammenziehbar ist, so gibt es eine Homotopieäquivalenz f von X zu einem Einpunktraum Y und nach Korollar 3.12 ist f_* ein Isomorphismus und somit $\pi_1(X, x)$ auch trivial. ■

Beispiele 3.14 a) $\pi_1(\mathbf{R}^n, x) = \{1\}$ für jedes $x \in \mathbf{R}^n$;

b) $\pi_1(D^n, x) = \{1\}$ für jedes $x \in D^n$;

c) allgemeiner, $\pi_1(K, x) = \{1\}$ für jede konvexe Teilmenge K von \mathbf{R}^n .

Das folgt aus Korollar 3.13, denn die genannten Räume sind nach Beispiel 2.16 a) zusammenziehbar.

Wir sind in diesem Kapitel nun ziemlich weit fortgeschritten und haben bisher nur diesen sehr dürftigen Vorrat an Beispielen. Das liegt nicht daran, dass wir vergessen haben, Beispiele zu präsentieren; die Berechnung auch von einfachen Homotopiegruppen wie die von S^1 ist erstaunlich schwierig und wir müssen im nächsten Kapitel erst Werkzeug dafür entwickeln. Vorher wollen wir aber die Konstruktion der Fundamentalgruppe verallgemeinern, denn es gibt auch in höheren Dimensionen Homotopiegruppen mit einer ähnlichen Konstruktion und vergleichbaren Eigenschaften.

Definition 3.15 Sei $n \in \mathbf{N}$. Wir bezeichnen mit I^n den *n -dimensionalen Einheitswürfel*

$$I^n = \underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_n$$

und mit ∂I^n dessen **Rand**

$$\partial I^n = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in I^n \mid \exists i, 1 \leq i \leq n, \text{ mit } t_i \in \partial I\}.$$

Definition 3.16 Sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum und sei $n \in \mathbf{N}$. Eine *n -Schleife* in X bei x ist eine stetige Abbildung

$$w: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, \{x\})$$

(in Zukunft schreiben wir das Ziel einer n -Schleife aber einfach als punktierten Raum (X, x) und nicht wie oben als Raumpaar. Wer sehr pingelig ist, kann das als eine Abkürzung verstehen).

Wir bezeichnen die Menge aller n -Schleifen in X bei x mit $\Omega_n(X, x)$.

Homotopie rel ∂I^n ist eine Äquivalenzrelation \simeq auf $\Omega_n(X, x)$ und wir bezeichnen die Menge $\Omega_n(X, x)/\simeq$ der Äquivalenzklassen (Homotopieklassen von n -Schleifen mit „festem Rand“) mit $\pi_n(X, x)$.

Wir nennen $\pi_n(X, x)$ die *n -te Homotopiemenge* des punktierten Raumes (X, x) .

Bemerkung 3.17 $\pi_n(X, x)$ ist auch für $n = 0$ definiert und dann ist es wirklich nur eine Menge. Nach Konvention ist $I^0 = \mathbf{R}^0 = \{0\}$ und $\partial I^0 = \emptyset$, also ist eine 0-Schleife in X bei x nichts anderes als ein Punkt $z \in X$ (dieser Punkt *muss nicht* gleich x sein, denn der Rand von I^0 ist leer und es gibt deshalb keine Bedingung, dass eine 0-Schleife irgend etwas auf den ausgezeichneten Punkt von (X, x) abbilden muss). Eine Homotopie rel ∂I^0 von 0-Schleifen ist nichts anderes als ein Weg in X , und die Homotopierelation bedeutet somit nichts anderes, als in der gleichen Wegkomponente von X zu liegen. Deshalb ist $\pi_0(X, x)$ einfach die *Menge* der Wegkomponenten von X .

Der Fall $n = 1$ ist die Situation, die wir bisher untersucht haben. Die 1-Schleifen sind einfach *Schleifen* im Sinne von Definition 3.5 und $\Omega_1(X, x)$ ist das Gleiche, wie das bisherige $\Omega(X, x)$, und somit ist $\pi_1(X, x)$ im Sinne von Definition 3.16 zumindest als Menge das Gleiche, wie $\pi_1(X, x)$ im Sinne von Definition 3.5.

Wir erhalten aber jetzt für *alle* Dimensionen $n \geq 1$ analog zur Konstruktion der Fundamentalgruppe (die den Spezialfall $n = 1$ darstellt) eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x)$:

Definition 3.18 Sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum. Sei $n \in \mathbf{N}$ und $n \geq 1$. Seien v und $w: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x)$ zwei n -Schleifen in X bei x . Wir definieren die **Verkettung** $v * w$ von v und w als die Verkettung $*_1$ im Sinne von Definition 2.4 (siehe den letzten Absatz der Definition auf Seite 45), also als die dort definierte Operation $*$ ausgeführt bezüglich der *ersten* Koordinate von I^n .

In der Definition von $v * w$ wird bei der Abbildung von I^n nur die erste Koordinate t_1 verändert, und der Wert von $(v * w)(t_1, \dots, t_n)$ ist ein Wert von v oder von w beim veränderten Koordinatentupel (t'_1, t_2, \dots, t_n) .

Wenn $t_1 = \frac{1}{2}$, dann ist dieser Wert definiert als $v(1, t_2, \dots, t_n)$ aber auch als $w(0, t_2, \dots, t_n)$, und weil diese Koordinatentupel in ∂I^n liegen sind beide Werte gleich x und somit zueinander gleich. Deshalb ist $v * w$ für n -Schleifen v und w bei x tatsächlich wohldefiniert.

Wenn $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \partial I^n$, dann ist entweder $t_1 = 0$ und

$$(v * w)(0, t_2, \dots, t_n) = v(0, t_2, \dots, t_n) = x,$$

oder $t_1 = 1$ und

$$(v * w)(1, t_2, \dots, t_n) = w(1, t_2, \dots, t_n) = x,$$

oder für ein $i \geq 2$ ist $t_i = 0$ oder 1 , und dann ist auch $(t'_1, t_2, \dots, t_n) \in \partial I^n$ und somit der Wert von v oder w an dieser Stelle gleich x . Das heißt, dass $v * w$ wieder eine n -Schleife bei x ist und $*$ ist eine Abbildung

$$\Omega_n(X, x) \times \Omega_n(X, x) \longrightarrow \Omega_n(X, x).$$

Bemerkung 3.19 Der einzige Unterschied zur Verkettung von 1-Schleifen bei x besteht darin, dass eine n -Schleife von $n - 1$ zusätzlichen Variablen in I abhängt, die aber bei der Verkettung und allen anderen Operationen, die wir im ersten Teil dieses Kapitels mit 1-Schleifen durchgeführt haben, unverändert mitgetragen werden. Aus diesem Grund können wir alle Beweise von Tatsachen über 1-Schleifen unverändert auch für n -Schleifen übernehmen, wenn wir nur in den Funktionsargumenten die zusätzlichen Variablen jedesmal mit dabei schreiben.

Hieraus folgt, dass die Eigenschaften aus Lemma 3.2 auch für n -Schleifen gelten (mit den gleichen Beweisen). Eigenschaft d) dieses Lemmas impliziert, dass $*$ auch eine wohldefinierte Operation für Homotopieklassen bestimmt wie in Gleichung (3.1), also eine Operation $*$ auf $\pi_n(X, x)$. Und die anderen Eigenschaften dieses Lemmas besagen, dass $*$ eine Gruppenoperation auf $\pi_n(X, x)$ ist (vergleiche Definition 3.5), wieder mit $[c_x]$ als das neutrale Element der Gruppe und mit $[w^-]$ (wo $-$ bezüglich der ersten Koordinate zu verstehen ist) als das inverse Element zu $[w]$.

Wir haben also schon bewiesen:

Lemma 3.20 Sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum und sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Die Operation $*$ auf $\Omega_n(X, x)$ induziert eine wohldefinierte Operation

$$*: \pi_n(X, x) \times \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(X, x),$$

die eine Gruppenmultiplikation ist. Die Gruppe $\pi_n(X, x)$ heißt die **n -te Homotopiegruppe** des punktierten Raumes (X, x) .

Definition 3.21 Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume und sei $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ eine stetige Abbildung von punktierten Räumen. Sei n eine natürliche Zahl.

Dann induziert f eine mengentheoretische Abbildung

$$f_{\#}: \Omega_n(X, x) \longrightarrow \Omega_n(Y, y),$$

die wir auch $\Omega_n(f)$ nennen, durch die Vorschrift

$$f_{\#}(w) := f \circ w.$$

Wenn nämlich w eine stetige Abbildung $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x)$ ist, dann ist $f \circ w$ eine stetige Abbildung $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (Y, y)$, also eine n -Schleife bei $y \in Y$. Aus der Definition von $f_{\#} = \Omega_n(f)$ ist klar, dass Ω_n ein Funktor $Top_* \rightarrow Men$ ist.

Aus Lemma 2.5 d) folgt, dass die Homotopieklasse von $f \circ w$ in $\pi_n(Y, y)$ nur von der Homotopieklasse von w in $\pi_n(X, x)$ und der Homotopieklasse von f in der Kategorie Top_* abhängt. Also erhalten wir aus $f_{\#}$ eine wohldefinierte Abbildung

$$f_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y),$$

wenn wir

$$f_*([w]) := [f_{\#}(w)]$$

setzen. Für f_* schreiben wir auch $\pi_n(f)$; es hängt nur von $[f] \in [(X, x), (Y, y)]$ ab.

Lemma 3.22 *Die Zuordnung π_n bildet für $n \geq 1$ einen kovarianten Funktor*

$$\pi_n: Top_* \rightarrow Gp.$$

Ferner, wenn $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ein Morphismus von punktierten Räumen ist, dann hängt $\pi_n(f)$ nur von der Homotopieklasse $[f]$ von f als Abbildung von punktierten Räumen ab.

Beweis. Der Beweis kann wörtlich wie im Fall $n = 1$ geführt werden, also wie der Beweis von Lemma 3.7, einschließlich der auch anderswo nützlichen Feststellung für $f_{\#} = \Omega_n(f)$, dass wenn v und w n -Schleifen bei $x \in X$ sind, dann gilt

$$f_{\#}(v * w) = f_{\#}(v) * f_{\#}(w)$$

(woraus ja folgt, dass $f_* = \pi_n(f): \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ ein Gruppenhomomorphismus ist). ■

Wie im Fall $n = 1$ folgt aus der Homotopieinvarianz von $\pi_n(f)$:

Korollar 3.23 *Den Funktor π_n können wir auch als einen kovarianten Funktor $HTop_* \rightarrow Gp$ auffassen, wenn wir für jeden Morphismus*

$$[f]: (X, x) \rightarrow (Y, y)$$

von $HTop_$*

$$\pi_n([f]) := \pi_n(f)$$

setzen.

Wenn wir die Untersuchung analog zum Fall $n = 1$ fortsetzen wollen, müssen wir als nächstes die Abhängigkeit von $\pi_n(X, x)$ vom Basispunkt untersuchen und hoffen, auch im allgemeinen Fall für jeden Weg α von x_0 zu $x_1 \in X$ einen Isomorphismus $\hat{\alpha}: \pi_n(X, x_1) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ zu erhalten. Erstaunlicherweise gelingt das, obwohl die Konstruktion im Fall $n = 1$ die Verkettung von α und α^- mit Schleifen bei x benutzte und hier wegen den unterschiedlichen Dimensionen von α und den n -Schleifen nicht wörtlich übernommen werden kann. Die Idee zur Verallgemeinerung der eindimensionalen Konstruktion liegt in der Beobachtung, dass die Konstruktion von $\hat{\alpha}(w)$ im eindimensionalen Fall darin besteht, eine Kopie von α an jeden Endpunkt des Intervalls I anzuhängen, auf dem w definiert ist. Im höherdimensionalen Fall hängen wir eine Kopie von α an jeden *Randpunkt* des Würfels I^n .

Definition 3.24 Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir identifizieren I^n mit dem **Boden** $I^n \times \{0\}$ des Würfels $I^{n+1} = I^n \times I$, und wir setzen

$$J^n := (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{1\}) \subseteq \partial I^{n+1}.$$

Man beachte, dass $I^n \cup J^n = \partial I^{n+1}$ und $I^n \cap J^n = \partial I^n$.

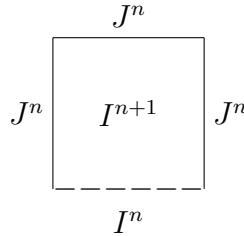
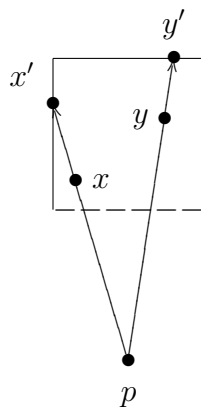


Abbildung 3.4: $I^n = I^n \times \{0\}$ und J^n als Teilmengen von I^{n+1}

Lemma 3.25 Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Dann ist J^n ein Retrakt von I^{n+1} .

Beweis. Statt eine Formel für eine Retraktion $r: I^{n+1} \longrightarrow J^n$ anzugeben, beschreiben wir eine solche Retraktion durch ein Bild (wer will, kann daraus leicht die Formel für die Abbildung herleiten).

Sei $p = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -1) \in \mathbf{R}^{n+1}$ der Punkt, der eine Einheit senkrecht unter dem Mittelpunkt von $I^n \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ liegt. Für jeden Punkt $x \in I^{n+1}$ zeichnen wir die Gerade in \mathbf{R}^{n+1} von p durch x und verlängern sie, bis sie J^n in einem Punkt x' trifft. Diesen Punkt nehmen wir als $r(x)$.

Abbildung 3.5: Eine Retraktion von I^{n+1} auf J^n .

Da $p \notin I^{n+1}$ gibt es genau eine Gerade durch p und x und man überzeugt sich leicht, dass sie J^n in genau einem Punkt trifft. Nämlich, sei $\vec{v} := x - p$ und schreibe $\vec{v} = (s_1, s_2, \dots, s_{n+1})$. Dann ist $0 \leq |s_i| \leq \frac{1}{2}$ für $1 \leq i \leq n$ und es gilt $1 \leq s_{n+1} \leq 2$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $c_i = 1/2s_i$ (oder $c_i = \infty$ wenn $s_i = 0$) und sei $c_{n+1} = 2/s_{n+1}$, welches auf jeden Fall endlich ist; sei c die kleinste der Zahlen c_i . Dann ist $x' = p + c\vec{v}$ der eindeutige Schnittpunkt der Geraden durch p und x mit J^n (Sicher ist dies von p kommend der erste Schnittpunkt, aber wenn man die Gerade weiter verfolgt wird eine Koordinate negativ oder > 1 , also verlässt man danach I^{n+1} .)

Anhand der angegebenen Berechnungsvorschrift für $r(x)$ ist es klar, dass r stetig ist. Und nach Konstruktion ist $r(x) = x$ wenn x schon ein Punkt von J^n ist. Also ist r eine Retraktion von I^{n+1} auf J^n . ■

Lemma 3.26 Sei X ein topologischer Raum und sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

- a) Sei $f: J^n \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann lässt sich f erweitern zu einer stetigen Abbildung $F: I^{n+1} \longrightarrow X$.
- b) Je zwei solche Erweiterungen sind homotop rel J^n .
- c) Sei $g: J^n \longrightarrow X$ eine weitere stetige Abbildung und sei $G: I^{n+1} \longrightarrow X$ eine stetige Erweiterung von g . Sei

$$H: J^n \times I \longrightarrow X$$

eine Homotopie von f zu g . Dann läßt sich H erweitern zu einer Homotopie

$$K: I^{n+1} \times I \longrightarrow X$$

von F zu G .

Beweis. Nach Lemma 3.25 existiert eine Retraktion $r: I^{n+1} \longrightarrow J^n$. Dann ist $F := f \circ r$ eine stetige Erweiterung von f zu I^{n+1} . Das beweist a).

Als nächstes betrachten wir Teil c). Wir definieren eine stetige Abbildung $k: J^{n+1} \rightarrow X$ durch

$$k(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) := \begin{cases} F(t_1, \dots, t_{n+1}), & \text{wenn } t_0 = 0; \\ G(t_1, \dots, t_{n+1}), & \text{wenn } t_0 = 1; \\ H(t_1, \dots, t_{n+1}, t_0), & \text{wenn } t_{n+1} = 1 \text{ oder wenn } \exists i \text{ mit} \\ & 1 \leq i \leq n \text{ und } t_i = 0 \text{ oder } 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

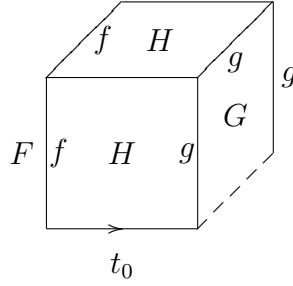


Abbildung 3.6: Die Abbildung k auf J^{n+1}

Die ersten beiden dieser Fälle können nicht gleichzeitig auftreten und der dritte Fall tritt genau dann auf, wenn $(t_1, \dots, t_{n+1}) \in J^n$, und wenn dieser Fall mit einem der ersten beiden zusammentrifft, d.h., wenn zusätzlich $t_0 = 0$ oder 1, so ist der Wert nach dem dritten Fall gleich dem Wert nach dem ersten oder zweiten Fall, weil $H_0 = f = F|J^n$ und $H_1 = g = G|J^n$.

Das bedeutet, dass k wohldefiniert ist, wo mehrere Fälle zusammentreffen. Und $(t_0, t_1, \dots, t_{n+1})$ gehört genau dann zu J^{n+1} , wenn einer der drei Fälle in (3.2) zutrifft, so dass k eine wohldefinierte stetige Abbildung auf ganz J^{n+1} ist.

Diese Abbildung erweitert sich nach Teil a) zu einer stetigen Abbildung $\tilde{K}: I^{n+2} \longrightarrow X$, und wenn man

$$K(t_1, \dots, t_{n+1}, t) := \tilde{K}(t, t_1, \dots, t_{n+1})$$

setzt, so ist K nach Konstruktion eine Homotopie von F zu G , die, wenn $(t_1, \dots, t_{n+1}) \in J^n$, nach dem dritten Fall der Definition von k mit H übereinstimmt. Damit ist c) bewiesen.

Teil b) folgt sofort aus c), wenn wir $g = f$ nehmen (so dass G einfach eine zweite Erweiterung von f ist) und H als die konstante Homotopie C_f wählen. Die H erweiternde Homotopie K von F nach G ist dann eine Homotopie rel J^n . ■

Mit den nun bereitgestellten Hilfsmitteln können wir die Abbildungen $\hat{\alpha}$ auch im n -dimensionalen Fall definieren:

Definition 3.27 Sei X ein topologischer Raum und seien x_0 und $x_1 \in X$. Sei $\alpha: I \rightarrow X$ ein Weg in X von x_0 nach x_1 . Sei n eine natürliche Zahl ≥ 1 .

Wir definieren eine Abbildung

$$\hat{\alpha}: \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

wie folgt.

Sei $\zeta \in \pi_n(X, x_1)$. Sei $w: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ eine n -Schleife mit $\zeta = [w]$. Definiere eine Abbildung $f: J^n \rightarrow X$ durch

$$f(t_1, \dots, t_{n+1}) := \begin{cases} w(t_1, \dots, t_n), & \text{wenn } t_{n+1} = 1; \\ \alpha(t_{n+1}), & \text{wenn } (t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Dies ist wohldefiniert, denn wenn $t_{n+1} = 1$ und $(t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n$, so ist $w(t_1, \dots, t_n) = x_1 = \alpha(t_{n+1})$. Offensichtlich ist f stetig.

Nach Lemma 3.26 lässt sich f erweitern zu einer stetigen Abbildung $F: I^{n+1} \rightarrow X$ und wir setzen $\bar{w} := F|_{I^n}$. Da $\partial I^n = I^n \cap J^n$, haben wir für $(t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n$, dass

$$\bar{w}(t_1, \dots, t_n) = F(t_1, \dots, t_n, 0) = f(t_1, \dots, t_n, 0) = \alpha(0) = x_0,$$

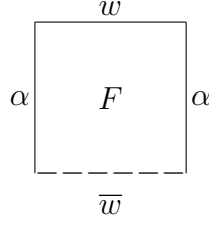
also ist $\bar{w} \in \Omega_n(X, x_0)$.

Wir definieren

$$\hat{\alpha}(\zeta) := [\bar{w}]$$

und müssen aber noch zeigen, dass dies eine Wohldefinition ist. Denn erstens hängt schon f von der Wahl von w in ζ ab, und zweitens ist zu einer gegebenen Schleife w auch \bar{w} nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von der Wahl der Erweiterung F von f ab.

Nehmen wir also einmal an, dass $v \in \Omega_n(X, x_1)$ eine andere n -Schleife ist mit $[v] = \zeta$. Sei $L: (I^n, \partial I^n) \times I \rightarrow (X, x_1)$ eine Homotopie von w nach v .

Abbildung 3.7: Die Konstruktion von $\hat{\alpha}([w])$.

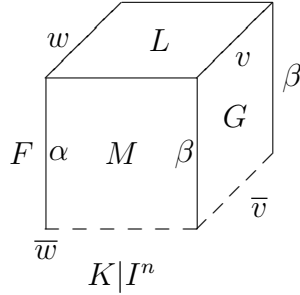
Wenn wir schon dabei sind, Daten zu variieren, sei auch $\beta: I \rightarrow X$ ein anderer Weg in X von x_0 nach x_1 , so dass $\alpha \simeq \beta$ mFE, und sei M eine Homotopie mit festen Endpunkten von α nach β .

Wir definieren nach Formel (3.3), aber mit v statt w und β statt α , eine Abbildung $g: J^n \rightarrow X$, und erweitern g unter Berufung auf Lemma 3.26 zu einer stetigen Abbildung $G: I^{n+1} \rightarrow X$. Setze $\bar{v} := G|I^n$.

Definiere eine Homotopie $H: J^n \times I \rightarrow X$ durch

$$H(t_1, \dots, t_{n+1}, t) := \begin{cases} L(t_1, \dots, t_n, t), & \text{wenn } t_{n+1} = 1; \\ M(t_{n+1}, t), & \text{wenn } (t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Dies ist wohldefiniert, denn wenn $t_{n+1} = 1$ und $(t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n$, so ist $L(t_1, \dots, t_n, t) = x_1 = M(t_{n+1}, t)$, und H ist stetig.

Abbildung 3.8: Die Konstruktion der Homotopie von \bar{w} zu \bar{v} .

Wenn man $t = 0$ in Gleichung (3.4) einsetzt, sieht man sofort, dass $H_0 = f$; wenn man $t = 1$ einsetzt, sieht man, dass $H_1 = g$. Nun besagt Lemma 3.26 c), dass es eine Homotopie $K: I^{n+1} \times I \rightarrow X$ von F zu G gibt, die H erweitert.

Dann ist $K|I^n \times I \longrightarrow X$ eine Homotopie von $F|I^n = \bar{w}$ zu $G|I^n = \bar{v}$. Und wenn $(t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n$, so ist $(t_1, \dots, t_n, 0) \in J^n$ und

$$K(t_1, \dots, t_n, t) = H(t_1, \dots, t_n, 0, t) = M(0, t) = x_0,$$

da M eine Homotopie von Wegen mit festen Endpunkten ist. D.h., K ist eine Homotopie mit festem Rand von n -Schleifen bei x_0 . Somit ist $[\bar{w}] = [\bar{v}] \in \pi_n(X, x_0)$.

In dem Spezialfall, wo $\beta = \alpha$, besagt dies, dass $\hat{\alpha}(\zeta) \in \pi_n(X, x_0)$ wohldefiniert ist und nicht von den verschiedenen willkürlichen Wahlen oben abhängt. Darüber hinaus haben wir aber auch gezeigt, dass $\hat{\alpha}(\zeta) = \hat{\beta}(\zeta)$, d.h., dass $\hat{\alpha}(\zeta)$ nur von der Homotopieklasse $[\alpha] \in \pi(x_0, x_1)$ abhängt.

Die Konstruktion aus Definition 3.27 kann man kurz und griffig wie folgt zusammenfassen:

Bemerkung 3.28 Sei X ein topologischer Raum und sei $\alpha: I \longrightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1 in X . Sei $n \geq 1 \in \mathbf{N}$.

Für jede Homotopie

$$F: I^{n+1} = I^n \times I \longrightarrow X,$$

so dass $F_t \in \Omega_n(X, \alpha(t))$ für jedes $t \in I$, ist

$$\hat{\alpha}([F_1]) = [F_0]$$

und für jede n -Schleife $w \in \Omega_n(X, x_1)$ gibt es eine solche Homotopie mit $F_1 = w$.

Mit dieser Bemerkung ist es nun sehr leicht, die Analoga zu den Aussagen von Lemma 3.10 für den n -dimensionalen Fall nachzuprüfen:

Lemma 3.29 Sei X ein topologischer Raum und seien x_0, x_1 und x_2 Punkte von X . Sei α ein Weg in X von x_0 nach x_1 und sei β ein Weg in X von x_1 nach x_2 . Sei $n \geq 1 \in \mathbf{N}$. Dann gilt:

a) $\hat{\alpha}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi_n(X, x_1) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$;

b) $\hat{\alpha}$ hängt nur von $[\alpha] \in \pi(x_0, x_1)$ ab;

c)

$$\widehat{\alpha * \beta} = (\hat{\alpha} \circ \hat{\beta}): \pi_n(X, x_2) \longrightarrow \pi_n(X, x_0);$$

d) $\widehat{c_{x_0}}$ ist die Identität von $\pi_n(X, x_0)$;

- e) $\hat{\alpha}$ ist ein Gruppenisomorphismus;
- f) Wenn Y ein zweiter topologischer Raum ist und $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x_1) = y_1 \in Y$, und wenn $\gamma = f \circ \alpha: I \longrightarrow Y$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, y_1) \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \hat{\gamma} \\ \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, y_0) \end{array}$$

- g) Für $n = 1$ ist $\hat{\alpha}$ (nach Definition 3.27) die gleiche Abbildung, die in Definition 3.10 definiert wurde.

Beweis. Zu a): Seien v und $w \in \Omega_n(X, x_1)$. Nach Bemerkung 3.28 gibt es Homotopien F und $G: I^n \times I \longrightarrow X$ mit $F_1 = v$ und $G_1 = w$, für die gilt, dass F_t und $G_t \in \Omega_n(X, \alpha(t))$ für jedes $t \in I$, und dann ist $\hat{\alpha}([v]) = [F_0]$ und $\hat{\alpha}([w]) = [G_0]$.

Da $n \geq 1$, können wir die Verkettung von F und G bezüglich der ersten Koordinate bilden, und sie ist tatsächlich definiert weil für jedes n -Tupel $(t_2, \dots, t_n, t) \in I^{n-1} \times I$ gilt

$$F(1, t_2, \dots, t_n, t) = \alpha(t) = G(0, t_2, \dots, t_n, t),$$

da F_t und G_t immer n -Schleifen an der gemeinsamen Stelle $\alpha(t)$ sind.

Wenn $H := F *_1 G$, so gilt für jedes $t \in I$, dass $H_t = F_t *_1 G_t$ eine n -Schleife bei $\alpha(t)$ ist, und insbesondere

$$[v] * [w] = [F_1] * [G_1] = [F_1 *_1 G_1] = [H_1].$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & * & w \\ \alpha \left[\begin{array}{cc|c} & & \\ & F & \alpha \\ & G & \\ \hline & & \end{array} \right] & & \alpha \\ \bar{v} & * & \bar{w} \end{array} \end{array}$$

Abbildung 3.9: $\hat{\alpha}$ ist ein Homomorphismus — die Homotopie H .

Nach Bemerkung 3.28 ist

$$\hat{\alpha}([v] * [w]) = \hat{\alpha}([H_1]) = [H_0] = [F_0 *_1 G_0] = [F_0] * [G_0] = \hat{\alpha}([v]) * \hat{\alpha}([w]).$$

b) wurde schon in Definition 3.27 nachgewiesen.

Zu c): Sei $w \in \Omega_n(X, x_2)$. Nach Bemerkung 3.28 gibt es Homotopien G und $F: I^n \times I \longrightarrow X$, so dass $G_t \in \Omega_n(X, \beta(t))$ und $F_t \in \Omega_n(X, \alpha(t))$ für jedes $t \in I$, und so dass $G_1 = w$ und $F_1 = G_0$.

Wegen dieser letzten Bedingung können wir die Homotopie $K := F * G$ oder genauer $F *_{n+1} G$ bilden, wie in Konstruktion 2.5 c), und offensichtlich gilt $K_t = (F * G)_t \in \Omega_n(X, (\alpha * \beta)(t))$ für jedes $t \in I$.

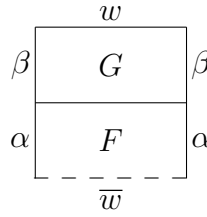


Abbildung 3.10: $\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}$ — die Homotopie K .

Nach Bemerkung 3.28 ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha * \beta}([w]) &= \widehat{\alpha * \beta}([G_1]) = \widehat{\alpha * \beta}([K_1]) = [K_0] \\ &= [F_0] = \hat{\alpha}([F_1]) = \hat{\alpha}([G_0]) = \hat{\alpha}(\hat{\beta}([w])). \end{aligned}$$

Zu d): Sei $w \in \Omega_n(X, x_0)$ und sei F die konstante Homotopie C_w (siehe Konstruktion 2.5 a)). Dann ist $F_t = w \in \Omega_n(X, x_0) = \Omega_n(X, c_{x_0}(t))$ für jedes $t \in I$ und somit ist

$$\widehat{c_{x_0}}([w]) = [F_0] = [w].$$

e) wird genauso bewiesen, wie Lemma 3.10 e).

Zu f): Sei $w \in \Omega_n(X, x_1)$. Dann ist $f_{\#}(w) = f \circ w \in \Omega_n(Y, y_1)$ und $\gamma = f \circ \alpha = f_{\#}(\alpha)$ ist ein Weg in Y von y_0 nach y_1 .

Nach Bemerkung 3.28 gibt es eine Homotopie $F: I^n \times I \longrightarrow X$ mit $F_1 = w$ und $F_t \in \Omega_n(X, \alpha(t))$ für jedes $t \in I$, und dann ist $\hat{\alpha}([w]) = [F_0]$.

Dann ist $G := f \circ F$ eine Homotopie in Y mit $G_1 = f \circ w = f_{\#}(w)$ und $G_t \in \Omega_n(Y, \gamma(t))$ für jedes $t \in I$, und nach Bemerkung 3.28 ist

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(f_{\#}([w])) &= \hat{\gamma}([f_{\#}(w)]) = \hat{\gamma}([G_1]) = [G_0] \\ &= [f_{\#}(F_0)] = f_{\#}([F_0]) = f_{\#}(\hat{\alpha}([w])). \end{aligned}$$

Zu g): Sei $w \in \Omega_1(X, x_1)$. Betrachte auf $I \times I$ die Homotopie

$$F(s, t) := \begin{cases} \alpha(4s + t), & \text{wenn } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{4}; \\ w(\frac{4s-1+t}{1+3t}), & \text{wenn } \frac{1-t}{4} \leq s \leq \frac{1+t}{2}; \\ \alpha(2 - 2s + t), & \text{wenn } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

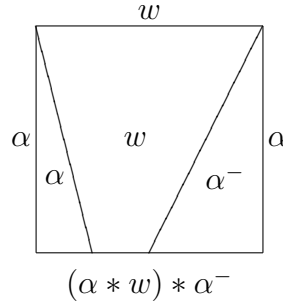


Abbildung 3.11: $\hat{\alpha}$ in Dimension $n = 1$.

Man prüft leicht nach, dass dies wohldefiniert und stetig ist, weil immer, wenn zwei Fälle zusammenfallen, beide Fälle den Wert $\alpha(1) = w(0) = w(1) = x_1$ liefern.

Für $s = 0$ oder $s = 1$, also für $s \in \partial I$, gilt $F(s, t) = \alpha(t)$. Wenn $t = 1$, so deckt der mittlere Fall das ganze Intervall $0 \leq s \leq 1$ ab und $F(s, 1) = w(s)$ für alle $s \in I$, d.h., $F_1 = w$.

Nach Definition 3.27 ist $\hat{\alpha}([w]) = [F_0]$. Und $F_0 = (\alpha * w) * \alpha^-$, so dass $[F_0] = [(\alpha * w) * \alpha^-]$ und dies stimmt mit $\hat{\alpha}([w])$ nach Definition 3.10 überein. ■

Mit dieser Verallgemeinerung von Lemma 3.10 auf die höheren Homotopiegruppen sind auch sofort die Konsequenzen aus Lemma 3.10 auf den höherdimensionalen Fall übertragbar:

Korollar 3.30 Sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum, sei Y ein topologischer Raum und seien f und g stetige Abbildungen $X \rightarrow Y$, die homotop sind in der Kategorie Top . Sei $y_0 = f(x)$ und $y_1 = g(x)$ und sei $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g .

Definiere einen Weg $\alpha: I \rightarrow Y$ von y_0 nach y_1 durch

$$\alpha(t) := H(x, t).$$

Dann kommutiert für jedes $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, y_0) \\ & \searrow g_* & \uparrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_n(Y, y_1) \end{array}$$

Beweis. Sei $w \in \Omega_n(X, x)$ und setze $F := H \circ (w \times \text{id}_I): I^n \times I \longrightarrow Y$, also

$$F(t_1, \dots, t_n, t) = H(w(t_1, \dots, t_n), t)$$

für alle $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$ und $t \in I$.

$$\begin{array}{ccc} & g \circ w & \\ \alpha \swarrow & \boxed{H \circ w} & \searrow \alpha \\ & f \circ w & \end{array}$$

Abbildung 3.12: $\hat{\alpha} \circ g_* = f_*$ — die Homotopie F .

Es gilt dann $F_t = H_t \circ w$ für jedes $t \in I$, und dies ist für jedes t eine n -Schleife in Y bei $H_t(x) = \alpha(t)$. Aus Bemerkung 3.28 folgt

$$\begin{aligned} f_*([w]) &= [f \circ w] = [H_0 \circ w] = [F_0] \\ &= \hat{\alpha}([F_1]) = \hat{\alpha}([H_1 \circ w]) = \hat{\alpha}([g \circ w]) = \hat{\alpha}(g_*([w])). \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt (viel leichter als in Lemma 3.11), dass $f_* = \hat{\alpha} \circ g_*$. ■

Korollar 3.31 Seien X und Y topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz in Top . Sei $x \in X$ und sei $y = f(x) \in Y$. Dann ist

$$f_*: \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, y)$$

ein Isomorphismus für jedes $n \geq 1$.

Beweis. Der Beweis geht wörtlich wie der Beweis von Korollar 3.12 (unter Verwendung von Korollar 3.30 statt Lemma 3.11). ■

Auch wenn $n > 1$ gibt es in einem Einpunktraum $\{*\}$ in jeder Dimension n genau eine n -Schleife bei X und $\pi_n(\{*\}, *)$ ist die triviale Gruppe. Aus Korollar 3.31 folgt genau wie im eindimensionalen Fall (Korollar 3.13):

Korollar 3.32 *Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum und sei $x \in X$. Dann ist $\pi_n(X, x)$ die triviale Gruppe für jedes $n \geq 1 \in \mathbb{N}$.*

Da wir bisher noch keine wirklich interessanten Homotopiegruppen kennen, ist das bisher nicht aufgefallen, aber es gibt einen wesentlichen Unterschied zwischen den höheren Homotopiegruppen und der Fundamentalgruppe: die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes kann eine beliebige, auch ganz wilde Gruppe sein, aber die höheren Homotopiegruppen sind etwas zahmer, denn sie sind immer abelsch:

Lemma 3.33 *Sei X ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Sei n eine natürliche Zahl. Wenn $n \geq 2$, dann ist $\pi_n(X, x)$ abelsch.*

Beweis. Seien v und $w: I^n \rightarrow X$ n -Schleifen bei x . Wir erinnern daran, dass wenn v' und $w' \in \Omega_n(X, x)$ und $v' \simeq v$ und $w' \simeq w$, dann ist $v' * w' \simeq v * w$.

Dies gilt *unabhängig davon, bezüglich welcher Koordinate die Verkettung gebildet wird*, da der Beweis aus Lemma 3.2 d) (vergleiche Bemerkung 3.19) gültig bleibt, wenn man vor oder hinter der Verkettungskordinate weitere, unveränderte Koordinaten mitführt. Auch alle anderen Homotopieeigenschaften von Verkettungen von Schleifen gelten für Verkettung bezüglich irgendeiner der vorhandenen Koordinaten, sofern diese Verkettung definiert ist.

Insbesondere, da wir jetzt mindestens zwei Koordinaten haben, können wir schreiben $v \simeq v *_2 c_x$ und $w \simeq c_x *_2 w$, und diese Verkettungen sind offensichtlich definiert. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} v * w &= v *_1 w \simeq (v *_2 c_x) *_1 (c_x *_2 w) \\ &= (v *_1 c_x) *_2 (c_x *_1 w) \simeq (c_x *_1 v) *_2 (w *_1 c_x) \\ &= (c_x *_2 w) *_1 (v *_2 c_x) \simeq w *_1 v = w * v. \end{aligned}$$

Also ist $[v] * [w] = [w] * [v] \in \pi_n(X, x)$.

Die Idee dieses Beweises besteht darin, v und w wie in Abbildung 3.13 durch homotope Schleifen zu ersetzen, so dass sie nicht mehr direkt aneinander stoßen, sondern nur an c_x , mit dem sie bis auf Homotopie $*$ -vertauschbar sind. ■

Nachdem wir zunächst nur die Fundamentalgruppe, also die Homotopiegruppe in Dimension 1, definiert hatten, haben wir nun für jedes $n \in \mathbb{N}$

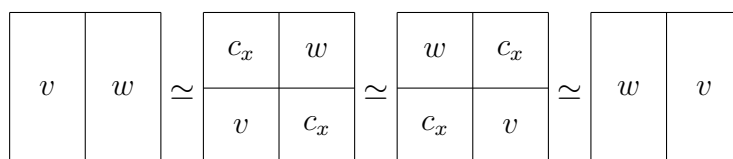


Abbildung 3.13: Der Beweis von Lemma 3.33 in Bildern.

Homotopiegruppen, zum Teil mit schönen Eigenschaften, da ab Dimension 2 die Homotopiegruppen abelsch sind. Aber auch für $n = 0$ ist $\pi_0(X, x)$ definiert, allerdings nur als Menge. Sie hat keine Gruppenstruktur, da wir in Dimension 0 *keine* Koordinate haben, bezüglich der wir verketteten könnten. In Bemerkung 3.17 hatten wir schon gesehen, dass $\pi_0(X, x)$ die Menge der Wegkomponenten von X ist.

Auch π_0 kann trivial sein, nämlich wenn es nur ein Element hat und X *wegzusammenhängend* ist. Das führt zu dem Gedanken, auch mit Hilfe der anderen Homotopiegruppen Verallgemeinerungen des Zusammenhangsbegriffs zu definieren.

Definition 3.34 Sei X ein topologischer Raum und sei $n \in \mathbf{N}$. Der Raum X heißt *n -zusammenhängend*, wenn für jedes $x \in X$ (oder für ein beliebiges $x \in X$, sofern X nichtleer ist) $\pi_q(X, x)$ trivial ist für alle $q \leq n$.

Bemerkung 3.35 Wenn X n -zusammenhängend ist, dann ist insbesondere $\pi_0(X, x)$ einelementig für jedes $x \in X$, was nichts anderes bedeutet, als dass X wegzusammenhängend ist. Also, 0-zusammenhängend ist *gleichbedeutend* mit wegzusammenhängend, n -zusammenhängend für $n \geq 1$ schließt wegzusammenhängend mit ein.

Das bedeutet aber auch, dass je zwei Punkte x und y von X durch einen Weg α verbunden werden können, und da $\hat{\alpha}$ in jeder Dimension ein Isomorphismus ist, ist $\pi_q(X, x)$ genau dann trivial, wenn $\pi_q(X, y)$ trivial ist. Deshalb reicht es, n -zusammenhängend für *einen* Basispunkt nachzuprüfen; wenn die Eigenschaft dort gilt, gilt sie für jeden Basispunkt.

Wichtig ist noch, sich bewusst zu sein, dass n -zusammenhängend nicht bedeutet, dass $\pi_n = \{1\}$; es müssen auch alle *kleinerdimensionalen* Homotopiegruppen oder Mengen trivial sein!

Besonders wichtig ist der Fall $n = 1$; deshalb bekommt er einen eigenen Namen:

Definition 3.36 Einen topologischen Raum X nennt man *einfach zusammen-*

menhängend, wenn er 1-zusammenhängend ist, d.h., wenn er wegzusammenhängend ist und die Fundamentalgruppe an jeder Stelle in X trivial ist.

Ein Grund, warum das eine wichtige Eigenschaft sein kann, besteht darin, dass es dann einen *festen* Isomorphismus zwischen den Homotopiegruppen an verschiedenen Basispunkten gibt. Im Allgemeinen sind zwar (in einem wegzusammenhängenden Raum) die Homotopiegruppen an verschiedenen Basispunkten zueinander isomorph, aber wir wissen das nur, weil wir je zwei Punkte durch einen Weg α verbinden können und $\hat{\alpha}$ ist ein Isomorphismus.

Dieser Isomorphismus kann aber sehr wohl von der Wahl von α abhängen; er ist nicht eindeutig bestimmt, und deshalb können wir auch nicht einfach die Basispunkte vergessen und die Homotopiegruppen an verschiedenen Stellen so miteinander identifizieren, dass wir auf irgendeine funktorielle Weise von der Gruppe „ $\pi_n(X)$ “ sprechen könnten. Wenigstens können wir das nicht *immer* tun, manchmal aber schon:

Definition 3.37 Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Wir sagen, X ist ***n-einfach***, wenn für je zwei Punkte x und y von X und für je zwei Wege α und β von x nach y gilt:

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}: \pi_n(X, y) \longrightarrow \pi_n(X, x),$$

d.h., wenn die Isomorphismen $\hat{\alpha}$ der n -ten Homotopiegruppen nur von den Endpunkten von α abhängen und nicht von der Wahl des Weges α zwischen diesen Endpunkten.

Hierfür gibt es ein Kriterium, das wir an jedem einzelnen Basispunkt nachprüfen können, ohne einen zweiten Basispunkt zu betrachten. Wir erinnern zunächst an den Begriff einer **Gruppenaktion** auf eine Menge:

Definition 3.38 Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine **Gruppenaktion** oder **Gruppenwirkung** oder **Operation** von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi: G \longrightarrow S(X), \tag{3.5}$$

wo $S(X)$ die *symmetrische Gruppe* von X ist, also die Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen von X , mit Verknüpfung als die Gruppenmultiplikation.

Diese Formulierung drückt auf kompakteste Weise die gewünschten Eigenschaften aus, aber oft beschreibt man die Gruppenaktion auch als die mit φ verbundene Abbildung

$$\begin{aligned} \mu: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto (\varphi(g))(x) \end{aligned}$$

für die man dann die Eigenschaften verlangt, die dem entsprechen, dass φ in (3.5) ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wir sagen, G **operiert** auf X , oder **wirkt** auf X , wenn eine Gruppenaktion von G auf X gegeben ist.

Wenn X nicht nur eine Menge ist, sondern zusätzliche Struktur hat, und wenn $\text{Bild}(\varphi) \subseteq S(X)$ aus Struktur erhaltenden bijektiven Abbildungen besteht (z.B., aus Isomorphismen der entsprechenden Kategorie), dann sagen wir, G **operiert durch** (Struktur erhaltenden Abbildungen). Zum Beispiel, wenn X selber eine Gruppe ist, kann G durch Automorphismen operieren, wenn X ein topologischer Raum ist, kann G durch Homöomorphismen operieren, usw.

Eine Gruppenwirkung von G auf X heißt **trivial**, wenn $\varphi(g) = \text{id}_X$ für jedes g in G .

Hier ist ein einfaches aber wichtiges Beispiel einer Gruppenaktion:

Definition 3.39 Sei G eine Gruppe und $a \in G$. Wir definieren eine Abbildung $\varphi_a: G \longrightarrow G$ durch

$$\varphi_a(g) := aga^{-1}$$

für alle $g \in G$.

Man prüft sehr leicht nach, dass φ_a ein Gruppenhomomorphismus ist, dass $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$, und dass $\varphi_e = \text{id}_G$ (wo e das neutrale Element von G bezeichnet). Daraus folgt sofort, dass $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \text{id}_G = \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a$, so dass die Homomorphismen φ_a alle *Automorphismen* von G sind.

Der Automorphismus φ_a heißt die **Konjugation mit a** , und die Gruppenautomorphismen der Form φ_a für ein geeignetes $a \in G$ heißen die **inneren Automorphismen** von G .

Man beachte, dass jede Gruppe G auf sich selber operiert durch innere Automorphismen, d.h., die Abbildung $\varphi: G \longrightarrow \text{Aut}(G)$ mit $\varphi(a) := \varphi_a$ für jedes $a \in G$ ist wegen der oben genannten Eigenschaften der φ_a ein Gruppenhomomorphismus und somit eine Gruppenwirkung von G auf G .

Bemerkung 3.40 Die Wirkung einer Gruppe G auf sich durch innere Automorphismen ist genau dann trivial, wenn G abelsch ist.

Denn für zwei Elemente a und g von G gilt $ag = ga$ genau dann, wenn $aga^{-1} = g$. Die Gruppe G ist abelsch genau dann, wenn die erste Bedingung für jedes a und $g \in G$ gilt, und G wirkt trivial auf sich durch innere Automorphismen genau dann, wenn die zweite Bedingung für jedes a und $g \in G$ gilt.

Lemma 3.41 Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei $n \geq 1 \in \mathbf{N}$. Dann wirkt $\pi_1(X, x)$ auf $\pi_n(X, x)$ durch Automorphismen, wobei die Gruppenwirkung φ gegeben ist durch

$$\varphi([\alpha]) = \hat{\alpha}$$

für jede 1-Schleife $\alpha \in \Omega_1(X, x)$.

Wenn $n = 1$, so ist diese Wirkung die Wirkung von $\pi_1(X, x)$ auf sich durch innere Automorphismen.

Beweis. Nach Lemma 3.29 e) ist $\hat{\alpha}$ für jeden Weg α von x nach x , also für jede 1-Schleife α bei x , ein Automorphismus von $\pi_n(X, x)$, und dieser Automorphismus hängt nur von $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ ab, so dass φ eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X, x) \longrightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, x))$ ist.

Lemma 3.29 c) besagt, dass φ ein Gruppenhomomorphismus von $\pi_1(X, x)$ nach $\text{Aut}(\pi_n(X, x))$ ist, also eine Gruppenwirkung von $\pi_1(X, x)$ auf $\pi_n(X, x)$ durch Automorphismen.

Lemma 3.29 g) besagt, dass im Fall $n = 1$ der Automorphismus $\hat{\alpha}$ gegeben ist durch die Konjugation mit dem Element $[\alpha]$ von $\pi_1(X, x)$. ■

Der durch die soeben definierte Gruppenaktion gegebene Spezialfall der Operationen $\hat{\alpha}$, für Wege α , die *Schleifen* an einem Punkt sind, reicht aus, um die Eigenschaft n -einfach zu charakterisieren.

Lemma 3.42 Sei X ein nichtleerer wegzusammenhängender topologischer Raum und sei $x \in X$. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Folgende Bedingungen sind zueinander äquivalent:

- a) X ist n -einfach;
- b) Die Wirkung von $\pi_1(X, x)$ auf $\pi_n(X, x)$ ist trivial;
- c) Für jedes $y \in X$ ist die Wirkung von $\pi_1(X, y)$ auf $\pi_n(X, y)$ trivial.

Beweis. a) \Rightarrow c): Sei y ein beliebiger Punkt von X . Wenn X ein n -einfacher Raum ist, dann hängt $\hat{\alpha}: \pi_n(X, y) \longrightarrow \pi_n(X, y)$ nicht von der Wahl von $\alpha \in \Omega(X, y)$ ab, also gilt für jede Schleife α bei y , dass

$$\hat{\alpha} = \hat{c}_y = \text{id}_{\pi_n(X, y)}$$

und die Wirkung von $\pi_1(X, y)$ auf $\pi_n(X, y)$ ist trivial.

c) \Rightarrow b) ist offensichtlich.

b) \Rightarrow a): Seien y und z beliebige zwei Punkte von X und seien α und β zwei Wege in X von x nach y . Sei γ ein Weg von x nach y und sei δ ein Weg

von z nach x . Dann sind $\nu := (\gamma * \alpha) * \delta$ und $\omega := (\gamma * \beta) * \delta$ zwei Schleifen bei x , und weil $\pi_1(X, x)$ trivial auf $\pi_n(X, x)$ wirkt, ist

$$\hat{\nu} = \text{id}_{\pi_n(X, x)} = \hat{\omega}.$$

Also haben wir

$$\hat{\gamma} \circ \hat{\alpha} \circ \hat{\delta} = \hat{\nu} = \hat{\omega} = \hat{\gamma} \circ \hat{\beta} \circ \hat{\delta}. \quad (3.6)$$

Aber $\hat{\gamma}: \pi_n(X, y) \longrightarrow \pi_n(X, x)$ und $\hat{\delta}: \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(X, z)$ sind Isomorphismen und somit umkehrbar, und deshalb in Gleichung (3.6) kürzbar. Also haben wir $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, was zu zeigen war. ■

Aus diesem Lemma folgen sofort folgende einfache Bedingungen dafür, dass ein Raum n -einfach ist:

Korollar 3.43 *Sei X ein nichtleerer wegzusammenhängender topologischer Raum und sei $x \in X$.*

- a) *Wenn X einfach zusammenhängend ist, dann ist X n -einfach für jedes $n \geq 1$.*
- b) *X ist genau dann 1-einfach, wenn $\pi_1(X, x)$ abelsch ist.*

Beweis. a): Wenn X einfach zusammenhängend ist, dann ist $\pi_1(X, x)$ die triviale Gruppe und kann nur trivial operieren.

b): $\pi_1(X, x)$ operiert auf sich durch innere Automorphismen, und nach Bemerkung 3.40 ist diese Wirkung genau dann trivial, wenn $\pi_1(X, x)$ abelsch ist. ■

Damit das in diesem Kapitel entwickelte Gerüst an Grundwissen über die Homotopiegruppen überhaupt einen interessanten Aufbau tragen kann, ist es höchste Zeit, dass wir uns mit der Berechnung von Homotopiegruppen befassen. Einfaches Werkzeug dazu entwickeln wir im nächsten Abschnitt.

Bevor wir aber diesen Abschnitt verlassen, sei es noch bemerkt, dass es neben der Fundamentalgruppe und den höheren Homotopiegruppen eines punktierten Raumes auch für punktierte *Raumpaare* (X, A, a) Homotopiemengen $\pi_n(X, A, a)$ gibt, die für $n \geq 2$ eine Gruppenstruktur tragen und die man die **relativen Homotopiegruppen** des punktierten Raumpaars (X, A, a) nennt. Wieder sind die Elemente dieser relativen Homotopiemengen oder Gruppen Homotopieklassen von Abbildungen auf n -Würfeln, aber diesmal handelt es sich um stetige Abbildungen

$$w: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, a),$$

die man *relative Schleifen* bei a nennt. Die Homotopieklassen sind jetzt in der Kategorie Top^3 zu verstehen, und die Gruppenmultiplikation in den relativen Homotopiegruppen wird wieder durch die Verkettung $*_1$ von relativen Schleifen bezüglich der ersten Koordinate induziert. Diese Verkettung ist für relative Schleifen allgemein definiert nur wenn $n \geq 2$ (denn in Dimension 1 bildet eine relative Schleife nur das rechte Ende des Intervalls I auf den Basispunkt ab).

Für diese relativen Homotopiegruppen gelten ähnliche Eigenschaften, wie für die absoluten Homotopiegruppen $\pi_n(X, x)$, die wir ausführlich besprochen haben, und es gibt eine schöne algebraische Verbindung zwischen den relativen Gruppen $\pi_n(X, A, a)$ und den absoluten Homotopiegruppen von X und von A an der Stelle a , aber auf die Details dieser Theorie wollen wir aus Zeitgründen hier nicht eingehen.

Kapitel 4

Überlagerungen

Obwohl die Berechnung von Homotopiegruppen im Allgemeinen sehr schwierig ist, gibt es einige gängige Hilfsmittel dafür, mit denen man für manche wichtige Räume die Homotopiegruppen oder zumindest die Fundamentalgruppe berechnen kann. In diesem Kapitel werden wir eines dieser Hilfsmittel entwickeln, das zwar einfach aber relativ leistungsfähig ist, und das Ideen verwendet, die sich als weit tragend herausstellen und auch an vielen anderen Stellen in der Mathematik benutzt werden können, um komplizierte geometrische Situationen zu untersuchen und etwas zu vereinfachen.

Der Grundgedanke dahinter lässt sich leicht erklären, wenn wir unsere Intuition ein bisschen bemühen. Ein Raum, von dem man sicher das Gefühl hat, dass er eine nichttriviale Fundamentalgruppe haben muss, ist der Kreis S^1 (oder die gelochte Ebene, die ja den gleichen Homotopietyp hat). Eine Schleife, die einmal den Kreis umläuft (oder die in der Ebene einmal das Loch umläuft), kann nicht durch eine Homotopie zusammengezogen werden zu einer konstanten Schleife, weil das Loch (oder das „Innere“ des Kreises) im Wege ist und man die Schleife, ohne sie zu zerreißen, nicht über diesen Leerraum hinwegziehen kann.

Entsprechendes gilt auch, wenn eine Schleife mehrmals um den Kreis oder um das Loch läuft; die Nettoanzahl der Umläufe lässt sich durch Homotopie nicht verändern, weil man sonst zumindest eine Schlaufe des Gesamtweges über das Loch ziehen müsste. Im Fall der gelochten Ebene, die man als die komplexe Zahlenebene \mathbf{C} auffassen kann, aus der ein Punkt z_0 entfernt wurde, können die komplexen Analytiker diese *Umlaufszahl* durch ein komplexes Integral berechnen, das nur ganzzahlige Werte annimmt und deshalb sich unter Homotopie auch nicht verändert. Daraus folgt, dass die Fundamentalgruppe der gelochten komplexen Zahlenebene mindestens so viele Elemente hat, wie es mögliche Umlaufszahlen gibt (also mindestens abzählbar unendlich viele).

Natürlich können wir komplexe Integrale in der Topologie nicht überall

anwenden, also müssen wir einen anderen Weg suchen, die „Umlaufszahl“ einer Schleife in einem allgemeinen topologischen Raum zu erfassen. Hier ist eine Idee dazu:

Man stelle sich etwa eine Schleife am Punkt $(1, 0)$ im Kreis S^1 vor, die sich um den Kreis hin- und herwindet aber netto den Kreis ein paarmal umwindet, und man stelle sich vor, dass man diese Schleife in Form eines Fadens auf den Kreis gelegt hat. An jeder Stelle des Kreises liegen einige Lagen des Fadens, aber diese verschmelzen miteinander in der Betrachtung, so dass man nicht erkennen kann, wie oft der Kreis umlaufen wird. Um das sehen und „mitzählen“ zu können, muss man den Faden an einer Stelle aufschneiden und irgendwie *abwickeln*, um die verschiedenen Durchgänge des Fadens voneinander zu trennen und sichtbar zu machen.

Es gibt eine ganz geniale Methode, um die „Fäden“ automatisch abzuwickeln und so zu präsentieren, dass man sofort sieht, wie viele Umläufe sie gemacht haben: man wickelt nicht die Schleifen ab, sondern den Raum, in dem sie liegen, in dem man ihn wie Blätterteig in mehrere Lagen aufschneidet und diese zu einer Art Wendeltreppe auseinanderzieht (wer einmal gesehen hat, wie in Bayern Rettiche zu einer Spirale aufgeschnitten werden, weiss genau, was hier gemeint ist).

Der Faden liegt jetzt nicht mehr in einer ebenen Lage, sondern auf dieser Wendeltreppe, und während er sich windet, läuft er auch auf und ab. Egal wie kompliziert seine Hin- und Herbewegungen sind, die Nettoanzahl der Umläufe ist sofort an dem Höhenunterschied zwischen den beiden Enden des Fadens zu erkennen. Eine Vorstellung davon, wie das aussehen könnte, erhält man aus Abbildung 4.1(b) unten.

Die Überlagerungstheorie, die wir in diesem Kapitel behandeln, ist die mathematische Realisierung dieses Gedankens zur Berechnung von Fundamentalgruppen.

Definition 4.1 Seien \tilde{X} und X topologische Räume und sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

- a) Sei $U \subseteq X$ offen. Wir sagen, U wird *gleichmäßig überlagert* durch p , wenn

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad (4.1)$$

wo Λ eine Indexmenge ist und die U_λ für $\lambda \in \Lambda$ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, so dass für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt:

$$p_\lambda := p|_{U_\lambda}: U_\lambda \rightarrow U$$

ist ein Homöomorphismus.

- b) Die Abbildung p heißt eine **Überlagerung**, wenn p surjektiv ist und wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, die durch p gleichmäßig überlagert wird.

Wenn $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung ist, nennt man \tilde{X} den **Totalraum** oder den **Überlagerungsraum** der Überlagerung und X heißt ihr **Basisraum**. Man nennt p die **Projektion** oder die **Überlagerungsabbildung**.

Für einen Punkt $x \in X$ nennt man

$$p^{-1}(\{x\}) = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

die **Faser** über x .

Für eine gleichmäßig überlagerte offene Menge $U \subseteq X$ nennt man die Teilmengen $U_\lambda \subseteq \tilde{X}$ aus (4.1) die **Blätter** über U . Die Anzahl der Blätter, also die Mächtigkeit der Indexmenge Λ , heißt die **Blätterzahl** der Überlagerung über U ; diese Zahl kann endlich oder unendlich sein. Ist n die Blätterzahl der Überlagerung p über U , so sagen wir auch, p ist eine **n -fache Überlagerung** über U .

Die Blätterzahl einer Überlagerung kann an verschiedenen Stellen variieren, aber nur zwischen verschiedenen Zusammenhangskomponenten des Basisraums; ist der Basisraum zusammenhängend, so ist die Blätterzahl eindeutig bestimmt (siehe dazu Bemerkung 4.2 d) und e) unten).

Abbildung 4.1 zeigt zwei Überlagerungen (die wir in Beispiel 4.3 näher beschreiben werden); in Abbildung 4.1(a) ist auch eine gleichmäßig überlagerte Umgebung gekennzeichnet.

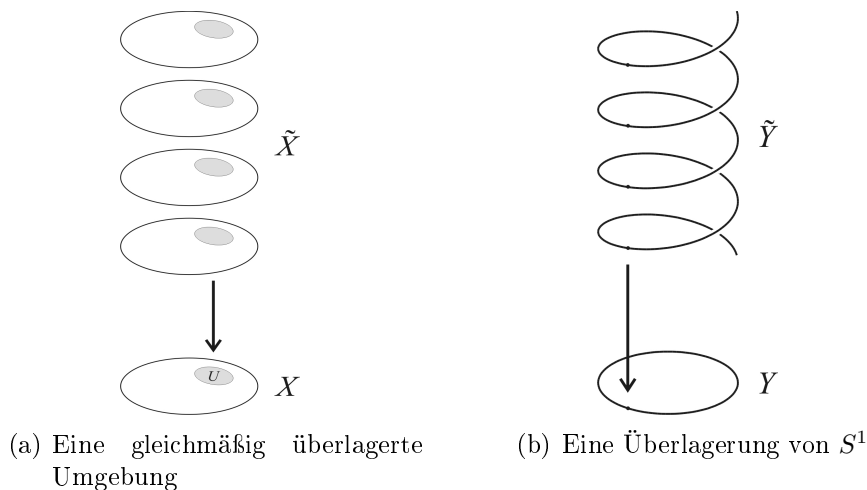


Abbildung 4.1: Überlagerungen.

Bemerkung 4.2 a) Es ist üblich (aber natürlich nicht zwingend), den Totalraum einer Überlagerung mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen, mit dem der Basisraum benannt wird, aber mit Schlange ($\tilde{}$) versehen als Unterscheidungsmerkmal für den Totalraum; diese Konvention haben wir auch in Definition 4.1 befolgt.

b) Jede Überlagerung $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ ist ein *lokaler Homöomorphismus*. Denn wenn $\tilde{x} \in \tilde{X}$, so hat $p(\tilde{x})$ eine offene Umgebung U in X , die gleichmäßig überlagert wird, und $\tilde{x} \in p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, wo die U_λ offen und disjunkt sind und jedes U_λ durch p homöomorph auf U abgebildet wird. Da \tilde{x} zu einem der Mengen U_{λ_0} gehört, ist U_{λ_0} eine offene Umgebung von \tilde{x} , auf der p ein Homöomorphismus auf ein offenes Bild ist.

c) Wenn $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung ist, dann trägt jede Faser

$$F_x := p^{-1}(\{x\})$$

von p als Unterraum von \tilde{X} die diskrete Topologie. Denn weil p ein lokaler Homöomorphismus ist, hat jeder Punkt $\tilde{x} \in F_x$ eine offene Umgebung U_λ , die keinen anderen Punkt der gleichen Faser enthält, so dass $\{\tilde{x}\} = U_\lambda \cap F_x$ offen in F_x ist.

d) Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung und U eine offene Umgebung in X , die gleichmäßig überlagert wird. Dann ist $p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, wo die U_λ offen und disjunkt sind und jedes U_λ durch p homöomorph auf U abgebildet wird. Das bedeutet, dass jedes $x \in U$ in jeder der Mengen U_λ *genau ein* Urbildpunkt unter p hat, so dass die Faser $p^{-1}(\{x\})$ die gleiche Mächtigkeit hat, wie Λ . In anderen Worten, die Faser von p über jeden Punkt von U hat so viele Punkte, wie die Blätterzahl über U . Insbesondere ist die Anzahl der Elemente der Fasern von p *lokal konstant*.

e) Hieraus folgt, dass wenn der Basisraum X einer Überlagerung zusammenhängend ist, dann ist die Mächtigkeit der Fasern *global* konstant und alle Fasern haben gleich viele Elemente (denn wenn es Fasern verschiedener Mächtigkeit gäbe, wäre X die Vereinigung mehrerer disjunkter nichtleerer offener Teilmengen, nämlich der Teilmengen von X , wo die Faser eine bestimmte der möglichen Mächtigkeiten hat).

Das impliziert mit d) auch, dass die Blätterzahl einer Überlagerung mit zusammenhängendem Basisraum konstant ist, und wir nennen diese wohldefinierte Zahl die **Blätterzahl der Überlagerung**. Ist diese

Zahl n , so nennen wir die Überlagerung insgesamt eine ***n-fache Überlagerung*** oder sagen, X wird ***n-fach überlagert*** von \tilde{X} (oder von p).

Damit wir uns eine Vorstellung von Überlagerungen machen können, zunächst zwei einfache Beispiele:

Beispiele 4.3 a) Sei X ein topologischer Raum und Λ eine beliebige nichtleere Menge. Wir versehen Λ mit der diskreten Topologie und machen so daraus einen topologischen Raum, und wir setzen $\tilde{X} := X \times \Lambda$ und nehmen als $p: \tilde{X} \rightarrow X$ die Projektion auf den ersten Faktor, die ja stetig und surjektiv ist (da $\Lambda \neq \emptyset$).

Die Mengen

$$X_\lambda := X \times \{\lambda\}$$

für $\lambda \in \Lambda$ sind offen in \tilde{X} (da $\{\lambda\}$ offen in Λ ist) und sie sind disjunkt, und $p_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ ist offensichtlich ein Homöomorphismus für jedes $\lambda \in \Lambda$, so dass ganz X von p gleichmäßig überlagert wird und p eine $|\Lambda|$ -blättrige Überlagerung von X ist.

Eine solche Überlagerung ist in Abbildung 4.1(a) zu sehen. Sie ist nicht besonders interessant, weil sie eigentlich keine neue geometrische Information über X liefert.

b) Sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und definiere $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ durch $p(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Diese Abbildung ist stetig und surjektiv.

Auf jedem Intervall $W_k := (\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+2)\pi}{2}) \subseteq \mathbf{R}$ (für $k \in \mathbf{Z}$) ist entweder die Cosinusfunktion (wenn k gerade ist) oder die Sinusfunktion (wenn k ungerade ist) streng monoton und differenzierbar mit nichtverschwindender Ableitung, und somit ein Diffeomorphismus auf das offene Intervall $(-1, 1)$, so dass eine differenzierbare Umkehrfunktion \arccos oder $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow W_k$ existiert. Die andere der beiden Funktionen \sin und \cos nimmt auf W_k nur positive oder nur negative Werte an.

Da eine Koordinate von p dort eine differenzierbare Umkehrfunktion hat, ist p auf jedem Intervall $V_k := \frac{1}{2\pi} W_k = (\frac{k}{4}, \frac{k+2}{4}) \subseteq \mathbf{R}$ ein Diffeomorphismus (also auch ein Homöomorphismus) auf eine offene Teilmenge U von S^1 , die je nach der Restklasse von k mod 4 entweder der obere, der linke, der untere oder der rechte offene Halbkreis ist.

Die Abbildung p ist bekanntlich 1-periodisch, d.h., $p(s) = p(t)$ genau

dann, wenn $s - t$ eine ganze Zahl ist. Somit ist

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{l \in \mathbf{Z}} V_{k+4l},$$

und die Mengen V_{k+4l} (für festes k) sind disjunkte offene Teilmengen von \mathbf{R} , die von p homöomorph auf U abgebildet werden. D.h., jede der genannten offenen Halbkreise wird gleichmäßig überlagert von p . Da jeder Punkt von S^1 in mindestens einem der genannten Halbkreise liegt, ist p eine Überlagerung.

Abbildung 4.1(b) zeigt diese Überlagerung, und man sieht auch in dem Bild, dass die genannten Halbkreise (oder eigentlich jede offene echte Teilmenge von S^1) gleichmäßig überlagert werden. Die Schraubenlinie \tilde{Y} in dem Bild ist offensichtlich homöomorph zu \mathbf{R} (die Projektion auf die senkrechte Achse ist ein Homöomorphismus, oder man denke sich die Schraubenlinie einfach gerade gezogen).

Diese Überlagerung ist im Gegensatz zu a) nicht trivial, denn \mathbf{R} ist zusammenhängend aber nicht kompakt, und ist somit auch kein Produkt von S^1 mit einem diskreten Raum (auch nicht mit einem einelementigen diskreten Raum, da dann das Produkt kompakt wäre).

Hier noch ein paar einfache Methoden, um aus bekannten Überlagerungen neue zu gewinnen:

Lemma und Definition 4.4 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $A \subseteq X$ ein topologischer Unterraum von X . Wir setzen $\tilde{A} := p^{-1}(A) \subseteq \tilde{X}$. Dann ist $p|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$ auch eine Überlagerung.

Wir nennen diese Überlagerung die **Einschränkung von p auf A** und bezeichnen sie mit $p|_A$ (obwohl ihre Projektion die Einschränkung der Abbildung p auf \tilde{A} und nicht auf A ist!).

Beweis. Sei $a \in A$. Dann hat a in X eine offene Umgebung U , die von p gleichmäßig überlagert wird, so dass

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

wo die U_λ für $\lambda \in \Lambda$ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, die von p homöomorph auf U abgebildet werden.

Sei $V := U \cap A$; dies ist eine offene Umgebung von a in A . Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $V_\lambda = U_\lambda \cap \tilde{A}$; die V_λ sind offene Teilmengen von \tilde{A} , sie sind disjunkt weil

$V_\lambda \subseteq U_\lambda$ und die U_λ disjunkt sind, und wir haben

$$\begin{aligned}
 (p|\tilde{A})^{-1}(V) &= p^{-1}(V) && (\text{weil } \tilde{A} = p^{-1}(A) \text{ und } V \subseteq A) \\
 &= p^{-1}(U \cap A) \\
 &= p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A) \\
 &= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \cap \tilde{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap \tilde{A}) \\
 &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.
 \end{aligned}$$

Sei $p_\lambda = p|_{U_\lambda}$ und sei $q_\lambda: U \rightarrow U_\lambda$ die Umkehrabbildung des Homöomorphismus $p_\lambda: U_\lambda \rightarrow U$.

Wir haben

$$V_\lambda = U_\lambda \cap p^{-1}(A) = p_\lambda^{-1}(A) = p_\lambda^{-1}(U \cap A) = p_\lambda^{-1}(V).$$

Hier bedeutet $p_\lambda^{-1}(V)$ zunächst das Urbild von V unter p_λ , aber weil p_λ ein Homöomorphismus von U_λ auf U ist mit Umkehrabbildung q_λ , gilt auch $V_\lambda = p_\lambda^{-1}(V) = q_\lambda(V)$.

Somit ist $p_\lambda|_{V_\lambda}$ eine stetige Abbildung $V_\lambda \rightarrow V$ und $q_\lambda|_V$ ist eine stetige Abbildung $V \rightarrow V_\lambda$, und beide Abbildungen sind Umkehrabbildungen zueinander (d.h., die Verknüpfung in beiden möglichen Reihenfolgen ist jeweils die Identität), weil dies schon für p_λ und q_λ gilt.

Also ist $(p|\tilde{A})|_{V_\lambda} = p_\lambda|_{V_\lambda}$ ein Homöomorphismus $V_\lambda \rightarrow V$.

Damit ist gezeigt, dass V von $p|\tilde{A}$ gleichmäßig überlagert wird.

Also hat jeder Punkt $a \in A$ eine von $p|\tilde{A}$ gleichmäßig überlagerte Umgebung, und $p|\tilde{A}$ ist eine Überlagerung. ■

Lemma 4.5 Seien $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$ Überlagerungen. Dann ist

$$\begin{aligned}
 p \times q: \tilde{X} \times \tilde{Y} &\rightarrow X \times Y \\
 (\tilde{x}, \tilde{y}) &\mapsto (p(\tilde{x}), q(\tilde{y}))
 \end{aligned}$$

eine Überlagerung.

Beweis. Sei $(x, y) \in X \times Y$ (also $x \in X$ und $y \in Y$). Weil p und q Überlagerungen sind, gibt es eine offene Umgebung U von x in X , die von p gleichmäßig überlagert wird, und es gibt eine offene Umgebung V von y in Y , die von q gleichmäßig überlagert wird.

Wir haben also

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad \text{und} \quad q^{-1}(V) = \bigcup_{\mu \in M} V_\mu,$$

wo die U_λ für $\lambda \in \Lambda$ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, die von p homöomorph auf U abgebildet werden, und wo die V_μ für $\mu \in M$ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{Y} sind, die von q homöomorph auf V abgebildet werden.

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $p_\lambda = p|_{U_\lambda}$ und sei $p_\lambda^{-1}: U \rightarrow U_\lambda$ die Umkehrabbildung des Homöomorphismus $p_\lambda: U_\lambda \rightarrow U$. Entsprechend, für jedes $\mu \in M$ sei $q_\mu = q|_{V_\mu}$ und sei $q_\mu^{-1}: V \rightarrow V_\mu$ die Umkehrabbildung des Homöomorphismus $q_\mu: V_\mu \rightarrow V$.

Für jedes $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ sind dann

$$p_\lambda \times q_\mu: U_\lambda \times V_\mu \rightarrow U \times V \quad \text{und} \quad p_\lambda^{-1} \times q_\mu^{-1}: U \times V \rightarrow U_\lambda \times V_\mu$$

stetige Abbildungen, und man rechnet sofort nach, dass sie Umkehrabbildungen zueinander und somit Homöomorphismen sind.

Offenbar ist

$$(p \times q)^{-1}(U \times V) = p^{-1}(U) \times q^{-1}(V) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) \times \left(\bigcup_{\mu \in M} V_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} U_\lambda \times V_\mu,$$

wobei die $U_\lambda \times V_\mu$ offen sind in $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ und disjunkt sind weil die U_λ für verschiedene λ disjunkt sind und die V_μ für verschiedene μ disjunkt sind.

Wie wir schon gesehen haben, sind die Einschränkungen

$$(p \times q)|(U_\lambda \times V_\mu) = p|_{U_\lambda} \times q|_{V_\mu} = p_\lambda \times q_\mu: U_\lambda \times V_\mu \rightarrow U \times V$$

Homöomorphismen.

Das bedeutet, dass $U \times V$ von $p \times q$ gleichmäßig überlagert wird, und $U \times V$ ist eine offene Umgebung von (x, y) in der Produkttopologie auf $X \times Y$. Da also jedes $(x, y) \in X \times Y$ eine gleichmäßig überlagerte offene Umgebung hat, ist $p \times q$ eine Überlagerung. ■

Beispiel 4.6 Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir nennen

$$T^n := (S^1)^n := \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$$

den ***n-dimensionalen Torus***.

Zwecks Vereinfachung der Notation fassen wir jetzt S^1 als den Einheitskreis in \mathbf{C} auf; die Überlagerung $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ aus Beispiel 4.3 b) hat dann die Form $p(t) := e^{2\pi i t}$.

Aus Lemma 4.5 folgt, dass

$$p^n = \underbrace{p \times \cdots \times p}_n: \mathbf{R}^n \rightarrow T^n$$

mit $p^n(t_1, \dots, t_n) = (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$ eine Überlagerung ist.

Wir wollen jetzt damit beginnen, die Eigenschaften von Überlagerungen zu entwickeln, die sie für uns so nützlich machen werden. Diese Eigenschaften beziehen sich hauptsächlich auf das Problem, eine stetige Abbildung von einem anderen Raum in den Basisraum einer Überlagerung „hochzuheben“ in den Totalraum, in folgendem Sinne:

Definition 4.7 Seien E und B topologische Räume und sei $p: E \rightarrow B$ eine surjektive stetige Abbildung (z.B. eine Überlagerung).

Sei Y ein topologischer Raum und $f: Y \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Eine **Hochhebung** oder **Liftung** von f bezüglich p ist eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow E$, so dass $p \circ g = f$, in anderen Worten, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Wir werden bald Hochhebungen von Abbildungen in den Basisraum einer Überlagerung konstruieren, aber viel einfacher ist es, Sätze zu gewinnen über die *Eindeutigkeit* solcher Liftungen:

Lemma 4.8 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei Y ein zusammenhängender topologischer Raum und sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Seien g_1 und $g_2: Y \rightarrow \tilde{X}$ zwei Hochhebungen von f .

Wenn es ein $y_0 \in Y$ gibt mit $g_1(y_0) = g_2(y_0)$, dann ist $g_1 = g_2$.

(In anderen Worten, eine Hochhebung einer stetigen Abbildung von einem zusammenhängenden Raum nach X ist durch die Festlegung eines seiner Werte schon eindeutig bestimmt.)

Beweis. Sei $y \in Y$ beliebig und sei $x = f(y) \in X$. Sei U eine gleichmäßig überlagerte offene Umgebung von x und schreibe

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

wo die U_λ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, die von $p_\lambda = p|_{U_\lambda}$ homöomorph auf U abgebildet werden.

Dann gibt es λ_1 und $\lambda_2 \in \Lambda$ mit $g_1(y) \in U_{\lambda_1}$ und $g_2(y) \in U_{\lambda_2}$. Da die g_i stetig sind, gibt es eine offene Umgebung V von y , so dass $g_i(V) \subseteq U_{\lambda_i}$ für $i = 1$ und 2 , und somit ist

$$g_i|_V = p_{\lambda_i}^{-1} \circ f. \quad (4.2)$$

Wenn $g_1(y) = g_2(y)$, so ist $\lambda_1 = \lambda_2$, da die U_λ disjunkt sind, und somit ist $g_1 = g_2$ auf ganz V nach (4.2). Wenn $g_1(y) \neq g_2(y)$, so ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und dann ist $g_1(z) \neq g_2(z)$ für jedes $z \in V$, da U_{λ_1} und U_{λ_2} disjunkt sind.

Sowohl $\{y \in Y \mid g_1(y) = g_2(y)\}$ wie auch $\{y \in Y \mid g_1(y) \neq g_2(y)\}$ sind somit offen in Y (ein Punkt, der zu einer dieser Mengen gehört, hat eine offene Umgebung, die in der gleichen Menge enthalten ist). Da Y zusammenhängend ist, ist eine dieser offenen Mengen leer und die andere ist ganz Y .

Wenn g_1 und g_2 auch nur an einem Punkt übereinstimmen, ist die erste Menge oben nichtleer, also ganz Y , und g_1 und g_2 sind überall gleich. ■

Korollar 4.9 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung, sei Y ein zusammenhängender topologischer Raum und sei $c: Y \longrightarrow X$ eine konstante Abbildung. Dann ist jede Hochhebung \tilde{c} von c auch konstant.

Beweis. Der Fall $Y = \emptyset$ ist trivial, so dass wir annehmen können, $Y \neq \emptyset$. Sei $y_0 \in Y$ und sei $x = c(y_0) \in X$. Dann ist $c(y) = x$ für alle $y \in Y$. Sei $\tilde{x} = \tilde{c}(y_0) \in \tilde{X}$. Es gilt $p(\tilde{x}) = p(\tilde{c}(y_0)) = c(y_0) = x$ und somit ist die konstante Abbildung $c_{\tilde{x}}$ mit $c_{\tilde{x}}(y) := \tilde{x}$ für alle $y \in Y$ offensichtlich eine Hochhebung von c . Weil c nach Lemma 4.8 aber nur eine Hochhebung haben kann, die bei y_0 den Wert \tilde{x} annimmt, ist $\tilde{c} = c_{\tilde{x}}$ und somit konstant. ■

Um die Existenz von Hochhebungen unter geeigneten Voraussetzungen nachweisen zu können, brauchen wir einen Hilfssatz, der zunächst nur den Spezialfall von Abbildungen definiert auf I^2 behandelt. Warum reicht es, ausgerechnet diesen Raum zu betrachten? Weil I^2 der Definitionsbereich einer *Homotopie von Wegen* ist!

Lemma 4.10 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung und sei $f: I^2 \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung.

Sei $x_0 = f(0, 0)$ und sei $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung $g: I^2 \longrightarrow \tilde{X}$ von f mit $g(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Beweis. Da p eine Überlagerung ist, gibt es eine Überdeckung \mathcal{U} von X durch offene Mengen U , die durch p gleichmäßig überlagert werden. Wegen der Stetigkeit von f ist

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

eine offene Überdeckung von I^2 .

\mathbf{R}^2 ist ein normierter Vektorraum und seine Standardtopologie (und die von seinem Unterraum I^2) wird insbesondere von der Metrik der *Maximums-norm* $\| \cdot \|_\infty$ mit

$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|),$$

definiert, die wir im Folgenden verwenden.

Weil I^2 kompakt ist, besitzt die Überdeckung $f^{-1}(\mathcal{U})$ eine Lebesgue-Zahl bezüglich der Maximumsmetrik — also eine Zahl ε , so dass in dieser Metrik jede offene Scheibe von Radius $< \varepsilon$ ganz in einer der Überdeckungsmengen $f^{-1}(U)$ enthalten ist.

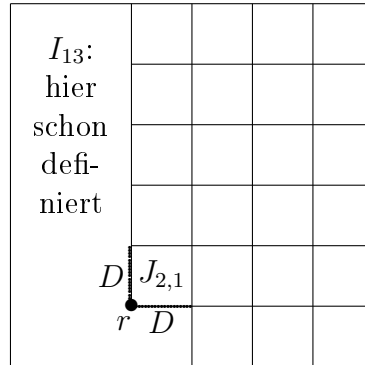
Sei N eine natürliche Zahl so groß, dass $\frac{1}{2N} < \varepsilon$. Wir zerlegen I^2 in die N^2 kleinen Quadrate

$$J_{i,j} := \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right] \quad \text{für } 0 \leq i < N, 0 \leq j < N,$$

von denen jedes Seitenlänge $\frac{1}{N}$ hat. In der Maximumsmetrik sind diese Quadrate Scheiben von Radius $< \varepsilon$ und deshalb liegt jedes dieser kleinen Quadrate ganz in einer Menge aus $f^{-1}(\mathcal{U})$. In Abbildung 4.2(a) ist eine solche Unterteilung mit $N = 6$ zu sehen.

$J_{0,5}$	$J_{1,5}$	$J_{2,5}$	$J_{3,5}$	$J_{4,5}$	$J_{5,5}$
$J_{0,4}$	$J_{1,4}$	$J_{2,4}$	$J_{3,4}$	$J_{4,4}$	$J_{5,4}$
$J_{0,3}$	$J_{1,3}$	$J_{2,3}$	$J_{3,3}$	$J_{4,3}$	$J_{5,3}$
$J_{0,2}$	$J_{1,2}$	$J_{2,2}$	$J_{3,2}$	$J_{4,2}$	$J_{5,2}$
$J_{0,1}$	$J_{1,1}$	$J_{2,1}$	$J_{3,1}$	$J_{4,1}$	$J_{5,1}$
$J_{0,0}$	$J_{1,0}$	$J_{2,0}$	$J_{3,0}$	$J_{4,0}$	$J_{5,0}$

(a) Die Zerlegung von I^2 in kleine Quadrate.



(b) Wie g von I_k nach I_{k+1} erweitert wird.

Abbildung 4.2: Schrittweise Konstruktion einer Hochhebung.

Sei $I_0 := \{(0, 0)\}$ und für $1 \leq k \leq N^2$ sei I_k die Vereinigung der ersten k kleinen Quadrate $J_{i,j}$ in der Reihenfolge der lexikographischen Ordnung der Indexpaare (i, j) (bei der Abzählung beginnen wir links unten, zählen in jeder Spalte von unten nach oben, und am Ende der Spalte setzen wir die Zählung am unteren Ende der nächsten Spalte nach rechts fort).

Wir konstruieren durch Induktion über k auf jedem I_k eine Hochhebung g_k von f mit $g_k(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Auf I_0 definieren wir $g_0(0,0) := \tilde{x}_0$; das ist der Induktionsanfang. Wir haben g_0 so definiert, dass es den gewünschten Wert bei $(0,0)$ annimmt.

Wenn $k < N^2$ und wenn g_k schon definiert ist, so sei $J_{i,j}$ das $k+1$ -te kleine Quadrat, und sei U eine Menge aus der Überdeckung \mathcal{U} mit $J_{i,j} \subseteq f^{-1}(U)$, oder in anderen Worten mit $f(J_{i,j}) \subseteq U$. Schreibe

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

wo die U_λ disjunkte offene Teilmengen von \tilde{X} sind, die von $p_\lambda = p|_{U_\lambda}$ homöomorph auf U abgebildet werden.

Sei $r = (\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$ der Punkt an der linken unteren Ecke von $J_{i,j}$. Der Durchschnitt

$$D := J_{i,j} \cap I_k$$

besteht aus dem Punkt $(0,0)$, wenn $k = 0$, aus der unteren Seite von $J_{i,j}$, wenn $i = 0$ aber $j > 0$, aus der linken Seite von $J_{i,j}$, wenn $i > 0$ und $j = 0$, und aus der Vereinigung der linken und unteren Seite von $J_{i,j}$, wenn $i > 0$ und $j > 0$ (siehe Abbildung 4.2(b), wo der Fall $N = 6$, $k = 13$, $i = 2$ und $j = 1$ gezeigt wird).

Auf jeden Fall ist $r \in D$ und D ist eine wegzusammenhängende und somit zusammenhängende Menge.

Da $r \in I_k$, ist $g_k(r)$ definiert, und es gibt somit einen Index μ aus Λ mit $g_k(r) \in U_\mu$. Auf $I_{k+1} = I_k \cup J_{i,j}$ definieren wir g_{k+1} durch

$$g_{k+1}(y) = \begin{cases} g_k(y), & \text{wenn } y \in I_k; \\ p_\mu^{-1}(f(y)), & \text{wenn } y \in J_{i,j} \end{cases} \quad (4.3)$$

(der Ausdruck im zweiten Fall ist tatsächlich definiert weil $f(J_{i,j}) \subseteq U$).

Beide Fälle liefern auf ihrem Definitionsbereich eine Hochhebung von f , im zweiten Fall offensichtlich nach Konstruktion, und im ersten Fall auf Grund der Induktionsannahme. Nach Definition ist D die Menge der Stellen in I_{k+1} , wo beide Fälle anwendbar sind, und damit g_{k+1} wohldefiniert ist müssen beide Fälle auf D die gleiche Abbildung liefern.

Der Index μ wurde so gewählt, dass beide Fälle in (4.3) an der Stelle r übereinstimmen. Auf D liefern beide Fälle also zwei Hochhebungen von f , die an der Stelle r den gleichen Wert annehmen. Nach dem Eindeutigkeitsatz Lemma 4.8 sind diese Hochhebungen überall auf D gleich und somit definiert (4.3) eine wohldefinierte Abbildung auf I_{k+1} , die stetig ist, weil jeder einzelne Fall eine stetige Abbildung bestimmt und weil I_k und $J_{i,j}$ als Vereinigungen von endlich vielen abgeschlossenen Quadraten abgeschlossen in I_{k+1} sind. Wir haben schon gesehen, dass g_{k+1} überall auf I_{k+1} eine Hochhebung von f

ist. Und g_{k+1} nimmt bei $(0, 0)$ den gewünschten Wert \tilde{x}_0 an, weil $(0, 0)$ in I_k liegt und nach Induktionsannahme $g_k(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen. Die Induktion ist fortsetzbar bis $k = N^2$ und dann erhalten wir eine Hochhebung $g = g_{N^2}$ von f auf $I_{N^2} = I^2$, mit dem gewünschten Wert bei $(0, 0)$. Die Eindeutigkeit der Liftung folgt sofort aus Lemma 4.8, denn I^2 ist ja zusammenhängend. ■

Korollar 4.11 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung und sei $w: I \longrightarrow X$ ein Weg in X , der bei x_0 beginnt (also $w(0) = x_0$).

Sei $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung

$$\tilde{w}: I \longrightarrow \tilde{X}$$

von w mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$.

Beweis. Sei $C_w: I^2 = I \times I \longrightarrow X$ die konstante Homotopie $C_w(s, t) := w(s)$ für alle $s, t \in I$. Nach Lemma 4.10 besitzt C_w bezüglich p eine eindeutige Hochhebung H mit $H(0, 0) = \tilde{x}_0$. Definiere

$$\tilde{w}(s) := H(s, 0).$$

Dies ist eine Hochhebung von $(C_w)_0 = w$ mit $\tilde{w}(0) = H(0, 0) = \tilde{x}_0$. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 4.8. ■

Aus diesen einfachen Spezialfällen werden wir bald einen allgemeinen Satz über die Existenz von Hochhebungen herleiten. Zu dessen Formulierung müssen wir kurz an eine Definition aus der mengentheoretischen Topologie erinnern:

Definition 4.12 Sei X ein topologischer Raum. X heißt **lokal wegweise zusammenhängend**, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und für jede Umgebung U von x eine wegweise zusammenhängende Umgebung V von x existiert mit $V \subseteq U$.

Bemerkung 4.13 Wenn X ein lokal wegweise zusammenhängender topologischer Raum ist, und wenn U eine Umgebung von $x \in X$ ist, dann findet man sogar eine *offene* Umgebung V von x mit $V \subseteq U$.

Denn sei U' eine offene Menge von X mit $x \in U' \subseteq U$. Definition 4.12 impliziert offenbar, dass jede Wegkomponente V' von U' offen ist, denn wenn $y \in V'$, so hat y eine wegzusammenhängende Umgebung W mit $W \subseteq U'$. Da W ganz enthalten ist in der Wegkomponente von y in U' und diese nach

Wahl von y gleich V' ist, ist V' eine Obermenge einer Umgebung von y und somit selber eine Umgebung von y . Das gilt für jedes $y \in V'$, also ist V' offen.

Insbesondere ist die Wegkomponente V von x in U' eine wegzusammenhängende *offene* Umgebung von x mit $V \subseteq U' \subseteq U$.

Bemerkung 4.14 Die Begriffe *lokal wegzusammenhängend* und *wegweise zusammenhängend* sind unabhängig voneinander. Ein nicht wegzusammenhängender Raum kann trotzdem lokal wegzusammenhängend sein (jeder diskrete Raum mit mehr als einem Punkt hat diese Eigenschaft), und ein Raum kann wegzusammenhängend sein, ohne lokal wegzusammenhängend zu sein (der Kammraum aus Übungsaufgabe 3-4 ist ein Beispiel — der Punkt $(0,1)$, der ein Häufungspunkt der Menge der Spitzen der Kammzacken ist, hat in diesem Raum keine wegzusammenhängende Umgebung, die nicht den ganzen Zacken enthält, in dem $(0,1)$ liegt).

Wir brauchen noch einen kleinen Hilfssatz.

Lemma 4.15 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $x_0 \in X$, und sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei $w \in \Omega(X, x_0)$ eine Schleife in X bei x_0 . Nach Korollar 4.11 besitzt der Weg w eine eindeutige Hochhebung zu einem Weg \tilde{w} in \tilde{X} mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$.

Vorsicht! Im Allgemeinen ist \tilde{w} nur ein Weg in \tilde{X} , aber nicht unbedingt ein geschlossener Weg, also eine Schleife! Es gilt nämlich:

Genau dann ist $\tilde{w} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, wenn

$$[w] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0).$$

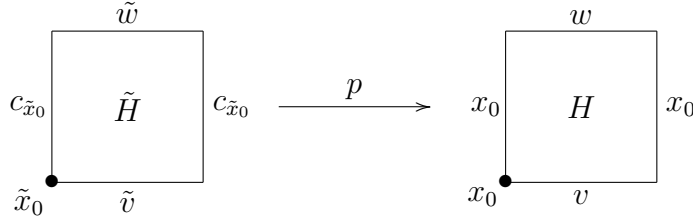
In anderen Worten, \tilde{w} ist genau dann eine Schleife, wenn die Homotopieklasse von w , die ein Element der Fundamentalgruppe von X bei x_0 ist, im Bild der Fundamentalgruppe von \tilde{X} bei \tilde{x}_0 unter dem Homomorphismus p_* liegt.

Beweis. Wir haben $w = p \circ \tilde{w}$. Wenn $\tilde{w} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, so ist

$$[w] = [p_*(\tilde{w})] = p_*([\tilde{w}]) \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0).$$

Umgekehrt, wenn $[w] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, so finden wir eine Schleife $\tilde{v} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $[w] = p_*([\tilde{v}]) = [p \circ \tilde{v}]$, also, so dass w homotop ist (aber nicht unbedingt gleich ist) zur Schleife $v := p \circ \tilde{v}$.

Sei $H: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie mit festen Endpunkten von $H_0 = v$ zu $H_1 = w$; dann ist insbesondere $H(0,0) = x_0$. Nach Lemma 4.10 besitzt H eine eindeutige stetige Hochhebung $\tilde{H}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$.

Abbildung 4.3: Warum \tilde{w} eine Schleife ist.

Bisher kennen wir nur diesen einen Wert von \tilde{H} , aber mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage aus Korollar 4.11 können wir nach und nach die Werte von \tilde{H} auf ∂I^2 bestimmen, um schließlich festzustellen, dass an allen Ecken des Quadrats der Wert \tilde{x}_0 angenommen wird, so dass \tilde{w} tatsächlich eine Schleife bei \tilde{x}_0 ist. Die einzelnen Schritte kann man leicht in Abbildung 4.3 verfolgen.

Sowohl \tilde{H}_0 wie auch \tilde{v} sind Hochhebungen von $H_0 = v$, die beim gleichen Punkt \tilde{x}_0 beginnen. Nach der Eindeutigkeitsaussage von Korollar 4.11 sind sie gleich, und insbesondere ist $\tilde{H}(1, 0) = \tilde{v}(1) = \tilde{x}_0$.

Da H eine Homotopie mit festen Endpunkten ist, sind die Wege $t \mapsto \tilde{H}(0, t)$ und $t \mapsto \tilde{H}(1, t)$ Hochhebungen von c_{x_0} , und beide beginnen bei $\tilde{x}_0 = \tilde{H}(0, 0) = \tilde{H}(1, 0)$. Nach Korollar 4.9 ist eine Hochhebung eines konstanten Weges wieder konstant, also ist

$$H(0, t) = H(1, t) = \tilde{x}_0$$

für jedes $t \in I$.

Es folgt, dass \tilde{H}_1 eine Schleife bei \tilde{x}_0 ist. Aber \tilde{H}_1 ist eine Hochhebung von $H_1 = w$, und \tilde{w} ist eine andere. Beide beginnen bei \tilde{x}_0 , also sind sie gleich, wieder auf Grund der Eindeutigkeitsaussage in Korollar 4.11. Insbesondere ist \tilde{w} eine Schleife bei \tilde{x}_0 , was zu zeigen war. ■

Wir sind jetzt vorbereitet für die Formulierung und den Beweis des Hauptsatzes über Hochhebungen von Abbildungen bezüglich Überlagerungen.

Satz 4.16 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung.

Sei Y ein wegweise zusammenhängender und lokal wegweise zusammenhängender topologischer Raum und sei $f: Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sei $y_0 \in Y$, sei $x_0 = f(y_0) \in X$, und sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Genau dann besitzt f eine stetige Hochhebung \tilde{f} mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, wenn

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)). \quad (4.4)$$

(Beide Gruppen in (4.4) sind natürlich Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.)

Wenn es eine solche Hochhebung gibt, dann ist sie eindeutig.

Beweis. Da Y wegweise zusammenhängend und somit zusammenhängend ist, folgt die Eindeutigkeit der Liftung sofort aus Lemma 4.8.

Die Bedingung (4.4) ist offensichtlich notwendig für die Existenz einer stetigen Hochhebung \tilde{f} , denn aus $p \circ \tilde{f} = f$ und dem Wert $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ folgt sofort $\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und somit

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \tilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass (4.4) *hinreichend* ist für die Existenz einer stetigen Hochhebung \tilde{f} von f mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

Wir konstruieren eine solche Hochhebung wie folgt. Sei $y \in Y$. Da Y wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $w: I \rightarrow Y$ von y_0 nach y , und $f_\#(w) = f \circ w$ ist ein Weg in X , der bei x_0 beginnt. Nach Korollar 4.11 hat $f_\#(w)$ eine eindeutige stetige Hochhebung zu einem Weg \tilde{w} in \tilde{X} , der bei \tilde{x}_0 beginnt. Wir setzen

$$\tilde{f}(y) := \tilde{w}(1)$$

und stellen sofort fest, dass

$$p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{w}(1)) = (f_\#(w))(1) = f(w(1)) = f(y),$$

wie gewünscht für eine Hochhebung. Abbildung 4.4 zeigt diese Konstruktion.

Aber es gibt noch zwei Probleme: wir müssen zeigen, dass $\tilde{f}(y)$ wohldefiniert ist und nicht von der Wahl des Weges w von y_0 nach y abhängt, und wir müssen zeigen, dass \tilde{f} wirklich eine *stetige* Abbildung ist.

Zunächst zur Wohldefiniertheit: Angenommen, v ist ein anderer Weg in Y von y_0 nach y , und sei \tilde{v} die eindeutige bei \tilde{x}_0 beginnende stetige Hochhebung des Weges $f \circ v$ in X . Da v und w beide bei y_0 beginnen und bei y enden, ist $u := v * w^-$ eine Schleife bei y_0 und $[u] \in \pi_1(Y, y_0)$. Die Wege $f \circ v$ und $f \circ w$ in X beginnen bei x_0 und enden beide bei $f(y)$, so dass

$$f \circ u = (f \circ v) * (f \circ w^-) = (f \circ v) * (f \circ w)^-$$

eine Schleife in X bei x_0 ist. Sei \tilde{u} die eindeutige Hochhebung von $f \circ u$ nach \tilde{X} , die bei \tilde{x}_0 beginnt.

Wir haben

$$[f \circ u] = f_*([u]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

und deshalb folgt aus Lemma 4.15, dass die Hochhebung \tilde{u} eine Schleife bei \tilde{x}_0 ist. Wir gewinnen aus \tilde{u} zwei Wege \bar{v} und \bar{w} in \tilde{X} mit $\tilde{u} = \bar{v} * \bar{w}^-$ durch die Formel

$$\bar{v}(t) = \tilde{u}(\tfrac{t}{2}) \quad \text{und} \quad \bar{w}(t) = \tilde{u}(\tfrac{2-t}{2})$$

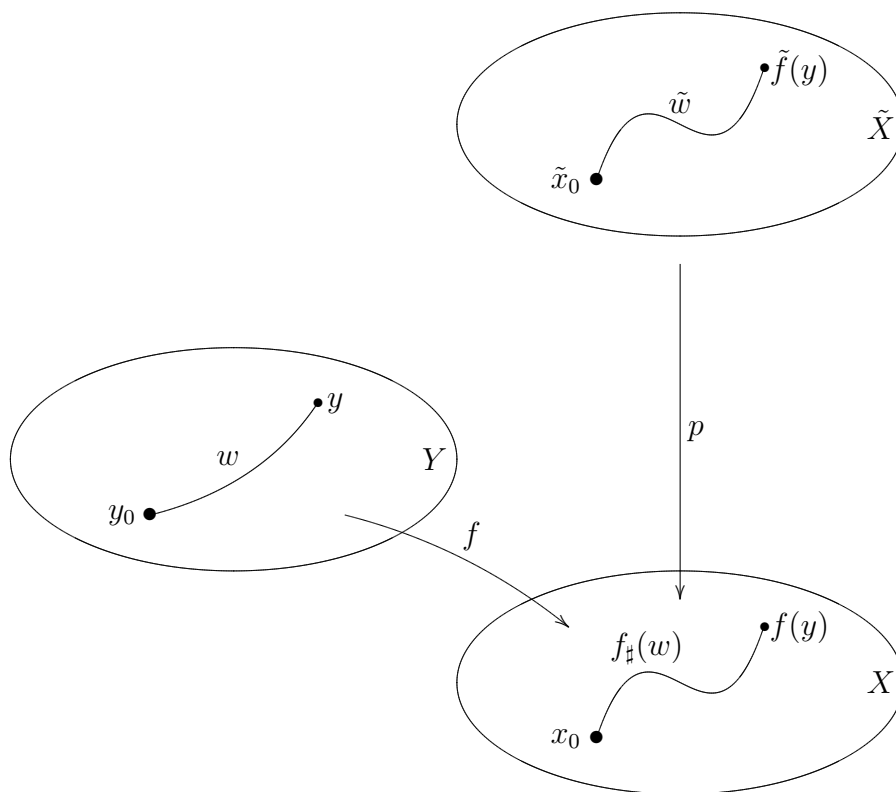
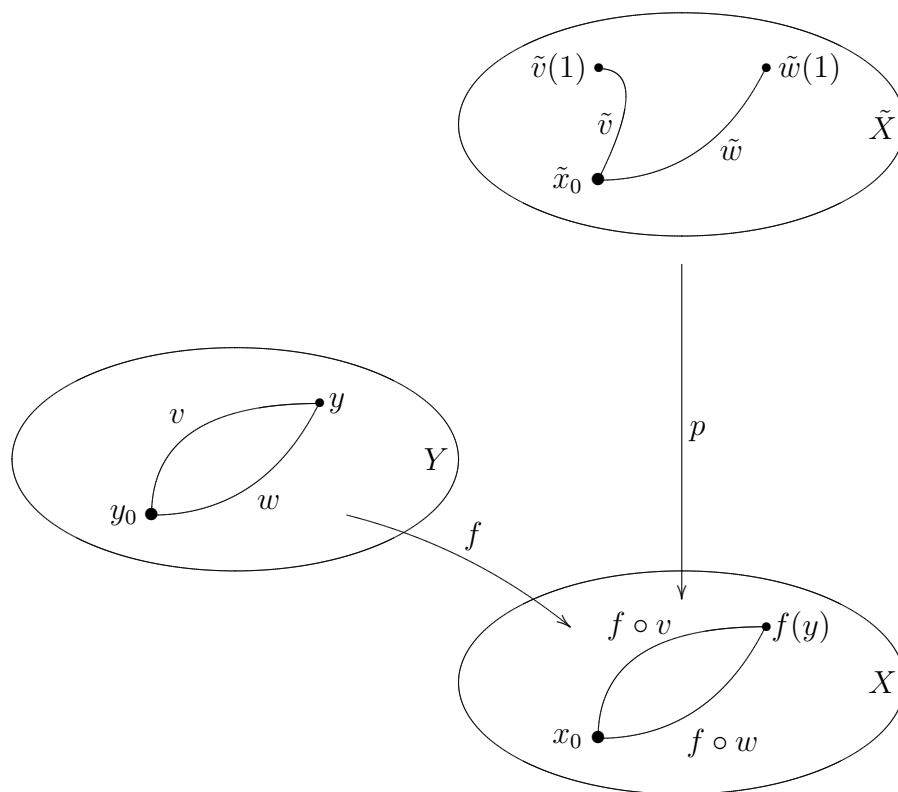


Abbildung 4.4: Die Konstruktion von \tilde{f} .

Abbildung 4.5: Ist \tilde{f} wohldefiniert?

für alle $t \in I$.

Wie man sofort nachprüft ist $p \circ \bar{v} = f \circ v$ und $p \circ \bar{w} = f \circ w$. Da auch gilt

$$\bar{v}(0) = \tilde{u}(0) = \tilde{v}(0) = \tilde{w}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{u}(1) = \bar{w}(0),$$

ist $\bar{v} = \tilde{v}$ und $\bar{w} = \tilde{w}$, denn nach Lemma 4.8 sind zwei Hochhebungen einer stetigen Abbildungen auf einem zusammenhängenden Raum, die an irgend-einer Stelle den gleichen Wert annehmen, überall gleich. Insbesondere ist

$$\tilde{v}(1) = \bar{v}(1) = \tilde{u}(\tfrac{1}{2}) = \bar{w}(1) = \tilde{w}(1),$$

so dass unsere Konstruktion für $\tilde{f}(y) = \tilde{w}(1) = \tilde{v}(1)$ doch nicht von der Wahl des Weges von y_0 nach y abhängt.

Jetzt, wo wir wissen, dass die beschriebene Konstruktion eine wohldefinierte Abbildung liefert, ist auch klar, dass $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Denn c_{y_0} ist ein Weg in Y von y_0 nach y_0 und $f \circ c_{y_0} = c_{f(y_0)} = c_{x_0}$. Nach Korollar 4.9 ist $c_{\tilde{x}_0}$ die bei \tilde{x}_0 beginnende Hochhebung von c_{x_0} , und somit ist nach Konstruktion

$$\tilde{f}(y_0) = c_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0,$$

wie gewünscht.

Zum Schluss wollen wir noch zeigen, dass \tilde{f} stetig ist. Dazu sei $y \in Y$ und sei U eine offene Umgebung von $f(y) \in X$, die von p gleichmäßig überlagert wird. Da $p(\tilde{f}(y)) = f(y) \in U$, gibt es eine offene Menge \tilde{U} um $\tilde{f}(y) \in \tilde{X}$, die von p homöomorph auf U abgebildet wird. Sei $q: U \rightarrow \tilde{U}$ die Umkehrabbildung des Homöomorphismus $p|_{\tilde{U}}$.

Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen in Y , und weil Y lokal wegweise zusammenhängend ist, gibt es eine wegweise zusammenhängende offene Umgebung V von y in Y mit $V \subseteq f^{-1}U$, oder anders gesagt, mit $f(V) \subseteq U$.

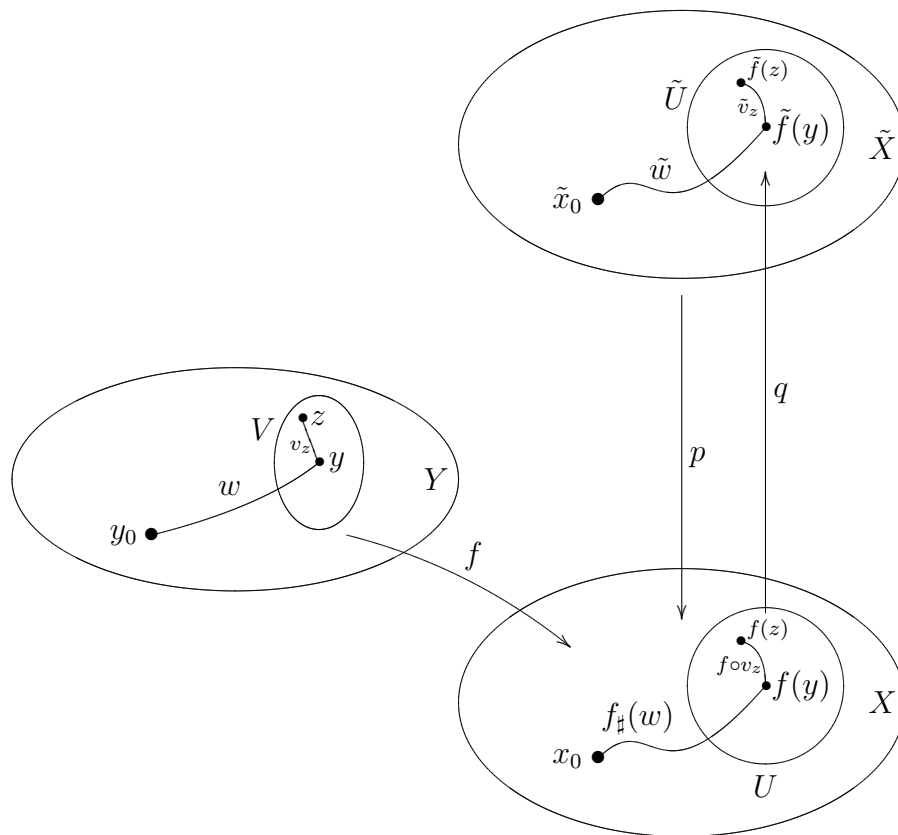
Sei w ein Weg in Y von y_0 nach y und sei \tilde{w} die eindeutige Hochhebung des Weges $f \circ w$ in X , die bei \tilde{x}_0 beginnt. Nach Definition und Wohldefiniertheit von \tilde{f} ist $\tilde{w}(1) = \tilde{f}(y)$.

Für jeden Punkt $z \in V$ wähle einen Weg v_z in V von y nach z . Der Weg $f \circ v_z$ ist ein Weg von $f(y)$ nach $f(z) \in X$, der ganz in $f(V) \subseteq U$ verläuft, so dass wir darauf q anwenden können. Sei $\tilde{v}_z := q \circ f \circ v_z$; dies ist ein Weg in \tilde{U} . All diese Daten sehen Sie in Abbildung 4.6.

Weil q die Umkehrabbildung von $p|_{\tilde{U}}$ ist, ist $p \circ \tilde{v}_z = f \circ v_z$. Insbesondere ist

$$p(\tilde{v}_z(0)) = f(v_z(0)) = f(y) = p(\tilde{f}(y)),$$

und weil p auf \tilde{U} injektiv ist, gilt $\tilde{v}_z(0) = \tilde{f}(y)$, d.h., \tilde{v}_z ist ein Weg, der bei $\tilde{f}(y)$ beginnt, und deshalb ist $\tilde{w} * \tilde{v}_z$ definiert.

Abbildung 4.6: Warum \tilde{f} stetig ist.

Die Verkettung $w * v_z$ ist ein Weg in Y von y_0 nach z und

$$f \circ (w * v_z) = (f \circ w) * (f \circ v_z) = (p \circ \tilde{w}) * (p \circ \tilde{v}_z) = p \circ (\tilde{w} * \tilde{v}_z).$$

Nach Definition von \tilde{f} ist also

$$\tilde{f}(z) = (\tilde{w} * \tilde{v}_z)(1) = \tilde{v}_z(1) = q(f(v_z(1))) = q(f(z)).$$

Dies gilt für ein beliebiges $z \in V$, so dass $\tilde{f}|_V = q \circ f$ und dies ist eine stetige Abbildung. Da \tilde{f} auf der offenen Menge $V \ni y$ stetig ist, ist \tilde{f} insbesondere bei y stetig. Da y ein beliebiger Punkt von Y war, ist \tilde{f} auf ganz Y stetig, wie behauptet. ■

Korollar 4.17 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und Y ein einfach zusammenhängender und lokal wegweise zusammenhängender topologischer Raum. Sei $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Sei $y_0 \in Y$, sei $x_0 = f(y_0) \in X$, und sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Dann besitzt f eine eindeutige Hochhebung $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

Beweis. Weil Y einfach zusammenhängend ist, ist es auch wegweise zusammenhängend, und die Voraussetzung (4.4) in Satz 4.16 ist automatisch erfüllt, weil $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$. Somit ist auch $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = \{1\}$ und in jeder Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$, insbesondere auch in $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, enthalten. Also ist Satz 4.16 anwendbar und liefert sofort den gewünschten Schluss. ■

Aus einem einfachen Spezialfall gewinnen wir eine interessante Aussage:

Korollar 4.18 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei n eine natürliche Zahl ≥ 2 und sei $\varphi: I^n \rightarrow X$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = x_0$.

- a) φ besitzt eine eindeutige Hochhebung $\tilde{\varphi}: I^n \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}_0$.
- b) Wenn φ , als Abbildung $I^{n-1} \times I \rightarrow X$, eine Homotopie $\text{rel } \partial I^{n-1}$ ist, dann ist auch $\tilde{\varphi}$ eine Homotopie $\text{rel } \partial I^{n-1}$.
- c) Wenn $\varphi \in \Omega_n(X, x_0)$, dann ist $\tilde{\varphi} \in \Omega_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ (in anderen Worten, wenn $n \geq 2$ ist eine Hochhebung einer n -Schleife wieder eine n -Schleife).

Beweis. Teil a) folgt sofort aus Korollar 4.17, da I^n für $n \geq 1$ zusammenziehbar und somit einfach zusammenhängend ist.

Zu b): Sei φ eine Homotopie rel ∂I^{n-1} und sei $s \in \partial I^{n-1}$. Sei $x := \varphi(s, 0)$. Der Weg $t \mapsto \varphi(s, t)$ ist der konstante Weg c_x und der Weg $t \mapsto \tilde{\varphi}(s, t)$ ist eine Hochhebung davon, also nach Korollar 4.9 auch konstant. Da dies für jedes $s \in \partial I^{n-1}$ gilt, ist $\tilde{\varphi}$ eine Homotopie rel ∂I^{n-1} .

Zu c): φ und $\tilde{\varphi}$ sind genau dann n -Schleifen, wenn sie auf ∂I^n konstant sind. Wenn $n \geq 2$, dann ist ∂I^n wegweise zusammenhängend, und wenn φ dort konstant ist, besagt Korollar 4.9, dass auch ihre Hochhebung $\tilde{\varphi}$ auf ∂I^n konstant ist und somit eine n -Schleife bei $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}_0$ ist. ■

Korollar 4.19 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und sei $x = p(\tilde{x}) \in X$. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Dann ist

$$p_* = \pi_n(p): \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_n(X, x)$$

injektiv, und wenn $n \geq 2$ sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Seien v und $w \in \Omega_n(\tilde{X}, \tilde{x})$, so dass $p_*([v]) = p_*([w])$. Dann ist $p \circ v \simeq p \circ w$ rel ∂I^n . Sei $H: I^n \times I \rightarrow X$ eine Homotopie rel ∂I^n von $p \circ v$ nach $p \circ w$ (insbesondere gilt dann $H(0, 0) = p(v(0)) = p(\tilde{x}) = x$) und sei \tilde{H} die eindeutige Hochhebung von H mit $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}$.

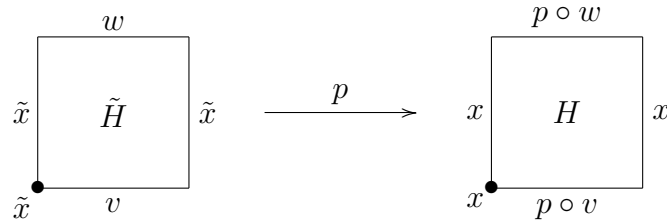


Abbildung 4.7: Warum p_* injektiv ist.

\tilde{H}_0 ist eine Hochhebung von $p \circ v$ und nimmt bei $0 \in I^n$ den gleichen Wert \tilde{x} an, wie v , welches ja auch eine Hochhebung von $p \circ v$ ist. Aus dem Eindeutigkeitssatz Lemma 4.8 für Hochhebungen stetiger Abbildungen auf I^n folgt, dass $\tilde{H}_0 = v$ und somit insbesondere, dass \tilde{H}_0 eine n -Schleife bei \tilde{x} ist.

Nach Korollar 4.18 b) ist \tilde{H} eine Homotopie rel ∂I^n . Insbesondere nimmt \tilde{H} überall auf $\partial I^n \times I$ den konstanten Wert \tilde{x} an, und somit ist auch \tilde{H}_1 , wie w , eine n -Schleife bei \tilde{x} und eine Hochhebung von $p \circ w = H_1$. Wegen des gemeinsamen Wertes an jeder Stelle von ∂I^n folgt wieder aus dem Eindeutigkeitssatz, dass $\tilde{H}_1 = w$.

Wir haben also gezeigt, dass \tilde{H} eine Homotopie rel ∂I^n von v nach w ist. Also ist $[v] = [w] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, wann immer $p_*([v]) = p_*([w])$. In anderen Worten, p_* ist injektiv.

Nun sei $n \geq 2$ und sei $u \in \Omega_n(X, x)$. Nach Korollar 4.18 a) hat u eine eindeutige Hochhebung \tilde{u} mit $\tilde{u}(0) = \tilde{x}$. Nach Korollar 4.18 c) ist $\tilde{u} \in \Omega_n(\tilde{X}, \tilde{x})$, und es gilt

$$[u] = [p \circ \tilde{u}] = p_*([\tilde{u}]) \in p_*(\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x})).$$

Das zeigt, dass p_* surjektiv ist, wenn $n \geq 2$. ■

Bemerkung 4.20 Man kann die Aussage von Korollar 4.19 auch so verstehen, dass für eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ die Fundamentalgruppe an jeder Stelle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eine *Untergruppe* der Fundamentalgruppe von X bei $p(\tilde{x})$ ist.

Das ist aber erstaunlicherweise keine große Hilfe bei der Berechnung von Fundamentalgruppen, und es wird nicht unser Ziel sein, Überlagerungen zu finden, die im Totalraum bekannte Fundamentalgruppen haben, um über die Fundamentalgruppe unten etwas zu erfahren (oder umgekehrt). Eher ist diese Tatsache eine Behinderung für die Berechnung und verkompliziert sie, wenn die obere Fundamentalgruppe nichttrivial ist.

Die Isomorphieaussage für die höheren Homotopiegruppen kann allerdings manchmal nützlich sein und die Berechnung der höheren Homotopiegruppen einiger bekannter Basisräume ermöglichen.

Für die Fundamentalgruppe kann aber eine Kenntnis der Gruppe im Totalraum ohnehin nicht ausreichen, um die Gruppe in der Basis zu bestimmen, da p_* für Fundamentalgruppen kein Isomorphismus ist. Es wäre auch gar nicht hilfreich, wenn p_* ein Isomorphismus wäre, weil die Überlagerung dann im Wesentlichen einblättrig und somit im Wesentlichen ein Homöomorphismus wäre (um es genauer zu sagen, jede Wegkomponente des Totalraums wäre eine 1-blättrige Überlagerung, und Schleifen können eine Wegkomponente bekanntlich nicht verlassen). Solche Überlagerungen liefern überhaupt keine neue topologische Information und bieten somit auch keine Erleichterung bei der Berechnung der Fundamentalgruppe.

Wir werden, wie Sie gleich sehen werden, genau das Gegenteil zu erreichen versuchen und stattdessen Überlagerungen finden wollen, bei denen möglichst wenig von der Fundamentalgruppe des Basisraumes im Totalraum noch vorhanden ist, denn die Fundamentalgruppe oben ist ein Hindernis für die Existenz anderer geometrischer Merkmale, an denen wir die Fundamentalgruppe des Basisraumes sofort ablesen können. Diese Merkmale werden sichtbar, wenn die Hochhebungen von Schleifen im unteren Raum im oberen

Raum *keine* Schleifen mehr sind. Folglich, desto kleiner die Fundamentalgruppe oben ist, desto größer der Anteil von der Fundamentalgruppe des Basisraums, der in anderer und deutlicherer Form in der Geometrie des Totalraumes in Erscheinung tritt.

Definition 4.21 Eine Überlagerung $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ heißt eine **universelle Überlagerung**, wenn der Totalraum \tilde{X} einfach zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend ist.

In diesem Fall ist auch der Basisraum X automatisch wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend (aber nicht unbedingt einfach zusammenhängend!).

Bemerkung 4.22 Warum heißen solche Überlagerungen „universell“? Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine universelle Überlagerung, und sei $q: Y \longrightarrow X$ eine andere Überlagerung von X . Sei $x \in X$ und seien $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $y \in Y$ Punkte mit $p(\tilde{x}) = q(y) = x$.

Korollar 4.17 besagt, dass p eine eindeutige „Hochhebung“ $r: \tilde{X} \longrightarrow Y$ bezüglich q hat, so dass $r(\tilde{x}) = y$ und mit $p = q \circ r$.

Wenn Y zusammenhängend ist kann man zeigen, dass r selber eine Überlagerung ist, so dass *jede* zusammenhängende Überlagerung von X von der universellen Überlagerung überlagert wird und sozusagen auf einer „Zwischenstufe“ zwischen dem Totalraum der universellen Überlagerung und dem Basisraum positioniert ist. Deshalb der Name *universell*.

Auf die Details dieser Theorie wollen wir nicht näher eingehen.

Beispiele 4.23 a) Die Überlagerung

$$\begin{aligned} p: \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

aus Beispiel 4.3 b) ist eine universelle Überlagerung.

b) Für jedes $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ ist die Überlagerung $p^n: \mathbf{R}^n \longrightarrow T^n$ aus Beispiel 4.6, die Überlagerung des n -dimensionalen Torus durch den n -dimensionalen euklidischen Raum, eine universelle Überlagerung.

Wir werden später weitere Beispiele kennenlernen.

Hier sind nun die „geometrischen Merkmale“ einer Überlagerung, an denen wir die Fundamentalgruppe des Basisraums ablesen werden:

Definition 4.24 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** von p ist ein Homöomorphismus $\tau: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tau} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

kommutiert, d.h., so dass $p \circ \tau = p$.

Eine Decktransformation ist also eine Hochebung von p bezüglich p , die ein Homöomorphismus des Totalraums ist.

Die Decktransformationen der Überlagerung p bilden immer eine Gruppe unter Verknüpfung, denn offensichtlich ist die Verknüpfung $\sigma \circ \tau$ von zwei Decktransformationen τ und σ wieder eine Decktransformation, die Identität $\text{id}_{\tilde{X}}$ von \tilde{X} ist eine Decktransformation, und wenn τ eine Decktransformation ist, dann ist auch die Umkehrabbildung τ^{-1} eine, denn

$$p \circ \tau^{-1} = (p \circ \tau) \circ \tau^{-1} = p \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = p.$$

Diese Gruppe heißt die **Decktransformationsgruppe** der Überlagerung p , und wir bezeichnen sie mit $T(p)$.

Wie viele Decktransformationen hat denn eine Überlagerung?

Lemma 4.25 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung, wobei \tilde{X} wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend ist. Sei $x \in X$ und seien \tilde{x}_1 und $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x$.

Genau dann gibt es eine Decktransformation τ mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, wenn

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)), \quad (4.5)$$

und wenn es eine solche Decktransformation gibt, dann gibt es genau eine.

Beweis. Da \tilde{X} wegweise zusammenhängend ist, und da eine Decktransformation auch eine Hochhebung von p ist, kann es nach dem Eindeutigkeitssatz für Hochhebungen Lemma 4.8 höchstens eine Decktransformation τ geben mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

\tilde{X} ist nach Voraussetzung wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend und Satz 4.16 besagt unter diesen Voraussetzungen, dass eine *Hochhebung* τ von p mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ genau dann existiert, wenn die linke Seite von Gleichung (4.5) in der rechten Seite enthalten ist.

Wenn es aber eine Decktransformation τ gibt mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, dann ist auch τ^{-1} eine Decktransformation und somit eine Hochhebung mit $\tau^{-1}(\tilde{x}_2) =$

\tilde{x}_1 , und deshalb ist auch die rechte Seite von Gleichung (4.5) in der linken Seite enthalten, d.h., in (4.5) gilt die Gleichheit.

Umgekehrt, wenn Bedingung (4.5) gilt, so gibt es zumindest Hochhebungen τ und σ von p mit $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ und mit $\sigma(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. Es ist trivial nachzuprüfen, dass auch $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ Hochhebungen von p sind, und es gilt

$$(\sigma \circ \tau)(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1 \quad \text{und} \quad (\tau \circ \sigma)(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2. \quad (4.6)$$

Aber auch $\text{id}_{\tilde{X}}$ ist eine Hochhebung von p , die die Punkte \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 festlässt. Da es nach dem Eindeutigkeitssatz höchstens eine Hochhebung gibt, die an einer bestimmten Stelle einen bestimmten Wert annimmt, sind beide Verknüpfungen in (4.6) die Identität und somit ist τ ein Homöomorphismus und σ ist seine Umkehrabbildung. Da τ außerdem eine Hochhebung von p ist, ist τ eine Decktransformation und wir haben die Existenz bewiesen. ■

Die Bedingung in Lemma 4.25 wirft für eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und einen Punkt $x \in X$ sofort die Frage auf, welche Beziehung zwischen den Fundamentalgruppen an verschiedenen Stellen in $p^{-1}(\{x\})$ besteht, wenn ihre Bilder in $\pi_1(X, x)$ nicht gleich sind, und wie viele solche Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ es gibt; diese Frage betrifft auch die qualitativen Eigenschaften der Wirkung der Decktransformationsgruppe auf den Totalraum. Es gibt eine ausgedehnte und sehr interessante Theorie, die darauf Antwort gibt, und die auch die Beziehung zwischen der Decktransformationsgruppe, der Fundamentalgruppe an verschiedenen Stellen in \tilde{X} , und der Fundamentalgruppe von X beschreibt. Schon aus Zeitgründen können wir diese Theorie nicht in Detail behandeln; in der allgemeinen Situation liefert sie auch nur unvollständige Information über die Fundamentalgruppe von X .

Wir werden nur den allereinfachsten Spezialfall dieser Theorie betrachten, nämlich den Fall einer *universellen Überlagerung*. Er hat den Vorteil, dass in diesem Fall alle Hindernisse zur Konstruktion von Decktransformationen verschwinden und dass die Decktransformationsgruppe die Fundamentalgruppe des Basisraums völlig beschreibt.

Korollar 4.26 Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung und sei $x \in X$. Dann gibt es zu je zwei Punkten \tilde{x}_0 und $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(\{x\})$ genau eine Decktransformation τ von p , die \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 abbildet.

Insbesondere hat die Überlagerung p genau so viele Decktransformationen, wie ihre Blätterzahl.

Beweis. Die Behauptung über die Existenz von Decktransformationen trifft zu nach Lemma 4.25, weil \tilde{X} einfach zusammenhängend ist und die Gruppen in Bedingung (4.5) deshalb beide trivial und somit gleich sind.

Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ fest gewählt mit $p(\tilde{x}_0) = x$. Jede Decktransformation bildet \tilde{x}_0 in einen Punkt von $p^{-1}(\{x\})$ ab, und zu jedem Punkt $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(\{x\})$ gibt es tatsächlich genau eine Decktransformation, die \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 abbildet, also gibt es so viele Decktransformationen, wie Punkte in $p^{-1}(\{x\})$, und diese Anzahl ist die Blätterzahl. ■

Satz 4.27 Sei $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine universelle Überlagerung und sei $x \in X$. Dann ist

$$\pi_1(X, x) \cong T(p).$$

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = x$. Ein Isomorphismus $\varphi: \pi_1(X, x) \longrightarrow T(p)$ lässt sich wie folgt konstruieren: Sei $\zeta \in \pi_1(X, x)$ und sei $w \in \Omega_1(X, x)$ eine 1-Schleife mit $\zeta = [w]$. Sei $\tilde{w}: I \longrightarrow \tilde{X}$ die eindeutige Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$, und sei $\tilde{y} = \tilde{w}(1)$; es gilt auch $p(\tilde{y}) = x$, da w eine Schleife ist. Wir definieren $\varphi(\zeta)$ als die eindeutige Decktransformation τ von p , die \tilde{x} nach \tilde{y} abbildet.

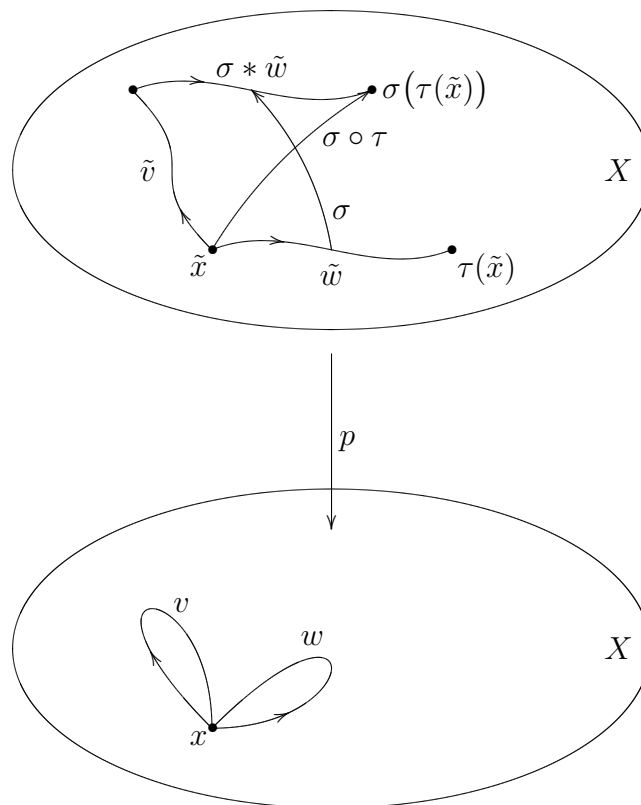
Diese Decktransformation hängt nur von ζ ab und nicht von der Wahl der Schleife $w \in \zeta$, so dass φ wohldefiniert ist. Ferner, φ ist ein Isomorphismus $\pi_1(X, x) \cong T(p)$.

Beweis. Als Erstes zeigen wir, dass φ wohldefiniert ist. Seien v und w zwei Schleifen in $\Omega_1(X, x)$ mit $[v] = [w] = \zeta$ und seien \tilde{v} und \tilde{w} ihre bei \tilde{x} beginnenden Hochhebungen.

Wir haben $v \simeq w$ mfe; sei H eine Homotopie mit festen Endpunkten von v nach w und sei \tilde{H} die Hochhebung von H mit $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}$. Nach Korollar 4.18 b) ist auch \tilde{H} eine Homotopie mit festen Endpunkten. Daraus folgt als Erstes, dass auch $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{x}$ und somit sind \tilde{H}_0 und \tilde{H}_1 bei \tilde{x} beginnende Hochhebungen von v bzw. w , d.h., $\tilde{H}_0 = \tilde{v}$ und $\tilde{H}_1 = \tilde{w}$. Weil \tilde{H} eine Homotopie mit festen Endpunkten ist, ist auch $\tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1)$, d.h., $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ und somit erhalten wir in der Konstruktion von φ mit der Schleife v den gleichen Punkt \tilde{y} , wie mit w , also auch die gleiche Decktransformation τ in beiden Fällen. Das zeigt, dass φ wohldefiniert ist.

φ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn seien v und w zwei beliebige Schleifen in $\Omega_1(X, x)$. Seien \tilde{v} und \tilde{w} ihre bei \tilde{x} beginnenden Hochhebungen und $\sigma = \varphi([v])$ und $\tau = \varphi([w])$ die Decktransformationen mit $\sigma(\tilde{x}) = \tilde{v}(1)$ und $\tau(\tilde{x}) = \tilde{w}(1)$.

Da σ eine Decktransformation ist, ist auch $\sigma \circ \tilde{w}$ eine Hochhebung von w , aber eine, die bei $\sigma(\tilde{w}(0)) = \sigma(\tilde{x}) = \tilde{v}(1)$ beginnt. Aus diesem Grund ist in \tilde{X} die Verkettung $\tilde{v} * (\sigma \circ \tilde{w})$ definiert, und sie ist offensichtlich eine Hochhebung von $v * w$, die bei $\tilde{v}(0) = \tilde{x}$ beginnt und bei $\tilde{z} := (\sigma \circ \tilde{w})(1) = \sigma(\tilde{w}(1)) = \sigma(\tau(\tilde{x}))$ endet.

Abbildung 4.8: φ ist ein Homomorphismus.

Nach Definition ist $\varphi([v] * [w]) = \varphi([v * w])$ die eindeutig bestimmte Decktransformation, die \tilde{x} nach \tilde{z} abbildet; $\sigma \circ \tau$ ist eine Decktransformation, die dies tut, also ist $\varphi([v] * [w]) = \sigma \circ \tau$ und φ ist ein Homomorphismus.

Um zu zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist, konstruieren wir die Umkehrabbildung $\psi: T(p) \longrightarrow \pi_1(X, x)$. Sei $\tau \in T(p)$ und sei $\tilde{y} := \tau(\tilde{x}) \in \tilde{X}$. Nach Voraussetzung ist \tilde{X} wegweise zusammenhängend. Sei \tilde{w} ein beliebiger Weg in \tilde{X} von \tilde{x} nach \tilde{y} . Weil τ eine Decktransformation ist, ist $p(\tilde{y}) = p(\tau(\tilde{x})) = p(\tilde{x}) = x$, so dass der Weg $w := p \circ \tilde{w}$ eine Schleife bei $x \in X$ ist. Wir setzen $\psi(\tau) := [w] \in \pi_1(X, x)$.

Wir müssen zeigen, dass dies eine Wohldefinition ist. Sei \tilde{v} eine anderer Weg in \tilde{X} von \tilde{x} nach \tilde{y} . Weil \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, ist $[\tilde{w} * \tilde{v}^-] = 1 = [c_{\tilde{x}}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ und nach Lemma 3.2 gilt in $\pi(\tilde{x}, \tilde{y})$ die Homotopierelation mit festen Endpunkten

$$\tilde{v} \simeq c_{\tilde{x}} * \tilde{v} \simeq (\tilde{w} * \tilde{v}^-) * \tilde{v} \simeq \tilde{w} * (\tilde{v}^- * \tilde{v}) \simeq \tilde{w} * c_{\tilde{y}} \simeq \tilde{w}.$$

Also gilt auch $p \circ \tilde{v} \simeq p \circ \tilde{w}$ mfE und $\psi(\tau)$ hängt nicht von der Wahl des Weges w ab.

Aus den Konstruktionen ist sofort klar, dass φ und ψ Umkehrabbildungen zueinander sind, so dass φ bijektiv und somit ein Gruppenisomorphismus ist (wie auch die Umkehrabbildung ψ .) ■

Korollar 4.28 a) Sei $x \in S^1$. Dann ist

$$\pi_1(S^1, x) \cong \mathbf{Z}.$$

Genauer, für jedes $n \in \mathbf{Z}$ sei $w_n \in \Omega_1(S^1, x)$ die Schleife

$$w_n(t) := e^{2\pi i n t} x \in S^1 \subseteq \mathbf{C}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: \mathbf{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, x) \\ n &\mapsto [w_n] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Insbesondere ist $[w]$ mit $w(t) := e^{2\pi i t} x$ ein Erzeugendes der zyklischen Gruppe $\pi_1(S^1, x)$.

b) Für jedes $k \geq 2$ ist

$$\pi_k(S^1, x) = \{0\}.$$

Beweis. a): Sei $p: \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ die universelle Überlagerung von S^1 durch \mathbf{R} aus Beispiel 4.23 a); wir haben $p(t) = e^{2\pi it}$ für jedes $t \in \mathbf{R}$.

Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ ist die Translation durch n , also die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_n: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ t &\longmapsto t + n\end{aligned}$$

offensichtlich eine Decktransformation von p . Da $p^{-1}(\{0\}) = \mathbf{Z}$ und da für jedes $n \in \mathbf{Z}$ gilt $\tau_n(0) = n$, sind dies alle Decktransformationen, die p besitzt, denn nach Lemma 4.25 oder Korollar 4.26 kann es für jedes $n \in \mathbf{Z}$ nur eine Decktransformation geben, die 0 nach n abbildet.

Folglich ist

$$\pi_1(S^1, x) \cong T(p) = \{ \tau_n \mid n \in \mathbf{Z} \}$$

und da $\tau_n \circ \tau_m = \tau_{n+m}$, ist diese Gruppe offenbar isomorph zu \mathbf{Z} .

Sei $a \in \mathbf{R}$ ein Element mit $p(a) = e^{2\pi ia} = x$. Unter dem Isomorphismus aus Satz 4.27 entspricht die Decktransformation τ_n der Homotopieklasse einer Schleife bei x , deren bei a beginnende Hochhebung bei $\tau_n(a) = a + n$ endet. Eine solche Schleife erhalten wir, wenn wir einen beliebigen Weg in \mathbf{R} von a nach $a + n$ mit p in den Kreis herunterprojizieren. Das einfachste Beispiel eines solchen Weges ist der Weg \tilde{w}_n gegeben durch $\tilde{w}_n(t) := a + nt$ für $t \in I$. Wenn man diesen Weg nach S^1 projiziert, erhält man die Schleife w_n mit

$$w_n(t) = p(\tilde{w}_n(t)) = e^{2\pi i(a+nt)} = e^{2\pi ia} \cdot e^{2\pi int} = xe^{2\pi int}.$$

Wir haben also einen Isomorphismus $\mathbf{Z} \longrightarrow T(p)$, der n auf τ_n abbildet, und aus Satz 4.27 einen Isomorphismus $T(p) \longrightarrow \pi_1(S^1, x)$, der τ_n auf $[w_n]$ abbildet. Die Verknüpfung ist ein Isomorphismus $\psi: \mathbf{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1, x)$ mit $\psi(n) = [w_n]$, wie behauptet.

Und weil dies ein Isomorphismus ist, wird $\pi_1(S^1, x)$ erzeugt von $\psi(1) = [w_1] = [w]$.

b): Für $k \geq 2$ ist p_* ein Isomorphismus $\pi_k(\mathbf{R}, a) \longrightarrow \pi_k(S^1, x)$ nach Korollar 4.19, und $\pi_k(\mathbf{R}, a) = \{0\}$ weil \mathbf{R} zusammenziehbar ist, also ist auch $\pi_k(S^1, x)$ trivial. ■

Ein anderes Beispiel einer universellen Überlagerung, das wir kennen, ist die Abbildung $p^n: \mathbf{R}^n \longrightarrow T^n$ des n -dimensionalen Torus aus Beispiel 4.23 b), und wir könnten damit die Fundamentalgruppe der Tori ausrechnen. Aber es ist sinnvoller, einen allgemeinen Satz über die Homotopiegruppen von Produkträumen zu formulieren:

Lemma 4.29 Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume und sei $z := (x, y) \in X \times Y$. Seien p_X und p_Y die Projektionen von $X \times Y$ auf X bzw. Y . Dann ist

$$\pi_n(p_X) \times \pi_n(p_Y): \pi_n(X \times Y, z) \longrightarrow \pi_n(X, x) \times \pi_n(Y, y)$$

ein Gruppenisomorphismus für jedes $n \geq 1$ (und eine bijektive mengentheoretische Abbildung für $n = 0$).

Beweis. Der Beweis ist sehr einfach und wird als Übungsaufgabe überlassen. ■

Korollar 4.30 Sei $n \geq 1 \in \mathbf{N}$ und $T^n = (S^1)^n$ der n -dimensionale Torus und $t \in T^n$. Dann ist

$$\pi_k(T^n, t) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}^n, & \text{wenn } k = 1; \\ \{0\}, & \text{wenn } k \geq 2. \end{cases}$$

Beweis. Das folgt sofort aus Korollar 4.28 und Lemma 4.29. ■

Mit Hilfe einer Einschränkung der universellen Überlagerung des Torus können wir aber leicht ein Beispiel eines Raumes finden, dessen Fundamentalgruppe nicht abelsch ist.

Definition 4.31 Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume. Wir konstruieren aus X und Y einen neuen Raum $X \vee Y$, genannt das **Wedge** von X und Y , indem wir disjunkte Kopien von X und Y an ihren ausgezeichneten Punkten zusammenkleben. Genauer, wir setzen

$$X \vee Y := (X \overset{\mathrm{D}}{\cup} Y) / \{x, y\}$$

und nehmen den Punkt $z = \{x, y\} \in X \vee Y$ als ausgezeichneten Punkt dieses neuen Raumes. Der Quotientenraum $X \vee Y$ ist, wie man leicht nachprüft, homöomorph zum Unterraum

$$(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y) \subseteq X \times Y, \quad (4.7)$$

wobei der ausgezeichnete Punkt z vom Quotienten dem Punkt $(x, y) \in X \times Y$ entspricht. Deshalb können wir den Raum in (4.7) mit $X \vee Y$ identifizieren oder (4.7) als eine Definition von $X \vee Y$ verwenden.

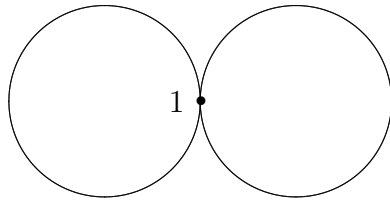
Die Operation \vee kann man auch auf mehr als zwei punktierte Räume anwenden. Allgemeiner, ist Λ eine Indexmenge und ist für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein punktierter Raum (X_λ, x_λ) gegeben, so setzen wir

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda := \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda}^D X_\lambda \right) / \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

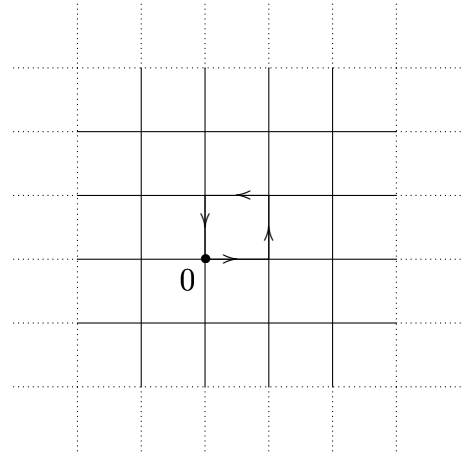
mit ausgezeichnetem Punkt $z := \{x_\lambda\}$.

Im Falle wo alle (X_λ, x_λ) der gleiche punktierte Raum (X, x) sind, nennt man $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X$ ein **Bouquet** (=“Blumenstrauß“) von Kopien von X .

Beispiel 4.32 Wir nehmen als (X, x) den punktierten Raum $(S^1, 1)$. Der Raum $S^1 \vee S^1$, das **Bouquet aus zwei Kreisen**, ist die Figur 8 in Abbildung 4.9(a).



(a) Der „Achterraum“ $S^1 \vee S^1$.



(b) Ein Überlagerungsraum \tilde{A} von $S^1 \vee S^1$.

Abbildung 4.9: $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1)$ ist nicht abelsch.

Lemma 4.33 $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1)$ ist nicht abelsch.

Beweis. Wir identifizieren $S^1 \vee S^1$ mit der Teilmenge

$$A := (S^1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times S^1)$$

von $S^1 \times S^1 = T^2$.

Wir haben eine universelle Überlagerung

$$\begin{aligned} p^2: \mathbf{R}^2 &\longrightarrow T^2 \\ (s, t) &\mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) \end{aligned}$$

von T^2 (Beispiel 4.23 b)) und wir betrachten die Überlagerung $q := p^2|_A$ von A , die wir durch Einschränkung von p^2 erhalten. Der Totalraum dieser Überlagerung ist

$$\tilde{A} := (p^2)^{-1}(A) = (\mathbf{R} \times \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Z} \times \mathbf{R}),$$

denn $p^2(s, t) \in A$ genau dann, wenn $e^{2\pi it} = 1$ oder $e^{2\pi is} = 1$, also genau dann, wenn $t \in \mathbf{Z}$ oder $s \in \mathbf{Z}$. Diesen Totalraum sehen Sie in Abbildung 4.9(b).

In diesem Bild sehen Sie auch vier Strecken, die mit Pfeilen markiert sind. Sie bilden einen Unterraum \tilde{B} von \tilde{A} , der der Rand ∂I^2 des Quadrats $I^2 \subseteq \mathbf{R}^2$ ist (in Abbildung 4.10 ist dieser Unterraum fett gezeichnet).

Der Raum $\tilde{B} = ([0, 1] \times \{0, 1\}) \cup (\{0, 1\} \times [0, 1])$ ist offensichtlich homöomorph zu S^1 und seine Fundamentalgruppe bei 0 ist deshalb \mathbf{Z} . Die Pfeile in Abbildung 4.9(b) markieren einen Weg α (bis auf Parametrisierung die Verkettung der vier gerichteten Seiten von \tilde{B}), der unter dem Homöomorphismus zu S^1 der Schleife $t \mapsto e^{2\pi it}$ entspricht und dessen Homotopieklasse deshalb nach Korollar 4.28 a) ein Erzeugendes von $\pi_1(\tilde{B}, 0) \cong \mathbf{Z}$ ist. Insbesondere ist dieser Weg nicht nullhomotop in \tilde{B} .

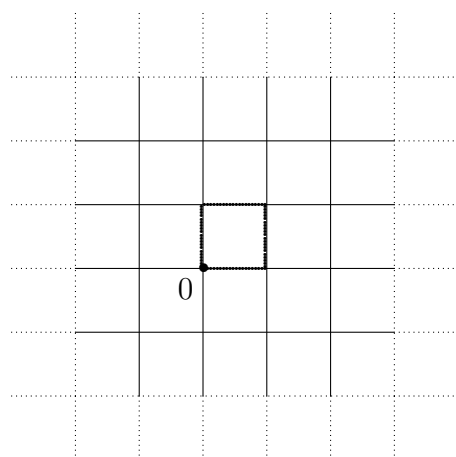


Abbildung 4.10: $\tilde{B} = \partial I^2$ als Retrakt von \tilde{A} .

\tilde{B} ist ein Retrakt von \tilde{A} , denn I ist ein Retrakt von \mathbf{R} unter der Retraktion

$$r(t) = \max(0, \min(t, 1)) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t \leq 0; \\ t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq 1; \\ 1, & \text{wenn } 1 \leq t \end{cases}$$

und $\rho := (r \times r)|_{\tilde{A}}$ ist, wie man leicht nachprüft, eine Retraktion von \tilde{A} auf \tilde{B} . (Offensichtlich ist $r \times r$ eine Retraktion von \mathbf{R}^2 auf I^2 , und wenn eine Koordinate von $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ aus \mathbf{Z} ist, d.h., wenn $(s, t) \in \tilde{A}$, dann ist diese Koordinate ≤ 0 oder ≥ 1 und deshalb ist die entsprechende Koordinate von $(r \times r)(s, t)$ gleich 0 oder 1, d.h., der Bildpunkt liegt in \tilde{B} .)

Die Inklusion $i: \tilde{B} \rightarrow \tilde{A}$ induziert einen injektiven Homomorphismus der Fundamentalgruppen, denn $\rho \circ i = \text{id}_{\tilde{B}} \implies \rho_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(\tilde{B}, 0)} \implies i_*$ ist injektiv.

Folglich ist $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(\tilde{A}, 0)$, und da $q_* = \pi_1(q)$ injektiv ist nach Korollar 4.19, ist auch $[q \circ \alpha] \neq 1 \in \pi_1(S^1 \vee S^1, 1)$.

Sei v mit $v(t) = (e^{2\pi it}, 1)$ die Schleife, die einmal um den Kreis $S^1 \times \{1\} \subseteq S^1 \vee S^1$ läuft, und sei w mit $w(t) = (1, e^{2\pi it})$ die Schleife, die einmal um den Kreis $\{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \vee S^1$ läuft. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0(t) &= (t, 0); \\ \tilde{v}_1(t) &= (t, 1); \\ \tilde{w}_0(t) &= (0, t); \\ \tilde{w}_1(t) &= (1, t). \end{aligned}$$

Die \tilde{v}_i sind Hochhebungen von v und die \tilde{w}_i sind Hochhebungen von w unter q . Offensichtlich ist die Verkettung $\tilde{v}_0 * \tilde{w}_1 * \tilde{v}_1^{-1} * \tilde{w}_0^{-1}$ definiert und ist eine Umparametrisierung von, und somit homotop zu, der Schleife α .

In $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1)$ haben wir

$$1 \neq [q \circ \alpha] = [q \circ (\tilde{v}_0 * \tilde{w}_1 * \tilde{v}_1^{-1} * \tilde{w}_0^{-1})] = [v * w * v^{-1} * w^{-1}] = [v] * [w] * [v]^{-1} * [w]^{-1},$$

und deshalb ist $[v] * [w] \neq [w] * [v]$ und $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1)$ ist nicht abelsch. ■

Bemerkung 4.34 Mit etwas mehr Arbeit lässt sich $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1)$, oder noch allgemeiner, die Fundamentalgruppe eines beliebigen Bouquets von Kreisen mit Hilfe einer universellen Überlagerung genau bestimmen. Die Fundamentalgruppe von $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} S^1$ ist die von Λ erzeugte **freie Gruppe** F_Λ (und als Spezialfall ist $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1) = F_2$, die freie Gruppe auf zwei Buchstaben oder zwei Erzeugenden). Es ist viel leichter zu erklären, was F_Λ ist, als die genaue

Definition zu formulieren — die Elemente dieser Gruppe sind alle formalen endlichen Produkte von Elementen λ aus Λ und ihren formalen Inversen λ^{-1} , die Gruppenmultiplikation ist die formale Multiplikation, also die Hintereinanderreihung solcher Produkte, und die einzige anzuwendende Kürzungsregel ist die Kürzung von Teilprodukten der Form $\lambda\lambda^{-1}$ oder $\lambda^{-1}\lambda$ (wo beide Symbole λ das gleiche Element von Λ bezeichnen). Das neutrale Element 1 der Gruppe ist das leere Produkt, also das Produkt aus keinen Faktoren.

Z.B., $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1) = F_2$ besteht aus allen Produkten von zwei Buchstaben a, b und ihren Inversen, den Zeichen a^{-1} und b^{-1} , wobei nur Teilausdrücke aa^{-1} , $a^{-1}a$, bb^{-1} und $b^{-1}b$ gekürzt werden dürfen.

Der Beweis ist nicht sehr schwierig, aber langwierig genug, dass wir ihn aus Zeitgründen nicht in der Vorlesung erzählen können.

Bemerkung 4.35 Wir haben bisher nur die Rudimente der Überlagerungstheorie besprochen, die auch ausreichen, um einige interessante Spezialfälle von Homotopiegruppen zu berechnen. Diese Theorie lässt sich erheblich weiter entwickeln, und es gibt eine Vielzahl natürlicher und wichtiger Fragen, auf die wir leider nicht eingehen konnten.

Zum Beispiel haben wir gesehen, dass universelle Überlagerungen sehr nützlich sind, um Homotopiegruppen zu berechnen, so dass die Frage aufkommt, wann sie überhaupt existieren. In unseren Anwendungen in der Vorlesung und in den Übungen können wir eine universelle Überlagerung immer direkt angeben, so dass es kein großes Problem war, dass wir die Frage ihrer allgemeinen Existenz nicht behandelt haben, aber für andere Anwendungen ist dies doch eine wichtige Frage, wie auch die breitere Frage nach der Klassifikation aller Überlagerungen eines gegebenen topologischen Raumes.

Mit wenigen Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Basisraumes X kann man diese Frage vollständig beantworten — dazu müssen wir nur verlangen, dass X wegweise zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend ist, und noch eine weitere Eigenschaft besitzt, die fast alle uns interessierenden Räume erfüllen, eine Eigenschaft mit dem exotischen Namen ***semi-lokal einfach zusammenhängend***. Das bedeutet nur, dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die zwar selber nicht einfach zusammenhängend sein muss (deshalb nur „semi-lokal“), aber so dass jede Schleife in der Umgebung *im großen Raum* X nullhomotop ist.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so besitzt X nicht nur eine universelle Überlagerung, sondern es gibt sogar für jedes $x \in X$ und für *jede* Untergruppe $G \subseteq \pi_1(X, x)$ eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und ein $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = x$, so dass $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = G$.

Man kann auch fragen, wie viele wesentlich verschiedene Überlagerungen von X es bis auf Isomorphie gibt. Die Antwort ist: zu jeder Konjugations-

klasse von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine Überlagerung \tilde{X} , so dass das Bild der Fundamentalgruppe von \tilde{X} als Untergruppe von $\pi_1(X, x)$ zu dieser Konjugationsklasse gehört. Da es nur eine triviale Untergruppe von $\pi_1(X, x)$ gibt und somit auch nur eine Konjugationsklasse von trivialen Untergruppen, ist die universelle Überlagerung sogar eindeutig bestimmt.

Auch die Aussage von Satz 4.27, dass die Fundamentalgruppe von X gleich der Decktransformationsgruppe einer universellen Überlagerung ist, lässt sich verallgemeinern zu einer Aussage für beliebige Überlagerungen, aber wenn $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \neq \{1\}$, und wenn $p(\tilde{x}) = x$, dann beschreibt die Decktransformationsgruppe nicht genau $\pi_1(X, x)$, sondern nur einen Quotienten einer Untergruppe von $\pi_1(X, x)$ nach dem Bild von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ unter p_* .

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass es elegante Anwendungen der Homotopietheorie in der Gruppentheorie und speziell in der algebraisch sehr komplizierten Theorie der freien Gruppen gibt, ausnahmsweise eine Situation, in der die Topologie der Algebra eine Erleichterung verschafft und nicht umgekehrt. So kann man, z.B., sehr einfach mit Hilfe der Überlagerungstheorie für Bouquets von Kreisen beweisen, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe auch frei ist, ein Satz, der zuerst algebraisch bewiesen wurde, aber auf sehr viel umständlichere Weise.

Leider wird es uns zumindest in der Vorlesung nicht möglich sein, auf irgendeine dieser Fragen näher einzugehen.

Wir schließen dieses Kapitel noch mit einem sehr nützlichen Satz ab, der zwar nichts mit Überlagerungen zu tun hat, aber ähnlich nützlich sein kann bei der Berechnung von Fundamentalgruppen:

Satz 4.36 (Seifert-van Kampen) *Sei X ein topologischer Raum und seien U und V offene Teilmengen von X , so dass $U \cap V$ nichtleer und wegzusammenhängend ist. Seien $i: U \rightarrow X$ und $j: V \rightarrow X$ die Inklusionen.*

Sei $x \in U \cap V$. Dann wird $\pi_1(X, x)$ von den Untergruppen $i_(\pi_1(U, x))$ und $j_*(\pi_1(V, x))$ erzeugt.*

Insbesondere, wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist j_ surjektiv. Wenn U und V einfach zusammenhängend sind, dann ist auch X einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei $w: I \rightarrow X$ eine 1-Schleife bei x . Diese Schleife schlängelt sich durch X und wechselt dabei, im Allgemeinen, mehrmals von U nach V und zurück. Die Idee des Beweises besteht darin, w zu zerlegen als eine Verkettung von Teilwegen, die abwechselnd ganz in U und ganz in V verlaufen. Diese Teilwege sind zwar keine Schleifen, aber der Übergangspunkt zwischen einem Teilweg und dem nächsten liegt immer in $U \cap V$ (da er zu beiden aufeinander

folgenden Teilwegen gehört) und man kann ihn durch einen Weg in $U \cap V$ mit x verbinden (siehe Abbildung 4.11). Diese Verbindungen mit x ergänzen die Teilwege zu Schleifen bei x und erlauben somit, w bis auf Homotopie zu schreiben als eine Verkettung von Schleifen ganz in U oder ganz in V .

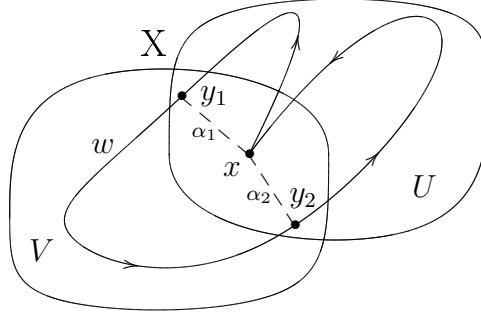


Abbildung 4.11: Der Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen.

Die in der Beweisskizze angedeuteten Schritte führen wir jetzt aus. Das Intervall I ist ein kompakter metrischer Raum, und da U und V eine offene Überdeckung von X bilden und w stetig ist, bilden $w^{-1}(U)$ und $w^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung von I . Sei ε eine Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung und sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{2N} < \varepsilon$. Für $0 \leq j \leq N$ sei $t_j := \frac{j}{N}$ und für $j \geq 1$ sei I_j das Intervall $[t_{j-1}, t_j] \subseteq I$. Da der Radius von I_j gleich $\frac{1}{2N} < \varepsilon$ ist, gilt für jedes j entweder $w(I_j) \subseteq U$ oder $w(I_j) \subseteq V$ oder beides.

Für manche j ist $I_{j-1} \cup I_j$ ganz in einer der beiden Mengen $w^{-1}(U)$ oder $w^{-1}(V)$ enthalten. Seien j_1, \dots, j_{n-1} in aufsteigender Reihenfolge diejenigen j zwischen 1 und $N-1$, für die das *nicht* der Fall ist, und sei $s_k := t_{j_k}$ für $k = 0, \dots, n-1$. Sei $s_0 = t_0 = 0$ und $s_n = t_N = 1$. Für jedes k sei $y_k := w(s_k) \in X$. Es gilt $y_0 = y_n = x$.

Für $1 \leq k \leq n$ sei J_k das Intervall $[s_{k-1}, s_k] \subseteq I$. Nach Wahl der s_k ist jede Menge $w(J_k)$ ganz in U oder ganz in V enthalten, aber keine zwei aufeinander folgenden $w(J_k)$ sind in der gleichen Menge U oder V enthalten. Aus diesem Grund ist

$$y_k := w(s_k) \in w(J_k) \cap w(J_{k+1}) \subseteq U \cap V$$

für jedes k mit $1 \leq k \leq n-1$.

Da $U \cap V$ nach Voraussetzung wegweise zusammenhängend ist, finden wir für jedes k mit $1 \leq k \leq n-1$ einen Weg α_k in $U \cap V$ von x nach y_k wie in Abbildung 4.11. Sei φ_k eine streng monoton steigende stetige Abbildung von

I auf J_k (da I und J_k Intervalle sind, gibt es sogar eine eindeutig bestimmte affine Abbildung mit diesen Eigenschaften) und sei w_k der Weg $w \circ \varphi_k$, der ganz in U oder ganz in V liegt und von y_{k-1} nach y_k verläuft.

Offensichtlich ist w eine Umparametrisierung von $w_1 * w_2 * \cdots * w_n$ wie in Korollar 2.13 a) und somit sind beide Wege homotop mit festen Endpunkten. Da aber $\alpha_k^- * \alpha_k \simeq c_{s_k}$ für jedes k mit $1 \leq k \leq n-1$, können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} [w] &= [w_1 * w_2 * \cdots * w_n] \\ &= [w_1 * \alpha_1^- * \alpha_1 * w_2 * \alpha_2^- * \cdots * \alpha_{n-1}^- * w_n] \\ &= [w_1 * \alpha_1^-] * [\alpha_1 * w_2 * \alpha_2^-] * \cdots * [\alpha_{n-1}^- * w_n] \end{aligned} \quad (4.8)$$

und dies ist ein Produkt von Homotopieklassen von *Schleifen bei x* . Ferner, da jedes w_k ganz in U oder V verläuft, und da jedes α_k ganz in U und ganz in V verläuft, verläuft jede dieser Schleifen ganz in U oder ganz in V , d.h., die Homotopieklassen im Produkt in der letzten Zeile von (4.8) gehören entweder zu $i_*(\pi_1(U, x))$ oder zu $j_*(\pi_1(V, x))$. Das beweist die Hauptaussage des Satzes.

Wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist

$$i_*(\pi_1(U, x)) = i_*(\{1\}) = \{1\} \subseteq j_*(\pi_1(V, x)),$$

so dass schon die Untergruppe $j_*(\pi_1(V, x))$ alleine die Gruppe $\pi_1(X, x)$ erzeugt, d.h., sie sind gleich.

Und wenn auch V einfach zusammenhängend ist, dann wird $\pi_1(X, x)$ von $\{1\}$ erzeugt, ist also gleich $\{1\}$, und X ist die Vereinigung von zwei wegweise zusammenhängenden Unterräumen mit nichtleerem Durchschnitt (da $x \in U \cap V$) und somit selber wegweise zusammenhängend. Beides zusammen bedeutet, X ist einfach zusammenhängend. ■

Bemerkung 4.37 Die Aussage von Satz 4.36 ist eigentlich eine deutlich abgeschwächte Version des richtigen Satzes von Seifert-van Kampen, der genau angibt, wie $\pi_1(X, x)$ von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$ erzeugt wird. Sowohl der Beweis wie auch die genaue Aussage des Satzes sind relativ kompliziert, so dass wir hier nicht weiter darauf eingehen wollen.

Die einfache Version des Satzes von Seifert-van Kampen reicht aber aus für die Berechnung der Fundamentalgruppen der Sphären:

Korollar 4.38 Für jedes $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.

Beweis. Sei zunächst $n \geq 1$ und sei $N := (0, \dots, 0, 1)$ der „Nordpol“ und $S := (0, \dots, 0, -1)$ der „Südpol“ von S^n . Die bekannte stereographische Projektion zeigt, dass $U := S^n \setminus \{S\}$ und $V := S^n \setminus \{N\}$ homöomorph zu \mathbf{R}^n

und somit einfach zusammenhängend und insbesondere wegweise zusammenhängend sind. Diese Mengen sind auch offen in S^n . Ferner ist $U \cap V \neq \emptyset$, so dass auch $S^n = U \cup V$ wegweise zusammenhängend ist, sogar, wie gesagt, für jedes $n \geq 1$.

Daraus folgt, dass wenn $n \geq 2$ auch $U \cap V \cong S^{n-1} \times (-1, 1)$ wegweise zusammenhängend ist, als Produkt von zwei wegweise zusammenhängenden Räumen.

Zusammenfassend, S^n ist die Vereinigung von zwei offenen einfach zusammenhängenden Mengen mit wegweise zusammenhängendem Durchschnitt. Nach Satz 4.36 ist S^n einfach zusammenhängend. ■

Kapitel 5

Anwendungen der Fundamentalgruppe

Um das Thema Homotopie zu einem angenehmen Abschluss zu bringen, wollen wir in diesem sehr kurzen Kapitel ein paar schöne Anwendungen der von uns berechneten Homotopiegruppen (speziell der Nichttrivialität der Fundamentalgruppe des Kreises) präsentieren.

Lemma 5.1 *Sei X ein nichtleerer topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Retrakt von X und $r: X \rightarrow A$ eine Retraktion. Sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion. Sei $a \in A$. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gilt dann:*

$$r_*: \pi_n(X, a) \rightarrow \pi_n(A, a)$$

ist surjektiv und

$$i_*: \pi_n(A, a) \rightarrow \pi_n(X, a)$$

ist injektiv.

Beweis. Nach der Definition einer Retraktion ist $r \circ i = \text{id}_A$, also ist $r_* \circ i_* = (\text{id}_A)_* = \text{id}_{\pi_n(A, a)}$. Dies ist injektiv und surjektiv, also ist r_* surjektiv und i_* ist injektiv. ■

Korollar 5.2 *Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ ein Retrakt von X . Sei $n \in \mathbf{N}$. Wenn X n -zusammenhängend ist, dann ist auch A n -zusammenhängend.*

Beweis. Sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion. Wenn A nicht n -zusammenhängend ist, dann gibt es ein $a \in A$ und ein $k \leq n$, so dass $\pi_k(A, a)$ mehr als ein Element

hat, und da i_* nach Lemma 5.1 injektiv ist, ist auch $\pi_k(X, a)$ mehrelementig und X somit nicht n -zusammenhängend. ■

Korollar 5.3 S^1 ist kein Retrakt von D^2 .

Beweis. D^2 ist zusammenziehbar, also einfach zusammenhängend, aber S^1 ist nicht einfach zusammenhängend, da $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$ nach Korollar 4.28. ■

Diese Tatsache kann man anwenden, um einige sehr interessante Aussagen zu beweisen.

Satz 5.4 (Brouwerscher Fixpunktsatz) Jede stetige Abbildung

$$f: D^2 \longrightarrow D^2$$

hat einen Fixpunkt. (D.h., es gibt einen Punkt $x \in D^2$, so dass $f(x) = x$.)

Beweis. Angenommen, es gibt eine stetige Abbildung $f: D^2 \longrightarrow D^2$ ohne Fixpunkte. Wir können dann wie folgt eine Retraktion $r: D^2 \longrightarrow S^1$ konstruieren.

Sei $x \in D^2$. Da nach Annahme $f(x) \neq x$ gibt es eine eindeutig bestimmte gerichtete Gerade in \mathbf{R}^2 von $f(x)$ nach x , und wenn wir diese Gerade in der gleichen Richtung fortsetzen, schneidet sie S^1 in einem eindeutig bestimmten Punkt $r(x)$ (siehe Abbildung 5.1).

Falls $x \in S^1$, so braucht man die Gerade von $f(x)$ durch x gar nicht weiter fortzusetzen, um in S^1 zu landen, also ist in diesem Fall $r(x) = x$.

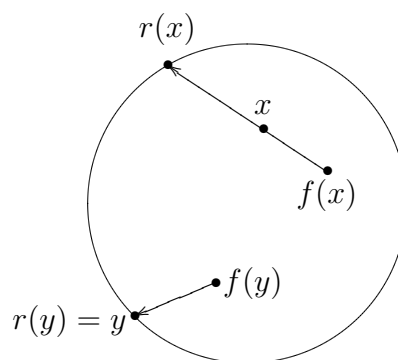


Abbildung 5.1: Eine Retraktion von D^2 auf S^1 .

Man „sieht“ an dem Bild, dass diese Abbildung stetig ist (wenn man x wenig verändert, verändert sich auch $f(x)$ wenig, weil f stetig ist, und somit

ändern sich die Verbindungsgerade und damit ihr Schnittpunkt mit dem Kreis nur wenig).

Aber man kann auch leicht einen richtigen Beweis für die Stetigkeit von r geben. Für jedes $x \in D^2$ ist

$$r(x) = f(x) + t(x - f(x)), \quad (5.1)$$

wo $t \geq 1$ die größere (und eindeutige positive) Lösung der quadratischen Gleichung

$$\|f(x) + t(x - f(x))\|^2 = 1 \quad (5.2)$$

ist. (Hier verwenden wir die normale euklidische Norm auf \mathbf{R}^2 .)

Die übliche p - q -Formel für die Lösung quadratischer Gleichungen zeigt, dass die größere der beiden Lösungen in t der Gleichung (5.2) stetig von x und $f(x)$ abhängt, und deshalb, und weil f stetig ist, hängt r nach (5.1) stetig von x ab.

Da ferner $r(x) = x$ für $x \in S^1$, ist r eine Retraktion von D^2 auf S^1 , in Widerspruch zu Korollar 5.3. Also hat f einen Fixpunkt. ■

Einer der berühmtesten und historisch wichtigsten Sätze aus der Algebra (das Thema von Gaußens Dissertation) lässt sich, neben unzähligen anderen Beweisen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik, auch mit Hilfe der Homotopietheorie leicht beweisen:

Definition 5.5 Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Weil $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$ und weil \mathbf{Z} abelsch ist, ist S^1 1-einfach und es gibt einen wohldefinierten und eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\pi_1(S^1, f(1)) \cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z},$$

gegeben durch $\hat{\alpha}$ für einen beliebigen Weg α in S^1 von 1 nach $f(1)$.

Die Abbildung

$$\hat{\alpha} \circ \pi_1(f): \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

hängt nur von f , nicht von α ab und ist ein Endomorphismus der zu \mathbf{Z} isomorphen Gruppe $\pi_1(S^1, 1)$.

Jeder Endomorphismus einer unendlichen zyklischen Gruppe ist die Multiplikation mit einer eindeutig bestimmten ganzen Zahl n . Denn das Erzeugende 1 wird auf irgendein Vielfaches $n \cdot 1$ von sich abgebildet und man sieht leicht, dass wegen der Homomorphismeigenschaft auch jedes andere Element a auf na abgebildet werden muss.

Diese Zahl n , so dass $\hat{\alpha} \circ \pi_1(f)$ die Multiplikation mit n ist, nennen wir den **Grad** oder den **Abbildungsgrad** von f .

Lemma 5.6 *Homotope Abbildungen $S^1 \rightarrow S^1$ haben den gleichen Grad.*

Beweis. Wenn f und g homotope stetige Abbildungen $S^1 \rightarrow S^1$ sind, so gibt es nach Lemma 3.11 einen Weg α von $f(1)$ nach $g(1)$ mit $\pi_1(f) = \hat{\alpha} \circ \pi_1(g)$.

Sei β ein Weg in S^1 von 1 nach $f(1)$. Der Weg $\beta * \alpha$ geht von 1 nach $g(1)$, und die zu f und g gehörenden Homomorphismen $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, die den Grad bestimmen, sind gleich, denn nach Lemma 3.10 c) und Lemma 3.11 ist

$$(\widehat{\beta * \alpha}) \circ \pi_1(g) = \hat{\beta} \circ \hat{\alpha} \circ \pi_1(g) = \hat{\beta} \circ \pi_1(f).$$

Also haben f und g den gleichen Grad. ■

Beispiele 5.7 a) Die Abbildung $f(z) := z^n$ von $S^1 \subseteq \mathbf{C}$ nach S^1 hat Grad n . Denn nach Korollar 4.28 a) gibt es einen Isomorphismus

$$\psi: \mathbf{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1),$$

der jedes $k \in \mathbf{Z}$ auf die Homotopieklasse der Schleife $w_k(t) := e^{2\pi i k t}$ abbildet.

Für $t \in I$ ist

$$(f \circ w_k)(t) = (e^{2\pi i k t})^n = e^{2\pi i n k t} = w_{nk}(t).$$

Also ist

$$\pi_1(f)(\psi(k)) = \pi_1(f)([w_k]) = [f \circ w_k] = [w_{nk}] = \psi(nk),$$

d.h., $\pi_1(f)$ ist die Multiplikation mit n als Abbildung $\pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ und $\text{Grad } f = n$.

b) Jede nullhomotope stetige Abbildung $g: S^1 \rightarrow S^1$ hat Grad 0, denn g ist homotop zur konstanten Abbildung $f(z) = 1 = z^0$ für alle $z \in S^1$, und f hat Grad 0 nach Teil a).

Satz 5.8 (Der so genannte „Hauptsatz der Algebra“) *Jedes Polynom*

$$p(X) := a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbf{C}$, wo $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$, besitzt eine Nullstelle in \mathbf{C} .

Beweis. Wir können annehmen, dass $a_n = 1$, denn sonst ersetzen wir p durch das Polynom $\frac{p}{a_n}$, das genau dann eine Nullstelle besitzt, wenn p eine hat, und das normiert ist, also führenden Koeffizienten 1 hat. (Wir dürfen durch a_n dividieren, weil $a_n \neq 0$.)

Angenommen, p hat keine Nullstelle. Dann können wir p als eine stetige Abbildung $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$ auffassen.

Sei M eine reelle Zahl mit

$$M \geq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right).$$

Dann ist M so groß gewählt, dass auf dem Kreis von Radius M um 0 der X^n Term von p größer ist als der Gesamtbeitrag aller anderen Terme, so dass sich p dort „im Wesentlichen“ verhält wie die Abbildung $z \mapsto z^n$, die nicht nullhomotop ist. Aber andererseits ist der Kreis von Radius M nullhomotop in \mathbf{C} , und das führt zu einem Widerspruch.

Hier nun die Details, die diese Beweisskizze zu einem Beweis ergänzen:

Sei $r: \mathbf{C} \setminus 0 \rightarrow S^1$ die Retraktion $r(z) := \frac{z}{|z|}$ aus Beispiel 2.16 c). Sei $j: S^1 \rightarrow \mathbf{C}$ die stetige Abbildung $j(z) := Mz$, und sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ die Verknüpfung $f := r \circ p \circ j$.

Weil \mathbf{C} zusammenziehbar ist, ist j nullhomotop und f somit auch.

Wir definieren eine Homotopie $P: \mathbf{C} \times I \rightarrow \mathbf{C}$ durch

$$P(z, t) := z^n + t \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i.$$

$P_1 = p$ und P_0 ist die Abbildung $z \mapsto z^n$. Wenn $|z| = M$, so ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i z^i| = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| M^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| M^{n-1} \quad (\text{weil } M > 1) \\ &= M^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| < M^{n-1} \cdot M \quad (\text{weil } M > \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|) \\ &= M^n = |z^n| \end{aligned}$$

und aus diesem Grund ist $P_t(z)$ für $|z| = M$ nie 0. In anderen Worten, die Verknüpfung $P \circ (j \times \text{id}_I)$ ist eine Homotopie $S^1 \times I \rightarrow \mathbf{C} \setminus 0$.

Sei $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ die Homotopie $r \circ P \circ (j \times \text{id}_I)$. Wir haben

$$H_0 = r \circ P_0 \circ j$$

und dies ist offensichtlich die Selbstabbildung des Kreises

$$g(z) := r(M^n z^n) = z^n$$

mit Grad n nach Beispiel 5.7 a).

Aber $H_1 = f$ und ist nullhomotop und hat Grad 0. Dies widerspricht Lemma 5.6.

Also war die Annahme falsch, dass p keine Nullstelle in \mathbf{C} hat. ■

Es gibt weitere schöne Anwendungen des Abbildungsgrades von Selbstabbildungen des Kreises.

Lemma 5.9 Sei $f: S^1 \longrightarrow S^1$ eine stetige Abbildung, so dass

$$f(-z) = -f(z)$$

für jedes $z \in S^1$. Dann ist Grad f ungerade (und insbesondere $\neq 0$).

Beweis. Um den Beweis ein wenig zu vereinfachen nehmen wir zunächst an, dass $f(1) = 1$.

Sei $p: \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ die universelle Überlagerung aus Beispiel 4.23 a), mit $p(t) = e^{2\pi it}$. Da p durch die Exponentialfunktion gegeben ist, ist $p(s+t) = p(s)p(t)$ für alle $s, t \in \mathbf{R}$.

Sei w die Schleife $w(t) = e^{2\pi it}$, deren Homotopieklasse $\pi_1(S^1, 1)$ erzeugt, und sei $\tilde{v}: I \longrightarrow \mathbf{R}$ die bei 0 beginnende Hochhebung der Schleife $f \circ w \in \Omega_1(S^1, 1)$.

Da $w(t) = \exp(2\pi it)$, gilt für jedes $t \geq \frac{1}{2}$, dass $w(t - \frac{1}{2}) = -w(t)$ und insbesondere $w(\frac{1}{2}) = -w(0) = -1$. Ferner, wegen der Voraussetzungen über f haben wir bei $t = \frac{1}{2}$

$$p(\tilde{v}(\frac{1}{2})) = e^{2\pi i\tilde{v}(\frac{1}{2})} = f(w(\frac{1}{2})) = f(-1) = -f(1) = -1,$$

so dass $\tilde{v}(\frac{1}{2})$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ sein muss.

Definiere eine Abbildung $\tilde{u}: I \longrightarrow \mathbf{R}$ durch

$$\tilde{u}(t) := \begin{cases} \tilde{v}(t), & \text{wenn } t \leq \frac{1}{2}; \\ \tilde{v}(\frac{1}{2}) + \tilde{v}(t - \frac{1}{2}), & \text{wenn } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Da $\tilde{v}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \tilde{v}(0) = 0$, stimmen beide Fälle bei $t = \frac{1}{2}$ überein und \tilde{u} ist eine wohldefinierte stetige Abbildung $I \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $\tilde{u}(0) = \tilde{v}(0) = 0$.

Wir behaupten, dass \tilde{u} eine Hochhebung von $f \circ w$ ist. Auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ gilt das sicher, denn dort ist $\tilde{u} = \tilde{v}$ und \tilde{v} ist eine Hochhebung von $f \circ w$. Für $t \geq \frac{1}{2}$ haben wir

$$\begin{aligned} p(\tilde{u}(t)) &= p(\tilde{v}(\frac{1}{2}) + \tilde{v}(t - \frac{1}{2})) = p(\tilde{v}(\frac{1}{2}))p(\tilde{v}(t - \frac{1}{2})) \\ &= -p(\tilde{v}(t - \frac{1}{2})) = -f(w(t - \frac{1}{2})) \\ &= -f(-w(t)) = f(w(t)), \end{aligned}$$

wegen der Eigenschaft $f(-z) = -f(z)$.

Also ist \tilde{u} eine Hochhebung der Schleife $f \circ w$. Insbesondere endet \tilde{u} bei einer Stelle $n \in \mathbf{Z}$, und nach Satz 4.27 ist

$$[f \circ w] = n[w] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z},$$

so dass n der Grad von f ist.

Genauer können wir sagen, dass \tilde{u} bei

$$\tilde{u}(1) = \tilde{v}(\tfrac{1}{2}) + \tilde{v}(1 - \tfrac{1}{2}) = 2\tilde{v}(\tfrac{1}{2})$$

endet, und da $\tilde{v}(\frac{1}{2})$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist, ist $\tilde{u}(1) = 2\tilde{v}(\frac{1}{2})$ eine ungerade ganze Zahl, d.h., der Grad von f ist ungerade.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, wo eventuell $f(1) \neq 1$. Sei $a \in \mathbf{R}$ mit $f(1) = e^{2\pi ia}$ und sei $h: I \rightarrow S^1$ der Weg $h(t) := e^{2\pi ita}$ von 1 nach $f(1) \in S^1$. Definiere eine Homotopie $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ durch

$$H(z, t) = \frac{f(z)}{h(t)}.$$

Offensichtlich gilt für jedes $t \in I$ und $z \in S^1$, dass

$$H(-z, t) = \frac{f(-z)}{h(t)} = \frac{-f(z)}{h(t)} = -H(z, t).$$

Wir haben $H_0 = f$ und $H_1(1) = 1$, und da $f \simeq H_1$ haben f und H_1 den gleichen Grad. Da H_1 auch die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, folgt aus dem zuerst behandelten Fall, dass dieser Grad ungerade ist. ■

Korollar 5.10 *Es gibt keine stetige Abbildung $f: S^2 \rightarrow S^1$, so dass*

$$f(-x) = -f(x)$$

für jedes $x \in S^2$.

Beweis. Wenn es eine solche Abbildung f gibt, sei $g := f|_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$. Offensichtlich erfüllt g die Voraussetzung $g(-z) = -g(z)$ von Lemma 5.9 und hat somit ungeraden Grad und ist nicht nullhomotop.

Die obere Halbsphäre

$$D_+^2 := \{ (x_0, x_1, x_2) \in S^2 \mid x_2 \geq 0 \}$$

ist homöomorph zu D^2 . Genauer, die Projektion auf die (x_0, x_1) -Ebene ist ein Homöomorphismus $D_+^2 \rightarrow D^2$, der S^1 sogar punktweise festlässt. Folglich

liefert $f|D_+^2$ eine Erweiterung von g nach D^2 , und weil D^2 zusammenziehbar ist, ist $f|D_+^2$ nullhomotop nach Lemma 2.18 d) und somit ihre Einschränkung g auch.

Das ist ein Widerspruch und es gibt somit keine stetige Abbildung f mit den genannten Eigenschaften. ■

Satz 5.11 (Satz von Borsuk-Ulam) Sei $f: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es eine Stelle $x \in S^2$ so dass $f(-x) = f(x)$.

In anderen Worten, es gibt mindestens ein Antipodenpaar $\{x, -x\}$ auf der Sphäre, auf dem f gleiche Werte annimmt.

Beweis. Wenn nicht, dann gilt für jedes $x \in S^2$, dass $f(x) - f(-x) \neq 0$. Wir erhalten dann eine wohldefinierte stetige Abbildung $g: S^2 \rightarrow S^1$ durch die Vorschrift

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|},$$

denn der Nenner ist ja nach Annahme nie 0.

Aus der Definition ist klar, dass $g(-x) = -g(x)$ für jedes $x \in S^2$. Nach Korollar 5.10 kann es keine solche stetige Abbildung $S^2 \rightarrow S^1$ geben. Also gilt doch an mindestens einer Stelle $f(-x) = f(x)$. ■

Der Satz von Borsuk-Ulam sieht etwas interessanter aus, wenn man sich klar macht, was die Aussage für die wirkliche Welt bedeutet. Zum Beispiel besagt dieser Satz, dass es zu jeder Zeit zwei diametral entgegengesetzte Punkte auf der Erdoberfläche geben muss, die genau die gleiche Temperatur und den gleichen Luftdruck haben.

Korollar 5.12 Es gibt keine injektive stetige Abbildung $S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ und insbesondere keine Einbettung von S^2 in \mathbf{R}^2 .

Der nächste Satz betrifft die kulinarische Gerechtigkeit. Stellen Sie sich vor, Sie haben ein Schinkenbrot bestehend aus einer Scheibe Weißbrot, etwas Schinken und einer Scheibe Graubrot, und sie wollen dieses Brot gerecht mit Ihrem Freund oder Ihrer Freundin teilen, so dass jeder genau die Hälfte des Weißbrots, genau die Hälfte des Schinkens und genau die Hälfte des Graubrots bekommt. Der folgende Satz besagt, dass sie mit einem Schnitt mit einem flachen und in einer Ebene sich bewegenden Messer alle drei Bestandteile des Sandwichs genau halbieren können (auch wenn Sie sich vorher um das Brot gestritten haben und alle Zutaten zerfleddert im ganzen Raum verteilt sind oder sogar zertreten und zusammengepresst wurden und teilweise den gleichen Ort einnehmen — sie müssen nur noch jeweils eine messbare Menge bilden).

Satz 5.13 (Der Schinkenbrotsatz) Seien A , B und C drei beschränkte Lebesgue-messbare Teilmengen vom \mathbf{R}^3 . (Sie müssen nicht so ganz genau wissen, was „Lebesgue-messbar“ bedeutet — es impliziert nur, dass die Teilmengen einen wohldefinierten Inhalt oder Volumen haben.)

Es gibt eine Ebene $E \subseteq \mathbf{R}^3$, so dass genau die Hälfte jeder der drei Teilmengen auf jeder Seite der Ebene liegt.

Beweis. Da alle drei Mengen beschränkt sind, können wir Maßeinheiten so wählen, dass A , B und C in der Kugel von Radius 1 um den Ursprung enthalten sind. Für eine Lebesgue-messbare Teilmenge $X \subseteq \mathbf{R}^3$ sei $\mu(X)$ ihr Volumen. Natürlich sind $\mu(A)$, $\mu(B)$ und $\mu(C)$ alle endlich.

Für $x \in S^2 \subseteq \mathbf{R}^3$ und $t \in \mathbf{R}$ sei

$$E_{x,t} := tx + x^\perp$$

die Ebene durch den Punkt tx , die orthogonal zum Vektor x ist (oder in anderen Worten, senkrecht zur Geraden durch den Ursprung und dem Punkt $x \in S^2$).

Diese Ebene teilt den Raum in zwei Halbräume, und ein Punkt y liegt im positiven oder negativen Halbraum $E_{x,t}^+$ bzw. $E_{x,t}^-$, je nachdem, ob das innere Produkt $\langle y - tx, x \rangle > 0$ oder < 0 ist. Als Teilmenge von \mathbf{R}^3 sind die Ebenen $E_{x,t}$ und $E_{-x,-t}$ gleich, aber es ist klar, dass Negation von x und t die Halbräume vertauscht, also

$$E_{x,t}^+ = E_{-x,-t}^-$$

und umgekehrt.

Sei

$$\nu_A(x, t) := \mu(E_{x,t}^+ \cap A)$$

das Volumen des Teils von A , das auf der positiven Seite von $E_{x,t}$ liegt, und entsprechend definiere man $\nu_B(x, t)$ und $\nu_C(x, t)$. Man überlegt sich, dass eine kleine Parallelverschiebung oder eine kleine Drehung der Ebene $E_{x,t}$ das Volumen vom positiven Anteil von A , B und C nur wenig verändert, so dass diese drei Funktionen stetig sind.

Wenn man x durch $-x$ und t durch $-t$ ersetzt, vertauschen sich wie gesagt die positiven und negativen Halbräume der Ebene $E_{x,t}$, ohne dass die Ebene selber sich verändert, und deshalb ist der positive Anteil von A bezüglich $E_{-x,-t}$ einfach der negative Anteil von A bezüglich $E_{x,t}$, also der Rest, der nach Abzug des positiven Anteils (und des Anteils *in* der Ebene) von der ganzen Menge übrig bleibt. Da der Anteil von A , der in der Ebene $E_{x,t}$ liegt, immer Volumen 0 hat, können wir also schreiben

$$\nu_A(-x, -t) = \mu(A) - \nu_A(x, t), \quad (5.3)$$

und eine entsprechende Beziehung gilt auch für die Mengen B und C .

Wir gucken uns aber zunächst nur die Menge A an. Da A innerhalb des Einheitsballs liegt, ist klar, dass $\nu_A(x, -1) = \mu(A)$ und $\nu_A(x, 1) = 0$ und dazwischen ist $\nu_A(x, t)$ für festes x eine stetige und monoton fallende Funktion von t (aber nicht unbedingt streng monoton fallend). Nach dem Zwischenwertsatz gibt es Werte $t \in [-1, 1]$, für die

$$\nu_A(x, t) = \frac{1}{2}\mu(A). \quad (5.4)$$

Es gibt einen kleinsten solchen Wert t_- und einen größten solchen Wert t_+ , und wegen der Monotonizität haben auch alle Werte $t \in [t_-, t_+]$ die gleiche Eigenschaft (5.4). Wir setzen $\tau(x)$ gleich dem Mittelwert $\frac{1}{2}(t_- + t_+)$ von t_- und t_+ .

Wenn man x ein wenig verändert in S^2 , so bewegen sich die Punkte tx für $t \in [-1, 1]$ ein wenig und die Ebenen $E_{x,t}$ drehen sich alle ein wenig, so dass auch die Anteile von A , die auf der positiven Seite und auf der negativen Seite liegen, sich verändern, aber nur ein wenig. Das heißt, eine kleine Veränderung in x ändert alle Werte der Funktion ν_A für t im kompakten Intervall $[-1, 1]$ nur wenig, so dass auch die Werte t_- und t_+ und somit auch ihr Mittelwert sich nur geringfügig verändern, wenn man x nicht zu stark verändert. In anderen Worten, τ ist eine stetige Funktion von $x \in S^2$.

Wenn $\nu_A(x, t) = \frac{1}{2}\mu(A)$, dann ist auch $\nu_A(-x, -t) = \frac{1}{2}\mu(A)$ (und umgekehrt), wegen der Beziehung (5.3). Also wenn man x durch $-x$ ersetzt, dann negiert sich das ganze Intervall der Werte von $t \in [-1, 1]$, für die (5.4) gilt, und somit negiert sich auch der Mittelpunkt dieses Intervalls, d.h., es gilt $\tau(-x) = -\tau(x)$ für alle $x \in S^2$.

Betrachten wir nun die Abbildung $f: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) := \left(\nu_B(x, \tau(x)), \nu_C(x, \tau(x)) \right).$$

Weil τ , ν_B und ν_C stetig sind, ist auch f stetig, und nach dem Satz von Borsuk-Ulam muss es einen Punkt $z \in S^2$ geben mit $f(-z) = f(z)$. Aber weil $\tau(-z) = -\tau(z)$ und wegen der Eigenschaft (5.3) der Funktionen ν_B und ν_C folgt dann

$$\nu_B(z, \tau(z)) = \nu_B(-z, \tau(-z)) = \nu_B(-z, -\tau(z)) = \mu(B) - \nu_B(z, \tau(z))$$

oder $\nu_B(z, \tau(z)) = \frac{1}{2}\mu(B)$, und entsprechend auch für C . Die gleiche Beziehung gilt ohnehin für A weil $\tau(z)$ nach Definition so gewählt wurde.

Wir haben gezeigt, dass ein Schnitt mit der Ebene $E_{z, \tau(z)}$ alle drei Mengen A , B und C halbiert. ■

Geniessen Sie also Ihr halbes Schinkenbrot!

Es wird Ihnen aufgefallen sein, dass in fast allen Anwendungen in diesem Kapitel nur Kreise, zweidimensionale Scheiben und Ebenen und zweidimensionale Sphären vorkamen; nur im Schinkenbrotsatz erschienen noch dreidimensionale Mengen, obwohl der Beweis im Wesentlichen von den Eigenschaften der 2-Sphäre ausgeht.

Dass hier nur kleine Dimensionen vorkamen, liegt daran, dass wir die Fundamentalgruppe von S^1 berechnen konnten, aber nicht $\pi_n(S^n)$ für größere n . Es gibt noch viele weitere schöne und interessante Anwendungen der Fundamentalgruppe, aber wir heben sie für später auf, weil man in den meisten Fällen die gleichen Ergebnisse teils sogar einfacher erhält unter Verwendung der Homologie anstelle der Homotopiegruppen. Wir werden in der Lage sein, die Homologiegruppen in allen Dimensionen auszurechnen, so dass wir die jetzt zurückgestellten Anwendungen (und die, die wir gemacht haben) später in allgemeinerer Form und nicht nur für niedrige Dimensionen werden nachholen können.

Also freuen Sie sich schon auf Ihren gerechten Anteil eines sechsdimensionalen Bacon, Lettuce and Tomato Sandwiches mit Mayonnaise und zwei Sorten Brot!

Kapitel 6

Singuläre Homologie

In diesem Kapitel wollen wir neue algebraische Funktoren für topologische Räume einführen, die ***Homologiegruppen***, die auf ganz andere Weise aufgebaut werden, als die Homotopiegruppen.

Während die Homotopiegruppen geometrische Merkmale eines Raumes als Hindernisse zur Homotopie von Schleifen sichtbar machen (die nichttrivialen Elemente der Homotopiegruppen sind ja gerade die Homotopieklassen von nicht nullhomotopen Schleifen), und somit geometrische Besonderheiten praktisch mit einem Lasso einfangen, versucht die Homologie, den Raum „auszukacheln“ mit einfachen Standardbausteinen, und geometrische Besonderheiten daran sichtbar zu machen, dass es in dem Raum geschlossene Hüllen gibt, die nicht mit den Standardbausteinen aufgefüllt oder ausgekacheln werden können (weil keine endliche Kachelung diese Hülle als ihr Rand hat).

Das ist, erst einmal sehr vague und schemenhaft beschrieben, die Grundidee der Homologietheorie, und es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, diese Idee auszuführen, ganz ähnlich zu der Tatsache, dass es viele verschiedene Möglichkeiten gibt, einen Fußboden auszulegen.

Man kann dabei sehr präzise geformte möglichst einfache Standardbausteine passgenau aneinander fügen, wie das bei einem Parkettboden der Fall ist. Der Vorteil ist eine regelmäßige und leicht erfassbare Struktur, die aber sehr starr ist, so dass der Bodenbelag sich nicht immer gut an die Raumform anschmiegt und diese Methode nicht geeignet ist für sehr exotisch geformte Räume. Wenn man nicht allzu großen Wert auf saubere Handwerksarbeit legt, kann man auch kleine Teppiche und Strohmatte und dergleichen überall in den Raum streuen, bis der ganze Fußboden bedeckt ist. Obwohl sich dann kein sehr übersichtliches Muster ergibt, passt sich diese Methode leicht an jede Raumform an. Und schließlich, wenn man sich möglichst wenig Arbeit machen will, kann man auch Fertigparkett oder gemustertes Linoleum legen, bei dem kleine Bausteine schon zu größeren vorgefertigten Platten zusam-

mengefügt sind, von denen man nur wenige braucht, um den Raum schnell und mühelos auszulegen.

Auch die Homologietheorie versucht möglichst einfache Bausteine zu verwenden, die deshalb **Simplizes** genannt werden. Die Simplizes, die in den topologischen Raum gelegt werden, sind Kopien eines Musterstücks, des so genannten **Standardsimplexes** in jeder Dimension, aber es gibt verschiedene Forderungen, die man an die Genauigkeit der Kopien und die Genauigkeit der Auslegung stellen kann.

In einer Variante der Homologietheorie werden sehr genaue Bausteine verwendet, nämlich affine Kopien des Standardsimplizes, und sie werden sehr präzise aneinander gefügt, nämlich so, dass die sich berührenden Seiten zweier aneinander grenzender Simplizes genau deckungsgleich sind. Die so entstehenden Gebilde heißen **Simplizialkomplexe** und die mit ihnen konstruierte Homologie heißt die **simpliziale Homologie**. Der präzise Aufbau ermöglicht eine sehr einfache Berechnung der Homologiegruppen unter effizienter Verwendung algebraischer Erzeugenden. Dafür muss man aber einen Preis bezahlen, denn die genaue simpliziale Struktur geht wesentlich in die Berechnung ein, und diese simpliziale Struktur ist ein künstlicher Zusatz zur topologischen Struktur, die man eigentlich untersuchen will. Man muss also mühsam zeigen, dass die simplizialen Homologiegruppen nur von der topologischen Struktur und nicht von der Wahl der simplizialen Zerlegung des Raumes abhängen. Außerdem ist die simpliziale Homologie nur definiert für Räume, die eine simpliziale Zerlegung besitzen, und das sind leider nicht alle (die Ausnahmen sind allerdings exotisch).

Eine andere Methode, die Homologiegruppen zu konstruieren, stellt im Gegensatz zur simplizialen Methode nur minimale Anforderung an die verwendeten Kopien des Standardsimplexes und an die Art, wie diese Kopien zusammengefügt werden. Als Bausteine werden Bilder des Standardsimplexes unter beliebigen *stetigen* Abbildungen zugelassen, und sie dürfen beliebig im Raum verteilt sein. Nicht nur dürfen die Bildsimplizes sich überlappen oder ganz krumm zueinander liegen, es müssen die stetigen Abbildungen des Standardsimplexes, die die Bausteine ergeben, noch nicht einmal injektiv sein, sie können sogar völlig ausarten und konstant werden. Deshalb heißt diese Variante der Homologietheorie die **singuläre Homologie**. Weil man relativ frei geformte Bausteine frei zusammenbauen darf, ist die Ausgangssituation der singulären Homologie unhandlicher und komplizierter als bei den anderen Versionen, aber das ist der einzige, leicht zu verschmerzende Nachteil, denn weil dem topologischen Raum keine zusätzliche Struktur aufgeprägt werden muss als Fundament für die singuläre Homologie, liefert sie direkt und unmittelbar einen Funktor auf *Top*, der für alle topologischen Räume definiert ist und schon in seiner Definition nur von der topologischen Struk-

tur abhängt. Die verloren gegangene direkte und einfache Berechenbarkeit der Homologiegruppen, die die simpliziale Theorie bietet, wird kompensiert durch leistungsfähige algebraische Werkzeuge, mit denen man die Homologie immer noch bequem berechnen kann.

Und schließlich kann man, nach der Entwicklung der Grundzüge der Homologietheorie, für geeignete Räume noch eine dritte und vereinfachte Variante, ähnlich dem Fertigparkett, herleiten, bei der von einer Aufteilung des Raumes in geeignet zusammengeklebte Bälle verschiedener Dimensionen (*Zellen* genannt) ausgegangen wird, und man die Homologiegruppen direkt aus dieser Zellenzerlegung ohne die Betrachtung von einzelnen Simplizes oft direkt hinschreiben kann. Der Vorteil dieser **zellulären Homologie** liegt darin, dass in die Konstruktion eine sehr viel kleinere Anzahl von Grundbausteinen eingeht, als bei der simplizialen oder singulären Homologie, so dass man es auch in den Zwischenstufen, die schließlich die Homologie als einen Quotienten zweier abelscher Gruppen liefern, mit kleinen und überschaubaren Gruppen zu tun hat, während in der singulären Homologie die in den Zwischenstufen auftretenden Gruppen noch nicht einmal endlich erzeugt sind (abgesehen von wenigen trivialen Ausnahmen).

Wegen der genannten mit ihr verbundenen technischen Schwierigkeiten werden wir in dieser Vorlesung die simpliziale Homologie nicht behandeln, sondern von vornherein uns auf die singuläre Homologie konzentrieren, aber wir werden später auch die zelluläre Homologie erläutern, weil ihre Anwendung in vielen Fällen sehr angenehm ist. Die Entwicklung der zellulären Homologie setzt aber schon einige Kenntnisse über die singuläre Homologie voraus, so dass wir zunächst nur diese Variante besprechen werden.

Wir haben ja schon erwähnt, dass die Homologiegruppen in jeder Dimension aus möglichst einfachen Bausteinen zusammengebaut werden, die Kopien eines Standardstücks sind. Wie kann dieser „möglichst einfache“ Standardbaustein aussehen?

In Dimension 0 haben wir keine große Auswahl — das einfachste nulldimensionale Gebilde ist ein einzelner Punkt, und so sieht auch jeder 0-Simplex aus. Auch in Dimension 1 gibt es einen kanonischen Kandidaten für die Rolle des einfachsten Bausteins, nämlich eine Strecke und als Standardbeispiel dafür das Intervall $I = [0, 1]$.

In der Homotopietheorie waren unsere Standardräume in den nächsthöheren Dimensionen dann das Quadrat, der Würfel usw., also die Räume I^n , und das scheint auch hier zunächst eine natürliche Wahl zu sein (besonders wenn man an den physikalischen Alltag, an Parkettbretter und Backsteine denkt), doch es gibt noch einfachere aber trotzdem regelmäßige und starr geformte Gebilde, in Dimension 2 zum Beispiel ein Dreieck, in Dimension 3 anstelle des Quaders ein Tetraeder, und so weiter. Das Dreieck ist einfacher

als ein Quadrat oder ein Rechteck, weil letzteres vier Ecken und vier Kanten hat, das Dreieck aber nur drei. Entsprechend haben dreidimensionale Quader schon $2^3 = 8$ Ecken und $\binom{3}{2} = 6$ Seiten, das Tetraeder jeweils nur 4.

Das sollte deutlich machen, dass eine sinnvolle Wahl des einfachsten Standardbausteins in jeder Dimension in der *konvexen Hülle einer für diese Dimension minimalen Anzahl von Punkten* eines geeigneten affinen Raumes besteht. Die konvexe Hülle von einer Menge von Punkten hat die gleiche Dimension wie ihre affine Hülle, und diese Dimension ist möglichst groß (und somit die Anzahl der benötigten aufspannenden Punkte möglichst klein), wenn die Punkte affin unabhängig, oder wie man sagt, in allgemeiner Lage sind. (Das ist gleichbedeutend damit, dass die Abstandsvektoren von einem der Punkte zu den anderen linear unabhängig sind.) In diesem Fall ist die erzielte Dimension eins kleiner, als die Anzahl der ausspannenden Punkte.

Um eine konvexe Hülle von Dimension n zu erhalten, braucht man also $n + 1$ Punkte in allgemeiner Lage. Dafür gibt es im \mathbf{R}^n eine kanonische Auswahl, die uns unseren Standardsimplex der Dimension n liefert.

Definition 6.1 Sei n eine natürliche Zahl und für $1 \leq i \leq n$ sei

$$e_i := (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

der i -te Standardbasisvektor vom \mathbf{R}^n . Sei $e_0 := (0, \dots, 0)$ der Koordinatenursprung.

Wir definieren den n -dimensionalen **Standardsimplex** $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$ als die konvexe Hülle der Punkte e_0, e_1, \dots, e_n .

Die konvexe Hülle dieser Punkte ist die Menge aller Punkte

$$x = \sum_{i=0}^n t_i e_i, \tag{6.1}$$

wo $0 \leq t_i \leq 1$ und $\sum_{i=0}^n t_i = 1$. Die Koeffizienten t_i in der Darstellung (6.1) heißen die **baryzentrischen Koordinaten** des Punktes $x \in \Delta_n$.

Weil $e_0 = 0$ bedeutet die Darstellung (6.1) der Punkte von Δ_n , dass

$$\Delta_n := \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i=0}^n t_i \leq 1 \right\}.$$

Wie schon angekündigt, werden unsere eigentlichen Bausteine stetige Bilder des Standardsimplexes sein.

Definition 6.2 Sei X ein topologischer Raum. Sei $n \in \mathbf{N}$. Ein **singulärer n -Simplex** σ in X ist eine stetige Abbildung

$$\sigma: \Delta_n \longrightarrow X.$$

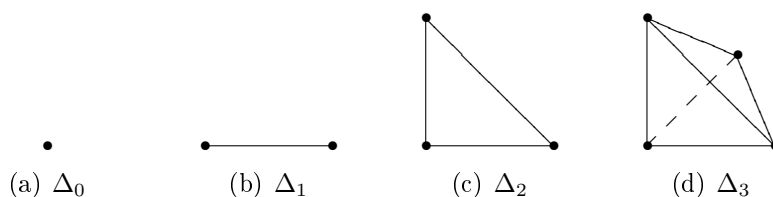


Abbildung 6.1: Die ersten vier Standardsimplizes.

Die Punkte $x_i := \sigma(e_i)$ für $i = 0, \dots, n$ nennen wir die **Eckpunkte** von σ .

Die Menge aller singulären n -Simplizes in X bezeichnen wir mit $S_n(X)$.

Weil man die singulären Simplizes auf diese Weise erhält, ist es auch möglich, einige Operationen, die wir mit ihnen durchführen werden, musterhaft auf dem Standardsimplex zu definieren und die Definition dann automatisch auf alle singulären Simplizes zu übertragen.

Deshalb ist es sinnvoll, gleich eine Sonderklasse von besonders schönen singulären Simplizes auszuzeichnen, zu der auch der Standardsimplex gehört, und für diese Klasse eine Notation einzuführen, die für die Erläuterung der Grundoperationen besonders geeignet ist.

Definition 6.3 Sei V ein Vektorraum oder allgemeiner ein affiner Raum über \mathbf{R} . Einen singulären n -Simplex σ in V nennen wir einen **linearen n -Simplex**, wenn die stetige Abbildung $\sigma: \Delta_n \rightarrow V$ die Einschränkung einer affinen Abbildung $\mathbf{R}^n \rightarrow V$ ist.

In diesem Fall ist σ eindeutig bestimmt durch seine **Eckpunkte** $v_i := \sigma(e_i)$ für $i = 0, \dots, n$, denn in baryzentrischen Koordinaten (t_0, t_1, \dots, t_n) auf Δ_n (mit $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$, also $t_0 = 1 - t_1 - \dots - t_n$) gilt die Formel

$$\sigma(t_1, \dots, t_n) = \sigma\left(\sum_{i=0}^n t_i e_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i \sigma(e_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i. \quad (6.2)$$

Zu jeder Auswahl von $n + 1$ Punkten $v_0, \dots, v_n \in V$ gibt es tatsächlich einen eindeutigen linearen Simplex σ mit diesen Punkten als Eckpunkte, definiert durch die Formel (6.2). Diese Formel definiert offensichtlich eine stetige Abbildung, die die Einschränkung einer affinen Abbildung auf ganz \mathbf{R}^n ist.

Wir notieren durch $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ den eindeutigen linearen Simplex mit Eckpunkten v_0, \dots, v_n .

Bemerkung 6.4 Man beachte, dass ein singulärer Simplex σ nicht injektiv sein muss, und keine besonderen Voraussetzungen außer Stetigkeit erfüllen muss.

Das gilt auch für lineare Simplizes: ihre Eckpunkte müssen nicht affin unabhängig sein; sie müssen noch nicht einmal verschieden sein.

Beispiel 6.5 Unser wichtigstes Beispiel eines linearen Simplexes wird der Standardsimplex selber sein, oder genauer, der singuläre Simplex id_{Δ_n} , welcher in der Notation von Definition 6.3 der lineare Simplex

$$[e_0, e_1, \dots, e_n] \in \mathbf{R}^n$$

ist.

Denn viele Operationen auf Simplizes brauchen wir nur auf diesem Musterbeispiel zu erklären, um sie sofort für alle singulären Simplizes σ zu haben, in dem wir das Muster mit der stetigen Abbildung σ auf den Simplex σ übertragen.

Die Homologiegruppen eines topologischen Raumes X wollen wir aus den singulären Simplizes in X zusammenbauen, wie wir ja schon gesagt haben. Aber anders als bei den Homotopiegruppen wird die Gruppenoperation in der Homologie nicht irgendwie aus der geometrischen Struktur der singulären Simplizes hergeleitet, wie das bei der Verkettung von Schleifen der Fall war, sondern sie wird rein algebraisch eingeführt, als eine *formale* Addition von Simplizes — wir schreiben einfach Summen von Simplizes hin, und rechnen mit ihnen nach den üblichen Gesetzen für additive abelsche Gruppen, als ob wir das dürften. Und natürlich dürfen wir das, wie Sie aus der genaueren Definition weiter unten sehen werden.

Bevor wir diese Definition aber aufschreiben, wollen wir ein paar Beobachtungen machen, die uns erlauben werden, in die Definition eine kleine Verallgemeinerung einzubauen, die die Homologietheorie etwas leistungsfähiger macht.

Bemerkung 6.6 Sei G eine additive abelsche Gruppe. Dann können wir eine Art „skalare Multiplikation“ zwischen ganzen Zahlen und Elementen von G definieren, wenn wir wie üblich für $g \in G$ und $n > 0 \in \mathbf{Z}$

$$ng := \underbrace{g + \dots + g}_n \tag{6.3}$$

setzen, $0 \cdot g := 0 \in G$ setzen und für $n < 0$ das Produkt ng als $(-n)(-g)$ im Sinne von (6.3) definieren.

Es ist nicht schwer nachzurechnen, dass diese Operation die gleichen Eigenschaften erfüllt, wie die skalare Multiplikation in einem Vektorraum; man muss dazu nur eine lästige Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens der ganzen Zahlen durcharbeiten, weshalb wir den Nachweis auch nicht vorführen.

Diese „zusätzliche“ algebraische Struktur ist eine kostenlose Beigabe zu jeder additiven abelschen Gruppe — sie hat automatisch diese skalare Multiplikation mit \mathbf{Z} , die unmittelbar aus der Gruppenaddition herleitbar ist.

Wir werden es nützlich finden, eine ähnliche Struktur zu haben auch für andere Ringe als \mathbf{Z} . Sie ist dann nicht mehr automatisch vorhanden, aber man kann verlangen, dass es sie gebe, oder algebraische Objekte konstruieren, die eine solche Struktur haben. Diese Struktur (für Ringe $R \neq \mathbf{Z}$) ist dann mehr, als nur die Struktur einer additiven abelschen Gruppe, aber es ist eine Struktur, die wir aus den Anfängervorlesungen schon gut verstehen.

Definition 6.7 Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein R -**Modul** ist eine additive abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Operation

$$\cdot: R \times M \longrightarrow M,$$

(die wir statt mit $\cdot(a, m)$ mit $a \cdot m$ oder meistens sogar noch einfacher mit am notieren), genannt die **skalare Multiplikation**, so dass gilt

- M1:** $a(bm) = (ab)m$ für alle $a, b \in R$ und $m \in M$;
- M2:** $1 \cdot m = m$ für jedes $m \in M$;
- M3:** $a(m + n) = am + an$ für alle $a \in R$ und $m, n \in M$;
- M4:** $(a + b)m = am + bm$ für alle $a, b \in R$ und $m \in M$.

Bemerkung 6.8 Die Eigenschaften eines Moduls über einen kommutativen Ring mit 1 sind genau die Vektorraumaxiome. Der einzige Unterschied ist dass der Ring der Skalare kein Körper sein muss.

Das bedeutet, dass viele Sätze über Vektorräume auch für Moduln gelten und dass man einigermaßen bequem und gewohnt mit Moduln umgehen kann.

Was aber für Moduln *nicht* gelten muss, sind alle Tatsachen über Vektorräume, in deren Herleitung die Division durch nichtverschwindende Skalare wesentlich eingeht, denn das ist nur in einem Körper generell erlaubt. Leider gehören einige der geläufigsten Eigenschaften von Vektorräumen zu dieser Klasse von Aussagen, darunter die Tatsache, dass jeder Vektorraum eine Basis hat und dass jeder Vektor in dem Vektorraum eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Basisvektoren hat.

Manche Moduln haben tatsächlich eine Basis mit eindeutiger Darstellbarkeit der Modulelemente als Linearkombination von Basiselementen, aber die meisten Moduln eben nicht.

Trotzdem ist die Modultheorie so ähnlich der Vektorraumtheorie, dass wir auf eine detaillierte Erläuterung verzichten können. Natürlich werden wir trotzdem auf die Unterschiede zur Vektorraumtheorie eingehen, wo wir ihnen in unserer Verwendung von Moduln begegnen.

Auch Definitionen von geläufigen Grundbegriffen wie Untermoduln, R -lineare Abbildungen (auch R -Modul Homomorphismen genannt), sowie ihr Kern und ihr Bildmodul, direkte Summen von Moduln, und Quotienten von Moduln setzen wir ohne weiteres voraus, weil sie praktisch wortgleich sind mit den entsprechenden Definitionen für Vektorräume.

Moduln kann man durchaus auch über nichtkommutative Ringe oder Ringe ohne 1 definieren (dann wird Axiom M2 allerdings sinnlos), aber in der Homologietheorie wird es uns reichen, wenn wir uns auf den angenehmeren Fall von kommutativen Ringen mit 1 beschränken.

Wenn R zufällig ein Körper ist, dann sind die Moduln über R natürlich genau die R -Vektorräume.

Beispiele 6.9 a) Jede additive abelsche Gruppe ist nach Bemerkung 6.6 ein Modul über \mathbf{Z} .

b) Jeder kommutative Ring R mit 1 ist ein Modul über sich selbst, mit der Ringmultiplikation als die skalare Multiplikation.

c) Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei X eine beliebige Menge. Sei R^X die Menge aller mengentheoretischen Funktionen $f: X \rightarrow R$. Wir können wie üblich auf R^X eine R -Modul Struktur definieren, in dem wir die Addition und skalare Multiplikation auf jeden Wert der beteiligten Funktionen ausführen, um den Wert der Ergebnisfunktion an der entsprechenden Stelle zu bestimmen. D.h., für Funktionen f und $g: X \rightarrow R$ und für $r \in R$ setzen wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und

$$(r \cdot f)(x) := r \cdot (f(x))$$

für jedes $x \in X$. Dies erfüllt die Eigenschaften von Definition 6.7, weil wir für jedes $x \in X$ die R -Modul-Operationen von Teil b) ausführen, die diese Eigenschaften erfüllen.

Wir können X als eine Teilmenge von R^X auffassen, wenn wir jedes $x \in X$ mit seiner **charakteristischen Funktion** χ_x mit

$$\chi_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } y = x; \\ 0, & \text{wenn } y \neq x \end{cases}$$

identifizieren.

Wir werden jetzt für einen topologischen Raum X nicht nur seine Homologiegruppen konstruieren, sondern wir werden allgemeiner für jeden kommutativen Ring R mit 1 dem Raum X Homologiemoduln über R zuweisen, die wir die *Homologie von X mit Koeffizienten in R* nennen.

Der Ausgangspunkt dieser Konstruktion ist der R -Modul aller *formalen R -Linearkombinationen* von singulären n -Simplizes in X . Wir werden gleich eine etwas genauere Definition davon geben.

Definition 6.10 Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei X eine Menge. Wir setzen

$$F(X) := \{ f \in R^X \mid f(x) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } x \in X \}.$$

Offensichtlich ist dies ein R -Untermodul von R^X , denn die Summe von zwei Funktionen, die nur an endlich vielen Stellen Werte ungleich 0 annehmen, nimmt nur dort Werte ungleich 0 an, wo einer der Summanden dies tut, und das sind immer noch insgesamt nur endlich viele Stellen. Ein skalares Vielfaches einer Funktion, die nur an endlich vielen Stellen einen Wert ungleich 0 annimmt, nimmt wieder höchstens an diesen Stellen einen Wert ungleich 0 an.

Also ist $F(X)$ ein R -Modul. Er heißt der **freie R -Modul erzeugt durch die Menge X** .

Für die Elemente von $F(X)$ führen wir eine alternative suggestive Schreibweise ein: das Element $f \in F(X)$ notieren wir auch mit

$$\sum_{x \in X} f(x) \cdot x. \tag{6.4}$$

Zunächst dürfen wir dies nicht wirklich als eine Summe verstehen (was soll da eigentlich addiert werden?), sondern nur als eine alternative Notation für die Funktion f , in der alle Werte der Funktion als die Koeffizienten der formalen Summe auftreten.

Aber in Beispiel 6.9 c) haben wir gesehen, dass wir jedes $x \in X$ mit seiner charakteristischen Funktion $\chi_x \in R^X$ identifizieren können, und diese nimmt nur *einen* Wert $\neq 0$ an und gehört somit zu $F(X)$. Für $x \in F(X)$ hat die Darstellung (6.4) Koeffizient 1 bei x und 0 bei allen anderen Summanden.

Für ein beliebiges Element $f \in F(X)$ sind in (6.4) nur endlich viele der Koeffizienten ungleich 0, und aus diesem Grund kann man (6.4) auch als eine endliche Linearkombination der Elemente aus $X \subseteq F(X)$ lesen, wobei man sich leicht anhand der Einbettung von X in $F(X)$ überzeugt, dass diese Lesart das gleiche Element liefert, wie die Lesart als formale Notation für die Funktion f . Nämlich, für jedes einzelne $x_0 \in X$ ist $f(x_0) \cdot x_0$ die Funktion,

die bei x_0 den Wert $f(x_0) \cdot 1 = f(x_0)$ annimmt, und überall sonst den Wert 0. Addiert man diese Funktionen für die endlich vielen x_0 , bei denen f einen nichtverschwindenden Wert annimmt, erhält man genau die Funktion f .

Man überzeugt sich ferner leicht anhand der Definition, dass man mit den formalen Summen (6.4) wie gewohnt rechnen kann. D.h., die Addition und die skalare Multiplikation formaler Summen, ausgeführt in der Untermodulstruktur von $F(X) \subseteq R^X$, verhalten sich nach den üblichen Regeln der kommutativen Algebra (genauer, nach den üblichen Regeln der Moduln über kommutative Ringe mit 1).

Lemma 6.11 *Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei X eine Menge. Wir betrachten X als eine Teilmenge des freien R -Moduls $F(X)$.*

- a) *Jedes Element von $F(X)$ hat eine eindeutige Darstellung (6.4) als endliche R -Linearkombination von Elementen von X , und jeder Ausdruck (6.4), in der nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0 sind, bestimmt ein eindeutiges Element von $F(X)$.*
- b) *Sei M ein beliebiger R -Modul. Jede mengentheoretische Abbildung $\varphi: X \longrightarrow M$ bestimmt eine eindeutige R -lineare Abbildung*

$$g_\varphi: F(X) \longrightarrow M,$$

so dass $g_\varphi|_X = \varphi$. Sie ist gegeben durch die Formel

$$g_\varphi\left(\sum_{x \in X} r_x x\right) = \sum_{x \in X} r_x \varphi(x) \quad (6.5)$$

(hier sind die $r_x \in R$ und nur endlich viele von ihnen sind $\neq 0$).

Beweis. a) gilt für jedes $f \in F(X)$, weil die Koeffizienten von (6.4) alle Werte von f auflisten, und weil wir schon gesehen haben, dass man (6.4) tatsächlich als endliche Linearkombination in $F(X)$ lesen darf.

Zu b): Wegen der Linearität und weil die Darstellung (6.4) der Elemente von $F(X)$ sie tatsächlich als eine endliche Linearkombination von Elementen von X beschreibt, muss eine R -lineare Abbildung g_φ , deren Einschränkung auf X gleich φ ist, für ein allgemeines Element von $F(X)$ den Wert in (6.5) annehmen, und diese Formel bestimmt den Wert von g_φ auf jedem Element von $F(X)$ eindeutig.

Andererseits rechnet man sofort nach, dass für jede Funktion $\varphi: X \longrightarrow M$ die Formel (6.5) tatsächlich eine R -lineare Abbildung $F(X) \longrightarrow M$ definiert. Und diese erweitert φ , weil für $x_0 \in X$ und wenn die Koeffizienten von (6.5)

der charakteristischen Funktion χ_{x_0} entsprechen, also wenn $r_{x_0} = 1$ und $r_x = 0$ sonst, die rechte Seite sich zu $1 \cdot \varphi(x_0)$ reduziert.

Es gibt also genau eine R -lineare Abbildung, die φ erweitert. ■

Bemerkung 6.12 Wir wollen jetzt die Konstruktion der Homologiegruppen oder Homologiemoduln durchführen, aber um die Darstellung nicht mit überflüssigen Details zu überladen, wollen wir, sofern nichts anderes an gelegentlichen Stellen gesagt wird, im Folgenden immer davon ausgehen, dass wir einen festen kommutativen Ring R mit 1 ausgewählt haben, und dass alle algebraischen Objekte, die wir konstruieren, Moduln über diesen Ring sind und alle Homomorphismen R -Modul Homomorphismen, also R -lineare Abbildungen sind.

Um die Sprache möglichst einfach zu halten und die Aufmerksamkeit nicht von den wesentlichen Details zu lenken, werden wir sogar so tun, als wäre dieser Ring \mathbf{Z} . D.h., wir werden statt von Moduln und linearen Abbildungen nur von additiven abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen sprechen, und dementsprechend auch die Homologiegruppen eines topologischen Raumes konstruieren. Trotzdem ist alles, was wir machen, genauso anwendbar auf den Fall eines anderen Koeffizientenringes als \mathbf{Z} , und wir werden uns zu gegebener Zeit ohne weitere Erklärung darauf berufen.

Aus diesem Grund werden wir auch in der Notation den Ring nicht erwähnen. Die n -te Homologiegruppe des Raumes X wird zum Beispiel einfach mit $H_n(X)$ bezeichnet. Wenn wir aber später doch speziell einen anderen Ring R als Koeffizientenring wählen wollen, schreiben wir stattdessen $H_n(X; R)$. Entsprechendes gilt für alle Gruppen, die in den Zwischenschritten während der Konstruktion der Homologie definiert werden.

Definition 6.13 Sei X ein topologischer Raum und sei $n \in \mathbf{N}$.

- a) Die n -te **singuläre Kettengruppe** von X ist die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären n -Simplizes in X erzeugt wird, also die Gruppe

$$C_n(X) := F(S_n(X)).$$

Sie besteht aus allen formalen endlichen Summen von singulären n -Simplizes. Die Elemente von $C_n(X)$ heißen **singuläre n -Ketten** in X .

- b) Sei Y ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sei $\sigma \in S_n(X)$; dann ist σ eine stetige Abbildung $\Delta_n \rightarrow X$. Setze

$$f_\#(\sigma) := f \circ \sigma: \Delta_n \rightarrow Y. \quad (6.6)$$

Dies ist ein singulärer n -Simplex in Y . Also induziert f eine mengentheoretische Abbildung $f_{\#}: S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$.

Nach Lemma 6.11 b) gibt es eine eindeutige Erweiterung von dieser Abbildung zu einem Gruppenhomomorphismus $f_{\#}: C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ (den wir auch $f_{\#}$ oder formaler und genauer $C_n(f)$ nennen), gegeben durch

$$f_{\#}\left(\sum_{\sigma \in S_n(X)} n_{\sigma} \sigma\right) = \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_{\sigma} (f \circ \sigma),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite eine endliche Linearkombination von singulären Simplizes in Y ist.

Bemerkung 6.14 Seien X ein topologischer Raum und sei $n \in \mathbf{N}$. Aus (6.6) ist klar, dass

$$C_n(\text{id}_X) = (\text{id}_x)_{\#} = \text{id}_{C_n(X)}.$$

Entsprechend, wenn Y und Z weitere topologische Räume sind und wenn $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen sind, dann folgt sofort aus (6.6), dass

$$C_n(g \circ f) = (g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} = C_n(g) \circ C_n(f).$$

Das heißt, die Zuordnung $X \mapsto C_n(X)$ und $f \mapsto f_{\#} = C_n(f)$ bildet für jedes $n \in \mathbf{N}$ einen kovarianten Funktor $C_n: \text{Top} \longrightarrow \text{AbGp}$.

Neben den einzelnen Kettengruppen ist auch eine bestimmte Abbildung $C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ wichtig, die wir nun definieren wollen. Dazu betrachten wir zunächst den Standard- n -Simplex:

Definition 6.15 Sei $n \in \mathbf{N}$ und sei $0 \leq i \leq n$.

- a) Die *i -te Seite* $\Delta_n^{(i)}$ von Δ_n ist der lineare $n-1$ Simplex in $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$, der als Ecken alle Ecken von Δ_n hat, bis auf die i -te e_i . In anderen Worten,

$$\Delta_n^{(i)} := [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n]. \quad (6.7)$$

Abbildung 6.2 zeigt die Seiten der eins- und zweidimensionalen Standardsimplizes.

- b) Sei X ein topologischer Raum und sei $\sigma \in S_n(X)$ ein singulärer n -Simplex in X . Wir definieren die *i -te Seite* $\sigma^{(i)}$ von σ als

$$\sigma^{(i)} := \sigma_{\#}(\Delta_n^{(i)}) = \sigma \circ \Delta_n^{(i)}. \quad (6.8)$$

Dies ist ein singulärer $(n-1)$ -Simplex in X .

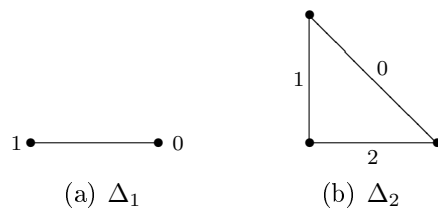


Abbildung 6.2: Die Seiten der Standardsimplizes.

Notation 6.16 Wir werden es in Zukunft oft mit Ausdrücken wie die rechte Seite von (6.7) zu tun haben, in denen aus einer Liste von Koordinaten oder dergleichen ein oder zwei Elemente weggelassen werden.

In diesen Fällen ist die Schreibweise von (6.7) sehr unhandlich. Üblich ist es deshalb, solche „Listen mit Auslassungen“ zu notieren, indem man alle Elemente der vollen Liste hinschreibt, aber ein Dachakzent $\hat{}$ über die Elemente setzt, die auszulassen oder zu überspringen sind.

In dieser Notation, die wir fortan verwenden werden, ist

$$\Delta_n^{(i)} := [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n].$$

Bemerkung 6.17 Sei V ein reeller affiner Raum und seien v_0, v_1, \dots, v_n Punkte von V . Dann folgt sofort aus (6.8) und der Definition des linearen Simplexes $[v_0, \dots, v_n]$, dass

$$[v_0, \dots, v_n]^{(i)} = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]. \quad (6.9)$$

Bemerkung 6.18 Sei X ein topologischer Raum, sei $n \in \mathbf{N}$ und sei σ ein singulärer n -Simplex in X . Sei $0 \leq i < j \leq n$.

Dann ist

$$(\sigma^{(j)})^{(i)} = (\sigma^{(i)})^{(j-1)} = \sigma_{\sharp}([e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n]). \quad (6.10)$$

Denn nach Definition der Seiten eines singulären Simplexes σ reicht es, diese Operationen auf dem Standardsimplex Δ_n auszuführen und das Ergebnis mit σ_{\sharp} nach X zu übertragen, und nach Bemerkung 6.17 erhält man die k -te Seite eines linearen Simplexes, in dem man aus der Liste der Ecken die k -te Ecke entfernt.

Wir haben $i < j$, und wenn man im Simplex $\text{id}_{\Delta_n} = [e_0, \dots, e_n]$ zuerst die j -te Ecke entfernt, ist die i -te Ecke des neuen Simplexes immer noch die ursprüngliche i -te Ecke e_i , so dass

$$([e_0, \dots, e_n]^{(j)})^{(i)} = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n].$$

Entfernt man aber zuerst die i -te Ecke, so ist die ursprüngliche j -te Ecke jetzt die $j - 1$ -te, und somit erhält man das gleiche Ergebnis in der anderen Reihenfolge der Eckenentfernung als $([e_0, \dots, e_n]^{(i)})^{(j-1)}$.

Man beachte, dass Gleichung (6.10) alle Fälle der Bildung einer Seite von einer Seite eines Simplexes abdeckt, denn wenn $i \not\leq j$, so ist $j \leq i$ und (6.10) kann dann gelesen werden (mit j in der Rolle von i und $i + 1$ in der Rolle von j) als

$$(\sigma^{(i+1)})^{(j)} = (\sigma^{(j)})^{(i)} = \sigma_{\#}([e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, \widehat{e_{i+1}}, \dots, e_n]). \quad (6.11)$$

Definition 6.19 Sei X ein topologischer Raum. Sei $n \in \mathbf{N}$ und sei $\sigma \in S_n(X)$ ein singulärer n -Simplex in X .

Wir definieren den **Rand** $\partial_n \sigma$ von σ als die $(n - 1)$ -Kette gegeben durch die alternierende Summe der Seiten von σ , also:

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}. \quad (6.12)$$

Nach Lemma 6.11 b) erweitert sich diese Funktion auf $S_n(X)$ zu einem wohldefinierten Gruppenhomomorphismus $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$, genannt der **Randoperator**.

Meistens vereinfachen wir die Notation für den Randoperator zu ∂ , solange klar ist, in welcher Dimension wir gerade arbeiten.

Bemerkung und Definition 6.20 Sei $n \in \mathbf{N}$. Wir definieren den **Rand des Standard n -Simplexes** als

$$\partial_n \Delta_n := \partial_n \text{id}_{\Delta_n} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \Delta_n^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n].$$

Sei X ein topologischer Raum und sei $\sigma \in S_n(X)$ ein singulärer n -Simplex in X . Weil die Seiten $\sigma^{(i)}$ von σ nach Definition 6.15 b) die Bilder unter $\sigma_{\#}$ der entsprechenden Seiten $\Delta_n^{(i)}$ des Standardsimplexes sind, ist klar, dass

$$\partial_n \sigma = \sigma_{\#}(\partial_n \Delta_n). \quad (6.13)$$

Hier zwei sehr wichtige Grundeigenschaften des Randoperators:

Lemma 6.21 Sei X ein topologischer Raum und sei $n \in \mathbf{N}$.

- a) Sei Y ein weiterer topologischer Raum und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann kommutiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_{n-1}(Y) \end{array} \quad (6.14)$$

oder in anderen Worten: für jede Kette $c \in C_n(X)$ ist

$$\partial_n f_\#(c) = f_\#(\partial_n c). \quad (6.15)$$

- b)

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0: C_n(X) \longrightarrow C_{n-2}(X), \quad (6.16)$$

d.h., der Rand eines Randes ist immer 0.

Beweis. a): Es reicht, (6.15) für einzelne Simplexes σ als c nachzuprüfen. Aber nach (6.13) und der Definition von $f_\#$ haben wir wie behauptet

$$\partial(f_\#(\sigma)) = \partial(f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)_\#(\partial\Delta_n) = f_\#(\sigma_\#(\partial\Delta_n)) = f_\#(\partial\sigma).$$

b): Nach (6.13) und Teil a) reicht es, die Behauptung für id_{Δ_n} nachzuweisen, also zu zeigen, dass $\partial_{n-1}(\partial_n(\Delta_n)) = 0$.

Wir haben

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}(\partial_n(\Delta_n)) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \Delta_n^{(j)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{j=0}^n (-1)^j (\Delta_n^{(j)})^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} (\Delta_n^{(j)})^{(i)}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Dies ist eine Linearkombination von zweifachen Seiten (also Seiten von Seiten) von Δ_n , und nach Bemerkung 6.18 erscheint jede zweifache Seite $[e_0, \dots, \widehat{e_p}, \dots, \widehat{e_q}, \dots, e_n]$ von Δ_n (mit $0 \leq p < q \leq n$) zweimal in der Summation (6.17): einmal mit Vorzeichen $(-1)^{p+q}$ im Summanden für $i = p$ und $j = q$, und einmal mit Vorzeichen $(-1)^{p+q-1}$ im Summanden für $i = q - 1$ und $j = p$.

Diese beiden Beiträge heben sich wegen des verschiedenen Vorzeichens weg. Also ist die Gesamtsumme (6.17) gleich 0. \blacksquare

Aus Eigenschaft 6.21 a) erhalten wir nun den Homologiefunktor:

Definition 6.22 Sei X ein topologischer Raum und sei $n \in \mathbf{N}$.

Dann ist

$$Z_n(X) := \text{Ker } \partial_n$$

eine Untergruppe von $C_n(X)$. Wir nennen $Z_n(X)$ die n -te **Zyklengruppe** von X , und seine Elemente, also die singulären Ketten c mit $\partial_n c = 0$, nennen wir n -**Zyklen** von X .

Auch

$$B_n(X) := \text{Bild } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X))$$

ist eine Untergruppe von $C_n(X)$. Wir nennen $B_n(X)$ die n -te **Rändergruppe** von X , und seine Elemente, also die singulären Ketten $\partial_{n+1}c$ für $c \in C_{n+1}(X)$, nennen wir n -**Ränder** oder **Randketten** von X .

Weil aber $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, gilt immer $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$.

Die Quotientengruppe

$$H_n(X) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

heißt die n -te **singuläre Homologiegruppe** von X .

Liest man die Definition wörtlich wie sie hier steht, haben wir genauer die n -te Homologiegruppe von X mit Koeffizienten in \mathbf{Z} definiert, aber wie in Bemerkung 6.12 schon gesagt, wenn man die Kettengruppen $C_n(X)$ hier als die Ketten mit Koeffizienten in einem vorgegebenen Ring R versteht, so kann man diese Definition auch lesen als die Definition der n -ten Homologiegruppe $H_n(X; R)$ von X mit Koeffizienten in R .

Jede Homologieklass in $H_n(X)$ ist eine Äquivalenzklasse von n -Zyklen im Quotienten nach der Rändergruppe. Dabei sind zwei Zyklen z und z' genau dann äquivalent, wenn ihre Differenz $z - z'$ ein Rand ist. Diese Äquivalenzklasse auf der Zyklengruppe heißt auch **Homologie**, und wir sagen dann, z ist **homolog** zu z' und schreiben $z \sim z'$.

Genau dann ist ein Zyklus z selber ein Rand, wenn $z \sim 0$. In diesem Fall sagen wir auch, z ist **nullhomolog**.

Lemma und Definition 6.23 Seien X und Y topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sei $n \in \mathbf{N}$.

Wegen der Beziehung $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$ aus Lemma 6.21 a) ist klar, dass

$$f_{\#}(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y) \quad (6.18)$$

und

$$f_{\#}(B_n(X)) \subseteq B_n(Y). \quad (6.19)$$

Deshalb induziert $f_{\sharp} = C_n(f)$ einen wohldefinierten Homomorphismus

$$f_* = H_n(f): H_n(X) \longrightarrow H_n(Y),$$

so dass für jeden n -Zyklus $z \in Z_n(X)$ gilt $f_*([z]) = [f_{\sharp}(z)]$.

Mit dieser Zuordnung wird H_n zu einem kovarianten Funktor $Top \longrightarrow AbGp$.

Beweis. Die Behauptungen (6.18) und (6.19) sind klar aus (6.15), so dass f_{\sharp} einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus $H_n(f)$ zwischen den Quotienten $H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ induziert. Wir müssen nur zeigen, dass die Zuordnung H_n für Räume und stetige Abbildungen tatsächlich die Eigenschaften eines Funktors erfüllt.

H_n ordnet jedem topologischen Raum, also jedem Objekt von Top , ein Objekt von $AbGp$, also eine abelsche Gruppe zu, und jedem Top -Morphismus, d.h., jeder stetigen Abbildung zwischen zwei Räumen, einen Gruppenhomomorphismus zwischen den entsprechenden Homologiegruppen.

Weil aber nach Bemerkung 6.14 schon $f_{\sharp} = C_n(f)$ ein Funktor ist, gilt

$$H_n(\text{id}_X) = \text{id}_{H_n(X)},$$

da $H_n(\text{id}_X)$ von $(\text{id}_X)_{\sharp} = \text{id}_{C_n(X)}$ induziert wird, und für stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ gilt

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f),$$

weil schon gilt $(g \circ f)_{\sharp} = g_{\sharp} \circ f_{\sharp}$.

Damit sind auch bezüglich der Wirkung auf Morphismen alle funktorielle Eigenschaften aus Definition 1.10 b) nachgewiesen. ■

Es lohnt sich, diese Definition der Homologie kurz Revue passieren zu lassen. Wir haben $H_n(X)$ nicht direkt aus der topologischen Struktur des Raumes X definiert, sondern zunächst eine Hilfskonstruktion dazwischengeschaltet, nämlich die Konstruktion der singulären Kettengruppen, und die Konstruktion der Homologie somit in zwei Stufen vorgenommen.

An dieser Trennung in zwei Stufen wollen wir festhalten, da sie einen großen Vorteil bietet — wenn man eine Stufe fixiert aber die andere variiert, erhält man eine große Anzahl von verschiedenen Homologiefunktoren, die man aber alle gleichzeitig untersuchen kann, ohne auf ihre Einzelheiten eingehen zu müssen, indem man die Theorie der festen und invariablen Stufe der Homologiekonstruktion entwickelt. (Das verhält sich etwa so wie beim Autobau, wo am Ende der Produktionsstraße die Karosserie auf den Unterbau aufgesetzt wird. Es gibt nicht für jedes produzierte Modell eine

eigene Produktionsstraße, sondern nur eine für die ganze Produktion, wobei verschiedene Unterbauvarianten (Motor, Fahrgestell, Räder usw.) mit verschiedenen aber jeweils passenden Karosserien (verschiedene Formen und Farben) kombiniert werden. Oder denken Sie an den Drucker, der an Ihrem Computer angeschlossen ist, der mit einem einheitlichen Druckkopf je nach Einstellung und je nach der eingefütterten Papiersorte Textdokumente oder Hochglanzfotos drucken kann.)

Bei der Homologie ist die variable Stufe die erste, also die Konstruktion der Kettengruppen, die man auf verschiedene Weisen vornehmen kann, wie wir schon bald sehen werden. Die feste Stufe ist die zweite, die Konstruktion der Homologie aus den Kettengruppen mit ihren Randoperatoren. Um diese Stufe für sich betrachten zu können, führen wir geeignete neue Objekte und Kategorien ein.

Definition 6.24 a) Ein **Kettenkomplex** $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ist eine Folge

$$C = \{ C_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

von additiven abelschen Gruppen C_n (genannt die **Kettengruppen** von \mathcal{C} , wobei C_n die *n -te Kettengruppe* oder die *Kettengruppe in Dimension n* genannt wird) zusammen mit einer Folge

$$\partial = \{ \partial_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen

$$\partial_n: C_n \longrightarrow C_{n-1},$$

so dass für jedes $n \in \mathbf{Z}$ gilt

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0: C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}. \quad (6.20)$$

Wir nennen ∂_n den *n -ten Randoperator* oder die *n -te Randabbildung* des Kettenkomplexes \mathcal{C} .

b) Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ zwei Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist eine Folge $f = \{ f_n \}_{n \in \mathbf{Z}}$ von Gruppenhomomorphismen

$$f_n: C_n \longrightarrow D_n,$$

so dass für jedes $n \in \mathbf{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_{n+1} \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

kommutiert, d.h.,

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n. \quad (6.21)$$

In anderen Worten, Kettenabbildungen sind Folgen von Gruppenhomomorphismen zwischen den Kettengruppen entsprechender Dimension der beiden Kettenkomplexe, die mit dem Randoperator verträglich sind, d.h., mit dem Randoperator kommutieren.

Bemerkung 6.25 Vielleicht wundert es Sie, dass wir in Definition 6.24 auch negative Dimensionen für Kettengruppen zulassen, d.h., darüber, dass ein Kettenkomplex $\mathcal{C} = (C, \partial)$ Kettengruppen C_n für jedes $n \in \mathbf{Z}$ hat und nicht nur für $n \in \mathbf{N}$. Vielleicht haben Sie das für einen Druckfehler gehalten, da der singuläre Kettenkomplex eines Raumes, das einzige Beispiel eines Kettenkomplexes, das wir bisher kennen, nur in nichtnegativen Dimensionen Kettengruppen besitzt.

Es handelt sich aber nicht um einen Fehler und wir wollen ausdrücklich auch für $n < 0$ nichttriviale Kettengruppen C_n zulassen, weil das doch manchmal Anwendungen hat. Nur um ein Beispiel zu nennen: wir werden später eine duale Art von Homologie betrachten, in der der Randoperator „in der anderen Richtung“ läuft, also in Richtung steigender Dimension. Die Theorie dafür haben wir dann schon parat, wenn wir einfach alle Dimensionen negieren (so dass in der singulären Theorie nur *nichtpositive* Dimensionen auftreten) und dann die normale Theorie auf den „gespiegelten“ Kettenkomplex anwenden.

Dass wir für die übliche singuläre Homologietheorie keine negativdimensionalen Kettengruppen definiert haben ist kein Widerspruch — diese Gruppen sind im singulären Kettenkomplex alle gleich $\{0\}$ zu setzen.

Bemerkung und Definition 6.26 Die Kettenkomplexe und die Kettenabbildungen zwischen ihnen bilden die Objekte und Morphismen einer neuen Kategorie KK , der *Kategorie der Kettenkomplexe und Kettenabbildungen*.

Um sicherzugehen, dass wir wirklich eine Kategorie erhalten, müssen wir die Eigenschaften aus der Definition 1.1 der Kategorien nachweisen.

- a) Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$, $\mathcal{D} = (D, \partial')$, und $\mathcal{E} = (E, \partial'')$ Kettenkomplexe und seien $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ Kettenabbildungen. Dann ist f eine Folge von Gruppenhomomorphismen $f_n: C_n \rightarrow D_n$ und g ist eine Folge von Gruppenhomomorphismen $g_n: D_n \rightarrow E_n$ in den einzelnen Dimensionen.

Wir definieren

$$g \circ f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$$

als die Folge der Gruppenhomomorphismen

$$g_n \circ f_n: C_n \rightarrow E_n.$$

Man prüft sofort mit (6.21) nach, dass $g \circ f$ auch eine Kettenabbildung ist. Sie heißt die **Verknüpfung** der Kettenabbildungen f und g .

- b) Sei $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ein Kettenkomplex. offensichtlich ist

$$\text{id}_{\mathcal{C}} := \{ \text{id}_{C_n} \}_{n \in \mathbf{Z}}$$

eine Kettenabbildung $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, genannt die **Identität** des Kettenkomplexes \mathcal{C} . Sie hat die Eigenschaft, dass $f \circ \text{id}_{\mathcal{C}} = f$ für jede Kettenabbildung $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\text{id}_{\mathcal{C}} \circ g = g$ für jede Kettenabbildung $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$.

Aus der Definition in Teil a) ist klar, dass die Verknüpfung von Kettenabbildungen assoziativ ist. Damit sind alle Eigenschaften aus Definition 1.1 nachgewiesen, und wir können sagen:

Die Kettenkomplexe bilden die Objekte einer Kategorie KK , deren Morphismen die Kettenabbildungen zwischen zwei Kettenkomplexen sind.

Beispiel und Definition 6.27 Wir haben in Lemma 6.21 gesehen, dass die singulären Kettengruppen eines topologischen Raumes X , zusammen mit dem singulären Randoperator, einen Kettenkomplex bilden (wenn man $C_n(X) := \{0\}$ setzt für $n < 0$). Diesen Kettenkomplex wollen wir mit $(C_*(X), \partial_X)$ bezeichnen; der Index „*“ ist zu verstehen als ein Platzhalter für die verschiedenen Dimensionen n der einzelnen Kettengruppen $C_n(X)$ oder als ein Zeichen, der alle Dimensionen zusammenfasst und gleichzeitig darstellt.

In Lemma 6.21 haben wir außerdem gesehen, dass für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen die induzierten Abbildungen f_{\sharp} zwischen den entsprechenden singulären Kettengruppen der beiden Räume eine Kettenabbildung

$$C_*(f) = f_{\sharp}: (C_*(X), \partial_X) \rightarrow (C_*(Y), \partial_Y)$$

bilden.

Der Kettenkomplex $(C_*(X), \partial_X)$ heißt der **singuläre Kettenkomplex** des topologischen Raumes X . Die Kettenabbildung $C_*(f) := f_\#$, die eine stetige Abbildung zwischen den singulären Kettenkomplexen ihres Quell- und Zielraumes induziert, nennen wir die **singuläre Kettenabbildung** der stetigen Abbildung f .

Weil nach Bemerkung 6.14 schon die einzelnen Kettengruppen $C_n(X)$ und die einzelnen Homomorphismen $C_n(f)$ einen Funktor $Top \rightarrow AbGp$ bilden, erfüllt auch die Zuordnung der gesamten singulären Kettenabbildung $C_*(f)$ zu einer stetigen Abbildung die funktoriellen Eigenschaften aus Definition 1.10 b).

In anderen Worten, die Zuordnung C_* , die jedem topologischen Raum X seinen singulären Kettenkomplex $(C_*(X), \partial_X)$ und jeder stetigen Abbildung f ihre singuläre Kettenabbildung $C_*(f)$ zuordnet, ist ein kovarianter Funktor $Top \rightarrow KK$.

Die Homologiekonstruktion geht eigentlich von *Kettenkomplexen* aus:

Definition 6.28 a) Sei $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ein Kettenkomplex. Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ setze

$$Z_n(\mathcal{C}) := \text{Ker } \partial_n \subseteq C_n$$

und setze

$$B_n(\mathcal{C}) := \text{Bild } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_n.$$

$Z_n(\mathcal{C})$ heißt die n -te **Zyklengruppe** des Kettenkomplexes \mathcal{C} , und seine Elemente heißen **n -Zyklen**. $B_n(\mathcal{C})$ heißt die n -te **Rändergruppe** des Kettenkomplexes \mathcal{C} , und seine Elemente heißen **n -Ränder**.

Wegen (6.20) ist jeder Rand automatisch ein Zyklus, d.h., wir haben $B_n(\mathcal{C}) \subseteq Z_n(\mathcal{C})$ für jedes n .

Die Quotientengruppe

$$H_n(\mathcal{C}) := \frac{Z_n(\mathcal{C})}{B_n(\mathcal{C})}$$

heißt die n -te **Homologiegruppe** des Kettenkomplexes \mathcal{C} .

b) Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ zwei Kettenkomplexe. Sei $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Kettenabbildung. Da f mit den Randoperatoren kommutiert wie in (6.21) und außerdem als Homomorphismus 0 in 0 abbildet, bildet f Zyklen wieder in Zyklen ab und Ränder wieder in Ränder, d.h.,

$$f(Z_n(\mathcal{C})) \subseteq Z_n(\mathcal{D}) \quad (6.22)$$

und

$$f(B_n(\mathcal{C})) \subseteq B_n(\mathcal{D}). \quad (6.23)$$

Folglich induziert f auch einen Homomorphismus

$$f_* = H_n(f): H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{D}),$$

so dass für jeden n -Zyklus $z \in Z_n(\mathcal{C})$ gilt $f_*([z]) = [f(z)]$.

Bemerkung 6.29 Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$, $\mathcal{D} = (D, \partial')$, und $\mathcal{E} = (E, \partial'')$ Kettenkomplexe und seien $f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $g: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ Kettenabbildungen. Da in jeder Dimension n nach Definition gilt

$$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n,$$

gilt diese Beziehung auch für die Einschränkungen von g_n und f_n auf die Ränder- und Zyklengruppen und somit auch für die induzierten Homomorphismen in Homologie. Wir haben also

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f).$$

Und da für jeden Kettenkomplex \mathcal{C} die identische Kettenabbildung $\text{id}_{\mathcal{C}}$ auf jeder Kettengruppe die Identität ist und somit auch auf den Zyklengruppen und Rändergruppen, induziert sie in Homologie die Identität:

$$H_n(\text{id}_{\mathcal{C}}) = \text{id}_{H_n(\mathcal{C})}.$$

Folglich ist H_n für jedes $n \in \mathbf{Z}$ ein *kovarianter Funktor* $KK \longrightarrow AbGp$.

Der singuläre Homologiefunktor $H_n: Top \longrightarrow AbGp$ ist nichts anderes als die Verknüpfung des singulären Kettenkomplexfunktors $C_*: Top \rightarrow KK$ aus Beispiel und Definition 6.27 mit dem Homologiefunktor $H_n: KK \rightarrow AbGp$ aus Definition 6.28 und der jetzigen Bemerkung.

Wir werden bald neben dem singulären Kettenkomplex eines topologischen Raumes weitere Beispiele von kettenkomplexwertigen Funktoren kennen lernen, die uns dann, verknüpft mit dem Homologiefunktor auf Kettenkomplexen, weitere Homologiegruppen liefern werden.

Vorher wollen wir uns aber das Leben ein bisschen bequemer machen. Kettenkomplexe sind, wie wir gesehen haben, wesentliche Grundobjekte der Homologietheorie, aber schon jetzt können Sie sehen, dass sie ein bisschen unhandlich sind, weil sie aus unendlich vielen Gruppen und Randhomomorphismen bestehen. Aus diesem Grund werden wir sie in eine Art Kapsel packen,

eine einzelne Gruppe, die die Kettengruppen in allen Dimensionen gleichzeitig in sich birgt und somit ermöglicht, sie alle auf einmal und einheitlich zu behandeln. Der Trick (der nicht nur für Kettengruppen funktioniert, sondern für beliebige Folgen von abelschen Gruppen) ist ganz einfach: wir machen aus einer Folge von Gruppen die entsprechende Reihe, d.h., wir bilden als Kodierung für die Folge die direkte Summe der beteiligter Gruppen, und wir lassen nur Homomorphismen zu, die diese Summenstruktur respektieren, so dass wir die einzelnen Kettengruppen und die einzelnen Homomorphismen zwischen ihnen jederzeit aus dem Kapsel wieder herausholen können.

Definition 6.30 Eine *graduierete abelsche Gruppe* ist eine abelsche Gruppe G zusammen mit einer direkten Summenzerlegung

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n. \quad (6.24)$$

Jede einzelne Gruppe G_n in dieser Summenzerlegung heißt die *n -te Stufe* oder der *n -te homogene Anteil* der graduierten abelschen Gruppe G . Diese Gruppen sind alle auch Untergruppen von G .

Seien $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ und $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$ graduierte abelsche Gruppen und sei $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen f *graduieret von Grad $k \in \mathbf{Z}$* oder eine *Grad- k Abbildung*, wenn für jedes $n \in \mathbf{Z}$ gilt

$$f(G_n) \subseteq H_{n+k}.$$

In diesem Fall und genau in diesem Fall ist $f_n := f|_{G_n}$ ein Gruppenhomomorphismus

$$f_n: G_n \rightarrow H_{n+k},$$

den wir die *n -te Stufe* oder den *n -ten homogenen Anteil* von f nennen.

Man beachte, dass die Verknüpfung eines graduierten Homomorphismus von Grad k mit einem graduierten Homomorphismus von Grad l offensichtlich wieder ein graduierter Homomorphismus ist, und zwar von Grad $k + l$. Und die Identität id_G einer graduierten abelschen Gruppe G ist graduieret von Grad 0.

Somit bilden die graduierten abelschen Gruppen und die graduierten Homomorphismen die Objekte und Morphismen einer Kategorie GAG , der *Kategorie der graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen*.

Da die Verknüpfung von zwei Grad-0 Abbildungen wieder Grad 0 hat, und da die Identität id_G eine Grad-0 Abbildung ist, erhalten wir eine Unterkategorie GAG_0 von GAG , die die gleichen Objekte wie GAG hat, aber

die nur die Grad-0 Abbildungen (und nicht alle graduierten Homomorphismen) als Morphismen zulässt. Wir nennen diese Kategorie die **Kategorie der graduierten abelschen Gruppen und Grad-0 Abbildungen**.

Bemerkung und Definition 6.31 Sei $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ eine graduierte abelsche Gruppe und sei $a \in G$. Dann schreibt sich a auf eindeutige Weise als eine (im Wesentlichen endliche) Summe

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n, \quad (6.25)$$

wo jedes $a_n \in G_n$ und nur endlich viele $a_n \neq 0$. Wir nennen a_n die ***n-te Stufe*** oder den ***n-ten homogenen Anteil*** von a .

Die Nützlichkeit von graduierten abelschen Gruppen rührt daher, dass die üblichen Operationen, die man mit Gruppen macht (Bildung von Untergruppen, von Quotienten, von Kern und Bild eines Homomorphismus, usw.) bei graduierten abelschen Gruppen „stufenweise“ wirken, so dass man sie gleichzeitig auf alle Einzelstufen einer graduierten abelschen Gruppe ausführen kann, indem man sie auf die ganze Gruppe anwendet; das Ergebnis für die einzelnen Stufen ist trotzdem aus dem Gesamtergebnis wieder auslesbar. Das gibt uns eine sehr effiziente und knappe Notation für die Anwendung solcher Operationen auf alle Glieder einer Folge von Gruppen.

Bemerkung und Notation 6.32 Seien $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ und $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$ graduierte abelsche Gruppen und sei $f: G \rightarrow H$ ein graduierter Homomorphismus von Grad k . Für jedes

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \in G$$

ist

$$f(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a_n) \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_{n+k} = H, \quad (6.26)$$

denn die Darstellung (6.25) für a ist eine endliche Summe (nur endlich viele Summanden auf der rechten Seite sind $\neq 0$) und f ist ein Gruppenhomomorphismus.

In anderen Worten,

$$(f(a))_n = f_{n-k}(a_{n-k}) \quad (6.27)$$

für jedes $n \in \mathbf{Z}$.

Aus (6.26) und (6.27) ist klar, dass die homogenen Anteile f_n eines graduierten Homomorphismus f diesen eindeutig bestimmen. Andererseits kann man für jede Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ von Homomorphismen

$$f_n: G_n \longrightarrow H_{n+k}$$

(für ein fest gewähltes k) mit Formel (6.26) eine wohldefinierte Abbildung $f: G \longrightarrow H$ definieren. Das gilt auch wenn unendlich viele der $f_n \neq 0$ sind, denn für jedes einzelne $a \in G$ sind alle bis auf endlich viele $a_n = 0$, und somit sind alle bis auf endlich viele $f_n(a_n) = 0$, da die f_n Homomorphismen sind. Die rechte Seite von (6.26) ist also *immer* eine endliche Summe.

Man prüft leicht nach, dass diese Abbildung f ein graduierter Homomorphismus von Grad k ist, mit den vorgegebenen f_n als seine homogenen Anteile.

Es gibt also eine Bijektion zwischen den Grad- k Abbildungen $G \longrightarrow H$ und den Folgen von Homomorphismen $f_n: G_n \longrightarrow H_{n+k}$.

Den eindeutigen graduierten Homomorphismus f mit den homogenen Anteilen $\{f_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ werden wir in Zukunft mit

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n \quad \text{oder} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$$

notieren.

Definition 6.33 Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe und sei $A \subseteq G$ eine Untergruppe von G .

Wir nennen A eine **graduierete Untergruppe** von G genau dann, wenn

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (A \cap G_n).$$

In diesem Fall ist A selber eine graduierte abelsche Gruppe mit Stufen

$$A_n := A \cap G_n \subseteq G_n$$

Lemma 6.34 Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe.

- a) Sei $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ eine graduierte abelsche Gruppe, so dass für jedes $n \in \mathbf{Z}$ gilt $A_n \subseteq G_n$. Dann ist $A_n = A \cap G_n$ für jedes $n \in \mathbf{N}$, und somit ist A eine graduierte Untergruppe von G .

In anderen Worten, die graduierten Untergruppen von G sind genau die graduierten abelschen Gruppen, deren sämtliche Stufen Untergruppen der entsprechenden Stufen von G sind.

- b) Sei $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ eine graduierte Untergruppe von G und sei $g \in G$ mit homogenen Anteilen $g_n \in G_n$ für $n \in \mathbf{Z}$. Dann ist $g \in A$ genau dann, wenn $g_n \in A_n$ für jedes $n \in \mathbf{Z}$.
- c) Sei $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$ eine weitere graduierte abelsche Gruppe und sei $f: G \rightarrow H$ ein graduierter Homomorphismus von Grad k .

- i) $\text{Ker } f$ ist eine graduierte Untergruppe von G und der n -te homogene Anteil von $\text{Ker } f$ ist $\text{Ker } f_n \subseteq G_n$ für jedes n .
- ii) $\text{Bild } f$ ist eine graduierte Untergruppe von H mit n -tem homogenen Anteil $\text{Bild } f_{n-k} \subseteq H_n$ für jedes n .

- d) Sei $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ eine graduierte abelsche Gruppe und $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$ eine graduierte Untergruppe von G (so dass $H_n \subseteq G_n$ für jedes $n \in \mathbf{Z}$). Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\frac{G}{H} \cong \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n}, \quad (6.28)$$

so dass wir G/H als eine graduierte abelsche Gruppe behandeln können mit Stufen G_n/H_n .

- e) Seien G und K graduierte abelsche Gruppen und sei $f: G \rightarrow H$ ein graduierter Homomorphismus von Grad k , mit homogenen Anteilen f_n . Sei H eine graduierte Untergruppe von G und sei L eine graduierte Untergruppe von K , so dass $f(H) \subseteq L$.

Dann gilt:

- i) Die Abbildung $f|_H: H \rightarrow L$ ist ein graduierter Homomorphismus von Grad k mit n -tem homogenen Anteil $f_n|_{H_n}$.
- ii) Die von f induzierte Abbildung der Quotienten $\bar{f}: G/H \rightarrow K/L$ ist vermöge der Isomorphismen (6.28) ein graduierter Homomorphismus von Grad k und sein n -ter homogener Anteil ist der von f_n induzierte Homomorphismus $\bar{f}_n: G_n/H_n \rightarrow K_{n+k}/L_{n+k}$.

Beweis. a): Sei $a \in A$. Dann hat a eine eindeutige Darstellung

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

als eine Summe von Elementen a_n der einzelnen homogenen Anteile A_n von A , und weil für jedes n gilt $A_n \subseteq G_n$, ist dies auch die eindeutige Darstellung (6.25) von a als Summe von Elementen der G_n .

$a \in G_n$ genau dann, wenn alle homogenen Anteile von a außer der n -ten gleich 0 sind, also wenn $a = a_n \in A_n$. Somit ist, wie behauptet, $A \cap G_n = A \cap A_n = A_n$.

b): Da g_n die homogenen Anteile von g sind, hat g die eindeutige Darstellung

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \quad (6.29)$$

als eine endliche Summe von Elementen der homogenen Anteile G_n von G .

Wenn alle $g_n \in A_n$, dann ist g eine endliche Summe von Elementen von A und somit selber in A .

Für die andere Richtung, wenn $g \in A$, dann hat g auch eine Darstellung

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

als endliche Summe von homogenen Anteilen $a_n \in A_n \subseteq G_n$, und wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (6.29) ist $g_n = a_n$ für alle n und somit sind alle $g_n \in A_n$.

c): Sei

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \in G,$$

wo die a_n die homogenen Anteile von a sind. Nach (6.26) und (6.27) bilden die $f_n(a_n)$ die homogenen Anteile von $f(a)$ und

$$f(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a_n) \in H. \quad (6.30)$$

$a \in \text{Ker } f$ genau dann, wenn $f(a) = 0$, und dies gilt genau dann, wenn alle homogenen Anteile $f_n(a_n)$ von $f(a)$ Null sind, also genau dann, wenn $a_n \in \text{Ker } f_n$ für alle n . Nach Teil b) ist das gleichbedeutend damit, dass $a \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } f_n$, also ist

$$\text{Ker } f = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } f_n.$$

Nach Teil a) ist $\text{Ker } f$ eine graduierte Untergruppe von G mit homogenen Anteilen $\text{Ker } f_n \subseteq G_n$. Das beweist i).

Aus Gleichung (6.30) ist klar, dass $f(G) \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$. Für die Inklusion in der anderen Richtung, sei

$$b = \sum_{m \in \mathbf{Z}} b_m \in \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n) \subseteq H.$$

Nach Teil b) ist dann jedes b_m in der m -ten Stufe von $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$, und diese ist $f_{m-k}(G_{m-k})$, da f Grad k hat. Insbesondere können wir für jedes $m \in \mathbf{Z}$ ein Element $a_{m-k} \in G_{m-k}$ finden, so dass $f_{m-k}(a_{m-k}) = b_m$. Falls $b_m = 0$ wählen wir speziell $a_{m-k} = 0$. Da nur endlich viele $b_m \neq 0$, sind somit nur endlich viele $a_{m-k} \neq 0$, und $a := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ ist ein wohldefiniertes Element von G , für das $f(a) = b$ nach (6.30) und der Wahl der a_n .

Wir haben also die Gleichheit $f(G) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_n(G_n)$ gezeigt, und nach Teil a) ist $f(G)$ eine graduierte Untergruppe von H mit $f_n(G_n) \subseteq H_{n+k}$ als $n+k$ -te Stufe für jedes n . Das beweist ii).

d): Für jedes n sei $\pi_n: G_n \rightarrow G_n/H_n$ die kanonische Projektion auf den Quotienten und sei

$$p = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_n: G \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n}.$$

Dies ist ein graduierter Homomorphismus von Grad 0 mit homogenen Anteilen π_n .

Da jedes π_n surjektiv ist, folgt aus Teil c ii), dass p surjektiv ist. Nach Teil c i) ist

$$\text{Ker } p = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Ker } \pi_n = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H_n$$

und aus dem ersten Isomorphiesatz für Quotienten induziert p einen Isomorphismus

$$\bar{p}: \frac{G}{H} \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \frac{G_n}{H_n},$$

gegeben durch

$$\bar{p}\left(\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\right]\right) = p\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_n]. \quad (6.31)$$

Zu e i): Sei $h_n \in H_n \subseteq H$. Weil f graduiert ist, ist $f(h_n) = f_n(h_n) \in K_{n+k}$. Weil $f(H) \subseteq L$, gehört $f_n(h_n)$ nach Teil b) sogar zu L_{n+k} .

Also ist $f(H_n) \subseteq L_{n+k}$ für jedes n und somit ist $f|H: H \rightarrow L$ graduiert von Grad k .

Zu e ii): Aus Teil i) folgt $f_n(H_n) \subseteq L_{n+k}$ für jedes n , und somit induziert jedes f_n einen Homomorphismus

$$\bar{f}_n: G_n/H_n \longrightarrow K_{n+k}/L_{n+k}.$$

Sei

$$g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n \in G.$$

Vermöge des Isomorphismus (6.31) und nach der Definition von \bar{f} können wir schreiben

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_n]\right) &= \bar{f}([g]) = [f(g)] \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(g_n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_n(g_n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}_n([g_n]). \end{aligned}$$

Also bezüglich der Graduierung von G/H aus Teil d) hat \bar{f} die gleiche Formel, wie die Grad- k Abbildung $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{f}_n$.

D.h., \bar{f} ist diese Abbildung und ist somit eine graduierte Abbildung von Grad k mit homogenen Anteilen \bar{f}_n . ■

Mit Hilfe der graduierten abelschen Gruppen können wir Kettenkomplexe und ihre Homologie viel prägnanter und einfacher definieren, als wir es getan haben (die neue Definition ist aber äquivalent zur alten und übersetzt sie nur in eine andere Sprache).

Definition 6.35 (Kettenkomplex und Homologie, graduiert)

- a) Ein **Kettenkomplex** $\mathcal{C} = (C, \partial)$ besteht aus einer graduierten abelschen Gruppe C und einem graduierten Homomorphismus $\partial: C \longrightarrow C$ von Grad -1 , genannt der **Randoperator**, so dass

$$\partial \circ \partial = 0 \tag{6.32}$$

(oder $\partial^2 = 0$, wie wir oft schreiben werden).

- b) Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ zwei Kettenkomplexe. Eine **Kettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist ein graduierter Homomorphismus $C \longrightarrow D$ von Grad 0, so dass

$$\partial' \circ f = f \circ \partial. \tag{6.33}$$

- c) Die Kettenkomplexe bilden, wie man leicht nachprüft, die Objekte einer Kategorie KK , deren Morphismen die Kettenabbildungen sind.
- d) Sei $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ein Kettenkomplex. Wir nennen die graduierte abelsche Gruppe

$$Z = Z(\mathcal{C}) := \text{Ker } \partial$$

die graduierte **Zyklengruppe von \mathcal{C}** und wir nennen die graduierte abelsche Gruppe

$$B = B(\mathcal{C}) := \text{Bild } \partial$$

die graduierte **Rändergruppe von \mathcal{C}** .

- e) Wegen (6.32) ist $B \subseteq Z$. Die graduierte abelsche Gruppe

$$H(\mathcal{C}) := \frac{Z}{B} \quad (6.34)$$

heißt die graduierte **Homologiegruppe** von \mathcal{C} .

- f) Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ zwei Kettenkomplexe und sei

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

eine Kettenabbildung. Aus (6.33) folgt

$$f(Z(\mathcal{C})) \subseteq Z(\mathcal{D})$$

und

$$f(B(\mathcal{C})) \subseteq B(\mathcal{D}).$$

Deshalb induziert f einen wohldefinierten Homomorphismus

$$H(f) := \bar{f}: H(\mathcal{C}) = \frac{Z(\mathcal{C})}{B(\mathcal{C})} \longrightarrow \frac{Z(\mathcal{D})}{B(\mathcal{D})} = H(\mathcal{D}),$$

der nach Lemma 6.34 e ii) auch ein graduierter Homomorphismus von Grad 0 ist. Wir nennen $H(f)$ die graduierte **Homologieabbildung** oder den graduerten **Homologiemorphismus**, der von der Kettenabbildung f induziert wird.

- g) Die graduierte Homologie ist ein Funktor

$$H: KK \longrightarrow GAG.$$

Der Nachweis der erforderlichen Eigenschaften ist trivial.

Der Vorteil dieser neuen Definition der Kettenkomplexe und ihrer Homologie ist, dass wir nun die gesamte Homologie eines Kettenkomplexes als eine einzelne graduierte abelsche Gruppe erhalten, statt einer Folge von ganz vielen Homologiegruppen $H_n(\mathcal{C})$ in allen einzelnen Dimensionen. Damit ist sehr viel einfacher und effizienter umzugehen.

Wir werden in Zukunft beide Versionen verwenden, je nachdem, welche Version für die jeweilige Betrachtung angebracht erscheint, aber in der Regel wird die bevorzugte Version die graduierte sein.

Beispiele 6.36 a) Sei G eine beliebige additive abelsche Gruppe. Wir können aus G eine offensichtlich zu G isomorphe und deshalb auch G benannte graduierte abelsche Gruppe

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

machen, indem wir $G_0 = G$ setzen und $G_m = \{0\}$ setzen für alle $m \neq 0$.

Entsprechend wird jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow H$ von additiven abelschen Gruppen zu einem Grad-0 Homomorphismus

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$$

der graduierten abelschen Gruppen $G \rightarrow H$, wenn wir $f_0 = f$ setzen und $f_m = 0$ setzen für alle $m \neq 0$ (was bleibt uns anderes übrig?). Natürlich nimmt f als Grad-0 Abbildung der graduierten abelschen Gruppen genau die gleichen Werte an, wie der ursprüngliche Homomorphismus f der ursprünglichen abelschen Gruppen.

Auf diese Weise wird $AbGp$ zu einer (sogar vollen) Unterkategorie der Kategorie GAG_0 .

b) Sei K ein Körper und seien X_1, X_2, \dots, X_m endlich viele Unbekannte. Ein **Monom** in X_1, \dots, X_m ist ein Ausdruck der Form

$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_m^{\alpha_m},$$

wo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$ ein m -Tupel von natürlichen Zahlen ist. Der **Grad** des Monoms X^α ist definiert als die natürliche Zahl

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m.$$

Sei $n \in \mathbf{N}$. Der Vektorraum $K_n[X_1, \dots, X_m]$, definiert als der freie K -Modul erzeugt von allen Monomen in X_1, \dots, X_m von Grad n , heißt der **Vektorraum der homogenen Polynome in X_1, \dots, X_m von Grad n** , und

$$K[X_1, \dots, X_m] := \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n[X_1, \dots, X_m]$$

heißt der Vektorraum der **Polynome in den Variablen X_1, \dots, X_m** .

$K[X_1, \dots, X_m]$ ist ein Beispiel einer graduierten abelschen Gruppe, aber noch besser, die formale Multiplikation

$$X^\alpha \cdot X^\beta := X^{\alpha+\beta}$$

(wo $\alpha + \beta$ in $\mathbf{N}^m \subseteq \mathbf{Z}^m$ zu verstehen ist) erweitert sich eindeutig zu einer bilinearen Abbildung

$$\cdot: K[X_1, \dots, X_m] \times K[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_m],$$

die eine Ringmultiplikation ist und $K[X_1, \dots, X_m]$ zu einem graduierten Ring macht, genannt der **Polynomring über K in den Unbekannten X_1, \dots, X_m** .

Für jeden Monom X^α ist die Multiplikation mit X^α ein graduierter Homomorphismus

$$K[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_m]$$

von Grad $|\alpha|$.

- c) Sei X ein topologischer Raum. Für $n \in \mathbf{N}$ sei $C_n(X)$ die singuläre Kettengruppe von X wie in Definition 6.13 und für jedes n sei $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$, der singuläre Randoperator aus Definition 6.19. Für $n < 0$ sei $C_n(X) := \{0\}$ und für $n \leq 0$ setze $\partial_n := 0: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$.

Wir definieren $C_*(X)$ als die graduierte abelsche Gruppe

$$C_*(X) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n(X)$$

und $\partial: C \longrightarrow C$ als den graduierten Homomorphismus

$$\partial := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \partial_n$$

von Grad -1 .

Weil die Verknüpfung von graduierten Homomorphismen offenbar stufenweise ausgerechnet werden kann (wende Gleichung (6.26) an) folgt es aus Lemma 6.21 b), dass $\partial^2 = 0$.

Also ist $\mathcal{C}(X) := (C_*(X), \partial)$ ein Kettenkomplex im Sinne von Definition 6.35. Wir nennen diesen Kettenkomplex den **singulären Kettenkomplex** des topologischen Raumes X .

Dies ist kein Widerspruch zur früheren Definition 6.27 des singulären Kettenkomplexes eines topologischen Raumes oder zur Verwendung der in Definition 6.27 schon eingeführten Notation $C_*(X)$. Es stellt lediglich die Übersetzung dieser Begriffe in die graduierte Version 6.35 von Kettenkomplexen dar.

Wenn $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so ist

$$C_*(f) = f_\# := \sum_{n=0}^{\infty} C_n(f)$$

eine Grad-0 Abbildung und wegen Lemma 6.21 a) ist sie eine Kettenabbildung im Sinne von Definition 6.35, wieder weil Verknüpfungen von graduierten Homomorphismen sich stufenweise berechnen lassen.

Wir bezeichnen die graduierte Zyklengruppe $\text{Ker } \partial$ des Kettenkomplexes $C_*(X)$ fortan mit $Z_*(X)$ und die graduierte Rändergruppe $\text{Bild } \partial$ des Kettenkomplexes $C_*(X)$ mit $B_*(X)$, und die graduierte Homologiegruppe dieses Kettenkomplexes bezeichnen wir mit $H_*(X)$ und nennen sie die (graduierte) **singuläre Homologiegruppe** des Raumes X .

Alle diese graduierten Gruppen haben die in Definition 6.22 eingeführten Zyklen-, Ränder-, bzw. Homologiegruppen von X in den einzelnen Dimensionen als ihre homogenen Anteile. Das folgt sofort aus Lemma 6.34 c) und d), und wenn $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung ist, dann folgt aus Lemma 6.34 e), dass die homogenen Anteile des von der Kettenabbildung $C_*(f)$ induzierten Grad-0 Homomorphismus

$$H_*(f) = f_* := H(C_*(f)): H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

die in den einzelnen Dimensionen induzierten Homomorphismen $H_n(f)$ aus Definition 6.23 sind.

Der neue graduierte Kettenkomplex $(C_*(X), \partial)$ und die graduierte Homologiegruppe $H_*(X)$ bringen also nichts Neues, sondern sind nur eine bequeme und nützliche Zusammenfassung der bisherigen Folge der

Homologiegruppen $H_n(X)$ zu einer einzigen Gesamtgruppe, ohne dass Details verloren gehen.

Wir haben bisher die singuläre Homologie eines topologischen Raumes nicht nur definiert, sondern die Definition ein paar Mal verfeinert zu einer sehr knappen und effizienten Formulierung. Wir werden gleich darangehen, Methoden zur Berechnung der Homologie zu entwickeln, und wir werden diese Berechnungen systematisch im nächsten Kapitel durchführen. Auch ganz einfache Beispiele werden wir deshalb auf den nächsten Abschnitt vertagen, mit einer trivialen Ausnahme:

Beispiel 6.37 Sei $X := \emptyset$ der leere topologische Raum. Dann gibt es überhaupt keine singulären Simplizes in X und somit auch keine Erzeugenden der Kettengruppe. Es folgt

$$C_*(\emptyset) = \{0\} \quad \text{und} \quad H_*(\emptyset) = \{0\}.$$

Das jetzige Kapitel wollen wir mit einem wichtigen weiteren Beispiel von einem Kettenkomplex beenden, der den Homologiebegriff auf die Kategorie Top^2 überträgt, eine Verallgemeinerung, die auch für die Berechnung der Homologie in Top erforderlich ist.

Definition 6.38 Sei (X, A) ein topologisches Raumpaard, also ein Objekt der Kategorie Top^2 (das bedeutet X ist ein topologischer Raum und A ist ein Unterraum von X). Sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion.

Sei $n \in \mathbf{N}$. Offensichtlich kann man $S_n(A)$ als eine Teilmenge von $S_n(X)$ betrachten ($i_\#$ ist die Inklusion) und somit ist $C_n(A)$ eine Untergruppe von $C_n(X)$ für jedes n .

Also ist $C_*(A)$ eine graduierte Untergruppe von $C_*(X)$; die Grad-0 Abbildung $i_\# = C_*(i)$ ist die Inklusion $C_*(A) \rightarrow C_*(X)$.

Dies ist aber eine Kettenabbildung, und wenn man die Bedingung dafür, $\partial \circ i_\# = i_\# \circ \partial$, richtig liest, besagt sie einfach, dass $\partial_A = \partial_X|_{C_*(A)}$ und somit

$$\partial_X(C_*(A)) \subseteq C_*(A) \tag{6.35}$$

Folglich induziert ∂_X einen graduierten Homomorphismus

$$\bar{\partial}: \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \rightarrow \frac{C_*(X)}{C_*(A)}$$

von Grad -1, und weil $\partial_X^2 = 0$, gilt auch $\bar{\partial}^2 = 0$.

Wir bezeichnen die graduierte abelsche Gruppe $C_*(X)/C_*(A)$ fortan mit $C_*(X, A)$. Wir haben soeben gesehen, dass das Paar

$$\mathcal{C}(X, A) := (C_*(X, A), \bar{\partial})$$

ein Kettenkomplex ist. Wir nennen ihn den **relativen singulären Kettenkomplex** des Raumpaars (X, A) .

Seine Zyklengruppe bezeichnen wir mit $Z_*(X, A)$ und seine Rändergruppe mit $B_*(X, A)$.

Die Homologiegruppe von $\mathcal{C}(X, A)$ wird mit $H_*(X, A)$ notiert und heißt die **relative Homologiegruppe** des Raumpaars (X, A) .

Bemerkung 6.39 Hier ein paar Gedanken, die vielleicht helfen, die relativen Kettengruppen und die relative Homologie zu verstehen.

Der Nenner von $C_*(X, A)$ ist $C_*(A)$ und besteht aus allen endlichen Summen und Differenzen von singulären Simplizes in A . Eine Kette $c \in C_*(X, A)$ ist zwar eigentlich nur eine Äquivalenzklasse oder Restklasse von Ketten in X , aber da man bei der Quotientenbildung im Wesentlichen nur alle singulären Simplizes in A gleich 0 setzt, hat jede relative Kette c einen eindeutigen Repräsentanten $c' \in C_*(X)$, der eine endliche \mathbf{Z} -Linearkombination von singulären Simplizes ist, die *nicht ganz in A enthalten sind*.

Wenn $c' \in C_*(X)$ irgendein Repräsentant von c ist, dann ist c genau dann ein Zyklus, nicht wenn $\partial c' = 0$, sondern wenn $\partial c'$ eine Kette in A ist, also nur Simplizes enthält, die ganz in A liegen.

Und c ist genau dann ein Rand im relativen Kettenkomplex, wenn c' zu einem Rand von $C_*(X)$ gemacht werden kann durch Addition einer geeigneten Kette ganz in A , wenn sich also c' von einem Rand in $C_*(X)$ nur durch eine Kette in A unterscheidet (c' muss aber nicht selber ein Rand in $C_*(X)$ sein).

Bemerkung und Definition 6.40 Seien (X, A) und (Y, B) topologische Raumpaare und sei

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

eine stetige Abbildung von Raumpaaren.

Weil $f(A) \subseteq B$ ist

$$f_\#(C_*(A)) \subseteq C_*(B)$$

und $f_\# = C_*(f)$ induziert somit einen wohldefinierte graduierten Homomorphismus

$$\bar{f}_\#: C_*(X, A) = \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \longrightarrow \frac{C_*(Y)}{C_*(B)} = C_*(Y, B),$$

die eine Kettenabbildung ist (mit $\bar{\partial}$ kommutiert), weil schon f_{\sharp} mit ∂ kommutiert.

Diese Kettenabbildung der relativen Kettenkomplexe bezeichnen wir auch mit $C_*(f)$, da aus dem Kontext immer hervorgeht, welche der so bezeichneten Abbildungen gemeint ist.

$C_*(f)$ induziert natürlich auch in Homologie einen Grad-0 Homomorphismus

$$H_*(f) = f_* := H(C_*(f)) : H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B).$$

Lemma 6.41 C_* ist ein Funktor $Top^2 \longrightarrow KK$. Somit ist auch H_* ein Funktor $Top^2 \longrightarrow GAG$.

Beweis. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, und für die erste Behauptung müssen nur die funktoriellen Eigenschaften der Zuordnung von Morphismen zu Morphismen nachgeprüft werden, nämlich, dass

$$\bar{id}_{\sharp} = C_*(id_{(X,A)}) = id_{C_*(X,A)}$$

und dass

$$C_*(g \circ f) = C_*(g) \circ C_*(f),$$

wenn f eine stetige Abbildung von Raumpaaren $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ ist und g eine stetige Abbildung $(Y, B) \longrightarrow (Z, C)$.

Beides ist aber trivial. ■

Bemerkung 6.42 In Beispiel 1.9 c) hatten wir gesehen, dass man Top als eine Unterkategorie von Top^2 auffassen kann, wenn man jeden topologischen Raum X mit dem Raumpaar (X, \emptyset) identifiziert, und die Inklusion $J : Top \longrightarrow Top^2$ ist ein Funktor nach Beispiel 1.12 b).

Weil $C_*(\emptyset) = \{0\}$ (Beispiel 6.37) ist $C_*(X, \emptyset) = C_*(X)$ oder in anderen Worten $H_* \circ J = H_*$ auf Top .

Umgekehrt haben wir nach Beispiel 1.12 f) auf Top^2 die vergesslichen Funktoren $P_1(X, A) := X$ und $P_2(X, A) = A$.

Für jedes topologische Raumpaar (X, A) haben wir natürliche Inklusionen $i : A \longrightarrow X$ und $j : X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$, und nach der Definition der Morphismen von Top^2 ist i eine natürliche Transformation $P_2 \longrightarrow P_1$ und j ist eine natürliche Transformation $P_2 \longrightarrow id_{Top^2}$.

Wenn wir Lemma 1.28 anwenden, sehen wir dass, salopp gesagt, i_{\sharp} eine natürliche Transformation $C_*(A) \longrightarrow C_*(X)$ ist und j_{\sharp} eine natürliche Transformation $C_*(X) \longrightarrow C_*(X, A)$. Entsprechend ist i_* eine natürliche Transformation $H_*(A) \longrightarrow H_*(X)$ und j_* ist eine natürliche Transformation $H_*(X) \longrightarrow H_*(X, A)$.

(Korrekt ausgedrückt würde man sagen: i_{\sharp} ist eine natürliche Transformation $C_* \circ P_2 \longrightarrow C_* \circ P_1$ und j_{\sharp} ist eine natürliche Transformation $C_* \circ P_1 \longrightarrow C_*$; ferner ist i_* eine natürliche Transformation $H_* \circ P_2 \longrightarrow H_* \circ P_1$ und j_* ist eine natürliche Transformation $H_* \circ P_1 \longrightarrow H_*$.)

Im folgenden Kapitel werden wir noch eine dritte natürliche Transformation zwischen diesen Homologiefunktoren konstruieren, diesmal eine von Grad -1, aber das ist schon Teil der Berechnung der Homologie, womit wir jetzt beginnen wollen.

Kapitel 7

Die Eilenberg-Steenrod Axiome

In diesem Kapitel wollen wir Methoden entwickeln zur Berechnung der Homologiegruppen von topologischen Räumen und Raumpaaren. Zum Glück ist das einfacher, als im Falle der Homotopie.

Natürlich würden wir auch gerne ein bisschen mehr über das Verhalten des Homologiefunktors und seiner Grundeigenschaften wissen, als wir in Kapitel 6 herleiten konnten (genauer gesagt haben wir in Kapitel 6 noch nicht einmal den Versuch unternommen, viel darüber herauszubekommen). Aber dieses Ziel widerspricht sich nicht mit dem erstgenannten. Im Gegenteil, beide ergänzen sich hervorragend, und wir könnten genauso gut sagen, in diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten Eigenschaften der Homologie im Detail erforschen.

Deshalb heißt das Kapitel auch nicht „Berechnung der Homologie“ oder so ähnlich, sondern in der Kapitelüberschrift ist von gewissen „Axiomen“ die Rede. Das hat folgendes Bewandnis.

Es gibt im Wesentlichen nur einen topologischen Raum (oder etwas präziser, nur eine sehr kleine Klasse von topologischen Räumen), deren singuläre Homologiegruppen man direkt anhand der Definition ausrechnet, in dem man die singulären Kettengruppen und die singulären Randoperatoren genau angibt. Für andere Varianten der Homologie, etwa die simpliziale, ist das nicht so — da berechnet man fast alle Homologiegruppen direkt über die dort sehr viel kleineren Kettengruppen (das erfordert allerdings die Vorarbeit, den topologischen Raum zu triangulieren, d.h., ihn zu einem Simplizialkomplex zu machen).

Bei der singulären Homologie ist die direkte Berechnung nur für wenige Räume überhaupt möglich, weil fast alle Räume sehr große Kettengruppen haben, in denen man schwer rechnen kann. Die einzige wesentliche Ausnahme, bei der eine direkte Berechnung sogar die einzige Möglichkeit ist, ist der Einpunktraum oder etwas allgemeiner, diskrete topologische Räume, al-

so Räume, die keine sehr interessante topologische Struktur haben.

Bei allen anderen Räumen benutzt man die *Eigenschaften* der singulären Homologie, um die Homologiegruppen des gegebenen Raumes in Verbindung zu bringen mit der Homologie von einfacheren Räumen, deren Homologie man vorher schon ausgerechnet hat. Stellt man die richtigen Verbindungen her, so kann man aus der schon bekannten Homologie der einfacheren Räume die Homologie des neuen Raumes genau bestimmen.

Der Ausgangspunkt für diese Methodik ist natürlich die Homologie des Einpunktraumes. Für alles andere wird eine Werkzeugkiste eingesetzt, die aus einer kleinen Liste von Standardsätzen besteht, über die Homologie eben des Einpunktraumes und über die Beziehungen zwischen den Homologiegruppen verschiedener verwandter Raumpaare.

Diese Standardsätze oder Standardeigenschaften der Homologie sind aber typisch für alle üblichen Varianten der Homologie und sind so wichtig, dass sie von Eilenberg und Steenrod 1952 aufgezählt wurden in Form einer Liste der *Axiome der Homologie*. Es handelt sich allerdings nicht wirklich um Axiome, sondern um grundlegende Sätze, die wir für die singuläre Homologie auch beweisen werden.

Die eigentliche Aussage des Satzes von Eilenberg und Steenrod war, dass diese grundlegenden Sätze über Homologie in einer ganzen Reihe von topologischen Kategorien gelten (genannt „zulässige Kategorien“), und dass sie für die Kategorie der kompakten Polyederpaare (in anderen Worten, der Paare von kompakten Simplicialkomplexen) die Homologie bis auf Isomorphie eindeutig charakterisieren. Sie *gelten* aber in weit mehr als dieser einen Kategorie und können dort anstelle der eigentlichen, womöglich komplizierten Konstruktion der Homologie benutzt werden, als wären sie eben Axiome, um alle wichtigen Eigenschaften der Homologietheorie herzuleiten. Zu diesen „wichtigen Eigenschaften“ gehört auch die Berechnung der Homologiegruppen beliebiger Räume.

Diese axiomatische Vorgehensweise hat mehrere Vorteile: sie ist in der Regel einfacher als ein unmittelbares Hantieren mit der jeweiligen Homologiekonstruktion; sie ist äußerst leistungsfähig, wenn man in der Anwendung ein bisschen Übung hat (insbesondere leistungsfähig genug, um die Vorteile der simplicialen über die singuläre Homologie völlig wettzumachen); sie ist universell, in dem Sinne, dass man mit *einem* Beweis den gleichen Satz für viele verschiedene Homologietheorien herleiten kann, ohne sich auf die Details und Unterschiede dieser Theorien zu beziehen (vor der Einführung dieser Axiome gab es chaotische Zustände, weil mehrere verschiedene Homologietheorien auf dem Markt waren, mit denen man sich einzeln beschäftigen musste); und schließlich machen sie ganz klar und deutlich, worauf es in der Homologie ankommt, d.h., welche Eigenschaften für Homologietheorien ty-

pisch sind und welche Eigenschaften eine Theorie haben sollte, um als eine Homologietheorie zu gelten.

Der letzte Punkt soll nicht unterschätzt werden, denn er bietet einen Prüfstein für Ideen zur Entwicklung neuer Varianten der Homologie, die vielleicht Fragen lösen können, die die klassischen Homologievarianten nicht beantworten können. Seit dem Erscheinen von Eilenberg und Steenrods Buch sind eine ganze Anzahl von „verallgemeinerten Homologietheorien“ und „verallgemeinerten Kohomologietheorien“ entwickelt worden, die auf ganz andersartige Merkmale aufgebaut sind, z.B. auf Vektorbündel, auf Kobordismen usw., und die zwar nicht alle Eilenberg-Steenrod Eigenschaften erfüllen, aber nur geringfügig und in einzelnen Punkten davon abweichen und somit insgesamt eine einheitliche Theorie bilden.

Für die singuläre Homologie bieten die Eilenberg-Steenrod Axiome fast den einzigen praktikablen Weg, in die Theorie einzudringen und darin weiter zu kommen. Unser erstes Ziel wird deshalb sein, diese Axiome zu beweisen, damit wir sie anwenden können.

Es gibt vier Axiome in der Eilenberg-Steenrod Liste, und eines ist ganz einfach und beschreibt nur die Homologie des Einpunktraumes (die wir direkt ausrechnen werden). Ein anderes besagt, dass die Homologie homotopieinvariant ist, d.h., Räume mit dem gleichen Homotopietyp haben die gleiche Homologie und homotope Abbildungen induzieren die gleichen Homomorphismen in Homologie.

Die verbleibenden beiden Axiome beschreiben die Beziehung zwischen der Homologie eines Raumpaares (X, A) und der Homologie der einzelnen Räume X und A , oder zwischen der Homologie eines Raumes und der Homologie zweier offener Mengen, die den Raum überdecken, sowie von ihrem Durchschnitt. Diese Beziehung wird aber nicht direkt und eindeutig ausgedrückt, etwa durch Isomorphismen, sondern durch eine gewisse algebraische Konstruktion, genannt eine **exakte Folge** von Gruppen und Homomorphismen, aus der man in speziellen Fällen genaue Informationen herleiten kann, aber in ungünstigen Fällen eben nicht sehr viel über die einzelnen Gruppen und Homomorphismen herausbekommt. Die ganze Kunst der Anwendung besteht darin, eine Berechnungsaufgabe so zu zerlegen, dass die günstigen Fälle auftreten und man am Ende klare Ergebnisse erhält.

Wegen der Wichtigkeit dieser algebraischen Konstruktion in der ganzen Homologietheorie beginnen wir dieses Kapitel mit einem kurzen Abschnitt über exakte Folgen, auch als Vorbereitung für die Formulierung der Eilenberg-Steenrod Axiome.

Definition 7.1 Sei \mathcal{F} eine Folge von Gruppen und Homomorphismen (also ein linear angeordnetes Diagramm wie in Definition 1.19 a)) und in \mathcal{F} komme

die Teilfolge

$$\dots A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \dots \quad (7.1)$$

vor. Hier können die Punkte leer sein oder für weitere Homomorphismen und Gruppen stehen.

Wir sagen (7.1) oder \mathcal{F} ist *exakt an der Stelle B* , wenn

$$\text{Bild } f = \text{Ker } g. \quad (7.2)$$

Wir nennen die ganze Folge \mathcal{F} eine *exakte Folge*, wenn sie an jeder Stelle, wo es Sinn macht, d.h., an jeder Stelle der Gestalt von B in (7.1), exakt ist.

(Wenn die Folge \mathcal{F} eine erste oder eine letzte Gruppe hat, d.h., wenn sie irgendwo beginnt oder irgendwo endet, dann lässt sich die Definition natürlich nicht auf diese erste oder letzte Stelle anwenden, weil dort entweder der eingehende Homomorphismus f oder der abgehende Homomorphismus g fehlt.)

Bemerkung 7.2 Die Exaktheitsbedingung (7.2) impliziert, dass in einer exakten Folge (oder an jeder exakten Stelle in einer nicht überall exakten Folge) die Verknüpfung zweier aufeinanderfolgender Homomorphismen der triviale Homomorphismus 0 ist (im nichtabelschen Fall entsprechend 1).

Insbesondere ist eine exakte Folge von abelschen Gruppen immer auch ein Kettenkomplex, allerdings kein sehr interessanter Kettenkomplex, denn Bedingung (7.2) besagt gerade, dass alle Rändergruppen *gleich* den Zyklengruppen der gleichen Dimension sind, also dass die Homologie in jeder Dimension $\{0\}$ ist.

Man kann das so verstehen, dass die Homologie eines Kettenkomplexes ein Maß für seine *Nichtexaktheit* ist!

Folgende Beispiele werden ein bisschen deutlicher machen, was Exaktheit bedeutet oder bedeuten kann. Wir beschränken uns dabei bewusst auf den Fall von additiven abelschen Gruppen, weil wir diesen vorrangig betrachten werden, aber die Aussagen gelten auch (wenn man 1 statt 0 schreibt) für den nichtabelschen Fall.

Lemma 7.3 a) Wenn $f = 0$, dann ist (7.1) genau dann exakt, wenn g injektiv ist.

Insbesondere, $\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{g} C$ ist genau dann exakt, wenn g injektiv ist.

b) Wenn $g = 0$, dann ist (7.1) genau dann exakt, wenn f surjektiv ist.

Insbesondere, $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\}$ ist genau dann exakt, wenn f surjektiv ist.

c) $\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow \{0\}$ ist genau dann exakt, wenn $A = \{0\}$.

d) $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\}$ ist genau dann exakt, wenn f ein Isomorphismus ist.

Beweis. a): Wenn $f = 0$, so ist $\text{Bild } f = \{0\}$ und (7.1) ist genau dann exakt, wenn dies $\text{Ker } g$ ist, also, wenn g injektiv ist.

b): Wenn $g = 0$, so ist $\text{Ker } g = B$ und (7.1) ist genau dann exakt, wenn dies $\text{Bild } f$ ist, also, wenn f surjektiv ist.

c): Das Bild der linken Abbildung ist $\{0\} \subseteq A$; der Kern der rechten Abbildung ist ganz A ; das Diagramm ist genau dann exakt, wenn sie gleich sind, also wenn $A = \{0\}$.

d) folgt sofort aus a) und b). ■

Für kompliziertere (insbesondere längere) Folgen als diese beinhaltet die Exaktheit außer in Spezialfällen nicht so eine klare Aussage wie in diesen ganz einfachen Beispielen, aber sie liefert trotzdem viel Information. Der nächstkompliziertere Fall sieht so aus wie 7.3 d), aber ist in der Mitte um eine nichttriviale Gruppe länger. Dieser Fall ist so wichtig, dass er einen eigenen Namen hat:

Definition 7.4 Eine **kurze exakte Folge** von abelschen Gruppen und Homomorphismen ist eine exakte Folge der speziellen Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (7.3)$$

Auch hier können wir etwas sagen über die Gruppen, die in der Folge vorkommen:

Definition 7.5 Seien G und H abelsche Gruppen und $f: G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Quotientengruppe $H/\text{Bild } f$ heißt der **Cokern** von f und wird mit $\text{Coker } f$ bezeichnet.

Lemma 7.6 Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen. Dann ist

$$f: A \longrightarrow f(A) \subseteq B$$

ein Isomorphismus und g induziert einen Isomorphismus

$$\bar{g}: \text{Coker } f = \frac{B}{f(A)} \longrightarrow C.$$

Beweis. Nach Lemma 7.3 a) ist f injektiv, also ein Isomorphismus auf sein Bild. Nach Lemma 7.3 b) ist g surjektiv und nach dem „Ersten Isomorphiesatz“ für Gruppen induziert g einen Isomorphismus

$$\bar{g}: B/\text{Ker } g \longrightarrow g(B) = C.$$

Wegen der Exaktheit der Folge bei B ist aber $\text{Ker } g = \text{Bild } f$, also ist \bar{g} ein Isomorphismus $B/f(A) = \text{Coker } f \longrightarrow C$. ■

Man kann das etwas salopp so ausdrücken, dass in einer kurzen exakten Folge (7.3) gilt im Wesentlichen $C \cong B/A$.

Bemerkung 7.7 Exakte Folgen von Gruppen und Homomorphismen sind insbesondere Folgen, also *Diagramme* von einer bestimmten Gestalt, und für jede mögliche Gestalt \mathcal{G} eines Folgendigramms bilden die exakten Folgen dieser Gestalt die Objekte einer vollen Unterkategorie der Diagrammkategorie $\mathcal{G}\text{-}DGP$ oder in unserem Fall eher $\mathcal{G}\text{-}DAbGp$ (siehe Definition 1.20).

Das bedeutet insbesondere, dass wir über Funktoren definiert auf exakten Folgen oder mit exakten Folgen als Werte sprechen kann.

Es macht deshalb auch Sinn zu behaupten, eine in einer gewissen Situation auftretende exakte Folge sei **natürlich** — das bedeutet nichts anderes, als dass diese Folge die Objektzuordnung eines Funktors ist, der exakte Folgen als Objektwerte und Morphismen im Sinne der Diagrammkategorie als Morphismenwerte annimmt. Zur Erinnerung, ein Morphismus in der Diagrammkategorie besteht aus einer Familie von Gruppenhomomorphismen zwischen entsprechenden Stellen in den beiden Folgen, so dass alle kleinen Quadrate, die diese Homomorphismen mit den Homomorphismen *innerhalb* der beiden Folgen bilden, kommutieren.

Kurze exakte Folgen sind aus verschiedenen Gründen besonders wichtig. Einer dieser Gründe besteht in der Tatsache, dass man jede längere exakte Folge in kurze exakte Folgen zerlegen kann:

Bemerkung 7.8 Seien G und H abelsche Gruppen und $f: G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann gibt es natürliche kurze exakte Folgen

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} \operatorname{Bild} f \longrightarrow \{0\} \quad (7.4)$$

und

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Bild} f \xrightarrow{j} H \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f \longrightarrow \{0\}, \quad (7.5)$$

wo i und j die Inklusionen sind und p die Projektion auf den Quotienten (den der Cokern ja ist). f ist ja auch surjektiv auf sein Bild, so dass die Exaktheit bei den äußeren Gruppen in jeder Folge von vornherein gegeben ist, und die Exaktheit bei den mittleren Gruppen G und H ist für diese Folgen auch trivial.

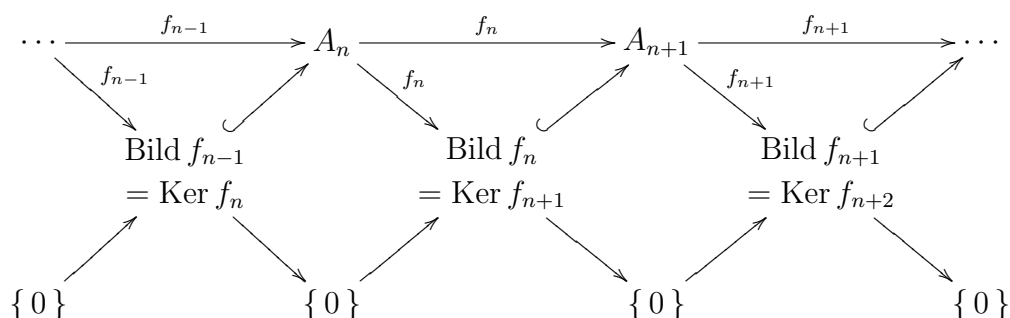
Die Natürlichkeit bezieht sich, wie in Bemerkung 7.7 erklärt, auf die Diagrammkategorien, d.h., die hier genannten kurzen exakten Folgen hängen funktoriell von dem Diagramm $G \xrightarrow{f} H$ ab. Davon kann man sich leicht überzeugen; wir führen es nicht vor.

Eine exakte Folge, egal welcher Länge, ist eine Hintereinanderreihung von Gruppenhomomorphismen, und die Exaktheit bewirkt, dass die kurzen exakten Folgen (7.4) für diese Gruppenhomomorphismen sich ineinander verzahnen und somit die gesamte gegebene längere exakte Folge in viele kurze exakte Folgen zerlegen:

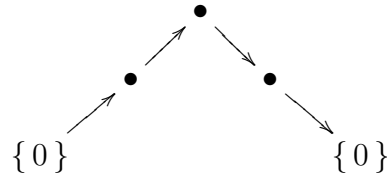
Bemerkung 7.9 Sei

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \dots$$

eine exakte Folge von Gruppen und Homomorphismen beliebiger Länge. Dann zerlegt sich diese Folge wie in folgendem Diagramm in lauter kurze exakte Folgen des Typs (7.4):



Die kurzen exakten Folgen bestehen jeweils aus zwei schräg steigenden und den anschliessenden zwei schräg fallenden Pfeilen



Wegen dieser Bemerkung kann man jede noch so komplizierte Situation mit exakten Folgen auf kurze exakte Folgen zurückführen. In einem gewissen Sinne sind sie also die kompliziertesten exakten Folgen, die man betrachten muss.

Ein anderer Grund für die Bedeutung der kurzen exakten Folgen ist, dass sie Quotienten G/H von abelschen Gruppen genau beschreiben durch die entsprechende kurze exakte Folge $\{0\} \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow \{0\}$. Weitere Gründe werden später ganz deutlich werden.

Bisher haben wir nur danach gefragt, welche Bedeutung die Exaktheit einer Folge hat für die Gruppen und Homomorphismen innerhalb der Folge. Sie wirkt sich aber auch auf sehr angenehme Weise aus auf Eigenschaften von Homomorphismen (also Diagrammmorphismen) *zwischen* zwei verschiedenen exakten Folgen:

Lemma 7.10 (Das 5-er Lemma) Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\ \alpha \downarrow \cong & & \beta \downarrow \cong & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \cong & & \varepsilon \downarrow \cong \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen, in dem die waagerechten Reihen exakt sind. Die vier äußeren (also die ersten beiden und die letzten beiden) der fünf senkrechten Abbildungen seien Isomorphismen. Dann ist auch der mittlere senkrechte Homomorphismus γ ein Isomorphismus.

Die Voraussetzung über die senkrechten Homomorphismen wurde so formuliert, weil sie homogen ist und sich deshalb so am leichtesten einprägen lässt, aber man kann sie geringfügig abschwächen — der gleiche Schluss gilt, wenn die erste Abbildung α nur surjektiv und die letzte Abbildung ε nur injektiv ist (und β und δ nach wie vor Isomorphismen sind).

Beweis. Der Beweis erfolgt nach einer in der algebraischen Topologie äußerst beliebten Vorgehensweise, die man **Diagrammjagd** nennt. Diese Methode besteht darin, einzelne Elemente (hier der Gruppen C und C') mit

den vorhandenen Abbildungen auf Pfade durch das Diagramm zu schicken, bis man Nullwerte erhält. Die Kommutativität der einzelnen Quadrate wird ausgenutzt, um Pfade um zwei Seiten eines Quadrats über die anderen beiden Seiten umzuleiten, und die Exaktheit der waagerechten Folgen und die vorausgesetzten Eigenschaften der senkrechten Abbildungen werden ausgenutzt, um zu zeigen, dass gewisse Elemente 0 sind, oder um Elemente entlang der Pfeile „zurückzuholen“, also um Urbilder unter den Homomorphismen zu finden — für die waagerechten Abbildungen existieren solche Urbilder, auf Grund der Exaktheit, genau dann, wenn der folgende Pfeil das Element auf 0 schickt.

Wir führen jetzt einen solchen Beweis durch, wobei wir die Kommutativität des Diagramms immer stillschweigend einsetzen werden, um Verknüpfungen umzuschreiben. Auf die Verwendung der anderen Voraussetzungen wird immer explizit hingewiesen. Wenn man sich den Beweis auf dem Papier ansieht, erscheint er sehr undurchsichtig, aber wenn man die einzelnen Schritte mit dem Finger im Diagramm nachfährt, wird alles ganz einfach. Deshalb heißt diese Beweismethode auch so — im Wesentlichen besteht sie darin, Elemente mit dem Finger auf dem Blatt oder an der Tafel durch das Diagramm zu „jagen“.

Wir zeigen nun zuerst, dass γ injektiv ist. Sei $c \in C$ mit $\gamma c = 0$. Dann ist $h'\gamma c = \delta h c = 0$. Weil δ injektiv ist, ist $h c = 0$. Weil die obere Reihe exakt ist, gibt es ein $b \in B$ mit $g b = c$.

Für dieses b gilt nun $0 = \gamma c = \gamma g b = g' \beta b$. Weil die untere Reihe exakt ist, gibt es ein Element $a' \in A'$ mit $f' a' = \beta b$, und weil α surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $\alpha a = a'$.

Wir haben dann $\beta b = f' a' = f' \alpha a = \beta f a$ und weil β injektiv ist folgt daraus $b = f a$. Also ist $c = g b = g f a = 0$, denn die Exaktheit der oberen Reihe impliziert $g f = 0$ (Bemerkung 7.2). Also ist $c = 0$ und γ ist injektiv.

Jetzt zeigen wir, dass γ surjektiv ist. Sei $c' \in C'$. Weil δ surjektiv ist, gibt es ein Element $d \in D$ mit $\delta d = h' c'$. Weil die untere Reihe exakt ist, ist $i' h' c' = 0$, also auch $i' \delta d = \varepsilon i d = 0$, und weil ε injektiv ist, ist $i d = 0$. Weil die obere Reihe exakt ist, gibt es ein Element $\bar{c} \in C$ mit $h \bar{c} = d$.

Leider muss nicht unbedingt gelten, dass $\gamma \bar{c} = c'$, aber wir haben zumindest $h' \gamma \bar{c} = \delta h \bar{c} = \delta d = h' c'$, woraus folgt $h'(c' - \gamma \bar{c}) = 0$. Weil die untere Reihe exakt ist, gibt es ein Element $b' \in B'$ mit $g' b' = c' - \gamma \bar{c}$, und weil β surjektiv ist, gibt es ein Element $b \in B$ mit $\beta b = b'$.

Sei $c = \bar{c} + g b \in C$. Wir haben $\gamma c = \gamma \bar{c} + \gamma g b = \gamma \bar{c} + g' \beta b = \gamma \bar{c} + g' b' = \gamma \bar{c} + c' - \gamma \bar{c} = c'$. Also ist $\gamma c = c'$ und γ ist surjektiv.

Also ist γ ein Isomorphismus.

Wenn man den Beweis noch einmal durchliest nach den verwendeten Eigenschaften der senkrechten Abbildungen, sieht man, dass im ersten Teil die

Injektivität von β und δ verwendet wird, sowie die Surjektivität von α . Im zweiten Teil wird die Surjektivität von β und δ verwendet und die Injektivität von ε . Deshalb muss verlangt werden, dass β und δ Isomorphismen sind, aber es reicht, wenn α surjektiv und ε injektiv ist. ■

Bemerkung 7.11 Das „5-er Lemma“ heißt natürlich wegen der fünf Gruppen in jeder Reihe und der fünf senkrechten Abbildungen so.

Es ist wichtig anzumerken, dass die Folgerung die Existenz des *gesamten kommutativen Diagramms* mit den fünf senkrechten Abbildungen voraussetzt. Die Aussage besagt nämlich *nicht*: "Wenn man zwei exakte Folgen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{i} E$ und $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} D' \xrightarrow{i'} E'$ hat mit $A \cong A'$, $B \cong B'$, $D \cong D'$ und $E \cong E'$, dann ist auch $C \cong C'$." Diese naive Vereinfachung kann durchaus *falsch* sein.

Wenn man keine mittlere Abbildung $\gamma: C \longrightarrow C'$ vorweisen kann, die das Diagramm kommutativ macht (und die dann wegen des 5-er Lemmas tatsächlich ein Isomorphismus ist), ist es sogar möglich, dass die äußeren vier Abbildungen Identitäten sind, ohne dass die mittleren Gruppen isomorph sind. Natürlich existiert dann auch kein Homomorphismus der mittleren Gruppen, der das Diagramm kommutativ macht.

Wir wissen jetzt genug über exakte Folgen, dass wir beginnen können, sie anzuwenden. Für die algebraische Topologie brauchen wir diesen Begriff aber auch für andere Kategorien, die in der Homologietheorie eine Rolle spielen.

Bemerkung 7.12 Wir haben die Exaktheit bisher nur definiert für Folgen von Gruppen und Homomorphismen. Den gleichen Begriff mit den gleichen Konsequenzen kann man aber problemlos erweitern auf jede Kategorie, die aus Gruppen aufgebaut ist oder deren Objekte eine Gruppenstruktur tragen.

Neben der offensichtlichen Verallgemeinerung auf die Kategorie der Moduln über einen Ring können wir Exaktheit ohne weitere Vorbereitung auf jede Diagrammkategorie über den Kategorien Gp oder $AbGp$ anwenden, und auf Unterkategorien solcher Kategorien, sowie auf die Kategorie GAG der graduierten abelschen Gruppen und der graduierten Homomorphismen und auf ihre Unterkategorien.

Sei \mathcal{G} ein gerichteter Graph und sei $\mathcal{K} = \mathcal{G}\text{-}DAbGp$ die Kategorie der \mathcal{G} -Diagramme von abelschen Gruppen und Homomorphismen (man kann die Einschränkung „abelsch“ aber auch weglassen). Eine Folge

$$\dots D \xrightarrow{\mu} D' \xrightarrow{\nu} D'' \dots \quad (7.6)$$

von \mathcal{G} -Diagrammen und Diagrammmorphismen heißt dann exakt beim Diagramm D' , wenn die Bedingung (7.2) für die Gruppenhomomorphismen und

Gruppen an jeder einzelnen, in den drei Diagrammen sich entsprechenden, Stelle in den Diagrammen erfüllt ist.

Das heißt etwas ausführlicher, wenn $D = (p, P)$ in der Notation von Definition 1.15, wenn $D' = (Q, q)$ und wenn $D'' = (R, r)$, dann ist die Folge (7.6) exakt bei D' genau dann, wenn für jeden einzelnen Knoten x von \mathcal{G} die Folge

$$p(x) \xrightarrow{\mu(x)} q(x) \xrightarrow{\nu(x)} r(x)$$

von Gruppen und Homomorphismen bei $q(x)$ exakt ist.

Die Exaktheit für Folgen von graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen braucht man gar nicht extra zu definieren, weil Definition 7.1 hier direkt anwendbar ist — graduierte abelsche Gruppen sind ja schließlich auch Gruppen und graduierte Homomorphismen sind insbesondere auch Gruppenhomomorphismen; sie erfüllen nur *zusätzliche* Eigenschaften. Aber auch in diesem Fall ist es eine Konsequenz von Lemma 6.34 c), dass eine Folge von graduierten abelschen Gruppen und graduierten Homomorphismen genau dann exakt ist, wenn dies für jede Stufe einzeln gilt.

Natürlich überträgt sich der Exaktheitsbegriff automatisch auch auf Unterkategorien. Insbesondere wird es sinnvoll sein, von exakten Folgen von *Kettenkomplexen* zu sprechen, weil die Kategorie KK der Kettenkomplexe je nach der bevorzugten Variante der Definition eine Unterkategorie einer Diagrammkategorie von Gruppen und Homomorphismen ist, oder eine Unterkategorie von GAG oder GAG_0 .

Der erste grundlegende Satz der Homologietheorie, den wir beweisen, hängt nicht ab von den Einzelheiten der Homologietheorie, sondern ist im Wesentlichen eine Eigenschaft von *Kettenkomplexen*.

Definition 7.13 Eine *lange exakte Folge* von Gruppen und Homomorphismen ist eine exakte Folge, die unendliche Länge hat, also die an mindestens einem Ende unbegrenzt ist (vergleiche Definition 1.19 a)).

Satz 7.14 Sei

$$\{0\} \longrightarrow (C, \partial) \xrightarrow{f} (D, \partial') \xrightarrow{g} (E, \partial'') \longrightarrow \{0\} \quad (7.7)$$

eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen.

Dann gibt es eine natürliche lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots \quad (7.8)$$

zwischen den Homologiegruppen der drei Kettenkomplexe, oder effizienter gesagt in der Kategorie GAG , es gibt ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc}
 H(C) & \xrightarrow{f_*} & H(D) \\
 \nwarrow \beta & & \swarrow g_* \\
 & H(E) &
 \end{array}
 \quad \text{Grad } -1 \quad (7.9)$$

zwischen den graduierten Homologiegruppen der drei Kettenkomplexe, mit den von den Kettenabbildungen induzierten Grad 0 Homomorphismen $f_* = H(f)$ und $g_* = H(g)$ und mit einem wie folgt erklärten Grad -1 Homomorphismus $\beta: H(E) \rightarrow H(C)$, den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen wollen.

Folgendes Diagramm von graduierten abelschen Gruppen hat die Randoperatoren der Kettenkomplexe als senkrechte Abbildungen und kommutiert, weil die waagerechten Abbildungen Kettenabbildungen sind:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \partial \downarrow & & \partial' \downarrow & & \partial'' \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & \{0\}
 \end{array}
 \quad (7.10)$$

Eine Homologieklass ε in $H(E)$ ist die Restklasse eines Zyklus $z \in Z(E) = \text{Ker } \partial''$. Man stelle sich z vor in der Gruppe E in der oberen Reihe des Diagramms (beide Reihen sind eigentlich die gleiche Folge, zweimal hingeschrieben um die Randoperatoren sichtbar zu machen).

Weil g surjektiv ist, gibt es ein Element $d \in D$ mit $gd = z$. Weil z ein Zyklus ist und das rechte Quadrat im Diagramm kommutiert, gilt $g\partial'd = \partial''gd = \partial''z = 0$, und weil die untere Reihe exakt ist gibt es ein Element $c \in C$ mit $fc = \partial'd$. Dieses Element ist ein Zyklus und $\beta(\gamma) = [c]$.

Beweis. Im Beweis sind viele Einzelschritte zu tun: wir müssen zeigen, dass das Dreieck (7.9) an allen drei Stellen exakt ist; wir müssen außerdem zeigen, dass das Dreieck natürlich ist, also dass alle drei Homomorphismen im Dreieck mit den Homomorphismen kommutieren, die von einem Morphismus zwischen zwei kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen induziert werden; aber bevor wir mit diesen Aufgaben überhaupt beginnen können, müssen wir nachprüfen, dass wir tatsächlich ein wohldefiniertes Dreieck von graduierten Homomorphismen vor uns haben und speziell, dass die Angaben in der Aussage des Satzes die Abbildung β wohl und eindeutig definieren und dass β wirklich ein Homomorphismus ist. Das machen wir als Erstes.

Die einzelnen Beweisschritte lassen sich am einfachsten verfolgen in einer erweiterten Version von Diagramm (7.10) mit drei Zeilen (die aber wieder alle die gleiche kurze exakte Folge darstellen):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\} \\
 & & \partial \downarrow & & \partial' \downarrow & & \partial'' \downarrow \\
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\} \\
 & & \partial \downarrow & & \partial' \downarrow & & \partial'' \downarrow \\
 \{0\} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E \longrightarrow \{0\}
 \end{array} \tag{7.11}$$

Wohldefiniertheit von β : Die Vorschrift zur Konstruktion von β war: zu einer Homologieklassse ε in $H(E)$ wähle man einen Zyklus $z \in Z(E) \subseteq E$ mit $\varepsilon = [z]$, man wähle ein Urbild $d \in D$ von z mit $gd = z$, und man findet dann aus schon erläuterten Gründen eine Kette $c \in C$ mit $fc = \partial'd$. Diese Kette c ist sogar eindeutig bestimmt, weil f wegen der Exaktheit der Folge injektiv ist.

Es wurde behauptet, dass c ein Zyklus ist. Das gilt wegen der Injektivität von f und weil die linken Quadrate in (7.11) kommutieren, denn $f\partial c = \partial'fc = \partial'\partial'd = 0$, also ist $\partial c = 0$.

Folglich repräsentiert c eine Homologieklassse $[c] \in H(C)$ und diese nehmen wir als den Wert $\beta(\varepsilon)$.

Es gibt zwei Stellen in dieser Konstruktion, wo eine *nichteindeutige* Wahl getroffen wird, und wir müssen zeigen, dass das Ergebnis $\beta(\varepsilon)$ nicht von diesen Wahlen abhängt, nämlich nicht von der Wahl des Zyklus $z \in E$ mit $\varepsilon = [z]$, und nicht von der Wahl des Elementes $d \in D$ mit $gd = z$.

Stellen wir uns also vor, wir hätten statt z einen vielleicht anderen Zyklus $z' \in E$ gewählt mit der gleichen Homologieklassse, und wir hätten statt $d \in D$ ein anderes Element $d' \in D$ gewählt mit $gd' = z'$ (da z' auch gleich z sein darf, decken wir hiermit auch die Möglichkeit ab, verschiedene Urbilder des gleichen Zyklus $z \in E$ zu wählen). Wir stellen uns diese Elemente vor in der mittleren Reihe von Diagramm (7.11).

Sei c das eindeutige Element von C mit $fc = \partial'z$ und sei c' das eindeutige Element von C mit $fc' = \partial'z'$. Wir müssen zeigen, dass $[c] = [c']$, also dass $c - c'$ ein Rand ist.

Weil $[z] = [z']$ ist $z - z'$ ein Rand und es gibt ein Element $y \in E$ mit $z - z' = \partial''y$. Weil g surjektiv ist finden wir ein Element $x \in D$ mit $gx = y$. Wir stellen uns diese Elemente vor in der oberen Reihe von Diagramm (7.11).

Weil das obere rechte Quadrat kommutiert, gilt

$$gd - gd' = z - z' = \partial''gx = g\partial'x$$

und somit ist $d - d' - \partial'x \in \text{Ker } g = \text{Bild } f$. Wähle ein Element $w \in C$ mit

$$d - d' - \partial'x = f(w).$$

Weil das linke untere Quadrat in Diagramm (7.11) kommutiert, haben wir

$$\begin{aligned} f\partial w &= \partial'fw \\ &= \partial'(d - d' - \partial'x) = \partial'd - \partial'd' - \partial'\partial'x = \partial'd - \partial'd' - 0 \\ &= \partial'd - \partial'd' \\ &= fc - fc', \end{aligned}$$

und weil f injektiv ist gilt $\partial w = c - c'$ und $c - c'$ ist ein Rand, wie gewünscht. D.h., $\beta(\varepsilon)$ hängt nicht von den während der Konstruktion getroffenen Wahlen ab und β ist wohldefiniert.

Aus der Konstruktion ist klar, dass β die Dimension eines homogenen Elementes von $H(E)$ um 1 erniedrigt, aber wir müssen noch zeigen, dass β ein Homomorphismus ist.

Das ist ganz einfach einzusehen, denn wenn ε und ε' zwei Elemente von $H(E)$ sind, so seien z und z' Zyklen in E mit $\varepsilon = [z]$ und $\varepsilon' = [z']$, man wähle Elemente d und $d' \in D$ mit $gd = z$ und $gd' = z'$, und man finde die Elemente c und $c' \in C$ mit $fc = \partial'z$ und $fc' = \partial'z'$, für die dann gilt $\beta(\varepsilon) = [c]$ und $\beta(\varepsilon') = [c']$.

Dann ist $z + z'$ ein Zyklus in E , dessen Homologieklass $\varepsilon + \varepsilon'$ ist, $d + d'$ ist ein Element von D mit $g(d + d') = z + z'$, und $c + c'$ ist ein Element von C mit $f(c + c') = \partial'd + \partial'd' = \partial'(d + d')$. Also ist

$$\beta(\varepsilon + \varepsilon') = [c + c'] = \beta(\varepsilon) + \beta(\varepsilon'),$$

und β ist ein Gruppenhomomorphismus. (Mit der gleichen Idee zeigt man im Falle, wo die Kettenkomplexe Moduln über einen Ring R sind, dass β R -linear ist.)

Exaktheit bei $H(C)$: Nach der Definition von β hat jede Homologieklass in Bild β die Form $[c]$ für ein Zyklus $c \in C$ so dass $fc = \partial'd$ für ein geeignetes Element $d \in D$. Insbesondere ist $f_*[c] = [fc] = 0$, weil fc ein Rand ist. Also ist $\text{Bild } \beta \subseteq \text{Ker } f_*$.

Für die andere Inklusion, sei $\gamma \in H(C)$ mit $f_*(\gamma) = 0$ und sei c ein Zyklus in C mit $\gamma = [c]$. Da $f_*[c] = [fc] = 0$, ist fc ein Rand und es gibt ein Element $d \in D$ mit $\partial'd = fc$. Sei $z := gd \in E$. Wegen der Kommutativität der rechten Quadrate und der Exaktheit der Zeilen von (7.11) ist $\partial''z = \partial''gd = g\partial'd = gfc = 0$ und z ist somit ein Zyklus. Nach der Definition von

β gilt $\beta([z]) = [c] = \gamma$. Also ist $\text{Ker } f_* \subseteq \text{Bild } \beta$ und die Exaktheit bei $H(C)$ ist bewiesen.

Exaktheit bei $H(D)$: $g_* \circ f_* = 0$, weil schon $g \circ f = 0$ in der exakten Folge (7.7). Also ist $\text{Bild } f_* \subseteq \text{Ker } g_*$.

Für die andere Inklusion, sei $\delta \in H(D)$ mit $g_*(\delta) = 0$ und sei d ein Zyklus in D mit $\delta = [d]$. Wir stellen uns diese Elemente vor in der mittleren Zeile von (7.11).

Weil $g_*[d] = [gd] = 0$, ist gd ein Rand und es gibt ein Element $e \in E$ mit $\partial''e = gd$. Weil g surjektiv ist gibt es ein Element $a \in D$ mit $ga = e$. Sei $d' := d - \partial'a$; dies ist ein Zyklus weil d und $\partial'a$ Zyklen sind, und $[d'] = [d]$, weil d und d' sich nur um einen Rand unterscheiden. Wir haben also auch $\delta = [d']$.

Wegen der Kommutativität der rechten Quadrate von (7.11) ist

$$gd' = gd - g\partial'a = gd - \partial''ga = gd - \partial''e = 0$$

und weil die Zeilen des Diagramms exakt sind gibt es ein $c \in C$ mit $fc = d'$.

c ist ein Zyklus, denn weil d' ein Zyklus ist, ist $0 = \partial'd = \partial'fc = f\partial c$, und aus der Injektivität von f folgt, dass $\partial c = 0$.

Wir haben also

$$\delta = [d'] = [fc] = f_*([c]),$$

und somit ist $\text{Ker } g_* \subseteq \text{Bild } f_*$ und die Exaktheit bei $H(D)$ ist bewiesen.

Exaktheit bei $H(E)$: Sei $\varepsilon \in H(E)$; diese Homologiekategorie ist eine Äquivalenzklasse von Zyklen von E . Nach der Definition von β gibt es für jeden Zyklus $z \in \varepsilon$ ein Element $d \in D$ mit $gd = z$ und zu jedem solchen Element $d \in D$ gibt es einen Zyklus $c \in C$ mit $fc = \partial'd$, der wegen der Injektivität von f eindeutig ist, und es gilt $\beta(\varepsilon) = [c]$. Weil β wohldefiniert ist hängt $[c]$ weder von der Wahl von $z \in \varepsilon$ noch von der Wahl von d ab.

Wenn $\varepsilon \in \text{Bild } g_*$, so gibt es einen *Zyklus* $d \in D$ mit $\varepsilon = g_*([d]) = [gd]$, d.h., wir können in der Konstruktion von $\beta(\varepsilon)$ den Zyklus z als gd wählen und den gegebenen Zyklus d als sein Urbild in D . Weil d ein Zyklus ist, haben wir $\partial'd = 0$, also wir können $c = 0$ wählen und $\beta(\varepsilon) = [0] = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass $\text{Bild } g_* \subseteq \text{Ker } \beta$.

Für die andere Inklusion, sei $\varepsilon \in \text{Ker } \beta$. Dann ist der Zyklus c in obiger Konstruktion von $\beta(\varepsilon)$ ein Rand, d.h., es gibt ein Element $a \in C$ mit $c = \partial a$.

Wir haben dann

$$\partial'd = fc = f\partial a = \partial'fa,$$

so dass $d' := d - fa$ ein *Zyklus* ist. Ferner gilt wegen der Exaktheit der waagerechten Folgen in (7.11)

$$g_*([d']) = [gd'] = [gd - gfa] = [gd - 0] = [z] = \varepsilon,$$

so dass $\varepsilon \in \text{Bild } g_*$.

Damit haben wir gezeigt, dass $\text{Ker } \beta \subseteq \text{Bild } g_*$ und das Dreieck (7.9) ist auch bei $H(E)$ exakt. Es ist also tatsächlich an jeder Stelle exakt.

Natürlichkeit des exakten Dreiecks (7.9):

Seien die senkrechten Abbildungen in

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & (C, \partial) & \xrightarrow{f} & (D, \partial') & \xrightarrow{g} & (E, \partial'') \longrightarrow \{0\} \\ & & p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & (\bar{C}, \bar{\partial}) & \xrightarrow{\bar{f}} & (\bar{D}, \bar{\partial}') & \xrightarrow{\bar{g}} & (\bar{E}, \bar{\partial}'') \longrightarrow \{0\} \end{array} \quad (7.12)$$

ein Diagrammmorphismus zwischen zwei kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen (das bedeutet, dass das Diagramm kommutiert).

Die Kettenabbildungen p , q und r induzieren Grad-0 Homomorphismen p_* , q_* und r_* zwischen den Homologiegruppen an entsprechenden Stellen in den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen. Wir müssen zeigen, dass das exakte Homologiedreieck natürlich ist, und das bedeutet, dass die Zuordnung des exakten Homologiedreiecks zu einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen und die Zuordnung der Homologiehomomorphismen p_* , q_* und r_* zu einem Morphismus (7.12) von kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen zu der Kategorie der exakten Dreiecke von graduierten abelschen Gruppen bildet.

Funktoren müssen zwar den Identitätsmorphismus und Verknüpfungen von Morphismen richtig übertragen, aber damit müssen wir uns nicht groß auseinandersetzen, weil die entsprechenden Eigenschaften in unserer Situation offensichtlich und trivial sind.

Es geht vielmehr darum, zu zeigen, dass die zugeordneten Abbildungen p_* , q_* und r_* *überhaupt* einen Morphismus der Kategorie der exakten Dreiecke bilden, also einen *Diagrammmorphismus* zwischen den Objekten dieser Kategorie. Dazu müssen wir zeigen, dass p_* , q_* und r_* mit den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen ein kommutatives Diagramm bilden, und das läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass sie mit den Homomorphismen in diesen exakten Homologiedreiecken drei kommutative Quadrate bilden.

Zwei Seiten des exakten Homologiedreiecks der beiden kurzen exakten Folgen werden jeweils durch die Abbildungen f_* und g_* bzw. \bar{f}_* und \bar{g}_* gebildet und sie kommutieren mit den Homomorphismen p_* , q_* und r_* wegen Bemerkung 1.22 b), weil die Quadrate, um die es hier geht, durch Anwendung des Homologiefunktors auf die kommutativen Quadrate in (7.12) entstehen.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} H(E) & \xrightarrow{\beta} & H(C) \\ r_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ H(\bar{E}) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & H(\bar{C}) \end{array} \quad (7.13)$$

kommutiert, das r_* und p_* mit den dritten Seiten der exakten Homologiedreiecke (also mit den verbindenden Homomorphismen) bilden.

Sei $\varepsilon \in H(E)$ und sei $z \in E$ ein Zyklus mit $\varepsilon = [z]$. Wähle ein Element $d \in D$ mit $gd = z$ und sei $c \in C$ der Zyklus mit $fc = \partial'd$. Nach der Definition von β ist $\beta(\varepsilon) = [c]$ und somit $p_*\beta(\varepsilon) = [pc]$.

Sei $\bar{z} := rz \in \bar{E}$, sei $\bar{d} := qd \in \bar{D}$ und sei $\bar{c} := pc \in \bar{C}$. Da r eine Kettenabbildung ist, ist \bar{z} ein Zyklus und $r_*(\varepsilon) = [rz] = [\bar{z}]$.

Weil (7.12) kommutiert und weil die Abbildungen in dem Diagramm Kettenabbildungen sind, überträgt sich die gesamte Konstruktion von $\beta(\varepsilon)$ mittels p , q und r in die andere kurze exakte Folge und wir haben $\bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}]$.

Oder wenn Sie diese Schlussfolgerung etwas langsamer und detaillierter erklärt haben wollen: Weil (7.12) kommutiert haben wir

$$\bar{z} = rz = rgd = \bar{g}qd = \bar{g}\bar{d}$$

und weil q eine Kettenabbildung ist und (7.12) kommutiert haben wir

$$\bar{\partial}'\bar{d} = \bar{\partial}'qd = q\partial'd = qfc = \bar{f}pc = \bar{f}\bar{c}.$$

Das bedeutet, nach der Konstruktion des exakten Homologiedreiecks, dass $\bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}]$.

Nach den Definitionen von \bar{z} und \bar{c} gilt nun

$$\bar{\beta}r_*(\varepsilon) = \bar{\beta}([\bar{z}]) = [\bar{c}] = [pc] = p_*\beta(\varepsilon).$$

In anderen Worten $\bar{\beta}r_* = p_*\beta$ und (7.13) kommutiert. Das exakte Homologiedreieck ist also natürlich. ■

Hiermit haben wir zunächst nur einen schönen Satz über Kettenkomplexe gewonnen, aber daraus gewinnen wir leicht eine Grundaussage über die singuläre Homologie.

Bemerkung 7.15 Sei (X, A) ein topologisches Raumpaar und seien

$$i: A \rightarrow X$$

und

$$j: X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$$

die Inklusionen. Dann bilden die singulären Kettenkomplexe von X , A und (X, A) eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A) \xrightarrow{i_\#} C_*(X) \xrightarrow{\pi=j_\#} C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \quad (7.14)$$

von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen.

Man erinnere sich aus Definition 6.38 daran, dass $C_*(A)$ eine graduierte Untergruppe von $C_*(X)$ ist und dass $i_\#$ die Inklusion dieser Untergruppe ist. Der dritte Pfeil in der Folge (7.14) ist die Projektion π von $C_*(X)$ auf den Quotienten $C_*(X)/C_*(A) = C_*(X, A)$.

Gleichzeitig ist diese Abbildung auch die Kettenabbildung $j_\#$, die von der Inklusion von Raumpaaren $j: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ induziert wird, denn $C_*(X)$ können wir nach Bemerkung 6.42 als den Quotienten

$$\frac{C_*(X)}{\{0\}} = \frac{C_*(X)}{C_*(\emptyset)} = C_*(X, \emptyset)$$

auffassen und $j_\#$ ist dann die Projektion

$$C_*(X) = C_*(X, \emptyset) \xrightarrow{j_\#} C_*(X, A) = \frac{C_*(X)}{C_*(A)}.$$

Beweis. Die Folge (7.14) ist exakt, weil $i_\#$ die Inklusion einer Untergruppe ist und π die Projektion auf den Quotienten nach dieser Untergruppe ist (diese Folge ist eine Instanz von der exakten Folge (7.5) mit $i_\#$ in der Rolle von f).

Sie ist natürlich weil die Kettenabbildungen $i_\# = C_*(i)$ und $j_\# = C_*(j)$ nach Bemerkung 6.42 natürliche Transformationen sind, und somit mit den Kettenabbildungen kommutieren, die von Top^2 -Morphismen, also von stetigen Abbildungen von Raumpaaren, und von den dazugehörigen stetigen Abbildungen der einzelnen Räume induziert werden. ■

Korollar 7.16 Sei (X, A) ein topologisches Raumpaar und seien $i: A \rightarrow X$ und $j: X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H_*(A) & \xrightarrow{i_*} & H_*(X) \\ & \searrow \beta & \swarrow j_* \\ & H_*(X, A) & \end{array} \quad (7.15)$$

Grad -1

zwischen den graduerten Homologiegruppen von A , X und (X, A) , mit den von den Inklusionen induzierten Grad 0 Homomorphismen $i_* = H_*(i)$ und $j_* = H_*(j)$ und mit einem Grad -1 Homomorphismus

$$\beta: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A),$$

den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen und der wie folgt leicht zu konstruieren ist:

Sei $\gamma \in H_*(X, A)$ und sei $z \in C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$ ein beliebiger Zyklus mit Homologieklassse γ . Nach der Definition von $C_*(X, A)$ ist z die Restklasse $c + C_*(A)$ einer Kette $c \in C_*(X)$. Dass z ein relativer Zyklus ist bedeutet, dass ∂c ein Element des Nenners $C_*(A) \subseteq C_*(X)$ des Quotienten $C_*(X, A)$ ist. Als Rand in $C_*(X)$ ist ∂c auch in $C_*(A)$ ein Zyklus und

$$\beta(\gamma) = [\partial c] \in H_*(A).$$

Das exakte Dreieck (7.15) heißt das **exakte Homologiedreieck** des Paares (X, A) von topologischen Räumen.

Beweis. Die Existenz und Natürlichkeit des exakten Homologiedreiecks (7.15) folgt sofort durch Anwendung von Satz 7.14 auf die natürliche kurze exakte Folge von singulären Kettenkomplexen (7.14) aus Bemerkung 7.15.

Die Vorschrift für die Konstruktion des verbindenden Homomorphismus β spezialisiert sich wie folgt für die kurze exakte Folge (7.14): Zu einer Homologieklassse $\gamma \in H_*(X, A)$ wähle man einen Zyklus $z \in C_*(X, A)$ mit $\gamma = [z]$ und man bestimme ein Urbild von z unter π , also eine Kette $c \in C_*(X)$ mit $z = c + C_*(A)$. Dann ist $\beta(\gamma)$ die Homologieklassse der eindeutigen Kette in $C_*(A)$, die unter $i_\#$ auf ∂c abgebildet wird, in anderen Worten, $\beta(\gamma)$ ist die Homologieklassse von ∂c aufgefasst als Kette auf A . Das ist genau die Konstruktion, die in der Aussage oben beschrieben wird. ■

Bemerkung 7.17 Wenn man die einzelnen Homologiegruppen H_n ausrechnen will, kann man das exakte Dreieck (7.15) „abwickeln“ und man erhält eine natürliche lange exakte Folge

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots \quad (7.16)$$

zwischen den Homologiegruppen in den einzelnen Dimensionen, genannt die **lange exakte Homologiefolge** des Raumpaars (X, A) .

Die nächste wichtige Eigenschaft der singulären Homologie, die wir beweisen wollen, ist die Homotopieinvarianz. Wir beginnen wieder mit einem (ganz einfachen) Satz für Kettenkomplexe.

Definition 7.18 Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ Kettenkomplexe und seien f und $g: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei Kettenabbildungen.

Eine **Kettenhomotopie** von f nach g ist ein Grad +1 Homomorphismus $\Phi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, so dass

$$g - f = \partial' \circ \Phi + \Phi \circ \partial. \quad (7.17)$$

In diesem Fall sagen wir, f und g sind **kettenhomotop** vermöge Φ und wir schreiben $f \simeq_{\Phi} g$.

Beachten Sie, dass die rechte Seite von (7.17) eine Grad-0 Abbildung ist, wie die linke Seite.

Lemma 7.19 Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ Kettenkomplexe und seien f und $g: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei Kettenabbildungen.

- a) Wenn $f \simeq g$, dann ist $H(f) = H(g): H(\mathcal{C}) \longrightarrow H(\mathcal{D})$.
- b) Kettenhomotopie \simeq ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kettenabbildungen $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.
- c) Sei $\mathcal{E} = (E, \partial'')$ ein dritter Kettenkomplex und seien h und k Kettenabbildungen $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$. Wenn $f \simeq g$ und $h \simeq k$, dann ist $h \circ f \simeq k \circ g$.

(Zu b) und c) vergleiche man Korollar 2.7 für die normale Homotopie von stetigen Abbildungen. Diese Teile besagen, dass Kettenhomotopie eine Kongruenz ist auf der Kategorie KK .)

Beweis. Teil a): Sei $\gamma \in H(\mathcal{C})$ und sei $z \in C$ ein Zyklus mit $\gamma = [z]$. Dann ist

$$gz - fz = \partial' \Phi z + \Phi \partial z = \partial' \Phi z + 0 = \partial' \Phi z,$$

weil z ein Zyklus ist. Also ist $gz - fz$ ein Rand und somit ist

$$g_*(\gamma) - f_*(\gamma) = [gz] - [fz] = [gz - fz] = [\partial' \Phi z] = 0$$

und $g_* = f_*$.

Teil b): Für jede Kettenabbildung f ist offensichtlich die konstante Abbildung 0 eine Kettenhomotopie von f nach f ; also ist \simeq reflexiv.

Wenn $f \simeq_{\Phi} g$, so ist $-\Phi$ eine Kettenhomotopie von g nach f und \simeq ist symmetrisch.

Und schließlich, wenn $f \simeq_{\Phi} g$ und $g \simeq_{\Psi} h$, wo f, g und h Kettenabbildungen $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sind, so ist

$$h - f = (h - g) + (g - f) = \partial' \Psi + \Psi \partial + \partial' \Phi + \Phi \partial = \partial' \circ (\Psi + \Phi) + (\Psi + \Phi) \circ \partial$$

(wobei ausgenutzt wurde, dass ∂' ein Gruppenhomomorphismus ist). Also ist $\Psi + \Phi$ eine Kettenhomotopie von f nach h und \simeq ist transitiv.

Teil c): Sei Φ eine Kettenhomotopie von f nach g und sei Ψ eine Kettenhomotopie von h nach k . Wir haben

$$\begin{aligned}
 kg - hf &= kg - hg + hg - hf & (-hg + hg = 0) \\
 &= (k - h) \circ g + h \circ (g - f) & (h \text{ ist Homomorphismus}) \\
 &= (\partial''\Psi + \Psi\partial') \circ g + h \circ (\partial'\Phi + \Phi\partial) \\
 &= \partial''\Psi g + \Psi\partial'g + h\partial'\Phi + h\Phi\partial & (h \text{ ist Homomorphismus}) \\
 &= \partial''\Psi g + \Psi g\partial + \partial''h\Phi + h\Phi\partial & (g, h \text{ Kettenabbildungen}) \\
 &= \partial'' \circ (\Psi g + h\Phi) + (\Psi g + h\Phi) \circ \partial & (\partial'' \text{ ist Homomorphismus.})
 \end{aligned}$$

Also ist $\Psi g + h\Phi$ eine Kettenhomotopie von $h \circ f$ zu $k \circ g$. ■

Definition 7.20 Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ Kettenkomplexe.

Eine Kettenabbildung $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt eine **Kettenhomotopieäquivalenz**, wenn es eine Kettenabbildung $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gibt (genannt eine **Kettenhomotopieinverse** zu f), so dass

$$g \circ f \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

und

$$f \circ g \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Wenn es eine Kettenhomotopieäquivalenz $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gibt, sagen wir, dass \mathcal{C} und \mathcal{D} **kettenhomotopieäquivalent** oder **vom gleichen Kettenhomotopietyp** sind und wir schreiben $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Bemerkung 7.21 Aus Lemma 7.19 a) folgt sofort, dass Kettenhomotopieäquivalenzen Isomorphismen der Homologiegruppen induzieren und dass Kettenkomplexe vom gleichen Kettenhomotopietyp isomorphe graduierte Homologiegruppen haben.

Unser Ziel ist es, Aussagen wie Lemma 7.19 a) oder Bemerkung 7.21 für die *topologische* Homotopie zwischen stetigen Abbildungen zu gewinnen, aber die topologischen Aussagen lassen sich am bequemsten und effektivsten erhalten, wenn man den Umweg über die Kettenhomotopie nimmt oder die Kettenhomotopie als Zwischenstufe verwendet. Wir wollen also aus einer topologischen Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen eine Kettenhomotopie zwischen den induzierten Kettenabbildungen konstruieren.

Wie bei fast allen Konstruktionen in der singulären Homologie lässt sich auch diese Konstruktion am einfachsten zunächst auf dem Standardsimplex oder genauer für die konstante Homotopie des singulären Simplexes id_{Δ_n} erklären und dann mit einer beliebigen topologischen Homotopie in den eigentlich interessierenden topologischen Raum übertragen.

Da aber auch Randoperatoren und somit Seiten des Standardsimplexes ins Spiel kommen, fassen wir die Grunddefinitionen und die Anfänge dieser Konstruktion ein bisschen allgemeiner.

Definition 7.22 a) Wir konstruieren einen Funktor $Z: \text{Top} \longrightarrow \text{Top}$ durch die Zuordnungen

$$Z(X) := X \times I$$

für jeden topologischen Raum X und

$$Z(f) := f \times \text{id}_I: Z(X) = X \times I \longrightarrow Y \times I = Z(Y)$$

für jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen. Wir haben den Namen Z gewählt als Abkürzung für **Zylinder**.

b) Neben dem Funktor Z haben wir auch den Identitätsfunktor id_{Top} von Top nach sich. Wir konstruieren zwei natürliche Transformationen λ (für „linkes Ende“) und ρ (für „rechtes Ende“) von $\text{id}_{\text{Top}} \longrightarrow Z$, indem wir für jeden topologischen Raum X stetige Abbildungen

$$\lambda(X) \text{ und } \rho(X): \text{id}_{\text{Top}}(X) = X \longrightarrow X \times I = Z(X)$$

definieren durch die Vorschriften

$$\lambda(X)(x) := (x, 0) \in X \times I$$

und

$$\rho(X)(x) := (x, 1) \in X \times I$$

für jedes $x \in X$.

Für jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ kommutieren $\lambda(X)$ und $\rho(X)$ offensichtlich mit f und $Z(f) = f \times \text{id}_I$, so dass diese Zuordnungen tatsächlich natürliche Transformationen definieren.

Die Abbildungen $\lambda(X)$ und $\rho(X)$ sind für jeden Raum X sogar Einbettungen $X \longrightarrow X \times I$.

Um die Notation zu vereinfachen, werden wir bei der Anwendung dieser natürlicher Transformationen auch die jedem topologischen Raum X zugeordneten stetigen Abbildungen $\lambda(X)$ und $\rho(X)$ schlicht λ und ρ nennen, obwohl dann eigentlich verschiedene Abbildungen den gleichen Namen erhalten. Der Raum X wird sowieso bei jeder Anwendung aus den jeweiligen Umständen hervorgehen.

Definition 7.23 Sei $n \in \mathbf{N}$.

- a) Das n -te **Standardprisma** ist die $n+1$ -dimensionale lineare Kette P_n auf $\Delta_n \times I \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ gegeben durch die Formel

$$P_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i [\lambda e_0, \dots, \lambda e_i, \rho e_i, \dots, \rho e_n]. \quad (7.18)$$

- b) Sei X ein topologischer Raum und sei $\sigma \in S_n(X)$. Wir definieren das **Prisma auf σ** als die $n+1$ -dimensionale Kette

$$P_\sigma := (\sigma \times \text{id}_I)_\#(P_n) \in C_{n+1}(X \times I). \quad (7.19)$$

- c) Nach Lemma 6.11 b) und Bemerkung 6.32 erweitert sich die Zuordnung aus Teil b) zu einem eindeutigen graduierten Homomorphismus

$$P: C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I),$$

von Grad $+1$, so dass $P(\sigma) = P_\sigma$ für jeden singulären Simplex σ in X . Wir nennen P den **Prismenoperator** oder die **Prismenabbildung** auf X .

Die Summanden von P_n zerlegen $\Delta_n \times I$ in $n+1$ schön zusammengefügte $n+1$ -dimensionale lineare Simplizes, die für $n=1$ und $n=2$ in Abbildungen 7.1 und 7.2 zu sehen sind.

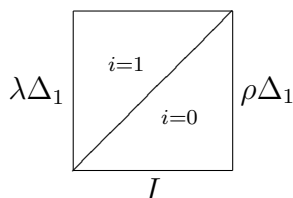
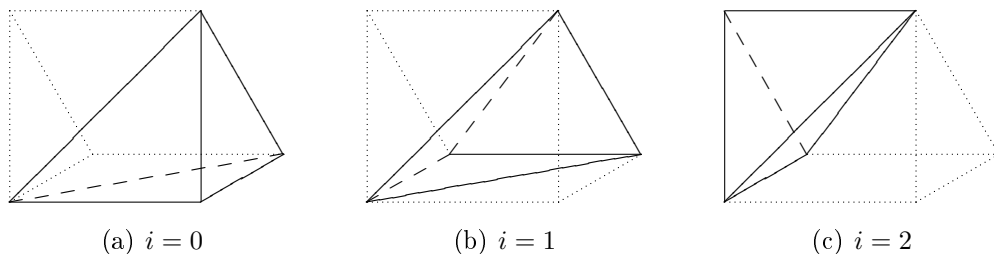


Abbildung 7.1: Die Simplizes im Standardprisma P_1 .

Abbildung 7.2: Die drei Summanden im Prisma P_2 .

Bemerkung 7.24 Sei V ein affiner Raum und sei $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$ ein linearer n -Simplex in V . Dann ist $V \times \mathbf{R}$ auch ein affiner Raum und $\sigma \times \text{id}_I$ ist die Einschränkung einer affinen Abbildung $\mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow V \times \mathbf{R}$ auf $\Delta_n \times I$, so dass $(\sigma \times \text{id}_I)_\#$ lineare Simplizes in $\Delta_n \times I$ (und insbesondere die Summanden von P_n) wieder in lineare Simplizes überführt, deren Ecken die Bilder der Ecken der Summanden von P_n unter $\sigma \times \text{id}_I$ sind.

Also ist das Prisma auf einen linearen Simplex $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$ gegeben durch die Formel

$$P_\sigma = P_{[v_0, \dots, v_n]} = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n]. \quad (7.20)$$

Notation 7.25 Wir wollen jetzt den Rand von P_n oder allgemeiner von P_σ für einen linearen Simplex σ in einem affinen Raum V ausrechnen, und um darüber einfacher reden zu können führen wir kurze Namen ein für die Summanden von P_σ und für die linearen Simplizes, die in den Rändern dieser Summanden auftreten.

All diese Simplizes haben gemeinsam, dass ihre Ecken aus den Ecken eines linearen Simplexes $\tau = [v_0, \dots, v_n]$ in V gewonnen werden (dieser ist entweder σ selber oder eine Seite von σ), indem die ersten paar Ecken mit λ nach $V \times \{0\}$ versetzt werden und die letzten Ecken mit ρ nach $V \times \{1\}$ versetzt werden. Trotzdem kommen zwei verschiedene Situationen vor.

Die meisten dieser Simplizes v haben eine Gestalt wie in (7.20), wo eine Ecke v_k von τ zweimal unter den Ecken von v vertreten ist, als λv_k und direkt anschließend als ρv_k .

Bilden wir aber eine Seite eines solchen Simplexes v , was bei der Berechnung des Randoperators passiert, so kann diese Verdoppelung aufgehoben werden und wir haben es deshalb auch mit Simplizes zu tun, unter deren Ecken jede Ecke von τ genau einmal vorkommt.

Wir führen für diese beiden Situationen bequeme Kürzel ein, die nur τ nennen und den Index, ab dem die Ecken von $V \times \{0\}$ nach $V \times \{1\}$ übersiedeln.

Ist $\tau = [v_0, \dots, v_n]$ ein linearer Simplex in V und $0 \leq k \leq n$, so bezeichnen wir mit $\delta_k(\tau)$ den linearen $n+1$ -Simplex

$$\delta_k(\tau) = \delta_k([v_0, \dots, v_n]) := [\lambda v_0, \dots, \lambda v_k, \rho v_k, \dots, \rho v_n],$$

und für $0 \leq k \leq n+1$ bezeichnen wir mit $\varepsilon_k(\tau)$ den linearen n -Simplex

$$\varepsilon_k(\tau) = \varepsilon_k([v_0, \dots, v_n]) := [\lambda v_0, \dots, \lambda v_{k-1}, \rho v_k, \dots, \rho v_n]$$

in $V \times I$. (Hier soll δ an „doppelt“ und ε an „einfach“ erinnern.)

Man beachte: für $k = n+1$ ist

$$\varepsilon_{n+1}(\tau) = \lambda_{\#}(\tau) \quad (7.21)$$

und ist ganz in $V \times \{0\}$ enthalten; für $k = 0$ ist

$$\varepsilon_0(\tau) = \rho_{\#}(\tau) \quad (7.22)$$

und ist ganz in $V \times \{1\}$ enthalten.

Bemerkung 7.26 Sei V ein affiner Raum und $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ ein linearer Simplex in V . Im i -ten Summanden von P_σ in (7.19) erscheint in der Notation von 7.25 der lineare Simplex

$$\delta_i(\sigma) = [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n].$$

Wir erhalten die j -te Seite dieses Simplexes durch Entfernung der j -ten Ecke innerhalb der Klammern $[]$. Diese Ecke ist λv_j für $j \leq i$ und ρv_{j-1} für $i < j \leq n+1$. Umgekehrt ist v_i die $i-1$ -te Ecke von $\sigma^{(j)}$ wenn $j < i$ und die i -te Ecke von $\sigma^{(j)}$ für $j > i$.

Somit erhalten wir für $0 \leq j \leq n+1$

$$(\delta_i(\sigma))^{(j)} = \begin{cases} [\lambda v_0, \dots, \widehat{\lambda v_j}, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j < i; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_{i-1}, \rho v_i, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j = i; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_{i+1}, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } j = i+1; \\ [\lambda v_0, \dots, \lambda v_i, \rho v_i, \dots, \widehat{\rho v_{j-1}}, \dots, \rho v_n] & \text{wenn } i+1 < j \end{cases} \quad (7.23)$$

oder mit den in Notation 7.25 eingeführten Abkürzungen

$$(\delta_i(\sigma))^{(j)} = \begin{cases} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) & \text{wenn } j < i; \\ \varepsilon_i(\sigma) & \text{wenn } j = i; \\ \varepsilon_{i+1}(\sigma) & \text{wenn } j = i+1; \\ \delta_i(\sigma^{(j-1)}) & \text{wenn } i+1 < j. \end{cases} \quad (7.24)$$

Lemma 7.27 Sei V ein affiner Raum und $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ ein linearer Simplex in V . Dann ist

$$\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) = \rho_{\sharp}(\sigma) - \lambda_{\sharp}(\sigma) \in C_n(V \times I). \quad (7.25)$$

Beweis. Aus Gleichung (7.20) für P_σ , aus der Definition des Randoperators und aus Gleichung (7.24) für die Seiten der Summanden von P_σ erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \partial P_\sigma = \partial \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i(\sigma) \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial(\delta_i(\sigma)) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (\delta_i(\sigma))^{(j)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} (\delta_i(\sigma))^{(j)} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n (-1)^{2i} \varepsilon_i(\sigma) + \sum_{i=0}^n (-1)^{2i+1} \varepsilon_{i+1}(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j-1)}) \end{aligned} \quad (7.26a)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \delta_{i-1}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(\sigma) - \sum_{i=0}^n \varepsilon_{i+1}(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j-1)}) \end{aligned} \quad (7.26b)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i'=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i'} (-1)^{i'+j+1} \delta_{i'}(\sigma^{(j)}) + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(\sigma) - \sum_{i'=1}^{n+1} \varepsilon_{i'}(\sigma) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j'=i+1}^n (-1)^{i+j'+1} \delta_i(\sigma^{(j')}) \end{aligned} \quad (7.26c)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j+1} \delta_i(\sigma^{(j)}) + \varepsilon_0(\sigma) - \varepsilon_{n+1}(\sigma). \quad (7.26d)$$

Hier erhalten wir zunächst (7.26a) durch Einsetzen aus (7.24), und vereinfachen diese Zeile zu (7.26b) durch Ausrechnen der Vorzeichen der mittleren Summanden und durch die Beobachtung, dass es zu $i = 0$ in der ersten Summation kein $j \leq i - 1$ und zu $i = n$ in der letzten Summation kein $j \geq i + 2$ geben kann.

In (7.26c) „glätten“ wir die nicht in einfacher Form in den Summanden stehenden Indizes durch die Einführung neuer, um eins verschobener Indizes

gleich den Ausdrücken in den Summanden; wir schreiben *nur in dieser Zeile* die neuen Indizes mit einem Strich, um sie von den alten zu unterscheiden, und wir passen alle Vorkommnisse der alten Indizes entsprechend an.

Anschließend müssen wir die Striche nicht mehr schreiben und es wird dann ersichtlich, dass man nun die erste und letzte Summe zu einer einzigen Summation für j von 0 bis n zusammenfassen kann, und dass in den mittleren Summen die Terme für Indexwerte 1 bis n sich wegheben und nur der Summand für $i = 0$ in der zweiten Summe und der Summand für $i = n + 1$ in der dritten Summe übrig bleiben. Diese Vereinfachung ergibt schließlich (7.26d).

Jetzt berechnen wir den zweiten Summanden auf der linken Seite von (7.25). Da P ein Homomorphismus ist, folgt direkt aus der Definition des Randoperators und aus Formel 7.20 für das Prisma eines linearen Simplexes, dass

$$\begin{aligned} P(\partial\sigma) &= P\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma^{(j)}\right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P(\sigma^{(j)}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_{\sigma^{(j)}} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{\dim \sigma^{(j)}} (-1)^i \delta_i(\sigma^{(j)}) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \delta_i(\sigma^{(j)}). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Der letzte Ausdruck ist die erste Summe in (7.26d), aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Also heben sich diese Beiträge weg, wenn wir die Summe von (7.26d) und (7.27) bilden, und wir erhalten

$$\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) = \varepsilon_0(\sigma) - \varepsilon_{n+1}(\sigma) = \rho_{\sharp}(\sigma) - \lambda_{\sharp}(\sigma)$$

nach (7.22) und (7.21). ■

Korollar 7.28 *Der Prismenoperator $P: C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I)$ ist eine natürliche Kettenhomotopie zwischen den natürlichen Kettenabbildungen λ_{\sharp} und ρ_{\sharp} .*

Beweis. λ_{\sharp} und ρ_{\sharp} sind natürliche Kettenabbildungen $C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I)$, weil λ und ρ natürliche Transformationen $\text{id}_{\text{Top}} \longrightarrow Z$ sind und somit nach Lemma 1.28 die Anwendung von C_* auf λ und ρ natürliche Transformationen $C_* \longrightarrow C_* \circ Z$ liefert.

Die Definition von P bewirkt, dass P automatisch eine natürliche Transformation $C_* \longrightarrow C_* \circ Z$ ist, denn wenn $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so gilt für jeden singulären Simplex

$\sigma \in S_n(X)$, dass

$$\begin{aligned}
 P(C_*(f)(\sigma)) &= P(f_{\#}(\sigma)) = P(f \circ \sigma) = P_{f \circ \sigma} \\
 &= ((f \circ \sigma) \times \text{id}_I)_{\#}(P_n) \\
 &= ((f \times \text{id}_I) \circ (\sigma \times \text{id}_I))_{\#}(P_n) \\
 &= (f \times \text{id}_I)_{\#}((\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P_n)) \\
 &= (f \times \text{id}_I)_{\#}(P_{\sigma}) = (f \times \text{id}_I)_{\#}(P(\sigma)) \\
 &= C_*Z(f)(P(\sigma)).
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Bisher haben wir in der Notation für den Prismenoperator aus Bequemlichkeit den Namen des topologischen Raumes, auf den er wirkt, nicht erwähnt, aber wenn wir das der Genauigkeit halber jetzt einmal tun, so haben wir gerade gezeigt, dass $P(Y) \circ C_*(f) = C_*(Z(f)) \circ P(X)$ zumindest auf singulären Simplizes in X . Da diese aber $C_*(X)$ frei erzeugen, gilt diese Beziehung auf ganz $C_*(X)$ und P ist eine natürliche Transformation $C_* \longrightarrow C_* \circ Z$.

Nach Definition ist P für jeden Raum X ein Grad +1 Homomorphismus, und für jeden singulären Simplex σ gilt, weil P , $\rho_{\#}$ und $\lambda_{\#}$ natürliche Transformationen und $\sigma_{\#}$ und $(\sigma \times \text{id}_I)_{\#}$ Kettenabbildungen sind, dass:

$$\begin{aligned}
 \partial P(\sigma) + P\partial(\sigma) &= \partial P(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) + P\partial(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= \partial((\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P(\text{id}_{\Delta_n}))) + P(\sigma_{\#}(\partial(\text{id}_{\Delta_n}))) \\
 &= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\partial P(\text{id}_{\Delta_n})) + (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(P\partial(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}((\partial P + P\partial)(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &\stackrel{\text{Lem 7.27}}{=} (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}((\rho_{\#} - \lambda_{\#})(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\rho_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) - (\sigma \times \text{id}_I)_{\#}(\lambda_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= \rho_{\#}(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) - \lambda_{\#}(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n})) \\
 &= \rho_{\#}(\sigma) - \lambda_{\#}(\sigma).
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Da dies für singuläre Simplizes gilt, gilt es auch für jede Kette in $C_*(X)$ und P ist eine Kettenhomotopie von $\rho_{\#}$ nach $\sigma_{\#}$. ■

Satz 7.29 a) Seien X und Y topologische Räume und seien f und g stetige Abbildungen $X \longrightarrow Y$. Wenn $f \simeq g$, dann ist

$$f_{\#} \simeq g_{\#}: C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$$

und somit ist

$$f_* = g_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y).$$

b) Die gleiche Aussage gilt auch in Top^2 statt Top und für die relative Homologie, nämlich:

Seien (X, A) und (Y, B) topologische Raumpaare und seien f und g stetige Abbildungen $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$.

Wenn f homotop ist zu g als Abbildungen von Raumpaaren, dann sind auch $f_\#$ und $g_\#: C_*(X, A) \longrightarrow C_*(Y, B)$ kettenhomotop. Folglich ist

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B).$$

Beweis. Es reicht, Teil b) zu beweisen, da Teil a) den Spezialfall $A = B = \emptyset$ darstellt. Trotzdem erhalten wir als Zwischenschritt auch einen direkten Beweis von Teil a).

Sei $H: (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$ eine Homotopie in Top^2 von f nach g . Sei $i: A \longrightarrow X$ die Inklusion. Und schließlich, sei P der Prismenoperator aus Definition 7.23 c).

Damit klar ist, auf welchen Kettengruppen wir im folgenden die Rand- und Prismenoperatoren betrachten, werden wir sie nicht wie sonst aus Bequemlichkeit mit einem einfachen Buchstaben notieren, sondern den jeweiligen zu Grunde liegenden topologischen Raum als Index an das Symbol ∂ oder P heften.

Nach Korollar 7.28 ist

$$\partial_{X \times I} P_X + P_X \partial_X = \rho_\# - \lambda_\#$$

als Abbildungen $C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times I)$ und weil $H_\#: C_*(X \times I) \longrightarrow C_*(Y)$ eine Kettenabbildung ist, haben wir

$$\begin{aligned} \partial_Y H_\# P_X + H_\# P_X \partial_X &= H_\# \partial_{X \times I} P + H_\# P_X \partial_X \\ &= H_\# \circ (\partial_{X \times I} P_X + P_X \partial_X) \\ &= H_\# \circ (\rho_\# - \lambda_\#) = H_\# \rho_\# - H_\# \lambda_\# \\ &= (H \circ \rho)_\# - (H \circ \lambda)_\# \\ &= g_\# - f_\# \end{aligned} \tag{7.30}$$

als Abbildungen $C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$.

(Insbesondere ist $H_\# P_X$ eine Kettenhomotopie von $f_\#$ nach $g_\#$ und f und g induzieren den gleichen Homologiemorphismus $H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$; wir haben an dieser Stelle also schon Teil a) bewiesen.)

Weil P eine natürliche Transformation ist, ist $(i \times \text{id}_I)_\# \circ P_A = P_X \circ i_\#$ oder anders gesagt, $P_A = P_X|_{C_*(A)}$. Insbesondere bildet P_X den Unterkettenkomplex $C_*(A) \subseteq C_*(X \times I)$ nach $C_*(A \times I)$ ab (weil P_A dies tut) und induziert somit nach Lemma 6.34 e ii) auf den Quotienten einen Grad +1 Homomorphismus

$$\bar{P}_X: C_*(X, A) \longrightarrow C_*(X \times I, A \times I).$$

Weil auch die Randoperatoren und die Kettenabbildungen der relativen Kettengruppen von den entsprechenden Randoperatoren und Kettenabbildungen der Oberräume der Paare induziert werden, folgt sofort aus (7.30), dass

$$\bar{\partial}_{(Y,B)} \bar{H}_\# \bar{P}_X + \bar{H}_\# \bar{P}_X \bar{\partial}_{(X,A)} = \bar{g}_\# - \bar{f}_\#$$

als Abbildungen $C_*(X, A) \longrightarrow C_*(Y, B)$.

D.h., $\bar{H}_\# \bar{P}_X$ ist eine Kettenhomotopie von $\bar{f}_\#$ nach $\bar{g}_\#$ und diese relativen Kettenabbildungen induzieren somit die gleiche Abbildung

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

in der relativen Homologie. ■

Lemma 7.30 a) Seien X und Y topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist

$$f_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

ein Isomorphismus.

b) Seien (X, A) und (Y, B) topologische Raumpaare und sei $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung, so dass $f: X \longrightarrow Y$ und $f|_A: A \longrightarrow B$ Homotopieäquivalenzen sind. Dann ist

$$f_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

ein Isomorphismus.

(Man beachte, dass man nicht verlangen muss, dass f eine Homotopieäquivalenz in Top^2 ist, sondern nur dass f für die Oberräume und für die Unterräume jeweils Homotopieinversen hat, die eventuell nichts miteinander zu tun haben, sowie auch die Homotopien für die Ober- und Unterräume keine Beziehung zueinander haben müssen.)

Beweis. Zu a): Sei $g: Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f . Aus $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ folgt mit Satz 7.29 a), dass $g_\#$ und $f_\#$ Kettenhomotopieinverse zueinander sind und somit Kettenhomotopieäquivalenzen sind, und weiter, dass f_* und g_* Umkehrabbildungen zueinander sind und somit Isomorphismen der Homologiegruppen.

Zu b): In dem von f induzierten Diagrammmorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) \\ f_* \downarrow \cong & & f_* \downarrow \cong & & \downarrow f_* & & \cong \downarrow f_* & & \cong \downarrow f_* \\ H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\beta_n} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(Y) \end{array}$$

des gezeigten Abschnitts der langen exakten Homologiefolgen von (X, A) und (Y, B) sind in jeder Dimension nach Teil a) und den Voraussetzungen die vier äußeren Homomorphismen f_* Isomorphismen. Aus dem 5-er Lemma folgt, dass auch der mittlere Homomorphismus

$$f_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

für jedes n ein Isomorphismus ist. ■

An dieser Stelle können wir schon analog zu Korollar 3.13 für die Homotopiegruppen ein erstes einfaches Ergebnis über die Homologiegruppen wichtiger Räume erhalten, sobald wir die einfachste Grundeigenschaft in der Eilenberg-Steenrod Liste behandelt haben, nämlich die Bestimmung der Homologie eines Einpunktraumes. Wir müssen das ohnehin jetzt tun, weil wir ohne dieses Ergebnis die letzte schwierige Grundeigenschaft des Homologiefunktors nicht herleiten können.

Satz 7.31 Sei $X = \{p\}$ ein topologischer Raum, der nur aus einem Punkt besteht. Dann ist

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0; \\ \{0\}, & \text{wenn } n \neq 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

Beweis. Da X nur aus einem Punkt besteht, ist jede stetige Abbildung nach X konstant und insbesondere gibt es in jeder Dimension $n \geq 0$ genau einen singulären n -Simplex in X , nämlich die konstante Abbildung $\Delta_n \rightarrow \{p\}$. Wir nennen diesen eindeutigen n -Simplex s_n . Es folgt, dass $C_n(X) = \mathbf{Z}$ für jedes $n \geq 0$.

Weil $C_{-1}(X) = \{0\}$, ist s_0 automatisch ein Zyklus. Wenn $n > 1$, so gibt es auch in Dimension $n - 1$ nur einen singulären Simplex in X , d.h., jede

Seite $s_n^{(i)}$ von s_n ist gleich s_{n-1} , und wir haben

$$\begin{aligned}\partial_n s_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i s_n^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_{n-1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \right) s_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist;} \\ s_{n-1}, & \text{wenn } n \text{ gerade ist.} \end{cases}\end{aligned}\tag{7.32}$$

In anderen Worten, ∂_n ist ein Isomorphismus $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ für n gerade ≥ 2 , und ∂_n ist 0, wenn n ungerade oder wenn $n \leq 0$ ist.

Wann immer in einem Kettenkomplex ∂_n ein Isomorphismus ist, ist Z_n und somit auch $B_n = \{0\}$, und B_{n-1} und somit auch Z_{n-1} ist ganz C_{n-1} , so dass $H_n = H_{n-1} = \{0\}$.

Weil dies im singulären Kettenkomplex $C_*(X)$ für alle geraden $n \geq 2$ der Fall ist, ist $H_n(X) = \{0\}$ für alle $n \geq 1$, und natürlich auch für $n < 0$, weil dann C_n schon $\{0\}$ ist.

Es verbleibt nur der Fall $n = 0$. Wir haben $\partial_1 = \partial_0 = \{0\}$. Also ist $Z_0(X) = \mathbf{Z}$ aber $B_0(X) = \{0\}$, und deshalb ist $H_0(X) = \mathbf{Z}$. ■

Definition 7.32 Ein topologischer Raum X heißt **azyklisch**, wenn die Homologie von X wie in (7.31) ist, d.h., wenn $H_n(X) = \{0\}$ für alle $n \neq 0$ und wenn $H_0(X) = \mathbf{Z}$.

X ist also azyklisch genau dann, wenn X die Homologie eines Punktes hat.

Korollar 7.33 Jeder zusammenziehbare topologische Raum X ist azyklisch.

Beweis. Wenn X zusammenziehbar ist, hat X den Homotopietyp eines Einpunktraumes, und aus Lemma 7.30 a) folgt, dass X dann auch die Homologie (7.31) eines Einpunktraumes hat. ■

Beispiele 7.34 Die Räume \mathbf{R}^n , D^n , und jede konvexe Teilmenge von \mathbf{R}^n (insbesondere auch Δ_n !) sind alle azyklisch und haben die durch (7.31) gegebene Homologie.

Wir brauchen noch eine wichtige Eigenschaft der singulären Homologie, um die Homologiegruppen interessanter Räume tatsächlich berechnen zu können, und diese Eigenschaft hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Satz von Seifert und van Kampen — sie setzt die Homologie eines Raumes X in Verbindung mit der Homologie zweier offener Teilräume A und B , die X überdecken, und der Homologie ihres Durchschnitts.

Dabei tritt ein technisches Problem auf, für dessen Lösung wir zuerst sorgen müssen: wir wollen aus den Kettengruppen von A und B die Homologie von X berechnen, aber leider gibt es singuläre Simplizes in X , die weder in A noch in B enthalten sind, und deshalb erzeugen $C_*(A)$ und $C_*(B)$ nicht die volle Kettengruppe von X , sondern nur eine Untergruppe. Dieses Problem lässt sich letztendlich doch überwinden, weil diese echte Untergruppe $C_*(A) + C_*(B)$ trotzdem die volle *Homologiegruppe* von X erzeugt und ohne Verzerrung berechnet.

Der Clou, um das zu zeigen, besteht darin, zu große Simplizes in X in kleinere zu unterteilen, die ganz in A oder ganz in B liegen (genau so wie wir im Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen Schleifen zerlegt haben in kleine Abschnitte, die ganz in einer der Überdeckungsmengen verliefen).

Definition 7.35 Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine Überdeckung von X (nicht notwendigerweise eine offene Überdeckung). In anderen Worten, sei

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

Wir nennen einen singulären Simplex $\sigma \in S_n(X)$ **klein** oder genauer **\mathcal{U} -klein**, wenn es ein $\lambda \in \Lambda$ gibt mit $\text{Bild } \sigma \subseteq U_\lambda$.

Wir bezeichnen mit $S_n(\mathcal{U})$ die Menge aller \mathcal{U} -kleinen n -Simplizes in X und mit

$$C_n(\mathcal{U}) := F(S_n(\mathcal{U}))$$

die freie abelsche Gruppe erzeugt von den kleinen n -Simplizes in X ; sie ist eine Untergruppe von $C_n(X)$ und offensichtlich wird sie erzeugt von den Untergruppen $C_n(U_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$, d.h., wir haben

$$C_n(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_n(U_\lambda) \quad (7.33)$$

für jedes $n \in \mathbf{N}$. Die Elemente von $C_n(\mathcal{U})$ nennen wir **\mathcal{U} -kleine n -Ketten** auf X .

Wir setzen

$$C_*(\mathcal{U}) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n(\mathcal{U}). \quad (7.34)$$

Dies ist eine graduierte Untergruppe von $C_*(X)$ und wegen (7.33) gilt auch hier

$$C_*(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_*(U_\lambda). \quad (7.35)$$

Die Elemente von $C_*(\mathcal{U})$ nennen wir **\mathcal{U} -kleine Ketten** auf X .

Offensichtlich ist jede Seite eines kleinen Simplexes wieder klein und deshalb ist der Rand einer kleinen Kette wieder klein. Das heißt, der Randoperator ∂ von $C_*(X)$ bildet $C_*(\mathcal{U})$ wieder in sich ab und $C_*(\mathcal{U})$ ist ein *Unterkettenkomplex* von $C_*(X)$. (Das ist auch klar aus (7.35), denn jedes $C_*(U_\lambda)$ ist ein Unterkettenkomplex von $C_*(X)$ und unter ∂ abgeschlossen.)

Wir bezeichnen mit j die Inklusion

$$j: C_*(\mathcal{U}) \longrightarrow C_*(X);$$

sie ist eine Kettenabbildung.

Wir schreiben $H_*(\mathcal{U})$ als bequeme Kurznotation für die graduierte Homologiegruppe $H(C_*(\mathcal{U}))$ des Kettenkomplexes $C_*(\mathcal{U})$.

Unser Ziel wird es sein, zu zeigen, dass der Unterkettenkomplex $C_*(\mathcal{U})$ die gleiche Homologie hat, wie ganz $C_*(X)$, und zu diesem Zweck werden wir zeigen, dass unter geeigneten leicht zu erfüllenden Voraussetzungen für die Überdeckung \mathcal{U} die Kettenabbildung j einen Isomorphismus in Homologie induziert.

Um das zeigen zu können, müssen wir große Simplizes σ auf geeignete Weise zerkleinern. Die Methode, die wir dafür wählen, heißt **baryzentrische Unterteilung**, und wir bereiten ihre Definition vor durch einige Betrachtungen über lineare Simplizes.

Definition 7.36 Sei V ein affiner Raum und sei $v \in V$. Für jeden linearen n -Simplex $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$ in V bezeichnen wir mit $v \cdot \sigma$ den linearen $n+1$ -Simplex

$$v \cdot \sigma := [v, v_0, v_1, \dots, v_n]. \quad (7.36)$$

Diese Definition setzen wir linear fort auf die von den linearen Simplizes erzeugte Untergruppe von $C_n(V)$, d.h., für eine lineare Kette

$$c = \sum_{\substack{\sigma \in \\ S_n^{\text{lin}}(X)}} m_\sigma \sigma$$

setzen wir

$$v \cdot c := \sum_{\substack{\sigma \in \\ S_n^{\text{lin}}(X)}} m_\sigma (v \cdot \sigma) \in C_{n+1}(V).$$

Dies ist wieder eine lineare Kette. Die Abbildung $v \cdot$ ist nach Definition ein Gruppenhomomorphismus.

Bemerkung 7.37 Sei V ein affiner Raum. Sei $v \in V$ und $\sigma := [v_0, \dots, v_n]$ ein linearer n -Simplex in V .

Der 0-te Eckpunkt von $v \cdot \sigma$ ist v , und für jedes i mit $1 \leq i \leq n+1$ ist der i -te Eckpunkt von $v \cdot \sigma$ gleich dem $i-1$ -ten Eckpunkt v_{i-1} von σ . Folglich ist

$$(v \cdot \sigma)^{(0)} = [v_0, \dots, v_n] = \sigma$$

und

$$(v \cdot \sigma)^{(i)} = v \cdot \sigma^{(i-1)} \quad \text{für jedes } i \geq 1.$$

Hieraus folgt sofort

$$\partial(v \cdot \sigma) = \sigma - v \cdot \partial\sigma,$$

wie man sofort nachrechnet.

Diese Beziehung überträgt sich auf jede lineare Kette, d.h., wir haben

$$\partial(v \cdot c) = c - v \cdot \partial c \quad (7.37)$$

für jede lineare Kette c auf V .

Definition 7.38 Das **Baryzentrum** des n -dimensionalen Standardsimplexes Δ_n ist der Punkt

$$b_n := \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)}_n \in \Delta_n, \quad (7.38)$$

dessen baryzentrische Koordinaten alle gleich sind und somit gleich $1/(n+1)$ sind, da ihre Summe 1 sein muss. Die kartesischen Koordinaten in (7.38) sind einfach die letzten n baryzentrischen Koordinaten. Das Baryzentrum ist, wie der Name sagt, der Schwerpunkt von Δ_n .

Definition 7.39 Durch Induktion über n definieren wir für jedes $n \in \mathbf{N}$ und jeden topologischen Raum X eine natürliche Kettenabbildung

$$B_n: \mathbf{C}_n(X) \longrightarrow C_n(X),$$

genannt die **baryzentrische Unterteilung**, wie folgt:

Für $n = 0$ setzen wir

$$B_0 := \text{id}_{C_0(X)} \quad (7.39)$$

und für $n < 0$ setzen wir $B_n = 0$, da wir ohnehin keine andere Wahl haben. Offensichtlich ist dies natürlich und offensichtlich gilt $\partial_0 B_0 = B_{-1} \partial_0$.

Nun sei $n \geq 0$ und es sei B_n schon als natürliche Kettenabbildung $B_n: \mathbf{C}_n(X) \longrightarrow C_n(X)$ definiert, und insbesondere gelte

$$\partial_n B_n = B_{n-1} \partial_n. \quad (7.40)$$

Wir nennen

$$B_{n+1}^* := b_{n+1} \cdot B_n(\partial\Delta_{n+1}) \quad (7.41)$$

die *baryzentrische Unterteilung des Standard $n+1$ -Simplexes*; sie ist eine lineare Kette in $C_{n+1}(\Delta_{n+1})$.

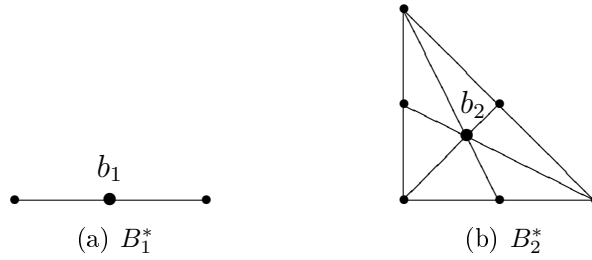


Abbildung 7.3: Die baryzentrische Unterteilung des Standardsimplexes.

Für jeden singulären $n+1$ -Simplex σ in X definieren wir

$$B_{n+1}(\sigma) := \sigma_{\#}(B_{n+1}^*) \quad (7.42)$$

und setzen dies linear fort zu einem Homomorphismus

$$B_{n+1}: \mathbf{C}_{n+1}(X) \longrightarrow C_{n+1}(X).$$

Dies ist nach Definition eine natürliche Transformation, denn für jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen gilt für jeden singulären $n+1$ -Simplex σ in X , dass

$$f_{\#}(B_{n+1}(\sigma)) = f_{\#}\sigma_{\#}(B_{n+1}^*) = (f \circ \sigma)_{\#}(B_{n+1}^*) = B_{n+1}(f \circ \sigma) = B_{n+1}(f_{\#}(\sigma)),$$

und diese Beziehung setzt sich auf beliebige Ketten fort, so dass

$$f_{\#} \circ B_{n+1} = B_{n+1} \circ f_{\#}$$

auf ganz $C_n(X)$.

B_{n+1} hat bezüglich ∂_{n+1} die Eigenschaft einer Kettenabbildung, denn für

jeden singulären $n + 1$ -Simplex σ in X gilt:

$$\partial_{n+1}(B_{n+1}(\sigma)) = \partial_{n+1}(\sigma_{\sharp}(B_{n+1}^*)) \quad (7.43a)$$

$$= \sigma_{\sharp}(\partial_{n+1}B_{n+1}^*) \quad (7.43b)$$

$$= \sigma_{\sharp}(\partial_{n+1}(b_{n+1} \cdot B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}))) \quad (7.43c)$$

$$= \sigma_{\sharp}(B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) - b_{n+1} \cdot \partial_n B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1})) \quad (7.43d)$$

$$= \sigma_{\sharp}(B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) - b_{n+1} \cdot B_{n-1}\partial_n\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) \quad (7.43e)$$

$$= \sigma_{\sharp}B_n(\partial_{n+1}\Delta_{n+1}) \quad (7.43f)$$

$$= B_n(\sigma_{\sharp}(\partial_{n+1}\Delta_{n+1})) \quad (7.43g)$$

$$= B_n(\partial_{n+1}(\sigma)). \quad (7.43h)$$

Dabei folgt (7.43a) durch Einsetzen aus der Definition (7.42) von B_{n+1} ; wir erhalten (7.43b), weil σ_{\sharp} eine Kettenabbildung ist; in (7.43c) haben wir die rechte Seite von Gleichung (7.41) für B_{n+1}^* eingesetzt; wir erhalten (7.43d) aus (7.37); für (7.43e) nutzen wir die Induktionsannahme (7.40) aus, dass B_n eine Kettenabbildung ist; (7.43f) folgt, weil $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ ist; in (7.43g) nutzen wir die Induktionsvoraussetzung aus, dass B_n natürlich ist; und wir erhalten (7.43h) aus der Beziehung (6.13) für ∂ .

Die Beziehung (7.43) setzt sich auf beliebige Ketten fort, so dass

$$\partial_{n+1}B_{n+1} = B_n\partial_{n+1}$$

auf ganz $C_{n+1}(X)$ und B_{n+1} die Eigenschaften einer Kettenabbildung hat.

Damit ist der Induktionsschritt bewiesen und wir erhalten durch Induktion Abbildungen B_n für jedes $n \in \mathbf{N}$, die die homogenen Anteile einer natürlichen graduerten Kettenabbildung

$$B: C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$$

sind, die wir die (erste) **baryzentrische Unterteilung** nennen.

Wir werden gleich sehen, dass für eine Kette $c \in C_*(X)$ die Simplexes in Bc tatsächlich kleiner sind als die Simplexes in c , aber nur ein bisschen kleiner, so dass die einmalige baryzentrische Unterteilung für die meisten Anwendungen nicht „fein genug“ ist. Da aber B eine Selbstabbildung von $C_*(X)$ ist, kann man es mehrmals anwenden um „beliebig feine“ Unterteilungen zu erhalten.

Wir benutzen deshalb neben B selber auch die Potenzen

$$B^k = \underbrace{B \circ \cdots \circ B}_k$$

von B und nennen B^k die **k -te baryzentrische Unterteilung** auf $C_*(X)$. Auch die B^k sind natürliche Kettenabbildungen.

Wir werden gleich zeigen, dass genügend oft baryzentrisch unterteilte Simplexes \mathcal{U} -klein werden für eine vorgegebene offene Überdeckung \mathcal{U} , aber damit uns das etwas nützt, darf die baryzentrische Unterteilung die homologischen Eigenschaften der Ketten, also ihre Bedeutung für die Homologiegruppen des Raumes, nicht verändern. Das wollen wir zuerst sicherstellen, in dem wir zeigen, dass die baryzentrische Unterteilung kettenhomotop zur Identität ist.

Aber die Konstruktion der Kettenhomotopie ist nicht so schön geometrisch wie bei der Konstruktion des Prismenoperators weiter oben. Zum Glück brauchen wir uns nicht um die geometrischen Details zu kümmern—sie würden uns ohnehin nur verwirren. Die eigentliche Konstruktion ist „nichtkonstruktiv“ und ein wenig abstrakt, und gibt die Bildketten der Kettenhomotopie gar nicht explizit an.

Wir werden in diesem Geiste handeln und die Einzelheiten der Konstruktion in einem allgemeinen, von dem speziellen Falle der baryzentrischen Unterteilung losgelösten Satz erläutern, der dann für viele andere Fälle auch anwendbar ist. Das hat auch den Vorteil, dass dadurch das Wesentliche herausgekehrt wird und die Konstruktion im Endeffekt leichter verständlich wird.

Lemma 7.40 *Seien f und g zwei natürliche Transformationen $C_* \rightarrow C_*$ (natürliche Transformationen der Kategorie KK , also natürliche Kettenabbildungen), so dass $f_0 = g_0$. Dann gibt es eine natürliche Kettenhomotopie Φ von f nach g , d.h., ein natürlicher Grad $+1$ Homomorphismus $C_* \rightarrow C_*$, so dass*

$$g - f = \partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial.$$

Beweis. Damit die Notation nicht ganz unhandlich wird, werden wir für jeden einzelnen topologischen Raum X die von den natürlichen Transformationen f, g und Φ gegebenen graduierten Homomorphismen $C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ auch mit f, g und Φ bezeichnen (anstatt mit $f(X), g(X), \Phi(X)$, wie es richtiger wäre); nur an einer Stelle wird zur Genauigkeit die volle Notation doch verwendet.

Wir beginnen mit der Konstruktion einer solchen natürlichen Kettenhomotopie Φ . Für $n \leq 0$ müssen wir $\Phi_n = 0$ setzen, da die Kettengruppen in negativen Dimensionen $\{0\}$ sind. Wir brauchen also nur die Φ_n für $n \in \mathbb{N}$ zu konstruieren, und das tun wir durch Induktion über n . Dabei muss Φ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung

$$g_n - f_n = \partial_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ \partial_n \tag{7.44}_n$$

erfüllen (und eine natürliche Transformation sein).

Um die Induktion zu beginnen setzen wir $\Phi_0 := 0$. Bedingung $(7.44)_0$ ist erfüllt, weil $f_0 = g_0$.

Wir nehmen jetzt an, dass $n > 0$ und dass wir schon für alle $k < n$ natürliche Transformationen $\Phi_k: C_k \rightarrow C_{k+1}$ definiert haben, die $(7.44)_k$ für jedes $k < n$ erfüllen.

Um Φ_n zu definieren, konstruieren wir erst einen „Prototyp“, aus dem wir die Werte für alle Ketten erhalten können. Dazu betrachten wir die Kette

$$c := g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \in C_n(\Delta_n), \quad (7.45)$$

wobei mit f_n , g_n und Φ_{n-1} die Abbildungen gemeint sind, die diese natürliche Transformationen dem topologischen Raum Δ_n zuordnen.

Weil g und f natürliche Kettenabbildungen sind und weil $(7.44)_{n-1}$ erfüllt ist, haben wir

$$\begin{aligned} \partial_n c &= \partial_n g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n f_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= g_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) - f_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) - \partial_n \Phi_{n-1}(\partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= \Phi_{n-2}(\partial_{n-1} \partial_n \text{id}_{\Delta_n}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Kette c ist also ein Zyklus.

Aber Δ_n ist zusammenziehbar und somit azyklisch. Weil $n > 0$ haben wir $H_n(\Delta_n) = 0$ und jeder n -Zyklus ist auch ein n -Rand. Wir können also eine Kette $d \in C_{n+1}(\Delta_n)$ finden mit $\partial_{n+1} d = c$.

Für einen beliebigen topologischen Raum X und einen beliebigen singulären n -Simplex σ in X setzen wir

$$\Phi_n(\sigma) := \sigma_{\#}(d) \in C_{n+1}(X), \quad (7.46)$$

und wir erweitern Φ_n linear zu einem Homomorphismus $C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$.

Erstens liefert dies automatisch eine natürliche Transformation, denn wenn $h: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist, so gilt für jeden singulären n -Simplex σ in X , dass

$$h_{\#}(\Phi_n(\sigma)) = h_{\#}\sigma_{\#}(d) = (h \circ \sigma)_{\#}(d) = \Phi_n(h \circ \sigma) = \Phi_n(h_{\#}(\sigma)).$$

Weil diese Beziehung für die Erzeugenden σ von $C_n(X)$ gilt, gilt sie auch für jede Kette und wir haben

$$h_{\#} \circ \Phi_n(X) = \Phi_n(Y) \circ h_{\#}.$$

Die so definierte natürliche Transformation Φ_n erfüllt auch $(7.44)_n$, denn für jeden singulären n -Simplex σ in einem topologischen Raum X haben wir

$$\partial_{n+1}\Phi_n(\sigma) + \Phi_{n-1}\partial_n(\sigma) = \partial_{n+1}\sigma_\#(d) + \Phi_{n-1}\partial_n\sigma_\#(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (7.47a)$$

$$= \sigma_\#\partial_{n+1}(d) + \Phi_{n-1}\sigma_\#\partial_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (7.47b)$$

$$= \sigma_\#(c) + \sigma_\#\Phi_{n-1}\partial_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (7.47c)$$

$$= \sigma_\#(c + \Phi_{n-1}\partial_n(\text{id}_{\Delta_n})) \quad (7.47d)$$

$$= \sigma_\#(g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n(\text{id}_{\Delta_n})) \quad (7.47e)$$

$$= \sigma_\#g_n(\text{id}_{\Delta_n}) - \sigma_\#f_n(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (7.47f)$$

$$= g_n\sigma_\#(\text{id}_{\Delta_n}) - f_n\sigma_\#(\text{id}_{\Delta_n}) \quad (7.47g)$$

$$= g_n(\sigma) - f_n(\sigma).$$

Hier setzen wir aus (7.46) ein, um die rechte Seite von (7.47a) zu erhalten, (7.47b) folgt, weil $\sigma_\#$ eine Kettenabbildung ist, wir erhalten den ersten Term von (7.47c) weil $\partial d = c$ und den zweiten Term weil Φ_{n-1} natürlich ist, und (7.47d) folgt, weil $\sigma_\#$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir erhalten (7.47e), indem wir für c die rechte Seite von seiner definierenden Gleichung (7.45) einsetzen. (7.47f) folgt wieder, weil $\sigma_\#$ ein Gruppenhomomorphismus ist, und wir können es zu (7.47g) umschreiben, weil f und g als natürliche Transformationen vorausgesetzt wurden.

Die Gleichung (7.47) beweist, dass $(7.44)_n$ für einzelne singuläre Simplizes gilt, aber dann gilt es auch für beliebige Ketten in $C_n(X)$.

Den gesamten Beweis von $(7.44)_n$ kann man wie folgt kurz zusammenfassen: die Eigenschaft, dass $h_\#$ für jede stetige Abbildung h eine Kettenabbildung ist, bedeutet anders ausgedrückt, dass der singuläre Randoperator eine natürliche Transformation ist, und dann ist schon alles klar, weil d gerade so gewählt wurde, dass $(7.44)_n$ für den singulären Simplex id_{Δ_n} gilt, und wegen der Natürlichkeit aller Abbildungen in $(7.44)_n$ gilt diese Gleichung dann auch für beliebige singuläre Simplizes und durch Linearität für beliebige Ketten.

Damit haben wir den Induktionsschritt zu Ende geführt, denn wir haben eine natürliche Transformation Φ_n definiert, die $(7.44)_n$ erfüllt. Durch Induktion erhalten wir nun alle homogenen Anteile einer natürlichen Transformation $\Phi: C_* \longrightarrow C_*$, die eine Kettenhomotopie von f nach g ist. ■

Ähnliche Gedanken und Methoden, wie in diesem Beweis, werden später immer wieder zur Anwendung kommen in der algebraischen Topologie, und es gibt viele Situationen, wo ein direkter oder „geometrischer“ Beweis gar nicht möglich oder kaum zu verstehen wäre.

Das wichtige Merkmal, das diesen Beweis ermöglicht, ist die Tatsache, dass die spezielle Kette id_{Δ_n} , die auf einem azyklischen Raum lebt, als Modell für *alle* singulären Ketten dient, in dem Sinne, dass jede singuläre Kettengruppe von Bildern oder Kopien dieser speziellen Kette frei erzeugt wird.

Korollar 7.41 Für jedes $k \in \mathbf{N}$ ist die k -te baryzentrische Unterteilung B^k natürlich kettenhomotop zur Identität als Kettenabbildungen von $C_*(X)$ in sich.

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 7.40, denn B^k und $\text{id}_{C_*(X)}$ sind natürliche Kettenabbildungen, die in Dimension 0 gleich sind nach Bestimmung (7.39) in Definition 7.39. ■

Die Tragweite dieses Korollars liegt darin, dass wir die singuläre Homologie eines Raumes genauso gut mit singulären Ketten berechnen können, die beliebig oft baryzentrisch unterteilt wurden. Uns bleibt nur noch zu zeigen, dass wir dadurch die Ketten „klein“ bekommen können bezüglich einer vorgegebenen offenen Überdeckung.

Dazu müssen wir die Größe eines baryzentrisch unterteilten Simplexes messen können, und dass tun wir am einfachsten mit einer Metrik in einem metrischen Raum. Da der Standardsimplex im metrischen Raum \mathbf{R}^n liegt und als Muster für alle singulären Simplizes fungiert, reicht es, diese Messung für den Standardsimplex oder ohne Mehraufwand für beliebige lineare Simplizes in einem normierten Vektorraum vorzunehmen.

Definition 7.42 Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$. Wir definieren den **Durchmesser** $\delta(A)$ von A als

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

A heißt **beschränkt**, wenn $\delta(A) < \infty$.

Wenn $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$ ein singulärer Simplex in X ist, nennen wir den Durchmesser der Bildmenge $\sigma(\Delta_n)$ vereinfachend den **Durchmesser von σ** und schreiben dafür $\delta(\sigma)$.

Weil ihr Bild kompakt ist, sind singuläre Simplizes immer beschränkt.

Lemma 7.43 Sei V ein Vektorraum über \mathbf{R} , sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf V und sei d die Metrik dieser Norm. Seien $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ und sei $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$. Bezüglich der Metrik d ist dann

$$\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i, j \leq n} d(v_i, v_j),$$

d.h., die maximale Entfernung zwischen zwei Punkten in einem linearen Simplex wird zwischen zwei Eckpunkten angenommen.

Beweis. Zunächst sei x ein beliebiger Punkt von V und sei $a \in \text{Bild } \sigma$. Dann gibt es reelle Zahlen $t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0$ mit $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ und mit $\sum_{i=0}^n t_i v_i = a$.

Wir haben

$$\begin{aligned}
 d(x, a) = \|x - a\| &= \left\| \sum_{i=0}^n t_i x - \sum_{i=0}^n t_i v_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n t_i (x - v_i) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=0}^n t_i \|x - v_i\| \leq \sum_{i=0}^n t_i \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\| \\
 &= 1 \cdot \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\| \\
 &= \max_{0 \leq j \leq n} \|x - v_j\|.
 \end{aligned}$$

In anderen Worten, die maximale Entfernung von irgendeinem Punkt x zu einem Punkt in einem linearen Simplex ist die Entfernung von x zum entferntesten Eckpunkt des Simplexes.

Nun seien a und b beliebige Punkte von σ . Dann gibt es nach dieser Feststellung einen Eckpunkt v_j mit $d(a, b) \leq d(a, v_j)$ und es gibt anschließend einen Eckpunkt v_i mit $d(a, v_j) \leq d(v_i, v_j)$.

Also gibt es zu je zwei Punkten a und b von σ Eckpunkte v_i und v_j mit $d(a, b) \leq d(v_i, v_j)$, und deshalb wird die maximale Entfernung zwischen zwei Punkten von σ zwischen zwei Eckpunkten angenommen. ■

Korollar 7.44 Sei V ein Vektorraum über \mathbf{R} , sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf V und sei d die Metrik dieser Norm. Sei $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ ein linearer n -Simplex in V und sei $B\sigma$ seine erste baryzentrische Unterteilung.

Für jeden Simplex τ in der Kette $B\sigma$ gilt

$$\delta(\tau) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma). \quad (7.48)$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n . Sie gilt automatisch für $n = 0$, weil jeder Nullsimplex aus einem einzigen Punkt besteht und Durchmesser 0 hat.

Nun sei $n > 0$ und die Behauptung sei richtig für alle $k < n$. Sei $s := \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$ der Schwerpunkt oder das Baryzentrum von σ .

Die Definition von B in Gleichungen (7.41) und (7.42) besagt (für Dimension n statt $n+1$), dass

$$\begin{aligned}
 B_n(\sigma) &= \sigma_{\#}(B_n^*) = \sigma_{\#}(b_n \cdot B_{n-1}(\partial\Delta_n)) \\
 &= \sigma(b_n) \cdot \sigma_{\#}(B_{n-1}(\partial\Delta_n)) && (\sigma \text{ linear}) \\
 &= \sigma(b_n) \cdot B_{n-1}(\sigma_{\#}(\partial\Delta_n)) && (B_{n-1} \text{ natürlich}) \\
 &= s \cdot B_{n-1}(\partial\sigma).
 \end{aligned}$$

Die Eckpunkte der Simplizes in dieser Kette sind s und Eckpunkte der Simplizes in $B_{n-1}(\partial\sigma)$.

Die Simplizes in $\partial\sigma$ sind Seiten von σ und haben somit höchstens den Durchmesser von σ . Nach Induktionsannahme haben zwei Eckpunkte eines Simplexes in $B_{n-1}(\partial\sigma)$ höchstens die Entfernung

$$\frac{n-1}{n}\delta(\sigma) \leq \frac{n}{n+1}\delta(\sigma)$$

zueinander.

Der Punkt s hat zu den Eckpunkten v_j von σ die Entfernung

$$\begin{aligned} d(s, v_j) = \|s - v_j\| &= \left\| \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i - \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \right) v_j \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (v_i - v_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \|v_i - v_j\| \\ &\leq \frac{n}{n+1} \delta(\sigma), \end{aligned}$$

weil $\|v_j - v_j\| = 0$ und jedes der n anderen $\|v_i - v_j\| \leq \delta(\sigma)$. Nach Lemma 7.43 hat s zu jedem beliebigen Punkt von Bild σ und insbesondere zu den Eckpunkten der Simplizes in $B_{n-1}(\partial\sigma)$ *höchstens* diese Entfernung.

Also haben je zwei Eckpunkte eines Simplexes in $B_n(\sigma)$ höchstens Entfernung $\frac{n}{n+1}\delta(\sigma)$ zueinander und die Behauptung folgt sofort aus Lemma 7.43. ■

Satz 7.45 (Satz über kleine Simplizes) Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von Teilmengen von X , so dass

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overset{\circ}{U}_\lambda.$$

(Das gilt zum Beispiel, wenn \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X ist.)

Dann induziert die Inklusion $j: C_*(\mathcal{U}) \longrightarrow C_*(X)$ einen Isomorphismus in Homologie, d.h.,

$$H(j): H_*(\mathcal{U}) \longrightarrow H_*(X)$$

ist ein Isomorphismus von graduierten abelschen Gruppen.

Beweis. Zunächst sei $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$ ein singulärer Simplex in X (und insbesondere eine stetige Abbildung). Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei

$$V_\lambda := \sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}_\lambda).$$

Weil σ stetig ist bilden die V_λ eine offene Überdeckung von Δ_n , und weil Δ_n kompakt ist besitzt diese Überdeckung bezüglich der Maximumsmetrik auf \mathbf{R}^n eine Lebesgue-Zahl ε , so dass jede Scheibe von Radius $< \varepsilon$ und somit auch jede Teilmenge von Durchmesser $< \varepsilon$ ganz in einer der Mengen V_λ enthalten ist.

Weil $n/(n+1) < 1$ gibt es eine Zahl $k_\sigma \in \mathbf{N}$, so dass $(n/(n+1))^{k_\sigma} < \varepsilon$, und das gilt natürlich immer noch, wenn man k_σ durch eine größere Zahl ersetzt. Der Standardsimplex Δ_n hat offenbar Durchmesser 1, und aus Korollar 7.44 folgt deshalb, dass für jedes $k \geq k_\sigma$ die Simplizes in der linearen Kette $B^k \text{id}_{\Delta_n}$ alle Durchmesser $< \varepsilon$ haben und somit jeweils in einer der Überdeckungsmengen V_λ liegen.

Nach Anwendung der stetigen Abbildung σ bedeutet das, dass das Bild jedes singulären Simplexes in der Kette $B^k \sigma = \sigma_\# B^k \text{id}_{\Delta_n}$ ganz enthalten ist in einer der Mengen

$$\sigma(V_\lambda) = \overset{\circ}{U}_\lambda \subseteq U_\lambda,$$

d.h., die Kette $B^k \sigma$ ist \mathcal{U} -klein wenn $k \geq k_\sigma$.

Eine singuläre Kette $c \in C_*(X)$ ist eine lineare Kombination von endlich vielen singulären Simplizes σ , und wenn wir k_c als das Maximum der k_σ für die Simplizes σ in c definieren, so gilt offensichtlich, dass $B^k c$ \mathcal{U} -klein ist für jedes $k \geq k_c$.

In anderen Worten, **wenn man eine singuläre Kette in X genügend oft baryzentrisch unterteilt, wird sie \mathcal{U} -klein.**

Wir zeigen nun, dass $H(j)$ ein Isomorphismus ist.

Zur Klarheit bezeichnen wir den Randoperator von $C_*(\mathcal{U})$ mit $\partial_{\mathcal{U}}$ und den Randoperator von $C_*(X)$ mit ∂_X .

Zunächst zur Surjektivität: sei $\gamma \in H_*(X)$ und sei $z \in C_*(X)$ ein Zyklus mit $[z] = \gamma$. Dann gibt es ein $k \in \mathbf{N}$, so dass $B^k z \in j(C_*(\mathcal{U}))$ und es gibt $z' \in C_*(\mathcal{U})$ mit $B^k z = jz'$. Da j und B^k Kettenabbildungen sind, haben wir

$$j\partial_{\mathcal{U}}z' = \partial_X jz' = \partial_X B^k z = B^k \partial_X z = B^k(0) = 0$$

und weil j injektiv ist, ist $\partial_{\mathcal{U}}z' = 0$, d.h., z' ist ein Zyklus.

Weil $B^k \simeq \text{id}_{C_*(X)}$, gibt es eine Kettenhomotopie Φ , so dass

$$\begin{aligned} z &= B^k z + \partial_X \Phi z + \Phi \partial_X z \\ &= B^k z + \partial_X \Phi z + 0 && \text{(da } z \text{ ein Zyklus ist)} \\ &= B^k z + \partial_X \Phi z, \end{aligned}$$

und somit ist

$$\gamma = [z] = [B^k z + \partial_X \Phi z] = [B^k z] = [jz'] \in \text{Bild } H(j).$$

Zur Injektivität von $H(j)$: Sei $\omega \in \text{Ker } H(j) \subseteq H_*(\mathcal{U})$ und sei z ein Zyklus in $C_*(\mathcal{U})$ mit $\omega = [z]$.

Weil

$$H(j)([z]) = [jz] = 0 \in H_*(X)$$

ist jz ein Rand in $C_*(X)$. Sei c eine Kette in $C_*(X)$ mit $jz = \partial_X c$.

Nach dem ersten Teil des Beweises gibt es eine Zahl k und eine Kette $d \in C_*(\mathcal{U})$, so dass $B^k c = jd$, und weil B^k und j Kettenabbildungen sind, ist

$$B^k jz = B^k \partial_X c = \partial_X B^k c = \partial_X jd = j \partial_{\mathcal{U}} d \in C_*(X). \quad (7.49)$$

Nun ist B^k eine natürliche Kettenabbildung und kettenhomotop zur Identität vermöge einer natürlichen Kettenhomotopie Φ .

Es gilt

$$C_*(\mathcal{U}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C_*(U_\lambda), \quad (7.50)$$

und für z existiert eine (nicht eindeutige) Zerlegung

$$z = \sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$$

mit $z_\lambda \in C_*(U_\lambda)$ und mit nur endlich vielen $z_\lambda \neq 0$.

Auf den einzelnen Summanden $C_*(U_\lambda)$ in (7.50) ist $j = (i_\lambda)_\#$, wo i_λ die Inklusion $U_\lambda \longrightarrow X$ ist.

Wir schreiben Φ_λ für die Kettenhomotopie $\Phi(U_\lambda)$, die die natürliche Transformation Φ dem Raum U_λ zuordnet, und Φ_X für die Kettenhomotopie $\Phi(X)$, die die natürliche Transformation Φ dem Raum X zuordnet. Die natürliche Transformation B^k notieren wir auf U_λ entsprechend mit B_λ^k , aber auf X einfach wie bisher mit B^k . Den Randoperator von $C_*(U_\lambda)$ notieren wir zur Klarheit mit ∂_λ , bemerken aber, dass er die Einschränkung des Randoperators $\partial_{\mathcal{U}}$ von $C_*(\mathcal{U})$ ist und dass wir deshalb überall wo ∂_λ steht genauso gut auch $\partial_{\mathcal{U}}$ schreiben können; den Randoperator von $C_*(X)$ notieren wir, wie schon gesagt, mit ∂_X .

Wir haben

$$jz = j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) = j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda^k z_\lambda + \partial_\lambda \Phi_\lambda z_\lambda + \Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda)\right) \quad (7.51a)$$

$$\begin{aligned} &= j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^k z_\lambda\right) + j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \partial_\lambda \Phi_\lambda z_\lambda\right) + j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda\right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} j(B_\lambda^k z_\lambda) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} j(\Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (i_\lambda)_\#(B_\lambda^k z_\lambda) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} (i_\lambda)_\#(\Phi_\lambda \partial_\lambda z_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} B^k((i_\lambda)_\# z_\lambda) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_X((i_\lambda)_\# \partial_\lambda z_\lambda) \end{aligned} \quad (7.51b)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\lambda \in \Lambda} B^k jz_\lambda + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_X j\partial_\mathcal{U} z_\lambda \\ &= B^k j\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \Phi_X j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda\right) \\ &= B^k jz + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + \Phi_X j\partial_\mathcal{U} z \\ &= B^k jz + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) + 0 \end{aligned} \quad (7.51c)$$

$$\begin{aligned} &= B^k jz + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right) \\ &= j\partial_\mathcal{U}d + j\partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right). \end{aligned} \quad (7.51d)$$

Hier erhalten wir die Summanden auf der rechten Seite von (7.51a) aus der Tatsache, dass Φ_λ eine Kettenhomotopie von B_λ^k zu $\text{id}_{C_*(U_\lambda)}$ ist. In (7.51b) wird ausgenutzt, dass B^k und Φ natürlich sind. Wir erhalten (7.51c) weil z ein Zyklus von $C_*(\mathcal{U})$ ist. Schließlich folgt (7.51d) aus (7.49).

Weil j aber injektiv ist, gilt

$$z = \partial_\mathcal{U}d + \partial_\mathcal{U}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda z_\lambda\right)$$

und somit ist z ein Rand in $C_*(\mathcal{U})$, also $\omega = [z] = 0$ und $H(j)$ ist injektiv. Damit sind wir fertig. ■

Wir wollen den Satz über kleine Simplizes gleich verwenden, um eine weitere sehr nützliche exakte Homologiefolge zu gewinnen. Wir erhalten diese

Folge wieder als das exakte Homologiedreieck oder die lange exakte Homologiefolge einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen, aber ohne den Satz über kleine Simplizes wäre diese Homologiefolge nicht sehr hilfreich, wie Sie gleich sehen werden.

Lemma und Definition 7.46 Sei $(X; A, B)$ eine topologische Raumtriade (also X ist ein topologischer Raum und A und B sind Unterräume von X mit $X = A \cup B$).

Sei i' die Inklusion $A \cap B \longrightarrow A$ und sei i'' die Inklusion $A \cap B \longrightarrow B$.

Die direkte Summe $C_*(A) \oplus C_*(B)$ ist ein Kettenkomplex mit Randoperator $\partial_A \oplus \partial_B$, und die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota: C_*(A \cap B) &\longrightarrow C_*(A) \oplus C_*(B) \\ c &\longmapsto (i'_\# c, i''_\# c) \end{aligned} \quad (7.52)$$

ist offensichtlich eine Kettenabbildung.

Sei j' die Inklusion $A \longrightarrow X$ und sei j'' die Inklusion $B \longrightarrow X$.

Die Bilder der Kettenabbildungen $j'_\#$ und $j''_\#$ sind enthalten in

$$C_*(\{A, B\}) := j'_\#(C_*(A)) + j''_\#(C_*(B)) \subseteq C_*(X)$$

und wir haben eine offensichtliche Kettenabbildung

$$\begin{aligned} \kappa: C_*(A) \oplus C_*(B) &\longrightarrow C_*(\{A, B\}) \\ (c_1, c_2) &\longmapsto j'_\# c_1 - j''_\# c_2. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Man erhält aus diesen Kettenkomplexen und Kettenabbildungen eine offensichtlich natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\iota} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\kappa} C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \quad (7.54)$$

und wir nennen diese Folge die **Kettenkomplexfolge der Triade** $(X; A, B)$.

Beweis. Die Kettenabbildung ι ist injektiv, weil schon die Komponenten $i'_\#$ und $i''_\#$ injektiv sind, da sie jeweils von einer Inklusion induziert werden.

Für eine Kette $(c_1, c_2) \in C_*(A) \oplus C_*(B)$ ist

$$\kappa(c_1, c_2) = j'_\# c_1 - j''_\# c_2 = 0$$

genau dann, wenn $j'_\# c_1 = j''_\# c_2$, oder in anderen Worten, wenn c_1 und c_2 in $C_*(\{A, B\}) \subseteq C_*(X)$ die gleiche eindeutige Linearkombination von singulären Simplizes in X sind.

Da aber alle Simplizes in c_1 ihr Bild in A haben und alle Simplizes in c_2 ihr Bild in B haben, folgt aus der Gleichheit, dass alle Simplizes in c_1 oder in

c_2 ihr Bild sowohl in A wie auch in B , sprich in $A \cap B$ haben müssen. Somit ist $j'_\# c_1 = j''_\# c_2$ genau dann, wenn c_1 und c_2 die gleiche Kette in X sind und diese Kette eine Kette auf $A \cap B$ ist, also genau dann, wenn es eine Kette $c \in C_*(A \cap B)$ gibt mit $c_1 = i'_\# c$ und $c_2 = i''_\# c$.

Das ist aber genau dann der Fall, wenn $(c_1, c_2) = \iota c$. Wir haben somit gezeigt, dass $\text{Ker } \kappa = \text{Bild } \iota$, und die Folge (7.54) ist an der mittleren Stelle exakt.

Und schliesslich, κ ist surjektiv weil

$$\begin{aligned} \kappa(C_*(A) \oplus C_*(B)) &= \kappa((C_*(A) \oplus \{0\}) + (\{0\} \oplus C_*(B))) \\ &= \kappa(C_*(A) \oplus \{0\}) + \kappa(\{0\} \oplus C_*(B)) \\ &= j'_\#(C_*(A)) + j''_\#(C_*(B)) \\ &= C_*(\{A, B\}). \end{aligned}$$

(In der vorletzten Zeile beachte man, dass obwohl $\kappa = -j''_\#$ auf $\{0\} \oplus C_*(B)$, wir hier $+$ schreiben können, weil $+j''_\#$ und $-j''_\#$ die gleiche Bildgruppe haben.)

Also ist die Folge (7.54) an allen Stellen exakt. ■

In diesem Beweis sind wir, um absolute Klarheit zu erreichen, sehr genau mit den Bezeichnungen für die von den Rauminklusionen induzierten Kettenabbildungen umgegangen, aber man kann das auch etwas lockerer handhaben:

Bemerkung 7.47 Die Kettenabbildungen $i'_\#, i''_\#, j'_\#$ und $j''_\#$, die in Definition 7.46 eingeführt wurden, sind alle injektiv, weil sie von Inklusionen von topologischen Räumen induziert werden und diese naturgemäß injektiv sind.

Deshalb können wir vermöge dieser Abbildungen, wie wir es schon oft getan haben, $C_*(A \cap B)$ als eine Untergruppe von $C_*(A)$ und von $C_*(B)$ auffassen (mit $i'_\#$ und $i''_\#$ als die Inklusionen), und wir können $C_*(A)$ und $C_*(B)$ und ihre gemeinsame Untergruppe $C_*(A \cap B)$ als Untergruppen von $C_*(\{A, B\})$ oder von $C_*(X)$ auffassen.

Betrachten wir diese Kettengruppen als Untergruppen von $C_*(\{A, B\})$ oder von $C_*(X)$, so gilt

$$C_*(A \cap B) = C_*(A) \cap C_*(B), \quad (7.55)$$

da, wie im Beweis von Lemma 7.46 schon erklärt, eine Kette $c \in C_*(X)$ genau dann zu $C_*(A)$ und zu $C_*(B)$ gehört, wenn jeder singuläre Simplex mit nichtverschwindendem Koeffizienten in c in A enthalten ist und auch in B , und somit in $A \cap B$ enthalten ist. Das ist genau die Bedingung dafür, dass $c \in C_*(A \cap B)$.

Diese Bedingung wurde ja im Beweis von 7.46 schon ausgenutzt, um die Exaktheit der Folge (7.54) bei $C_*(A) \oplus C_*(B)$ zu zeigen: $j'_\# c_1 - j''_\# c_2 = 0$ genau dann, wenn $c_1 = c_2$ in $C_*(X)$, woraus aber auch automatisch folgt, dass $c_1 = c_2 \in C_*(A) \cap C_*(B) = C_*(A \cap B)$ und somit $(c_1, c_2) \in \text{Bild } \iota$.

Die lange exakte Homologiefolge oder das exakte Homologiedreieck der kurzen exakten Folge (7.54) kann ein sehr leistungsfähiges Berechnungsinstrument bieten, sofern wir die Homologie der in dieser kurzen Folge vorkommenden Kettenkomplexen mit topologischen Räumen in Verbindung bringen können. Für den mittleren Komplex ist das kein Problem:

Bemerkung 7.48 Sind $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \partial')$ zwei beliebige Kettenkomplexe, so bildet ihre direkte Summe $C \oplus D$ mit dem Randoperator $\partial \oplus \partial'$ wieder einen Kettenkomplex $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$, und man sieht sehr leicht ein, ähnlich aber einfacher als im Beweis von Lemma 6.34 c) und d), dass

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) &= Z(\mathcal{C}) \oplus Z(\mathcal{D}) \\ B(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) &= B(\mathcal{C}) \oplus B(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

und deshalb auch

$$H(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) \cong H(\mathcal{C}) \oplus H(\mathcal{D}). \quad (7.56)$$

Entsprechend, und wieder ähnlich beweisbar wie Lemma 6.34 e), wenn $\bar{\mathcal{C}} = (\bar{C}, \bar{\partial})$ und $\bar{\mathcal{D}} = (\bar{D}, \bar{\partial}')$ zwei weitere Kettenkomplexe sind und wenn $f: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ und $g: \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathcal{D}}$ Kettenabbildungen sind, so ist $f \oplus g$ eine Kettenabbildung $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} \oplus \bar{\mathcal{D}}$ und vermöge des Isomorphismus (7.56) gilt

$$H(f \oplus g) = H(f) \oplus H(g): H(\mathcal{C}) \oplus H(\mathcal{D}) \rightarrow H(\bar{\mathcal{C}}) \oplus H(\bar{\mathcal{D}}).$$

Diese Bemerkung erlaubt uns, die Homologie des mittleren Kettenkomplexes in der kurzen exakten Folge (7.54) zu berechnen. Nur der rechte Kettenkomplex ist manchmal problematisch, aber wir kennen schon viele Fälle, in denen das nicht der Fall ist, und bevor wir darauf zurückkommen, lösen wir den gordischen Knoten einfach durch eine Verfügung.

Definition 7.49 Eine Triade $(X; A, B)$ von topologischen Räumen wird eine **Mayer-Vietoris Triade** genannt, wenn die Inklusion

$$j: C_*(\{A, B\}) \rightarrow C_*(X)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert, d.h., wenn

$$H(j): H_*(\{A, B\}) \rightarrow H_*(X)$$

ein Isomorphismus ist.

Beispiel 7.50 Jede Triade $(X; A, B)$ von topologischen Räumen, für die gilt

$$X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \quad (7.57)$$

ist eine Mayer-Vietoris Triade.

Das ist die Aussage des Satzes über kleine Simplizes 7.45 für die Überdeckung $\mathcal{U} = \{A, B\}$ von X .

Satz 7.51 (Mayer-Vietoris) Sei $(X; A, B)$ eine Mayer-Vietoris Triade von topologischen Räumen. Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck von graduierten Gruppen

$$\begin{array}{ccc} H_*(A \cap B) & \xrightarrow{(i'_*, i''_*)} & H_*(A) \oplus H_*(B) \\ & \nwarrow \text{Grad } -1 & \nearrow \\ & \delta & j'_* \circ \pi_1 - j''_* \circ \pi_2 \\ & H_*(X) & \end{array} \quad (7.58)$$

wo $i': A \cap B \rightarrow A$, $i'': A \cap B \rightarrow B$, $j': A \rightarrow X$, und $j'': B \rightarrow X$ die Inklusionen sind, die π_i die Projektionen von $H_*(A) \oplus H_*(B)$ auf den i -ten Summanden sind, und wo der verbindende Homomorphismus δ von Grad -1 wie folgt erklärt wird.

Sei $\gamma \in H_*(X)$. Dann gibt es Ketten $c \in C_*(A)$ und $d \in C_*(B)$ so dass $c + d$ ein Zyklus in $C_*(X)$ ist und $\gamma = [c + d]$. Weil $c + d$ ein Zyklus ist, ist $\partial c = -\partial d$ und muss eine Kette auf $A \cap B$ sein, da ∂c eine Kette auf A ist und ∂d eine Kette auf B ist.

∂c ist sogar ein Zyklus in $C_*(A \cap B)$ (da $\partial \partial c = 0$, egal in welchem Raum wir den Randoperator beim zweiten Mal anwenden). Es gilt

$$\delta(\gamma) = [\partial c] \in H_*(A \cap B). \quad (7.59)$$

Das exakte Dreieck (7.58) heißt das **Mayer-Vietoris Homologiedreieck** der Triade $(X; A, B)$.

Beweis. Die natürliche kurze exakte Kettenkomplexfolge (7.54) der Triade $(X; A, B)$ hat nach Satz 7.14 ein ebenfalls natürliches exaktes Homologiedreieck, das wir wie im folgenden Diagramm (7.60) durch den Isomorphismus $H(j)$ ergänzen, um das Mayer-Vietoris Homologiedreieck (7.58), bestehend aus dem waagerechten Pfeil $H(\iota)$ und den beiden gestrichelten Pfeilen, zu

erhalten:

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(A \cap B) & \xrightarrow{H(\iota)} & H_*(A) \oplus H_*(B) \\
 & \searrow \beta & \swarrow H(\kappa) \\
 & H_*(\{A, B\}) & \\
 \delta \swarrow & \downarrow H(j) & \searrow H(j \circ \kappa) \\
 & H_*(X) &
 \end{array} \quad (7.60)$$

Auch j und somit $H(j)$ sind offenbar natürliche Transformationen, so dass das ganze Diagramm (7.60) einschließlich des Mayer-Vietoris Dreiecks natürlich ist.

Das Mayer-Vietoris Dreieck ist in diesem Diagramm das äußere Dreieck. Die Abbildung δ ist $\beta \circ (H(j))^{-1}$ und die andere gestrichelte Seite ist die Abbildung $H(j) \circ H(\kappa) = H(j \circ \kappa)$.

Weil der Pfeil $H(j)$ ein Isomorphismus ist, ist $\text{Bild } \delta = \text{Bild } \beta$ und es ist $\text{Ker } \delta = H(j)(\text{Ker } \beta)$. Entsprechend ist $\text{Ker } H(j \circ \kappa) = \text{Ker } H(\kappa)$ und $\text{Bild } H(j \circ \kappa) = H(j)(\text{Bild } H(\kappa))$. Weil das innere Dreieck in (7.60) exakt ist, ist somit auch das äußere, also das Mayer-Vietoris Dreieck, exakt.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Abbildungen im Mayer-Vietoris Dreieck die in der Satzaussage genannte Gestalt haben.

Wegen der in Gleichung (7.52) angegebenen Definition von ι ist offensichtlich $H(\iota) = (i'_*, i''_*)$ wie behauptet.

Für Ketten $c_1 \in C_*(A)$ und $c_2 \in C_*(B)$ ist $\kappa(c_1, c_2) = j'_\# c_1 - j''_\# c_2$ nach (7.53), und $j \circ \kappa$ ist die gleiche Kette, nur betrachtet als Kette in $C_*(X)$ und nicht in $C_*(\{A, B\})$. Es folgt, dass für je zwei Homologieklassen $\alpha_1 \in H_*(A)$ und $\alpha_2 \in H_*(B)$ gilt $H(j \circ \kappa)(\alpha_1, \alpha_2) = j'_* \alpha_1 - j''_* \alpha_2 = (j'_* \pi_1 - j''_* \pi_2)(\alpha_1, \alpha_2)$.

Und schließlich, sei $\gamma \in H_*(X)$. Wir haben $\delta(\gamma) = \beta((H(j))^{-1}(\gamma))$. Sei z ein Zyklus in $C_*(\{A, B\})$ mit $[z] = (H(j))^{-1}(\gamma)$ oder, was das Gleiche bedeutet, mit $\gamma = H(j)([z]) = [jz]$.

Die Kette $z \in C_*(\{A, B\})$ lässt sich zerlegen als eine Summe von einer Kette $c \in C_*(A)$ und einer Kette $d \in C_*(B)$ (wenn man diese Kettengruppen gemäß Bemerkung 7.47 als Untergruppen von $C_*(\{A, B\})$ auffasst).

Also $z = c + d$, und jz ist die gleiche Kette, aber betrachtet als Kette in $C_*(X)$. Wir haben also $\gamma = [c + d]$, wie es in der Satzaussage steht.

Nach Definition ist $\delta(\gamma) = \beta([z])$.

Um diesen Wert des verbindenden Homomorphismus β zu konstruieren, müssen wir zuerst ein Urbild von der Kette $z \in C_*(\{A, B\})$ unter κ finden. Die Kette $(c, -d) \in C_*(A) \oplus C_*(B)$ ist offensichtlich ein solches Urbild.

Wir haben dann den Rand von diesem Urbild zu bilden, also $\partial(c, -d) = (\partial c, -\partial d)$. Dieser liegt automatisch im Bild von ι und aus der Definition von ι ist klar, dass ∂c die einzige Kette w in $C_*(A \cap B)$ sein kann, für die gilt $\iota(w) = (\partial c, -\partial d)$. Folglich ist $\beta([z]) = [\partial c]$, wie in (7.59) behauptet wurde.

Man beachte, dass wir uns hier im Beweis gar nicht darum kümmern müssen, warum ∂c tatsächlich ein Zyklus in $C_*(A \cap B)$ ist, denn das ist ein Teil der Aussage von Satz 7.14 und muss hier nicht noch einmal bewiesen werden. Der Grund wird aber in der Aussage des jetzigen Satzes ohnehin kurz erläutert.

Worum wir uns aber doch kurz kümmern müssen ist die Frage, ob das Funktionieren dieser Vorschrift irgendwie von der Wahl des Zyklus z und der Zerlegung $z = c + d$ abhängen kann. Das tut es nicht, denn die Homologieklassse von z in $H_*(\{A, B\})$ ist durch γ eindeutig bestimmt, weil $H(j)$ ein Isomorphismus ist, und alles andere hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, weil der verbindende Homomorphismus β wohldefiniert ist. Insbesondere hängt $\beta([z])$ nicht von der Wahl des Zyklus z in dieser Homologieklassse ab, und auch nicht von der Wahl des Urbilds $(c, -d)$ von z unter κ . Diese Wahlen entsprechen aber der Wahl von z und seiner Zerlegung $z = c + d$; diese beeinflussen also nicht den Wert $\delta(\gamma)$ und δ ist durch die angegebene Konstruktion wohldefiniert. ■

Der Satz von Mayer-Vietoris wird sich als das wichtigste Hilfsmittel erweisen, wenn wir bald mit der Berechnung von Homologiegruppen beginnen. Zuerst wollen wir aber noch einen anderen wichtigen Satz präsentieren, der aber keine neuen Beweismittel erfordert, weil er äquivalent zum Satz von Mayer-Vietoris ist.

Dieser neue Satz besagt im Wesentlichen, dass eine relative Homologiegruppe $H_*(X, A)$ nicht davon abhängt, was tief im Innern des Unterraumes A passiert; das wird sozusagen „geschluckt“ durch die Relativierung modulo A . Die Aussage ist, dass sich $H_*(X, A)$ nicht verändert, wenn man einen „genügend kleinen“ Unterraum B von A aus X und A entfernt oder „ausschneidet“. Deshalb heißt dieser Satz der **Ausschneidungssatz**.

Definition 7.52 Sei (X, A, B) ein topologisches Raumtripel, also ein Objekt von Top^3 (X ist ein topologischer Raum und $B \subseteq A \subseteq X$).

Wir nennen (X, A, B) ein **Ausschneidungstripel**, wenn die natürliche Inklusion

$$i: (X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert, d.h., wenn

$$i_*: H_*(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow H_*(X, A)$$

ein Isomorphismus von graduierten abelschen Gruppen ist.

Bemerkung 7.53 Sei X ein topologischer Raum und seien A und B zwei Unterräume von X .

Die Komplementierung von B verwandelt topologische Raumtripel in entsprechende Raumtriaden und umgekehrt.

In anderen Worten, wenn (X, A, B) ein Raumtripel ist (d.h., wenn $B \subseteq A$), dann ist $(X; A, X \setminus B)$ eine Raumtriade (d.h., $X = A \cup (X \setminus B)$).

Umgekehrt, wenn $(X; A, B)$ eine Raumtriade ist (d.h., wenn $X = A \cup B$), dann ist $(X, A, X \setminus B)$ ein Raumtripel (d.h., $X \setminus B \subseteq A$).

Die Komplementierung von B liefert somit eine Bijektion zwischen der Menge aller Raumtripel mit X als Oberraum und der Menge aller Raumtriaden mit X als Oberraum, eine Bijektion, die ihre eigene Umkehroperation ist.

Lemma 7.54 Ein topologisches Raumtripel (X, A, B) ist genau dann ein Ausschneidungstripel, wenn die entsprechende Raumtriade $(X; A, X \setminus B)$ eine Mayer-Vietoris Triade ist.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir D für $X \setminus B$.

Wir bemerken zuerst, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\varphi: \frac{C_*(\{A, D\})}{C_*(A)} \xrightarrow{\cong} C_*(X \setminus B, A \setminus B)$$

gibt, denn nach dem zweiten Isomorphiesatz für additive abelsche Gruppen ist

$$\frac{C_*(\{A, D\})}{C_*(A)} = \frac{C_*(A) + C_*(D)}{C_*(A)} \cong \frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)},$$

wobei der Isomorphismus für $a \in C_*(A)$ und $d \in C_*(D)$ die Restklasse

$$a + d + C_*(A) = d + C_*(A) \in \frac{C_*(A) + C_*(D)}{C_*(A)}$$

auf die Restklasse

$$d + (C_*(A) \cap C_*(D)) \in \frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)}$$

abbildet. Weil $D = X \setminus B$ ist aber

$$\frac{C_*(D)}{C_*(A) \cap C_*(D)} \stackrel{(7.55)}{=} \frac{C_*(D)}{C_*(A \cap D)} = C_*(D, A \cap D) = C_*(X \setminus B, A \setminus B).$$

Aus dieser Beschreibung ist klar, dass φ eine Kettenabbildung ist.

Nun betrachte man folgendes Diagramm von Kettenkomplexen, in denen die Zeilen kurze exakte Folgen sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{j'_\#} & C_*(\{A, D\}) & \xrightarrow{\pi} & \frac{C_*(\{A, D\})}{C_*(A)} \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow \text{id} = & & \downarrow j & & \downarrow \cong \varphi \\
 & & & & & & C_*(X \setminus B, A \setminus B) \\
 & & & & & & \downarrow i_\# \\
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{j'_\#} & C_*(X) & \xrightarrow{\pi'} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\}
 \end{array} \quad (7.61)$$

Das linke Quadrat kommutiert offensichtlich (alle Pfeile sind Inklusionen von Untergruppen).

Auch das rechte Quadrat kommutiert. Sei $a + d \in C_*(\{A, D\})$, wobei $a \in C_*(A)$ und $d \in C_*(D)$. Die waagerechten Abbildungen π und π' sind kanonischen Projektionen auf Quotienten, und nach der Beschreibung oben des Isomorphismus φ haben wir

$$\begin{aligned}
 i_\# \varphi \pi(a + d) &= i_\# \varphi(a + d + C_*(A)) \\
 &= i_\#(d + C_*(A \setminus B)) \\
 &= d + C_*(A) \in C_*(X, A),
 \end{aligned}$$

während

$$\pi' j(a + d) = \pi'(a + d) = a + d + C_*(A) = d + C_*(A)$$

das Gleiche ist.

Die senkrechten Pfeile in (7.61) bilden also einen Morphismus von kurzen exakten Folgen von Kettenabbildungen, und nach Übergang zu Homologiegruppen induzieren sie einen Morphismus der langen exakten Homologiefolgen dieser kurzen exakten Folgen.

Dieser Morphismus der langen Folgen enthält an jeder dritten Stelle die Identität von $H_n(A)$, also einen Isomorphismus, an den Stellen daneben (auch jede dritte Stelle insgesamt) $H_n(j)$, und an den Stellen daneben (das restliche Drittel der Stellen) $H_n(i) \circ H_n(\varphi)$.

Das 5-er Lemma impliziert sofort, dass genau dann alle $H_n(j)$ Isomorphismen sind, wenn alle $H_n(i) \circ H_n(\varphi)$ Isomorphismen sind, oder äquivalent, wenn alle $H_n(i)$ Isomorphismen sind (denn $H_*(\varphi)$ ist immer ein Isomorphismus, weil schon φ einer ist).

In anderen Worten, $(X; A, D)$ ist eine Mayer-Vietoris Triade genau dann, wenn (X, A, B) ein Ausschneidungstripel ist. ■

Satz 7.55 (Ausschneidungssatz) Sei (X, A, B) ein topologisches Raumtripel, so dass $\bar{B} \subseteq \overset{\circ}{A}$. Dann ist (X, A, B) ein Ausschneidungstripel.

Beweis. Aus $\bar{B} \subseteq \overset{\circ}{A}$ folgt $X = \overset{\circ}{A} \cup (X \setminus \bar{B}) = \overset{\circ}{A} \cup (X \setminus B)$. Also ist $(X; A, X \setminus B)$ nach Beispiel 7.50 eine Mayer-Vietoris Triade und (X, A, B) nach Lemma 7.54 ein Ausschneidungstripel. ■

Beispiel und Definition 7.56 Wir finden ein schönes Beispiel von Mayer-Vietoris Triaden und Ausschneidungstriple in den Sphären

$$S^n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

für $n \in \mathbf{N}$. Wir führen dazu ein paar Namen ein für wichtige Teilräume von S^n .

Zunächst enthält jede Sphäre einen **Nordpol**

$$p_+ := (0, \dots, 0, 1)$$

und einen **Südpol**

$$p_- := (0, \dots, 0, -1),$$

und die Komplemente $S_+^n := S^n \setminus \{p_-\}$ und $S_-^n := S^n \setminus \{p_+\}$ dieser Pole sind offene Teilmengen, die zu \mathbf{R}^n oder zu der offenen n -dimensionalen Einheitskreis homöomorph sind (und somit zusammenziehbar sind).

Für jedes n können wir S^{n-1} in S^n einbetten als seinen **Äquator**

$$S^{n-1} = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n = 0 \}.$$

Man findet leicht einen Homöomorphismus

$$S_+^n \cap S_-^n = S^n \setminus \{p_{\pm}\} \cong S^{n-1} \times (-1, 1). \quad (7.62)$$

Wir können S^n auch in zwei **Halbsphären** zerlegen: die **obere Halbsphäre**

$$D_+^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0 \}$$

und die **untere Halbsphäre**

$$D_-^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq 0 \}.$$

Indem man einfach die letzte Koordinate nicht hinschreibt, erhält man einen Homöomorphismus von den Halbsphären D_+^n und D_-^n zur abgeschlossenen n -dimensionalen Einheitsscheibe D^n . Dieser Homöomorphismus ist die Identität auf S^{n-1} .

Man beachte, dass $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ und dass $D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$.

Wir können auch das Innere dieser Halbsphären betrachten. Diese Unterräume sind die **offene obere Halbsphäre**

$$E_+^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n > 0 \}$$

und die **offene untere Halbsphäre**

$$E_-^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n < 0 \}.$$

Sie sind jeweils homöomorph zur offenen n -dimensionalen Scheibe $\overset{\circ}{D}_n$ oder zu \mathbf{R}^n . Die offenen Halbsphären sind jeweils das Komplement der entgegengesetzten abgeschlossenen Halbsphäre, d.h.,

$$S^n \setminus D_{\pm}^n = E_{\mp}^n.$$

Als Instanz von Beispiel 7.50 sehen wir, dass $(S^n; S_+^n, S_-^n)$ eine Mayer-Vietoris Triade ist. Das gilt auch, wenn wir S_{\pm}^n durch beliebige Umgebungen von D_{\pm}^n ersetzen.

Wenn B eine beliebige in S^n abgeschlossene Teilmenge von E_-^n ist, so ist (S^n, D_-^n, B) ein Ausschneidungstriple nach dem Ausschneidungssatz 7.55. Insbesondere ist $(S^n, D_-^n, \{p_-\})$ ein Ausschneidungstriple.

Natürlich gilt diese Aussage auch, wenn wir in ihr die unteren offenen und abgeschlossenen Halbsphären und den unteren Pol durch die oberen ersetzen.

Wir können nun die wichtigen Ergebnisse dieses Kapitels zusammenfassen in folgender Definition von Eilenberg und Steenrod, die die Grundeigenschaften der Homologie als Axiome festhält, aus denen man Beweise und vor allem auch Berechnungen herleiten kann, die in allen Homologietheorien (und nicht nur in der singulären Homologie) zutreffen.

Definition 7.57 (Eilenberg-Steenrod Axiome) Sei \mathcal{K} eine „geeignete“ Kategorie von topologischen Raumpaaren und stetigen Abbildungen von Raumpaaren (die Objekte und Morphismen können aber zusätzliche Struktur haben und der vergessliche Funktor $\mathcal{K} \rightarrow \text{Top}^2$ muss nicht surjektiv sein, d.h., nicht jedes topologische Raumpaar muss ein Objekt von \mathcal{K} bilden). Die geeigneten Kategorien nennt man **zulässige Kategorien** und wir wollen gar nicht so genau sagen, was das beinhaltet, außer zu betonen, dass Top^2 auf jeden Fall eine zulässige Kategorie ist.

Eine **Homologietheorie** auf \mathcal{K} ist ein Funktor $H: \mathcal{K} \longrightarrow GAG_0$, zusammen mit einer Grad -1 natürlichen Transformation $\beta: H(X, A) \longrightarrow H(A, \emptyset)$, die folgende Eigenschaften erfüllen (wenn wir wie üblich jeden topologischen Raum X mit dem Raumpaar (X, \emptyset) gleichsetzen):

Homotopieaxiom: Sind f und $g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ homotope Morphismen von \mathcal{K} , so ist $H(f) = H(g): H(X, A) \longrightarrow H(Y, B)$.

Exaktheitsaxiom: Zu jedem Objekt (X, A) von \mathcal{K} seien $i: A \longrightarrow X$ und $j: X = (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Dann ist das natürliche Homologiedreieck

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{H(i)} & H(X) \\ & \nwarrow \text{Grad } -1 & \nearrow H(j) \\ & H(X, A) & \end{array}$$

β

exakt.

Ausschneidungsaxiom: Sei (X, A) ein Objekt von \mathcal{K} und sei U ein offener Unterraum von A mit $\bar{U} \subseteq \overset{\circ}{A}$, und so dass $(X \setminus U, A \setminus U) \in \mathcal{K}$. Dann induziert die Inklusion $k: (X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus in Homologie, d.h., $H(k): H(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H(X, A)$ ist ein Isomorphismus.

Dimensionsaxiom: Wenn P ein Einpunktraum ist, dann ist $H_n(P) = \{0\}$ für alle $n \neq 0$. Die Gruppe $H_0(P)$ heißt die **Koeffizientengruppe** der Homologietheorie.

Satz 7.58 Die singuläre Homologie H_* ist eine Homologietheorie im Sinne von Definition 7.57 auf der Kategorie $\mathcal{K} = Top^2$.

Beweis. Das Homotopieaxiom ist Satz 7.29, das Exaktheitsaxiom gilt nach Korollar 7.16, das Ausschneidungsaxiom ist erfüllt (sogar ohne die Voraussetzung U offen) wegen Satz 7.55, und Satz 7.31 ist das Dimensionsaxiom. Die Koeffizientengruppe der singulären Homologie, wie wir sie präsentiert haben, ist \mathbf{Z} . ■

Bevor wir diesen Abschnitt beenden, wollen wir mit Hilfe des Homotopieaxioms eine Verbesserung des Mayer-Vietoris Satzes und des Ausschneidungssatzes erzielen, die es erlaubt, die Voraussetzungen für ihre Anwendung etwas abzuschwächen.

Lemma 7.59 a) Sei (X, A, B) ein topologisches Raumtripel und sei C eine Teilmenge von B , so dass $X \setminus B$ ein Deformationsretrakt von $X \setminus C$ und $A \setminus B$ ein Deformationsretrakt von $A \setminus C$ ist. Dann ist (X, A, B) ein Ausschneidungstripel genau dann, wenn (X, A, C) ein Ausschneidungstripel ist.

Insbesondere ist (X, A, B) ein Ausschneidungstripel, wenn $\bar{C} \subseteq \overset{\circ}{A}$.

b) Sei $(X; A, B)$ eine Raumtriade und seien $A' \supseteq A$ und $B' \supseteq B$ Teilmengen von X , so dass A ein Deformationsretrakt von A' , B ein Deformationsretrakt von B' und $A \cap B$ ein Deformationsretrakt von $A' \cap B'$ ist. Dann ist $(X; A, B)$ eine Mayer-Vietoris Triade genau dann, wenn $(X; A', B')$ eine Mayer-Vietoris Triade ist.

Insbesondere ist $(X; A, B)$ Mayer-Vietoris, wenn $X = \overset{\circ}{A'} \cup \overset{\circ}{B'}$.

Beweis. Zu a): Sei $j: (X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow (X \setminus C, A \setminus C)$ die Inklusion. Weil $X \setminus B$ ein Deformationsretrakt von $X \setminus C$ ist und $A \setminus B$ ein Deformationsretrakt von $A \setminus C$ ist, sind die Inklusionen $j: X \setminus B \rightarrow X \setminus C$ und $j: A \setminus B \rightarrow A \setminus C$ Homotopieäquivalenzen (wie in Definition 2.20 erläutert).

Aus Lemma 7.30 b) folgt, dass auch in der relativen Homologie

$$j_*: H_*(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow H_*(X \setminus C, A \setminus C)$$

ein Isomorphismus ist.

Sei i die Inklusion $(X \setminus C, A \setminus C) \rightarrow (X, A)$, so dass $i \circ j$ die Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow (X, A)$ ist. Da j_* ein Isomorphismus ist, ist i_* genau dann ein Isomorphismus, wenn $i_* \circ j_* = (i \circ j)_*$ einer ist. Das ist genau die Aussage von Teil a).

„Insbesondere“ ist klar aus Satz 7.55.

Zu b): Seien $k: A \cap B \rightarrow A' \cap B'$, $k': A \rightarrow A'$ und $k'': B \rightarrow B'$ die Inklusionen. Wegen der Voraussetzungen sind diese Inklusionen Homotopieäquivalenzen (siehe dazu Definition 2.20) und induzieren deshalb Isomorphismen in Homologie.

Wir haben eine natürliche Inklusion $\gamma: C_*(\{A, B\}) \rightarrow C_*(\{A', B'\})$, die man auch schreiben kann als $\gamma = k'_\# + k''_\#$ und die eine injektive Kettenabbildung ist, und die Kettenabbildungen $k_\#$, $k'_\# \oplus k''_\#$ und γ sind offensichtlich die Bestandteile eines Morphismus zwischen den kurzen exakten Kettenkomplexfolgen der Triaden $(X; A, B)$ und $(X; A', B')$, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_*(A \cap B) & \xrightarrow{\iota} & C_*(A) \oplus C_*(B) & \xrightarrow{\kappa} & C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \\ & & \downarrow k_\# & & \downarrow k'_\# \oplus k''_\# & & \downarrow \gamma \\ \{0\} & \longrightarrow & C_*(A' \cap B') & \xrightarrow{\iota'} & C_*(A') \oplus C_*(B') & \xrightarrow{\kappa'} & C_*(\{A', B'\}) \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

kommutiert, wie man sofort nachprüfen kann.

Die senkrechten Abbildungen induzieren einen Morphismus zwischen den exakten Homologiedreiecken der beiden kurzen exakten Folgen, wobei die linken beiden senkrechten Pfeile Isomorphismen k_* und $k'_* \oplus k''_*$ induzieren, die, wenn man die exakten Dreiecke zu langen exakten Homologiefolgen abwickelt, die Abbildungen $H_n(\gamma)$ von beiden Seiten einrahmen. D.h., in jeder Gruppe von fünf Abbildungen im Morphismus zwischen den langen exakten Folgen, zentriert auf $H_n(\gamma)$, sind die äußeren vier Abbildungen Isomorphismen. Das 5-er Lemma besagt, dass auch $H(\gamma)$ ein Isomorphismus ist.

Wenn j die Inklusion $C_*(\{A', B'\}) \rightarrow C_*(X)$ ist, so ist $j \circ \gamma$ die Inklusion $C_*(\{A, B\}) \rightarrow C_*(X)$. Weil $H(\gamma)$ ein Isomorphismus ist, ist $H(j)$ genau dann ein Isomorphismus (und $(X; A', B')$ genau dann Mayer-Vietoris), wenn $H(j \circ \gamma) = H(j) \circ H(\gamma)$ ein Isomorphismus ist und $(X; A, B)$ Mayer-Vietoris ist.

Der Zusatz „insbesondere“ folgt sofort aus Beispiel 7.50. ■

Beispiel 7.60 In Beispiel 7.56 hatten wir in den n -Sphären Mayer-Vietoris Triaden und Ausschneidungstripel gefunden, die nicht besonders praktisch sind, weil in ihnen nicht die „natürlichsten“ Bestandteile von S^n vorkommen. Mit Hilfe von Lemma 7.59 können wir diese Situation wie folgt verbessern:

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist (S^n, D_-^n, E_-^n) ein Ausschneidungstripel, denn wir wissen, dass $(S^n, D_-^n, \{p_-\})$ eines ist und man sieht leicht, dass $D_+^n = S^n \setminus E_-^n$ ein Deformationsretrakt von $S_+^n = S^n \setminus \{p_-\}$ ist und $S^{n-1} = D_-^n \setminus E_-^n$ ein Deformationsretrakt von $D_-^n \setminus \{p_-\}$ ist. Eine jeweilige Homotopie H von der Identität zu einer Retraktion lässt die Punkte in der oberen Halbsphäre unverändert, und verschiebt die Punkte der unteren Halbsphäre entlang Großkreisen, die den Punkt mit den Polen verbinden, zum Äquator hin. Wer will, findet leicht die Formel für diese Homotopie—die Koordinate x_n wird linear mit der Zeit gegen 0 geschoben, und die anderen Koordinaten werden passend vergrößert, damit der Bildpunkt in der Sphäre bleibt.

Natürlich ist auch (S^n, D_+^n, E_+^n) ein Ausschneidungstripel.

Weil $(S^n; S_+^n, S_-^n)$ eine Mayer-Vietoris Triade ist und weil, wie wir gesehen haben, D_\pm^n ein Deformationsretrakt von S_\pm^n ist und weil $S^{n-1} = D_+^n \cap D_-^n$ offenbar ein Deformationsretrakt von

$$S_+^n \cap S_-^n \cong S^{n-1} \times (-1, 1)$$

ist nach (7.62), ist auch $(S^n; D_+^n, D_-^n)$ eine Mayer-Vietoris Triade.

Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt auf einfache Weise die wichtigsten Homologiegruppen ausrechnen.

Kapitel 8

Berechnungen und Anwendungen

Wir wollen die Erkenntnisse und Grundeigenschaften aus Kapitel 7, insbesondere die Eilenberg-Steenrod Axiome für die singuläre Homologie, jetzt benutzen, um einige wichtige Homologiegruppen und Homologiemorphismen auszurechnen und ein paar Anwendungen herzuleiten.

Wir beginnen mit einer ganz einfachen Bemerkung.

Bemerkung 8.1 Sei X ein topologischer Raum und sei

$$\mathcal{W} = \{ W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$$

die Menge der Wegkomponenten von X .

Da jeder Standardsimplex Δ_n wegweise zusammenhängend ist, liegt das Bild jedes singulären Simplexes $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$ ganz in einer Wegkomponente. Weil die singulären Kettengruppen frei erzeugt werden von den singulären Simplexes ist somit

$$C_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_*(W_\lambda) \quad (8.1)$$

und weil die Summanden Unterkettenkomplexe sind ist es klar, dass auch

$$H_*(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(W_\lambda). \quad (8.2)$$

Der Beweis der Existenz des Isomorphismus in (8.2) lässt sich auf die gleiche Weise führen, wie der Beweis von Lemma 6.34 d).

In Dimension 0 können wir für jeden topologischen Raum die Homologie ganz einfach bestimmen.

Lemma 8.2 Sei $A \neq \emptyset$ ein wegweise zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist $H_0(A) = \mathbf{Z}$ und die $1 \in \mathbf{Z}$ ist die Homologieklass $[y]$

eines beliebigen Punktes $y \in A$, aufgefasst als ein singulärer 0-Simplex (der automatisch ein 0-Zyklus ist).

Ferner, für einen beliebigen topologischen Raum X , wenn $f: A \rightarrow X$ eine stetige Abbildung ist, dann ist $H_0(f)$ injektiv.

Wenn auch X wegweise zusammenhängend ist, dann ist $H_0(f) = \text{id}_{\mathbf{Z}}$.

Beweis. Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Da $\Delta_0 = \{0\}$ einpunktig ist, ist ein 0-Simplex in X eindeutig bestimmt durch seinen einzigen Bildpunkt, d.h., wir können $S_0(X)$ mit X identifizieren und somit $C_0(X)$ mit der von X erzeugten freien abelschen Gruppe $F(X)$.

Jede 0-Kette ist ein Zyklus, weil $C_{-1}(X) = \{0\}$. Um die 0-te Homologie zu berechnen, müssen wir nur noch die Rändergruppe bestimmen.

Jeder Rand ist eine Linearkombination von Rändern von 1-Simplizes, und ein 1-Simplex $\sigma: \Delta_1 = I \rightarrow X$ ist nichts anderes, als ein Weg in X . Ferner

$$\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0) \quad (8.3)$$

nach Definition.

Sei $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbf{Z}$ die Abbildung definiert durch

$$\varepsilon\left(\sum_{x \in X} n_x x\right) = \sum_{x \in X} n_x,$$

die jeder Kette ihre Koeffizientensumme in \mathbf{Z} zuordnet. Sie ist wohldefiniert, weil in einer Kette nur endlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind, und sie ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. (Diese Abbildung heißt die **Augmentation**.)

An (8.3) sieht man, dass $B_0(X) \subseteq \text{Ker } \varepsilon$. Insbesondere repräsentiert jede 0-Kette, die nicht im Kern von ε liegt, eine nichtverschwindende Homologiekategorie.

Für einen wegweise zusammenhängenden nichtleeren Raum A gilt sogar $B_0(X) = \text{Ker } \varepsilon$. Denn für je zwei Punkte x und $y \in A$ gibt es einen Weg, also einen 1-Simplex, von x nach y , und nach (8.3) ist $y - x$ ein Rand. Das bedeutet, dass wenn wir einen festen Punkt $y \in A$ wählen, wir jede Kette

$$c = \sum_{x \in A} n_x x \in C_0(A)$$

durch Addition des Randes

$$\sum_{x \in A} n_x (y - x)x$$

in die zu c homologe Kette

$$c' := \sum_{x \in A} n_x y = \varepsilon(c)y$$

verwandeln können. Weil sie sich durch einen Rand unterscheiden, sind c und c' entweder beide Ränder oder beide keine Ränder. Aber c' ist offensichtlich *genau dann* ein Rand, wenn $\varepsilon(c) = 0$.

Nach dem Ersten Isomorphiesatz aus der Gruppentheorie induziert ε einen Isomorphismus

$$H_0(A) = \frac{Z_0(A)}{B_0(A)} = \frac{C_0(A)}{\text{Ker } \varepsilon} \longrightarrow \text{Bild } \varepsilon = \mathbf{Z}.$$

Dieser Isomorphismus bildet die Homologieklassse $[y]$ eines beliebigen Punktes $y \in A$ (aufgefasst als 0-Zyklus) auf $1 \in \mathbf{Z}$ ab, d.h., diese Homologieklassse, die nicht von y abhängt, entspricht der 1 in \mathbf{Z} .

Sei X ein anderer topologischer Raum und sei $f: A \longrightarrow X$ stetig und $z := f(y)$. Für jedes $n \neq 0 \in \mathbf{Z}$ ist

$$f_*(n[y]) = f_*([ny]) = [f_\#(ny)] = [nz] \neq 0, \quad (8.4)$$

weil $\varepsilon(nz) = n \neq 0$. Also ist $f_* = H_0(f)$ injektiv.

Wenn auch X wegweise zusammenhängend ist, ist auch $H_0(X) = \mathbf{Z}$, erzeugt zum Beispiel von der Homologieklassse $[z]$, und Gleichung (8.4) zeigt, dass $H_0(f)$ tatsächlich die Identität ist. ■

Korollar 8.3 *Sei X ein topologischer Raum und sei \mathcal{W} die Menge der Wegkomponenten von X .*

Dann ist

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{W \in \mathcal{W}} \mathbf{Z}, \quad (8.5)$$

wobei jeder Punkt $x \in X$ einen Zyklus in $Z_0(X)$ darstellt, dessen Homologieklassse die 1 ist in demjenigen Summanden \mathbf{Z} von (8.5), der zur Wegkomponente von x gehört.

Sei Y ein zweiter topologischer Raum und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Für jede Wegkomponente W von X gibt es eine eindeutige Wegkomponente V von Y mit $f(W) \subseteq V$, und $H_0(f)$ bildet den W -ten Summanden \mathbf{Z} von $H_0(X)$ identisch ab auf den V -ten Summanden \mathbf{Z} von $H_0(Y)$.

Beweis. Die Darstellung (8.5) folgt sofort aus Gleichung (8.2) in Bemerkung 8.1 und aus Lemma 8.2. Dabei wird der W -te Summand \mathbf{Z} erzeugt von der Homologieklassse eines beliebigen Punktes $w \in W$.

Wenn $f: X \rightarrow Y$ stetig ist und V die Wegkomponente von Y ist mit $f(W) \subseteq V$, dann bildet $H_0(f)$ die Homologieklassse von w ab auf die Homologieklassse von $f(w) \in Y$, und weil $f(w)$ in V liegt, erzeugt diese Klasse den V -ten Summanden \mathbf{Z} von $H_0(Y)$.

Das bedeutet, dass $H_0(f)$ den W -ten Summanden \mathbf{Z} von $H_0(X)$ identisch abbildet auf den V -ten Summanden \mathbf{Z} von $H_0(Y)$. ■

Beispiele 8.4 a) $S^0 = \{+1, -1\}$ besteht aus zwei Punkten, mit der diskreten Topologie. Aus dem Dimensionsaxiom und aus Bemerkung 8.1 folgt, dass

$$H_n(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0 \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.6)$$

b) $D^0 = \{0\}$ hat einen Punkt und $S^{-1} = \emptyset$. Deshalb ist

$$H_n(D^0, S^{-1}) = H_n(D^0) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0 \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.7)$$

c) $S^0 \subseteq D^1 = [-1, 1]$ und D^1 ist azyklisch, hat also Homologie \mathbf{Z} in Dimension 0 und $\{0\}$ in jeder anderen Dimension. Für die Inklusion $i: S^0 \rightarrow D^1$ gilt also $H_n(i) = 0$ für alle $n \neq 0$, und nach Korollar 8.3 hat

$$H_0(i): \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$$

die Matrix $(1, 1)$, d.h., die Gestalt

$$H_0(m, n) = m + n, \quad (8.8)$$

denn i bildet beide Wegkomponenten von S^0 ab in die einzige Wegkomponente von D^1 .

Mit diesem kleinen Anfang sind wir jetzt in der Lage, die Homologiegruppen aller Sphären auszurechnen.

Satz 8.5 Für jedes $n \geq 1$ und für jedes $k \in \mathbf{Z}$ ist

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.9)$$

und

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong H_k(S^n, D_-^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Speziell werden die Isomorphismen zwischen diesen Homologiegruppen zum Teil durch stetige Abbildungen induziert.

Insbesondere induziert die Inklusion $i: (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, D_-^n)$ den ersten Isomorphismus in (8.10); i_* ist ein Isomorphismus der gesamten graduerten Homologiegruppen.

Für die Inklusion $j: (S^n, \emptyset) \longrightarrow (S^n, D_-^n)$ ist $H_k(j)$ für alle $k \geq 1$ ein Isomorphismus (aber nicht für $k = 0$).

Beweis. S^n ist die Vereinigung der beiden wegweise zusammenhängenden Scheiben D_+^n und D_-^n , und für $n > 0$ ist ihr Durchschnitt S^{n-1} nichtleer. Daraus folgt, dass S^n wegweise zusammenhängend ist, wenn $n > 0$, und deshalb ist $H_0(S^n) = \mathbf{Z}$.

Wir können in der Aussage des Satzes die „Standardscheibe“ D^n ersetzen durch eine homöomorphe Kopie, nämlich durch die Scheibe D_+^n , die obere Halbsphäre in S^n .

Wir betrachten nun folgendes Diagramm, in dem die Zeilen Auszüge aus den langen exakten Homologiefolgen der Paare (D_+^n, S^{n-1}) und (S^n, D_-^n) sind und die senkrechte Abbildung durch die Inklusion des Raumpaars induziert wird:

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(D_+^n) & \longrightarrow & H_k(D_+^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D_+^n) \\ & & \downarrow i_* \cong & & & & \\ H_k(D_-^n) & \longrightarrow & H_k(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_k(S^n, D_-^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(D_-^n) \longrightarrow H_{k-1}(S^n) \end{array}$$

Die Abbildung i_* ist ein Ausschneidungsisomorphismus, denn (S^n, D_-^n, E_-^n) ist ein Ausschneidungstripel nach Beispiel 7.60 und das Paar (D_+^n, S^{n-1}) erhält man durch Ausschneidung von E_-^n aus dem Paar (S^n, D_-^n) (in anderen Worten, $D_+^n = S^n \setminus E_-^n$ und $S^{n-1} = D_-^n \setminus E_-^n$).

Das liefert, wie behauptet, den ersten Isomorphismus in (8.10).

Das Diagramm enthält aber mehr Isomorphismen, wobei das genaue Aussehen von dem Wert von k und n abhängt. Wenn $k = 0$ hat die untere Zeile nach Lemma 8.2 die Gestalt

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \longrightarrow H_0(S^n, D_-^n) \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \{0\},$$

woraus folgt, dass $H_0(S^n, D_-^n) = \{0\}$, wie es in (8.10) steht.

Für $k = 1$ hat das Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_1(D_+^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\beta_1} & H_0(S^{n-1}) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ & & \downarrow \cong & & & & \\ \{0\} & \longrightarrow & H_1(S^n) & \xrightarrow[\cong]{H_1(j)} & H_1(S^n, D_-^n) & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \end{array}$$

Der verbindende Homomorphismus in der unteren Zeile ist 0, weil die anschließende Abbildung nach Lemma 8.2 injektiv ist. Aus diesem Grund ist die Abbildung $H_1(j): H_1(S^n) \rightarrow H_1(S^n, D_-^n)$ ein Isomorphismus.

Die Gestalt des verbindenden Homomorphismus in der oberen Zeile hängt ab vom Wert von n , aber β_1 ist auf jeden Fall injektiv und somit ein Isomorphismus auf sein Bild, welches der Kern des rechten Pfeils ist.

Wenn $n = 1$, so ist der rechte Pfeil in der oberen Zeile nach Beispiel 8.4 c) die Abbildung $(m, n) \mapsto m + n$ von $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ und hat Kern

$$\{(m, -m) \mid m \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}.$$

Das zeigt, dass $H_1(S^1) \cong H_1(D^1, S^0) \cong \mathbf{Z}$ und beweist den Fall $k = n = 1$ in (8.9) und (8.10).

Wenn $n > 1$, so ist der rechte Pfeil die Identität von \mathbf{Z} nach Lemma 8.2, da dann S^{n-1} wegweise zusammenhängend ist. Folglich ist $\beta_1 = 0$ (der Kern des rechten Pfeils ist $\{0\}$) und wir haben

$$H_1(S^n) \cong H_1(D_+^n, S^{n-1}) = \{0\},$$

im Einklang mit (8.9) und (8.10).

Wir haben damit den Fall $k = 1$ vollständig berechnet.

Wenn $k > 1$, so hat unser Diagramm die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_k(D_+^n, S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{} & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow \cong & & & & \\ \{0\} & \longrightarrow & H_k(S^n) & \xrightarrow[\cong]{H_k(j)} & H_k(S^n, D_-^n) & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

und wir sehen, dass $H_k(j)$ ein Isomorphismus ist, wie behauptet, und dass für alle $n > 0$ und $k > 1$ gilt

$$H_k(S^n) \cong H_k(D_+^n, S^{n-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1}).$$

Durch Induktion folgt hieraus, dass

$$H_k(S^n) \cong H_{k-r}(S^{n-r})$$

für jedes $r > 0$, so dass $k - r \geq 1$ und $n - r \geq 0$, also für jedes $r > 0$ mit $r < k$ und $r \leq n$.

Wenn $k \leq n$ nehmen wir $r = k - 1$ und wir finden

$$H_k(S^n) \cong H_1(S^{n-k+1}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n - k + 1 = 1, \text{ also wenn } k = n; \\ \{0\}, & \text{wenn } n - k + 1 > 1, \text{ also wenn } k < n. \end{cases}$$

Wenn $k > n$ nehmen wir $r = n$ und wir finden

$$H_k(S^n) \cong H_{k-n}(S^0) = \{0\}$$

nach Beispiel 8.4 a), da $k - n > 0$.

Das beweist alle Fälle von (8.9), und die fehlenden Fälle von (8.10) folgen sofort aus dem Isomorphismus $H_k(S^n) \cong H_k(D_+^n, S^{n-1})$ für $k > 1$. ■

Die Tatsache, dass $H^n(S^n) = \mathbf{Z}$ für jedes $n > 0$ erlaubt uns, ähnlich wie in der Theorie der Homotopiegruppen, für jede stetige Selbstabbildung der n -Sphäre einen homologischen **Abbildungsgrad** zu definieren.

Definition 8.6 Sei $n \geq 1$ und $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung.

Dann ist $H_n(f): H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ ein Homomorphismus $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ und somit die Multiplikation mit einer wohldefinierten Zahl $a \in \mathbf{Z}$, die wir den **Abbildungsgrad** $\text{Grad } f$ von f nennen.

Bemerkung 8.7 a) Da homotope Abbildungen den gleichen Homomorphismus in Homologie induzieren, hängt der Grad einer Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ nur von der Homotopieklasse von f ab.

b) Sei $P = \{p\}$ ein Einpunktraum. Wenn f konstant ist, so faktorisiert f durch P , d.h., wir können schreiben $f = g \circ h$, wo h die einzige Abbildung $S^n \rightarrow P$ ist und wo g eine Abbildung $P \rightarrow S^n$ ist.

Da aber $H_n(P) = \{0\}$ (weil $n \geq 1$), folgt daraus, dass $\text{Grad } f = 0$ wenn f konstant ist, und wegen Teil a) gilt dies auch, wenn f nullhomotop ist.

c) Offensichtlich ist $\text{Grad id}_{S^n} = 1$.

d) Wenn f und g zwei Abbildungen $S^n \rightarrow S^n$ sind, dann ist

$$\text{Grad } g \circ f = \text{Grad } g \circ \text{Grad } f,$$

wie man leicht sieht.

Lemma 8.8 Sei n eine positive natürliche Zahl und sei $0 \leq k \leq n$. Wir bezeichnen mit s_k die Abbildung $S^n \rightarrow S^n$, die die Einschränkung auf S^n der Spiegelung von \mathbf{R}^{n+1} in der Ebene $x_k = 0$ ist, also die Abbildung gegeben durch

$$s_k(x_0, \dots, x_n) := (x_0, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (8.11)$$

Der Grad von s_k ist -1 .

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $k = n$ zu beweisen, denn für je zwei Indizes k und l zwischen 0 und n , sei $\tau: S^n \rightarrow S^n$ die Abbildung, die die k -te und l -te Koordinate vertauscht. Da $\tau^2 = \text{id}_{S^n}$, muss $(\text{Grad } \tau)^2 = 1$ sein. Offensichtlich ist $s_l = \tau s_k \tau$ und somit

$$\text{Grad } s_l = (\text{Grad } \tau)^2 \text{Grad } s_k = \text{Grad } s_k,$$

d.h., alle s_k haben den gleichen Grad.

Seien $i: (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, D_-^n)$ und $j: (S^n, \emptyset) \rightarrow (S^n, D_-^n)$ die Inklusionen. Nach der Aussage von Satz 8.5 induzieren diese stetigen Abbildungen Isomorphismen der n -ten Homologiegruppen dieser Raumpaare.

Sei $c \in C_n(D_+^n)$ eine Kette, deren Restklasse in $C_n(D_+^n, S^{n-1})$ ein Zyklus ist, dessen Homologieklassse $H_n(D_+^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ erzeugt. Da $C_n(D_+^n) \subseteq C_n(S^n)$ können wir c auch als eine Kette in $C_n(S^n)$ betrachten.

Sei $d = (s_n)_\#(c)$. Dies ist eine Kette in $C_n(D_-^n)$.

Weil c einen Zyklus von $C_n(D_+^n, S^{n-1})$ repräsentiert, ist $\partial c \in C_*(S^{n-1})$, und weil $s_n|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$, gilt

$$\partial d = \partial(s_n)_\#(c) = (s_n)_\#(\partial c) = \partial c.$$

Es folgt, dass $c - d$ ein Zyklus in $C_n(S^n)$ ist. Weil $d \in C_n(D_-^n)$, ist

$$j_\#(c - d) = j_\#(c) = i_\#(c) \in C_n(S^n, D_-^n).$$

Da $H_n(i)$ und $H_n(j)$ Isomorphismen sind und $[c]$ nach der Wahl von c ein Erzeugendes von $H_n(D_+^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ ist, ist $[c - d]$ ein Erzeugendes von $H_n(S^n)$.

Aber $(s_n)_\#(c) = d$ und $(s_n)_\#(d) = c$ (weil $(s_n)^2 = \text{id}_{S^n}$). Also ist

$$(s_n)_\#(c - d) = d - c = -(c - d)$$

und $\text{Grad } s_n = -1$. ■

Korollar 8.9 Sei $n \geq 1$ und sei $\tau: S^n \rightarrow S^n$ die Antipodenabbildung $\tau(x) = -x$. Dann ist $\text{Grad } \tau = (-1)^{n+1}$.

Beweis. $\tau = s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1 \circ s_0$ und nach Bemerkung 8.7 d) und Lemma 8.8 ist $\text{Grad } \tau$ das Produkt von $n + 1$ Kopien von -1 . ■

Mit diesen Vorbereitungen lassen sich viele der Ergebnisse aus Kapitel 5 nach den gleichen Ideen wie dort aber unter Verwendung der Homologiegruppen der Sphären neu beweisen, diesmal aber in beliebigen Dimensionen $n \in \mathbb{N}$, da wir uns nicht nur auf die Homologie von S^1 stützen müssen. Zu diesen Ergebnissen gehören:

Lemma 8.10 Für jedes $n \geq 1$ ist S^{n-1} kein Retrakt von D^n .

Satz 8.11 (Brouwerscher Fixpunktsatz) Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede stetige Abbildung

$$f: D^n \longrightarrow D^n$$

hat einen Fixpunkt. (D.h., es gibt einen Punkt $x \in D^n$, so dass $f(x) = x$.)

Die Beweise führen wir nicht auf, da sie (bis auf den trivialen Fall $n = 0$ für den Fixpunktsatz) praktisch genau so gehen, wie in Kapitel 5.

Lemma 8.12 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien f und $g: S^n \longrightarrow S^n$ stetige Abbildungen.

Wenn für jedes $x \in S^n$ gilt $f(x) \neq -g(x)$, so ist $f \simeq g$.

Beweis. Sei $r: D^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$ die Retraktion

$$r(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Definiere eine Homotopie $H: S^n \times I \longrightarrow D^{n+1}$ durch

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass $H(x, t)$ nie 0 ist, denn sonst gibt es ein $x \in S^n$ und ein $t \in [0, 1]$ mit $(1 - t)f(x) + tg(x) = 0$ oder

$$(1 - t)f(x) = -tg(x). \quad (8.12)$$

Da aber $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 1$, ist

$$1 - t = |1 - t| = \|(1 - t)f(x)\| = \|-tg(x)\| = |-t| = t$$

oder in anderen Worten $t = 1 - t = \frac{1}{2}$, und daraus folgt mit (8.12), dass $f(x) = -g(x)$, in Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Da also $H(x, t)$ nie 0 ist, können wir r auf seinen Wert anwenden, und $r \circ H$ ist eine Homotopie von f nach g als Abbildungen $S^n \longrightarrow S^n$. ■

Korollar 8.13 Sei $n \geq 1$ und sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung.

Wenn f keinen Fixpunkt hat (mit $f(x) = x$), so ist f homotop zur Antipodenabbildung τ mit $\tau(x) = -x$ für jedes x .

Wenn f keinen Antipodenpunkt hat (mit $f(x) = -x$), so ist $f \simeq \text{id}_{S^n}$.

Beweis. Ein Punkt x ist genau dann ein Fixpunkt von f , wenn $f(x) = -\tau(x)$. Wenn es keinen solchen Punkt gibt, dann folgt aus Lemma 8.12, dass $f \simeq \tau$. Und wenn f keinen Antipodenpunkt hat, so folgt aus Lemma 8.12, dass $f \simeq \text{id}_{S^n}$. ■

Korollar 8.14 Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Jede stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ hat entweder einen Fixpunkt (mit $f(x) = x$) oder einen Antipodenpunkt (mit $f(x) = -x$).

Beweis. Sei $\tau: S^n \rightarrow S^n$ die Antipodenabbildung mit $\tau(x) = -x$ für jedes x .

Wenn f weder einen Fixpunkt noch einen Antipodenpunkt hat, so besagt Korollar 8.13, dass $\tau \simeq f \simeq \text{id}_{S^n}$, aber für n gerade ist das nach Bemerkung 8.7 nicht möglich, weil $\text{Grad } \tau = (-1)^{n+1} = -1$ und $\text{Grad id}_{S^n} = 1$. ■

Satz 8.15 (Satz vom Igel) Wenn $n > 0$ gerade ist, so besitzt S^n kein nirgends verschwindendes stetiges Tangentenvektorfeld.

Dies kann man auch anders ausdrücken. Da man ein nichtverschwindendes Tangentenvektorfeld auf Länge 1 normieren kann und da die Tangentenvektoren zu S^n genau die Orthogonalen des Ortsvektors sind, besagt dieser Satz:

Es gibt keine stetige Abbildung $v: S^n \rightarrow S^n$, so dass $v(x) \perp x$ für jedes $x \in S^n$.

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar 8.14, denn $\pm x$ ist nie orthogonal zu x , also hat eine solche Abbildung v , mit $v(x) \perp x$ für jedes $x \in S^n$, weder einen Fixpunkt noch einen Antipodenpunkt, in Widerspruch zum Korollar. ■

Dieser Satz heißt der „Satz vom Igel“, da er, in einer skurrilen Fassung für $n = 2$, besagt, dass man die Stacheln eines Igels (ein Einheitsvektorfeld auf einer S^2 , welche die Haut des Igels darstellt), nicht kämmen kann, so dass sie flach (also tangential) liegen.

Die amerikanische Version lautet: man kann einen behaarten Billiardball nicht kämmen. Behaarte Billiardbälle scheint es in Deutschland nicht zu geben (obwohl es Igel oder zumindest ähnliche Tiere in Amerika gibt).

Bemerkung. In Kapitel 5 haben wir noch zwei weitere schöne Anwendungen des (damals homotopietheoretischen) Abbildungsgrades präsentiert, nämlich der Satz von Borsuk-Ulam und der Schinkenbrotsatz. Es wurde zumindest durch Andeutung in Aussicht gestellt, mit Homologietheorie auch diese Sätze, die zu den hier besprochenen Anwendungen sehr ähnlich erscheinen, in höhere Dimensionen leicht übertragen zu können.

Diese Sätze gelten auch tatsächlich in höheren Dimensionen, aber das zu beweisen ist nicht leicht und kaum möglich mit den Mitteln, die uns im Moment zur Verfügung stehen.

Für diese Anwendungen brauchen wir die Kohomologietheorie, die wir im Sommersemester behandeln werden, und insbesondere die *Ringstruktur* der graduierten Kohomologiegruppe, eine Struktur, die die Homologiegruppe leider nicht besitzt.

Kapitel 9

Zelluläre Homologie

In Kapitel 8 haben wir mit den in Kapitel 7 entwickelten Mitteln einige Homologieberechnungen durchgeführt, aber nicht nur aus Zeitgründen ist es dabei im Wesentlichen bei der Berechnung der Homologie der Sphären geblieben.

Hätten wir im Wintersemester etwas mehr Zeit gehabt, wäre als nächstes Beispiel die Homologie des Torus und der Kleinschen Flasche gefolgt. Diese Räume kann man aus zwei Zylindern $S^1 \times I$ zusammenkleben und ihre Homologie kann man dann auf geradlinige Weise mit der Mayer-Vietoris Folge ausrechnen, wobei es allerdings nötig ist, die Homomorphismen in der Mayer-Vietoris Folge genau zu bestimmen, so dass die Berechnung doch etwas Aufwand erfordert.

Auch für Räume, die nur geringfügig komplizierter sind als diese, zum Beispiel für die projektiven Räume, kann sich dieser Aufwand ins Unermessliche steigern, so dass eine praktikable Berechnung der Homologie der projektiven Räume mit den Grundmitteln der Eilenberg-Steenrod Axiome kaum möglich ist.

Die topologischen Räume, die hier genannt wurden, sind aber keine exotischen oder ungewöhnlichen Beispiele. Im Gegenteil, sie sind besonders schön und gehören zu einer großen Klasse von sich wohl verhaltenden Räumen, die auf eine für Homologieberechnungen sehr günstige Weise aufgebaut sind. Dieser Aufbau erlaubt eine vereinfachte Berechnung der Homologie, in der die Kettengruppen, wenn die Räume kompakt sind, sogar endlichen Rang haben und somit sehr viel kleiner sind, als die singulären Kettengruppen.

Die Räume dieser Klasse können aus Scheiben D^n verschiedener Dimensionen „zusammengebastelt“ werden, die man die **Zellen** dieser Konstruktion nennt. Deshalb nennt man diese Räume unter anderem auch **Zellenkomplexe**. Ihre Homologie lässt sich mit Hilfe von Kettenkomplexen berechnen, die statt von den singulären Simplexes von den Zellen frei erzeugt werden, und

aus diesem Grund heißt diese Homologietheorie die **zelluläre Homologie**.

Wir werden in diesem Kapitel die zelluläre Homologie entwickeln und zeigen, dass sie für Zellenkomplexe (genauer gesagt, für sich genügend wohl verhaltende Zellenkomplexe) isomorph ist zur singulären Homologie. Im Anschluss wenden wir die zelluläre Homologie an zur Berechnung der Homologiegruppen der eingangs genannten wichtigen topologischen Räume.

Notation 9.1 In diesem Abschnitt werden wir viel mit Scheiben D^n hantieren und dabei insbesondere auch mit den offenen Scheiben gegeben durch das Innere der D^n . Um das deutlich zu kennzeichnen und dabei das Schriftbild möglichst einfach zu halten, führen wir die Notation E^n ein für die offene n -Scheibe

$$E^n := \overset{\circ}{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}.$$

Definition 9.2 Sei X ein topologischer Raum und sei $n \in \mathbf{N}$. Eine **n -Zelle** in X ist ein Unterraum e von X , der homöomorph ist zu E^n .

Die Zahl n heißt die **Dimension** der Zelle e und sie ist eindeutig bestimmt, denn $E^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$, und weil Sphären verschiedener Dimensionen verschiedene Homologiegruppen haben (nach Satz 8.5) können offene Scheiben verschiedener Dimensionen nicht zu ein und derselben Zelle homöomorph sein.

Um die Dimension einer Zelle kenntlich zu machen, hängt man sie manchmal als „Exponent“ an den Namen der Zelle, d.h., man notiert die Zelle mit e^n statt mit e (und entsprechend für andere Zellennamen).

Eine **abgeschlossene n -Zelle** in X ist die abgeschlossene Hülle \bar{e} einer n -Zelle e .

Der **Rand** ∂e (auch notiert als \dot{e}) einer n -Zelle $e \subseteq X$ ist definiert als

$$\partial e := \bar{e} \setminus e.$$

Man beachte, dass das *nicht* das Gleiche ist, wie der Rand im Sinne der mengentheoretischen Topologie von e als Teilmenge von X .

Beispiel 9.3 Sei X ein topologischer Raum. Eine **0-Zelle** in X ist einfach ein Punkt $x \in X$, denn

$$\overset{\circ}{D}^0 = D^0 = \mathbf{R}^0 = \{0\}$$

ist einpunktig.

Jede 0-Zelle ist gleichzeitig eine abgeschlossene 0-Zelle, und der Rand einer 0-Zelle ist leer.

Definition 9.4 Sei X ein topologischer Raum. Eine **Zellenzerlegung** von X ist eine Familie \mathcal{Z} von Zellen in X von beliebiger Dimension, die disjunkt sind und die X überdecken.

Ein **Zellenkomplex** ist ein Paar (X, \mathcal{Z}) , wo X ein topologischer Raum ist und \mathcal{Z} ist eine Zellenzerlegung von X . Wenn eine feste Zellenzerlegung \mathcal{Z} gegeben ist, nennen wir aus Bequemlichkeit oft auch den topologischen Raum X selber einen **Zellenkomplex**.

Ein Zellenkomplex (X, \mathcal{Z}) (oder die zugehörige Zellenzerlegung \mathcal{Z}) heißt **endlich**, wenn \mathcal{Z} nur aus endlich vielen Zellen besteht.

Ein **Unterezellenkomplex** eines Zellenkomplexes (X, \mathcal{Z}) ist ein Unterraum A von X , der eine Vereinigung von Zellen von \mathcal{Z} ist. In diesem Fall ist

$$\mathcal{Z}_A := \mathcal{Z}|A := \{e \in \mathcal{Z} \mid e \subseteq A\}$$

eine Zellenzerlegung von A und (A, \mathcal{Z}_A) ist selber ein Zellenkomplex.

Die **Dimension** einer Zellenzerlegung \mathcal{Z} von X (oder eines Zellenkomplexes (X, \mathcal{Z})) ist definiert als das Supremum der Dimensionen der Zellen in \mathcal{Z} . Sie kann ∞ sein.

Für $n \in \mathbf{Z}$ definieren wir das **n -Skelett** X^n einer Zellenzerlegung \mathcal{Z} von X (oder eines Zellenkomplexes (X, \mathcal{Z})) als die Vereinigung

$$X^n := \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ \dim e \leq n}} e$$

der Zellen von Dimension höchstens n in der Zellenzerlegung von X .

Offensichtlich ist X^n ein Unterezellenkomplex von X von Dimension höchstens n ; seine Zellenzerlegung $\mathcal{Z}|X^n$ bezeichnen wir als Abkürzung mit \mathcal{Z}_n .

Wenn (X, \mathcal{Z}) und (Y, \mathcal{Z}') zwei Zellenkomplexe sind, so nennen wir eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ **zellulär**, wenn für jedes $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$f(X^n) \subseteq Y^n.$$

Es wird *nicht* verlangt, dass f Zellen in Zellen abbildet!

Beispiel 9.5 Sei (X, \mathcal{Z}) ein Zellenkomplex und $A \subseteq X$ ein Unterezellenkomplex. Dann ist die Inklusion $A \hookrightarrow X$ immer zellulär.

Bemerkung 9.6 Sei (X, \mathcal{Z}) ein Zellenkomplex. Dann gilt für die Skelette X^n von X :

- a) $X^n = \emptyset$ wenn $n < 0$.
- b) $X^m \subseteq X^n$ wenn $m \leq n$.

$$\text{c) } X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X^n.$$

$$\text{d) } X^n = X \text{ wenn } n \geq \dim Z.$$

Jeder topologische Raum X besitzt eine „triviale“ und sicher nicht besonders nützliche Zellenzerlegung als die Vereinigung der Einpunktmengen seiner Punkte; diese Zellenzerlegung verrät natürlich nichts über die Geometrie von X .

Um etwas Sinnvolles mit Zellenzerlegungen anfangen zu können, müssen wir solche frivolen Beispiele ausschließen. Genauer, wir brauchen eine Kontrolle über die Weise, wie verschiedene Zellen der Zellenzerlegung sich angrenzen und wie sie zueinander liegen. Diese Kontrolle gewinnen wir durch eine zusätzliche Struktur, die die Zellen an ihre Umgebung bindet.

Definition 9.7 Sei X ein topologischer Raum und sei $e \subseteq X$ eine n -Zelle in X . Eine *charakteristische Abbildung* für e ist eine stetige Abbildung

$$\Phi_e: D^n \longrightarrow X,$$

so dass $\Phi_e|_{E^n}$ ein Homöomorphismus $E^n \longrightarrow e$ ist.

Wenn Φ_e eine charakteristische Abbildung für die Zelle e ist, so nennen wir die Abbildung

$$\varphi_e = \Phi_e|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \longrightarrow X$$

die zu Φ_e gehörende *Anheftungsabbildung* der Zelle e .

Bemerkung 9.8 Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum und sei e eine n -Zelle in X . Die Zelle e *muss nicht unbedingt* eine charakteristische Abbildung Φ_e haben, aber wenn sie eine besitzt, so gilt folgendes:

- a) $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$.
- b) $\Phi_e(D^n) = \bar{e}$.
- c) $\Phi_e: D^n \longrightarrow \bar{e}$ ist identifizierend.
- d) Φ_e und somit auch φ_e sind durch $\Phi_e|_{E^n}$ eindeutig bestimmt.
- e) $\partial e = \Phi_e(S^{n-1})$ und ist abgeschlossen in X .
- f) e ist offen in \bar{e} .

Beweis. a): Wenn die Behauptung nicht stimmt, so gibt es einen Punkt z in S^{n-1} mit $\Phi_e(z) \in e$, und da Φ_e ein Homöomorphismus von E^n auf e ist, gibt es einen Punkt $x \in E^n$ mit $\Phi_e(x) = \Phi_e(z)$.

Sei $r \in (0, 1)$ eine Zahl, so dass $r > |x|$ (hier ist die euklidische Norm gemeint). Sei $U \subseteq E^n$ die offene Scheibe von Radius r um $0 \in \mathbf{R}^n$ und sei $V := E^n \setminus \overline{D_r^n}$ das Komplement der abgeschlossenen Scheibe von Radius r um 0 . Offensichtlich ist $S^{n-1} \subseteq \overline{V}$ in D^n .

Wir haben $\Phi_e(z) = \Phi_e(x) \in \Phi_e(U)$ und $\Phi_e(U)$ ist eine offene Umgebung von $\Phi_e(z)$ in e . Weil Φ_e auf ganz D^n stetig ist, gibt es eine offene Menge W um $z \in D^n$, so dass $\Phi_e(W) \cap e \subseteq \Phi_e(U)$. Weil z ein Häufungspunkt von V ist, ist $V \cap W \neq \emptyset$.

Das ist aber ein Widerspruch, denn weil Φ_e auf E^n injektiv ist, ist

$$\Phi_e(V) \cap \Phi_e(U) = \emptyset,$$

aber nach Wahl von W ist $\Phi_e(V \cap W) \subseteq \Phi_e(U)$.

Folglich kann es keinen solchen Punkt $z \in S^{n-1}$ geben und $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$.

b): Weil $D^n = \overline{E^n}$ und $\Phi_e(E^n) = e$, ist $\Phi_e(D^n) \subseteq \bar{e}$.

Weil D^n kompakt ist, ist $\Phi_e(D^n)$ kompakt und da X Hausdorffsch ist, auch abgeschlossen in X . Daraus folgt $\bar{e} \subseteq \Phi_e(D^n)$.

c): Φ_e ist surjektiv auf \bar{e} nach Teil b), und ist stetig nach Voraussetzung. Es muss nur noch gezeigt werden, dass eine Teilmenge A von \bar{e} , deren Urbild unter Φ_e abgeschlossen ist, in \bar{e} abgeschlossen ist.

Aber wenn $\Phi_e^{-1}(A)$ abgeschlossen in D^n ist, ist es auch kompakt. Folglich ist $\Phi_e(\Phi_e^{-1}(A))$ kompakt, weil Φ_e stetig ist, und ist gleich A , weil Φ_e surjektiv ist.

Also ist A kompakt und somit abgeschlossen in X (also auch in \bar{e}), weil X Hausdorffsch ist.

d) folgt sofort aus der Stetigkeit von Φ_e und der Tatsache, dass $D^n = \overline{E^n}$.

e): Aus Teilen b) und a) folgt sofort, dass $\partial e = \bar{e} \setminus e = \Phi_e(S^{n-1})$, und dies ist eine kompakte und somit abgeschlossene Teilmenge des Hausdorffschen Raumes X .

f): $e = \bar{e} \setminus \partial e$ ist offen in \bar{e} , weil ∂e abgeschlossen ist nach Teil e). ■

Charakteristische Abbildungen, wenn sie existieren, „halten einen Zellenkomplex zusammen“. Ein paar zusätzliche Eigenschaften, die verhindern, dass die Zusammenklebung zu wild wird, reichen aus für viele wichtige Konstruktionen in der algebraischen Topologie, die meisten in der Homotopietheorie, aber auch für die von uns angepeilte vereinfachte Berechnung der Homologie.

Definition 9.9 Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum. Eine **CW-Zerlegung** von X ist eine Zellenzerlegung \mathcal{Z} , so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- a) Jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ besitzt eine charakteristische Abbildung Φ_e .
- b) Für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ gilt $\partial e \subseteq X^{\dim e - 1}$.
- c) (Bedingung „C“ = **closure-finite**) Für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ ist ∂e enthalten in einer endlichen Vereinigung von Zellen aus \mathcal{Z} , in anderen Worten, ∂e trifft nur endlich viele Zellen aus \mathcal{Z} .
- d) (Bedingung „W“ = **weak topology**) Die Topologie von X ist die schwache Topologie erzeugt von den Unterräumen \bar{e} für $e \in \mathcal{Z}$.

Das bedeutet, dass eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist in X , wenn $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist in \bar{e} für jede Zelle e von X .

Ein **CW-Komplex** ist ein Paar (X, \mathcal{Z}) , wo X ein Hausdorffscher topologischer Raum ist und \mathcal{Z} ist eine CW-Zellenzerlegung von X .

Einen Hausdorffschen topologischen Raum X , der eine CW-Zerlegung besitzt, nennen wir einen **CW-Raum**.

Wie in der Liste der Eigenschaften schon angedeutet, ist „CW“ eine Abkürzung für „closure-finite in the weak topology“.

Bemerkung 9.10 Da die charakteristischen Abbildungen der Zellen identifizierend sind, erlaubt Bedingung „W“ in der Definition von einer CW-Zerlegung eines Raumes X folgende äquivalente Formulierung:

Eine Teilmenge A von X ist genau dann abgeschlossen, wenn $\Phi_e^{-1}(A)$ abgeschlossen ist in D^n für jede Zelle e (von Dimension n).

Bemerkung 9.11 Eine endliche Zellenzerlegung eines topologischen Raumes X erfüllt automatisch die Bedingungen „C“ und „W“ (letztere weil X die Vereinigung der *endlich vielen* abgeschlossenen Teilmengen \bar{e} für $e \in \mathcal{Z}$ ist).

Also ist ein endlicher CW-Komplex einfach ein Hausdorffscher Zellenkomplex, in dem jede Zelle e , von Dimension n , eine charakteristische Abbildung Φ_e hat, so dass $\Phi_e(S^{n-1})$ nur Zellen von Dimension $< n$ trifft.

Wir wollen gleich einige Beispiele von CW-Komplexen geben, darunter auch CW-Zerlegungen von Quotientenräumen. Für Quotientenräume im Allgemeinen kann der Nachweis, dass sie *Hausdorffsch* sind, manchmal sehr schwierig sein, auch wenn sie tatsächlich diese Eigenschaft haben. Im Falle der beabsichtigten Beispiele können wir diese notwendige Voraussetzung, die jeder CW-Raum erfüllen muss, mit einem einfachen Hilfslemma nachprüfen, das wir deshalb vorweg behandeln.

Lemma 9.12 Sei X ein topologischer Raum. Angenommen, wir können für je zwei Punkte $x \neq y \in X$ einen Hausdorffraum K und eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow K$ finden, so dass $f(x) \neq f(y)$.

Dann ist X Hausdorffsch.

Beweis. Seien $x \neq y \in X$, und sei K ein Hausdorffraum und $f: X \rightarrow K$ eine stetige Abbildung mit $f(x) \neq f(y)$. Dann gibt es disjunkte offene Mengen U und V in K mit $f(x) \in U$ und $f(y) \in V$.

$U' := f^{-1}(U)$ und $V' := f^{-1}(V)$ sind dann disjunkte offene Teilmengen von X mit $x \in U'$ und $y \in V'$.

Also ist X Hausdorffsch. ■

Beispiele 9.13 a) Die leere Menge \emptyset ist ein CW-Raum ohne Zellen (und aus diesem Grund von Dimension $-\infty$!). Alle Skelette sind natürlich auch leer.

Man beachte, dass wegen Bedingung 9.9 b) jeder nichtleere CW-Raum auf jeden Fall 0-Zellen haben muss (da Zellen höherer Dimension nicht-leere Ränder haben, von kleinerer Dimension als ihre eigene). Also ist \emptyset der einzige CW-Raum, der ein leeres Skelett nichtnegativer Dimension besitzt.

b) Ein topologischer Raum X ist genau dann ein nulldimensionaler CW-Raum, wenn X die diskrete Topologie trägt. Denn 0-Zellen sind Punkte und deshalb ist die einzige 0-dimensionale Zellenzerlegung, die ein Raum haben kann, die Zerlegung in seine einzelnen Punkte. Eine 0-Zelle $\{x\}$ (für $x \in X$) hat automatisch eine eindeutige charakteristische Abbildung, nämlich die eindeutige Abbildung von $D^0 = \{0\} \rightarrow \{x\}$.

Da 0-Zellen leere Ränder haben, sind Bedingungen 9.9 b) und c) auch erfüllt.

Eine nulldimensionale Zellenzerlegung kann also nur dann *keine* CW-Zerlegung sein, wenn der Raum nicht Hausdorffsch ist oder wenn Bedingung W verletzt ist.

Bedingung W ist genau dann erfüllt, wenn eine Menge $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist in X , wenn $A \cap \{x\}$ abgeschlossen ist in $\{x\}$ für jedes $x \in X$. Da aber *jede* Teilmenge von X diese Eigenschaft hat, erfüllt die Zellenzerlegung genau dann Bedingung W, wenn jede Teilmenge von X abgeschlossen ist oder gleichbedeutend, wenn X die diskrete Topologie trägt.

In diesem Fall ist X auch Hausdorffsch und somit ein CW-Raum.

Wenn X nicht die diskrete Topologie trägt, gilt schon Bedingung W nicht und X ist also nicht CW.

- c) Jede Sphäre S^n hat eine CW-Zellenzerlegung mit zwei k -Zellen in jeder Dimension k mit $0 \leq k \leq n$.

Das sieht man am einfachsten durch Induktion über n . Es gilt offensichtlich für $n = 0$, da S^0 aus zwei Punkten, also aus zwei 0-Zellen besteht, mit der diskreten Topologie.

Ist $n > 0$, so hat der Äquator S^{n-1} von S^n nach der Induktionsannahme eine CW-Zerlegung mit zwei Zellen in jeder Dimension $\leq n - 1$. Die Sphäre S^n ist die Vereinigung von S^{n-1} mit den beiden n -Zellen E_+^n und E_-^n (siehe Beispiel 7.56), und die Homöomorphismen von D^n zu den abgeschlossenen oberen und unteren Halbsphären D_+^n und D_-^n liefern charakteristische Abbildungen für diese Zellen, die S^{n-1} auf den Äquator, also in das $(n-1)$ -Skelett abbilden. Die ganze Zellenzerlegung ist endlich und erfüllt somit automatisch Bedingungen C und W.

- d) Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist D^n ein CW-Raum mit einer n -Zelle und mit zwei Zellen in jeder nichtnegativen Dimension $< n$. Denn S^{n-1} ist nach Teil c) ein CW-Komplex von Dimension $n - 1$ mit zwei Zellen in jeder Dimension $\leq n - 1$, und $S^n \setminus S^{n-1} = E^n$ ist eine n -Zelle mit id_{D^n} als charakteristische Abbildung. $\partial E^n = S^{n-1}$ ist das $n - 1$ -Skelett dieser Zellenzerlegung, so dass alle erforderlichen Eigenschaften erfüllt sind.
- e) Neben der CW-Zerlegung aus Teil c) hat jede Sphäre S^n auch eine einfachere CW-Zerlegung mit nur zwei Zellen, einer 0-Zelle gegeben durch den Südpol p_- , und der n -Zelle S_+^n , das Komplement des Südpols, das zu \mathbf{R}^n homöomorph ist vermöge der stereographischen Projektion und somit auch zu $E^n \cong \mathbf{R}^n$ homöomorph ist.

Der Homöomorphismus $E^n \rightarrow S_+^n$ erweitert sich zu einer charakteristischen Abbildung $\Phi_{S_+^n}$, die den ganzen Rand S^{n-1} von D^n auf den Südpol p_- von S^n abbildet, und somit sogar ins 0-Skelett. Diese Zellenzerlegung ist automatisch C und W.

- f) Entsprechend erhalten wir für jedes $n > 0 \in \mathbf{N}$ eine CW-Zerlegung von D^n mit genau drei Zellen, einer n -Zelle E^n , einer $n - 1$ -Zelle S_+^{n-1} und einer 0-Zelle bestehend aus dem Südpol von S^{n-1} .

Die charakteristische Abbildung für die Zelle E^n ist die gleiche wie in Teil d), nur die Zellenzerlegung des $n - 1$ -Skeletts $S^{n-1} \subseteq D^n$ hat sich geändert.

- g) Hier ist noch eine CW-Zerlegung von D^2 , die wir allerdings nicht um ihres selbst willen untersuchen wollen, sondern mit dem Zweck, daraus CW-Zerlegungen zweier interessanter Quotientenräume zu gewinnen.

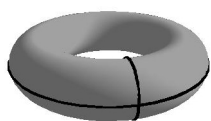
Offensichtlich ist $(D^2, S^1) \cong (I^2, \partial I^2)$. Unter diesem Homöomorphismus geht E^2 auf das Innere von I^2 und dieses ist deshalb eine 2-Zelle. Der Rand ∂I^2 des Quadrats I^2 hat eine eindimensionale CW-Zerlegung mit den vier Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ als 0-Skelett und den vier offenen Seiten $(0, 1) \times \{0\}$, $\{1\} \times (0, 1)$, $(0, 1) \times \{1\}$ und $\{0\} \times (0, 1)$ als 1-Zellen (die abgeschlossenen Seiten $I \times \{0\}$ usw. sind die abgeschlossenen 1-Zellen). Der Homöomorphismus $D^2 \rightarrow I^2$ ist offensichtlich auch eine geeignete charakteristische Abbildung Φ für die 2-Zelle, und diese Zerlegung von I^2 ist eine CW-Zerlegung.

Wir betrachten jetzt zwei Äquivalenzrelationen \sim und \approx auf I^2 , die jeden Punkt $(s, 0)$ für $s \in I$ mit $(s, 1)$ identifizieren, und die $(0, t)$ für $t \in I$ mit $(1, t)$ identifiziert im Falle von \sim , bzw. mit $(1, 1 - t)$ im Falle von \approx . Außer der genannten Paare sind zwei Punkte nur dann äquivalent, wenn sie gleich sind.

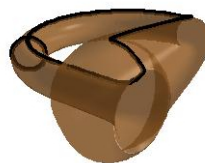
Wir interessieren uns für die Quotientenräume nach diesen Äquivalenzrelationen. Die Identifikation von $(s, 0)$ mit $(s, 1)$ macht zunächst aus I^2 einen Zylinder $I \times S^1$, in dem anschließend für jedes $z \in S$ der Punkt $(0, z)$ im ersten Fall mit $(1, z)$, im zweiten Fall mit $(1, \bar{z})$ (komplexe Konjugation) verklebt wird. Das liefert im ersten Fall

$$I^2 / \sim = S^1 \times S^1 = T^2,$$

also den zweidimensionalen Torus, als Quotientenraum, und im zweiten Fall einen Raum $K^2 := I^2 / \approx$, den man die **Kleinsche Flasche** nennt.



(a) Der Torus T^2 .



(b) Die Kleinsche Flasche K^2 .

Abbildung 9.1: Zweidimensionale CW-Räume.

Der Torus $S^1 \times S^1$ lässt sich in den Hausdorffschen Raum \mathbf{C}^2 einbetten und ist somit selber Hausdorffsch.

Für die Kleinsche Flasche seien x und y zwei verschiedene Punkte in K^2 . Man kann Punkte (a, b) und $(a', b') \in I^2$ wählen, mit $a, b, a', b' \neq 1$,

so dass $x = \pi(a, b)$ und $y = \pi(a', b')$, und es gilt entweder $a \neq a'$ oder $b \neq b'$ (weil sonst $x = y$).

Man betrachte die stetige Abbildung $\alpha: I^2 \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ gegeben durch

$$\alpha(s, t) := (e^{2\pi is}, \cos 2\pi t, e^{\pi is} \sin 2\pi t).$$

Man prüft leicht nach, dass aus $(s, t) \approx (s', t')$ folgt $\alpha(s, t) = \alpha(s', t')$, und deshalb gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{\alpha}: K^2 \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ mit $\tilde{\alpha} \circ \pi = \alpha$.

Die erste Koordinate von α unterscheidet Punkte mit verschiedenen s -Koordinaten im Bereich $0 \leq s < 1$, und die letzten beiden Koordinaten von α unterscheiden für jedes feste s Punkte mit verschiedenen t -Koordinaten im Bereich $0 \leq t < 1$.

Folglich ist auf jeden Fall $\alpha(a, b) \neq \alpha(a', b')$, also $\tilde{\alpha}(x) \neq \tilde{\alpha}(y)$.

Aus Lemma 9.12 folgt, dass K^2 Hausdorffsch ist.

Beide Äquivalenzrelationen \sim und \approx verkleben alle vier 0-Zellen von I^2 miteinander zu einem einzigen Punkt im Quotienten, und beide verkleben die vier 1-Zellen in zwei Paaren miteinander, entweder mit der Identität von $(0, 1)$ oder mit $t \mapsto 1 - t$, zu zwei verschiedenen 1-Zellen im Quotienten. Die Projektion π von I^2 auf den Quotienten bildet jede 1-Zelle von I^2 homöomorph auf ihr Bild im Quotienten, die somit auch tatsächlich eine 1-Zelle ist.

Im Innern von I^2 werden keine Punkte identifiziert, so dass die Projektion die 2-Zelle von I^2 homöomorph auf eine 2-Zelle e^2 im Quotienten abbildet, und $\pi \circ \Phi$ ist eine charakteristische Abbildung für e^2 , die S^1 in das 1-Skelett des Quotienten abbildet.

Auf diese Weise erhalten wir CW-Zerlegungen von T^2 und von K^2 , jeweils mit einer 0-Zelle, einer 2-Zelle, und mit zwei 1-Zellen.

Die 2-Zelle ist jeweils die graue Fläche in Abbildung 9.1, die 1-Zellen sind als dicke schwarze Kurven eingezeichnet und die 0-Zelle ist der sichtbare Schnittpunkt dieser Kurven.

h) Sei $K = \mathbf{R}$ oder \mathbf{C} und sei

$$G := \{ z \in K \mid |z| = 1 \}$$

die Gruppe der Elemente von Betrag 1 im normierten Körper K . Wenn $K = \mathbf{R}$, so ist $G = \{ \pm 1 \} \cong \mathbf{Z}_2$, und wenn $K = \mathbf{C}$, so ist $G = S^1$.

Sei $n \in \mathbf{N}$. Auf

$$S := \{ w = (w_0, \dots, w_n) \in K^{n+1} \mid |w| = 1 \}$$

(welches S^n ist, wenn $K = \mathbf{R}$, und S^{2n+1} , wenn $K = \mathbf{C}$) definieren wir eine Äquivalenzrelation \sim durch die Bestimmung: $w \sim v$ genau dann, wenn es ein $z \in G$ gibt mit $v = zw$.

Der Quotientenraum S/\sim , der Orbitraum der G -Operation auf S , heißt der *n -dimensionale projektive Raum* KP^n über den Körper K . Wir bezeichnen mit $\pi: S \longrightarrow KP^n$ die kanonische Projektion auf den Quotienten.

KP^n ist auf jeden Fall ein Hausdorffscher Raum. Nämlich, seien $x := \pi(x_0, \dots, x_n)$ und $y := \pi(y_0, \dots, y_n)$ zwei verschiedene Punkte von KP^n .

Für jedes i mit $0 \leq i \leq n$ ist die Abbildung $\beta_i: S \longrightarrow \mathbf{R}$ mit

$$\beta_i(w_0, \dots, w_n) := |w_i|$$

eine stetige Abbildung, die auf jeder \sim -Äquivalenzklasse konstant ist und somit eine Abbildung $\tilde{\beta}_i: KP^n \longrightarrow \mathbf{R}$ induziert mit $\tilde{\beta}_i \circ \pi = \beta_i$.

Wenn es ein i gibt mit $\tilde{\beta}_i(x) \neq \tilde{\beta}_i(y)$, können wir sofort Lemma 9.12 anwenden, um disjunkte offene Mengen um x und y zu finden.

Wenn es kein solches i gibt, dann gibt es ein j mit

$$c := \tilde{\beta}_j(x) = \tilde{\beta}_j(y) \neq 0.$$

Die Abbildung $\gamma: S \longrightarrow \mathbf{C}^{n+1}$ mit

$$\gamma(w_0, \dots, w_n) := \left(\frac{w_0 \bar{w}_j}{c}, \dots, \frac{w_n \bar{w}_j}{c} \right)$$

ist eine stetige Abbildung, die auf jeder \sim -Äquivalenzklasse konstant ist und somit eine Abbildung $\tilde{\gamma}: KP^n \longrightarrow \mathbf{C}^{n+1}$ induziert mit $\tilde{\gamma} \circ \pi = \gamma$. Ferner, für die Punkte (x_0, \dots, x_n) und $(y_0, \dots, y_n) \in S$ sind \bar{x}_j/c und $\bar{y}_j/c \in G$, so dass $(x_0, \dots, x_n) \sim \gamma(x_0, \dots, x_n) \in S$ und $(y_0, \dots, y_n) \sim \gamma(y_0, \dots, y_n) \in S$.

Da $(x_0, \dots, x_n) \not\sim (y_0, \dots, y_n)$, muss also $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x_0, \dots, x_n) \neq \tilde{\gamma}(y) = \gamma(y_0, \dots, y_n)$ sein, und wir haben eine stetige Abbildung, die x und y trennt. Nach Lemma 9.12 ist KP^n Hausdorffsch.

Sei d die Dimension von K als Vektorraum über \mathbf{R} , also $d = 1$ wenn $K = \mathbf{R}$ und $d = 2$ wenn $K = \mathbf{C}$. Dann ist KP^n ein dn -dimensionaler

CW-Komplex mit insgesamt $n + 1$ Zellen, bestehend aus genau einer Zelle e_k von Dimension dk für jedes k mit $0 \leq k \leq n$. Diese Zellen und ihre charakteristischen Abbildungen sehen wie folgt aus.

Für jedes k sei

$$S_k := \{ (w_0, \dots, w_n) \in S \mid w_k \neq 0 \text{ aber } w_l = 0 \text{ für alle } l > k \}$$

und sei $e_k := \pi(S_k)$.

Wir zeigen, dass e_k eine dk -Zelle ist mit einer charakteristischen Abbildung $\Phi_k: D^{dk} \rightarrow KP^n$ gegeben wie folgt. Wir fassen D^{dk} auf als eine Teilmenge von K^k und schreiben seine Elemente also nicht als dk -tupel von reellen Zahlen, sondern als k -tupel $x = (x_0, \dots, x_{k-1})$ von Zahlen x_i im Körper K , mit $|x| \leq 1$. Dann setzen wir

$$\Phi_k(x_0, \dots, x_{k-1}) := \pi\left(x_0, \dots, x_{k-1}, \sqrt{1 - |x|^2}, 0, \dots, 0\right) \in \bigcup_{l \leq k} e_l.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich stetig und bildet S^{dk-1} ab in die Vereinigung der e_l für $l < k$ und E^{dk} nach e_k .

Wir müssen nur noch zeigen, dass $\Phi_k|E^{dk}$ ein Homöomorphismus auf e_k ist. Natürlich ist auch diese Einschränkung stetig, also müssen wir nur eine stetige Umkehrabbildung $e_k \rightarrow E^{dk}$ finden.

Für jedes $w \in S_k$ gibt es genau ein Element $v = (v_0, \dots, v_n) \sim w$ in S mit $v_k > 0$ (also v_k reell und positiv). Nämlich, $v = w/c$ wo $c := w_k/|w_k| \in G$; daraus folgt $v_k = |w_k|$.

Das Element v hängt stetig von w ab, und deshalb ist auch die Abbildung $\Psi: S_k \rightarrow K^k$ mit $\Psi(w) := (v_0, \dots, v_{k-1})$ eine stetige Abbildung, mit Werten in E^{dk} weil $v_k > 0$. Weil Ψ konstant auf den Äquivalenzklassen von \sim ist, gibt es eine stetige Abbildung $\psi: e_k \rightarrow E^{dk}$ mit $\psi \circ \pi = \Psi$, und man prüft sofort nach, dass ψ und $\Phi_k|E^{dk}$ Umkehrabbildungen zueinander sind.

Damit ist klar, dass die e_k Zellen von Dimension dk sind, mit Φ_k als charakteristische Abbildung. Da S offensichtlich die disjunkte Vereinigung der S_k ist, und die S_k invariant unter der G -Operation und somit eine Vereinigung von \sim -Äquivalenzklassen sind, ist KP^n die disjunkte Vereinigung der e_k und sie bilden eine Zellenzerlegung. Aus der Definition von Φ_k ist klar, dass $\partial e_k = \Phi_k(S^{dk-1})$ im $(dk - 1)$ -Skelett der Zellenzerlegung enthalten ist. Die Eigenschaften C und W müssen nicht nachgeprüft werden, weil die Zellenzerlegung endlich ist.

Die Zellen e_k bilden also, wie behauptet, eine CW-Zerlegung von KP^n .

- i) Die offene Scheibe E^n von Dimension n hat natürlich eine Zellenzerlegung mit nur einer Zelle, aber dies ist keine CW-Zerlegung, da die einzige Zelle keine charakteristische Abbildung hat.

Es gibt allerdings CW-Zerlegungen von $E^n \cong \mathbf{R}^n$, aber sie haben notgedrungen *unendlich viele* Zellen, wie wir gleich sehen werden.

- j) D^n hat eine Zellenzerlegung bestehend aus einer n -Zelle, nämlich E^n , und den einzelnen Punkten von S^{n-1} als 0-Zellen. Jede Zelle hat offenbar eine charakteristische Abbildung (für E^n ist sie id_{D^n}). Die Ränder aller Zellen sind im 0-Skelett enthalten, und die Zellenzerlegung erfüllt Bedingung W, weil der ganze Raum $D^n = \overline{E^n}$ selber eine abgeschlossene Zelle ist. Aber diese Zerlegung ist nicht CW, weil die n -Zelle E^n Bedingung C verletzt.

- k) Die Teilmenge

$$X := \left\{ t \in \mathbf{R} \mid t = 0 \text{ oder } \frac{1}{t} \in \mathbf{N} \right\}$$

mit der Unterraumtopologie von \mathbf{R} hat offensichtlich eine Zellenzerlegung durch 0-Zellen (und nur eine solche), aber diese Zerlegung ist keine CW-Zerlegung weil Bedingung W nicht gilt. Würde sie gelten, so wäre $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$ abgeschlossen in X , was in der üblichen Topologie nicht der Fall ist.

Da neben der absoluten Homologie von Räumen auch die relative Homologie von Raumpaaren für uns wichtig ist, wollen wir auch den Begriff eines **CW-Paares** einführen, und dazu brauchen wir den Begriff eines **CW-Unterkomplexes**. Bevor wir die Definition (oder eher, einige äquivalente Definitionen) davon angeben, ist es nützlich, einen kleinen Hilfssatz zu beweisen:

Lemma 9.14 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei $A \subseteq X$ ein Unterraum von X , der eine Vereinigung von Zellen aus \mathcal{Z} ist.

Sei $C \subseteq A$ und für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ mit $e \subseteq A$ sei $C \cap \bar{e}$ abgeschlossen in \bar{e} (oder gleichbedeutend, in X , denn \bar{e} ist ja abgeschlossen in X).

Dann ist C abgeschlossen in X (und somit auch in A).

Beweis. Sei e eine beliebige Zelle aus \mathcal{Z} . Nach Bedingung „C“ trifft \bar{e} nur endlich viele Zellen aus \mathcal{Z} , und weil $C \subseteq A$ und A eine Vereinigung von Zellen aus \mathcal{Z} ist, ist $C \cap \bar{e}$ enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen Zellen e_1, \dots, e_k mit $e_i \subseteq A$. Wir haben also

$$C \cap \bar{e} \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_k \subseteq \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k.$$

Es folgt, dass

$$C \cap \bar{e} = (C \cap \bar{e}_1 \cap \bar{e}) \cup \cdots \cup (C \cap \bar{e}_k \cap \bar{e})$$

und dies ist nach Voraussetzung eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen von X und somit abgeschlossen.

Das heißt, $C \cap \bar{e}$ ist abgeschlossen für jede Zelle e in \mathcal{Z} (und nicht nur für die in A enthaltenen Zellen). Nach Bedingung „W“ ist C abgeschlossen in X . ■

Lemma und Definition 9.15 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei $A \subseteq X$ eine Vereinigung von Zellen aus \mathcal{Z} . Sei $\mathcal{Z}_A := \{e \in \mathcal{Z} \mid e \subseteq A\}$. Folgende Bedingungen für A sind äquivalent:

- a) A ist abgeschlossen in X ;
- b) Für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}_A$ ist $\bar{e} \subseteq A$;
- c) \mathcal{Z}_A ist eine CW-Zerlegung von A .

Wenn diese Bedingungen für A gelten, so nennen wir (A, \mathcal{Z}_A) einen **CW-Unterkomplex** von (X, \mathcal{Z}) , oder wir sagen, A ist ein **CW-Unterraum** von X . In diesem Fall nennen wir (X, A) ein **CW-Paar**.

Wenn A ein CW-Unterraum von X ist, so kann man für die Zellen von A die gleichen charakteristischen Abbildungen nehmen, die diese Zellen in X haben.

Beweis. a) \Rightarrow b) ist trivial, denn wenn A abgeschlossen ist, so ist die abgeschlossene Hülle jeder Teilmenge von A wieder in A enthalten.

b) \Rightarrow c): Nach Voraussetzung ist A eine Vereinigung von Zellen aus \mathcal{Z} , also nach Definition von \mathcal{Z}_A die Vereinigung der Zellen von \mathcal{Z}_A .

Jede dieser Zellen e hat in X eine charakteristische Abbildung Φ_e und nach Bemerkung 9.8 b) ist $\text{Bild } \Phi_e = \bar{e}$ und somit enthalten in A ; es folgt, dass jedes Φ_e für $e \in \mathcal{Z}_A$ sogar eine Abbildung $D^n \rightarrow A$ ist, und somit auch eine charakteristische Abbildung für e als Zelle von A . Dies beweist übrigens auch die Behauptung über charakteristische Abbildungen am Ende der Aussage des Lemmas.

Weil ∂e in X nur Zellen von Dimension kleiner als $\dim e$ trifft, und davon nach Bedingung „C“ nur endlich viele, gilt das Gleiche automatisch auch in A .

Und schließlich folgt Bedingung „W“ für (A, \mathcal{Z}_A) sofort aus Lemma 9.14. Damit erfüllt \mathcal{Z}_A alle Bedingungen für eine CW-Zerlegung.

c) \Rightarrow a): Wenn \mathcal{Z}_A eine CW-Zerlegung von A ist, dann hat jede Zelle $e \in \mathcal{Z}_A$ eine charakteristische Abbildung $\Psi_e: D^n \rightarrow A$, die auch eine charakteristische Abbildung in X ist und deren Bild also die X -abgeschlossene Hülle von e ist und in A enthalten ist.

Hieraus folgt, dass für jedes $e \in \mathcal{Z}_A$ gilt $A \cap \bar{e} = \bar{e}$, und dies ist natürlich abgeschlossen in \bar{e} . Aus Lemma 9.14 folgt, dass A abgeschlossen ist in X . ■

Bemerkung 9.16 Kriterium 9.15 b) für einen CW-Unterraum kann man wie folgt ein bisschen vereinfachen (so dass man nicht getrennt nachprüfen muss, dass der Unterraum eine Vereinigung von Zellen ist):

Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

Genau dann ist A ein CW-Unterraum von X , wenn für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ mit $e \cap A \neq \emptyset$ gilt $\bar{e} \subseteq A$.

Beweis. Sowohl die Voraussetzung für die Richtung „ \Rightarrow “ wie auch für die Richtung „ \Leftarrow “ impliziert, dass jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$, die A berührt, ganz in A enthalten ist und dass A eine Vereinigung von Zellen aus \mathcal{Z} ist. Der Rest folgt sofort aus 9.15 mit Bedingung b). ■

Bemerkung 9.17 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei $A \subseteq X$ ein CW-Unterraum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$A^n = A \cap X^n.$$

Beweis. Weil A und X^n Vereinigungen von Zellen von X sind, ist jede Zelle aus \mathcal{Z} , die $A \cap X^n$ schneidet, sowohl in A wie auch in X^n enthalten, und somit in $A \cap X^n$ enthalten. Folglich ist auch $A \cap X^n$ eine Vereinigung von Zellen, nämlich der Zellen von A von Dimension $\leq n$. Diese Vereinigung ist nach Definition aber A^n . ■

Lemma 9.18 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex.

- a) X und \emptyset sind CW-Unterräume von X .
- b) Jedes Skelett X^n von X ist ein CW-Unterraum.
- c) Jedes Skelett X^n ist abgeschlossen in X .
- d) X trägt die schwache Topologie bezüglich der Familie seiner Skelette, d.h., $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X , wenn $A \cap X^n$ abgeschlossen ist in X^n für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zu a): X ist eine Vereinigung von Zellen von \mathcal{Z} und ist abgeschlossen in X , also ist ein CW-Unterraum nach Bedingung a) in Definition 9.15.

Das Gleiche gilt für \emptyset .

Zu b): X^n ist die Vereinigung der Zellen $e \in \mathcal{Z}$ von Dimension $\leq n$, und weil nach Bedingung 9.9 b) die abgeschlossene Hülle \bar{e} keine Zellen von höherer Dimension als n berührt, erfüllt X^n Bedingung 9.15 b) und ist ein CW-Unterraum von X .

c) folgt sofort aus Bedingung a) in Definition 9.15.

Zu d): Nur die Richtung „dann“ (also die Implikation „ \Leftarrow “) erfordert einen Beweis.

Sei $A \subseteq X$ mit $A \cap X^n$ abgeschlossen in X^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei $e \in \mathcal{Z}$ und sei $m := \dim e$.

Nach Bedingung 9.9 b) ist $\bar{e} \subseteq X^m$ und weil $A \cap X^m$ abgeschlossen ist in X^m , ist

$$A \cap \bar{e} = A \cap X^m \cap \bar{e}$$

abgeschlossen in \bar{e} .

Dies gilt für jede Zelle e von X . Aus Bedingung „W“ folgt, dass A abgeschlossen ist in X . ■

Mit CW-Unterkomplexen kann man einige wichtige Operationen ausführen.

Lemma 9.19 *Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei \mathcal{A} eine Familie von CW-Unterräumen von X . Dann sind*

$$A := \bigcap_{Y \in \mathcal{A}} Y \quad \text{und} \quad B := \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$$

auch CW-Unterräume von X .

Beweis. Sei $e \in \mathcal{Z}$ mit $e \cap A \neq \emptyset$. Dann ist $e \cap Y \neq \emptyset$ für jedes $Y \in \mathcal{A}$ und aus Bemerkung 9.16 folgt, dass $\bar{e} \subseteq Y$ für jedes $Y \in \mathcal{A}$ und somit auch $\bar{e} \subseteq A$.

Jetzt können wir umgekehrt aus Bemerkung 9.16 schließen, dass A ein CW-Unterraum von X ist.

Entsprechend, sei $e \in \mathcal{Z}$ mit $e \subseteq B$. Dann gibt es ein $Y \in \mathcal{A}$ mit $e \cap Y \neq \emptyset$ und Bemerkung 9.16 besagt, dass

$$\bar{e} \subseteq Y \subseteq B.$$

Wieder aus Bemerkung 9.16 folgt, dass B ein CW-Unterraum von X ist. ■

Korollar 9.20 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten CW-Unterraum A von X mit $Y \subseteq A$, den wir mit $|Y|$ bezeichnen wollen und den wir die **CW-Hülle** von Y nennen.

Beweis. $|Y|$ ist der Durchschnitt aller CW-Unterräume $A \subseteq X$ mit $Y \subseteq A$. Nach Lemma 9.19 ist dieser Durchschnitt ein CW-Unterraum von X und ist offensichtlich der kleinste, der Y enthält. ■

Lemma 9.21 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex.

- a) Sei A ein CW-Unterraum von X . Dann ist $|A| = A$.
- b) Sei Y eine Teilmenge von X . Dann ist $||Y|| = |Y|$.
- c) Seien $Y \subseteq Z$ Teilmengen von X . Dann ist $|Y| \subseteq |Z|$.
- d) Sei \mathcal{A} eine Familie von Teilmengen von X . Dann ist

$$\left| \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y \right| = \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} |Y|.$$

Beweis. a) ist klar, denn A ist ja selber schon ein CW-Unterraum um A und somit der kleinste.

b) folgt aus a) mit $|Y|$ in der Rolle von A .

c) ist trivial, da $Y \subseteq Z \subseteq |Z| \Rightarrow |Y| \subseteq |Z|$.

d): Sei $B := \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} |Y|$. Nach Lemma 9.19 ist B ein CW-Unterraum von X und er enthält jede Teilmenge $Y \in \mathcal{A}$, also ihre Vereinigung.

Aber jeder CW-Unterraum A , der $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$ enthält, enthält auch $|Y|$ für jedes $Y \in \mathcal{A}$, denn $|Y|$ ist der kleinste CW-Unterraum um Y . Somit ist $B \subseteq A$ und B ist tatsächlich der kleinste CW-Unterraum um $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} Y$. ■

Lemma 9.22 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei Y eine Teilmenge von X .

a)

$$|Y| = \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} |e| \quad (9.1)$$

b) Sei $e \in \mathcal{Z}$. Dann ist $|e| = e \cup |\partial e|$.

c) Sei $e \in \mathcal{Z}$. Dann ist $|e|$ ein endlicher CW-Unterkomplex (enthält also nur endlich viele Zellen).

d) Wenn Y nur endlich viele Zellen von \mathcal{Z} berührt, dann ist $|Y|$ ein endlicher CW-Komplex.

Beweis. Zu a): Wenn $e \in \mathcal{Z}$ und $e \cap Y \neq \emptyset$, so ist $e \subseteq |Y|$ weil $|Y|$ ein CW-Unterraum und somit eine Vereinigung von ganzen Zellen ist.

Also ist

$$Y \subseteq Y' := \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z} \\ e \cap Y \neq \emptyset}} e \subseteq |Y|.$$

Aus Lemma 9.21 folgt, dass $|Y| \subseteq |Y'| \subseteq |Y|$, also $|Y| = |Y'|$. Aber nach Lemma 9.21 d) ist $|Y'|$ gleich der rechten Seite von (9.1).

Zu b): Sei $e \in \mathcal{Z}$. Da $|\partial e|$ ein CW-Unterraum von X ist, ist es eine Vereinigung von Zellen und abgeschlossen. Also ist $e \cup |\partial e|$ eine Vereinigung von Zellen, und da

$$e \cup |\partial e| = e \cup \partial e \cup |\partial e| = \bar{e} \cup |\partial e|,$$

ist $e \cup |\partial e|$ auch abgeschlossen, also ein CW-Unterraum von X .

Da $|e|$ ein e enthaltender CW-Unterraum von X ist, ist $\bar{e} = e \cup \partial e \subseteq |e|$, woraus folgt $e \cup |\partial e| \subseteq |e|$. Weil $|e|$ der kleinste CW-Unterraum um e ist, gilt die Gleichheit.

Zu c) und d): Wir beweisen beide Teile gleichzeitig durch Induktion über $\dim e$ oder über die maximale Dimension der endlich vielen von Y berührten Zellen.

Sobald wir c) für eine bestimmte Dimension n und alle kleineren bewiesen haben, folgt d) für die gleiche maximale Dimension der berührten Zellen mit Hilfe von Teil a).

Wir beginnen mit Dimension 0. Wenn e eine 0-Zelle ist, so bildet e selber schon einen CW-Unterkomplex, mit einer Zelle, also mit endlich vielen Zellen. Also gilt Teil c) für Dimension 0 und somit gilt Teil d), wenn die maximale Dimension der endlich vielen berührten Zellen 0 ist.

Für den Induktionsschritt sei $n > 0$ und wir nehmen an, dass c) und d) gelten, wenn alle berührten Zellen Dimension $< n$ haben.

Sei $e \in \mathcal{Z}$ mit $\dim e = n$. Nach Teil b) ist $|e| = e \cup |\partial e|$. Weil die Zellenzerlegung CW ist, berührt ∂e nur endlich viele Zellen und diese haben Dimension $< n$. Nach der Induktionsannahme für Behauptung d) ist $|\partial e|$ ein endlicher CW-Komplex und $|e| = e \cup |\partial e|$ ist somit auch endlich, denn es hat nur eine Zelle mehr. Das beweist den Induktionsschritt für Behauptung c) und für d) folgt er, wie schon erklärt, gleich mit.

Durch Induktion erhalten wir c) und d) für alle Dimensionen. ■

Hier ist eine neue Variante von Bemerkung 9.16):

Korollar 9.23 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei Y eine Teilmenge von X . Genau dann ist Y ein CW-Unterraum von X , wenn für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ mit $e \cap Y \neq \emptyset$ gilt $|e| \subseteq Y$.

Beweis. Offensichtlich ist Y genau dann ein CW-Unterraum von X , wenn $Y = |Y|$, und dies ist äquivalent zu $|Y| \subseteq Y$, da die Inklusion in der anderen Richtung immer gilt. Aber aus Lemma 9.22 a) folgt, dass $|Y| \subseteq Y$ genau dann, wenn $|e| \subseteq Y$ für jede Zelle e mit $e \cap Y \neq \emptyset$. ■

Lemma 9.24 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei $C \subseteq X$ eine Teilmenge, so dass $C \cap e$ endlich ist für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$. Dann ist C abgeschlossen.

Ferner, als Unterraum von X trägt C die diskrete Topologie.

Beweis. Da nach Bedingung „C“ jede abgeschlossene Zelle \bar{e} von X nur endlich viele Zellen e' berührt, ist $C \cap \bar{e}$ endlich für jedes $e \in \mathcal{Z}$. Aber endliche Teilmengen eines Hausdorffraumes sind immer abgeschlossen.

Also ist $C \cap \bar{e}$ abgeschlossen für jedes $e \in \mathcal{Z}$, und nach Bedingung „W“ ist C abgeschlossen.

Da aber auch jede Teilmenge von C mit jeder Zelle endlichen Durchschnitt hat, gilt der gleiche Schluss auch für jede Teilmenge von C . Das bedeutet, dass jede Teilmenge von C abgeschlossen ist in X und somit auch in C . In anderen Worten, C trägt die diskrete Topologie. ■

Lemma 9.25 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- a) C ist kompakt;
- b) C berührt nur endlich viele Zellen;
- c) $|C|$ ist ein endlicher CW-Unterkomplex von X ;
- d) C ist in einem endlichen CW-Unterkomplex von X enthalten.

Beweis. a) \Rightarrow b): Wähle in jeder von C berührten Zelle e einen Punkt

$$x_e \in C \cap e.$$

Sei K die Menge der so gewählten Punkte.

Da K aus jeder Zelle höchstens einen Punkt enthält (denn verschiedene Zellen sind disjunkt), ist K abgeschlossen und diskret nach Lemma 9.24.

K ist insbesondere eine abgeschlossene Teilmenge von C und wenn C kompakt ist, dann ist auch K kompakt. Aber die einzelnen Punkte von K

bilden eine offene Überdeckung von K (wegen der diskreten Topologie), die keine echte Teilüberdeckung besitzt. Wenn C und somit K kompakt ist, muss diese Überdeckung selber also schon endlich sein, d.h., K ist endlich und C berührt nur endlich viele Zellen von X .

b) \Rightarrow c): Dies ist die Aussage von Lemma 9.22 d).

c) \Rightarrow d): Klar, denn $C \subseteq |C|$.

d) \Rightarrow a): Sei Y ein C enthaltender CW-Unterraum von X mit endlich vielen Zellen e_1, \dots, e_k . Da

$$Y = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$$

und da jede abgeschlossene Zelle \bar{e}_i als stetiges Bild von einem D^n kompakt ist, ist Y kompakt. Weil C eine abgeschlossene Teilmenge von Y ist, ist auch C kompakt. ■

Korollar 9.26 *Jeder CW-Raum mit nur endlich vielen Zellen ist kompakt.*

Korollar 9.27 *Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und sei A eine kompakte Teilmenge von X . Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq X^n$.*

Beweis. Nach Lemma 9.25 b) berührt A nur endlich viele Zellen von X , und wenn n die größte Dimension dieser Zellen ist, so ist $A \subseteq X^n$. ■

Das Wissen um kompakte Teilmengen eines CW-Raumes erlaubt uns noch, einen Satz über Produkte von CW-Komplexen zu beweisen:

Satz 9.28 *Seien (X, \mathcal{Z}) und (Y, \mathcal{Z}') CW-Komplexe. Dann bildet*

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{e \times e' \mid e \in \mathcal{Z} \text{ und } e' \in \mathcal{Z}'\}$$

eine Zellenzerlegung von $X \times Y$.

Wenn X oder Y lokalkompakt ist, dann ist $\tilde{\mathcal{Z}}$ eine CW-Zerlegung.

Beweis. Für jede m -Zelle $e \in \mathcal{Z}$ und jede n -Zelle $e' \in \mathcal{Z}'$ ist

$$e \times e' \cong E^m \times E^n \cong \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n} \cong E^{m+n}$$

eine $m+n$ -Zelle in $X \times Y$, und offensichtlich ist $X \times Y$ die disjunkte Vereinigung aller solcher Produktzellen, so dass $\tilde{\mathcal{Z}}$ eine Zellenzerlegung von $X \times Y$ ist.

Diese Zellenzerlegung hat ohne weitere Voraussetzungen fast alle Eigenschaften einer CW-Zerlegung. Nämlich, wenn $\Phi_e: D^m \rightarrow X$ eine charakteristische Abbildung für die m -Zelle $e \in \mathcal{Z}$ ist und wenn $\Phi_{e'}: D^n \rightarrow Y$

eine charakteristische Abbildung für die n -Zelle $e' \in \mathcal{Z}'$ ist, so gibt es einen Homöomorphismus $\varphi: D^{m+n} \longrightarrow D^m \times D^n$, der E^{m+n} homöomorph auf $E^m \times E^n$ abbildet und $S^{m+n-1} = \partial D^{m+n}$ homöomorph auf $\partial(D^m \times D^n) = (S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1})$ abbildet, und wie man leicht nachprüft, ist $(\Phi_e \times \Phi_{e'}) \circ \varphi$ eine charakteristische Abbildung für $e \times e'$.

$$((\Phi_e \times \Phi_{e'}) \circ \varphi)(S^{m+n-1}) = (\Phi_e \times \Phi_{e'})((S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1}))$$

ist enthalten in der Vereinigung der Produkte der endlich vielen Zellen von \mathcal{Z} von Dimension $< m$, die ∂e trifft, mit den endlich vielen Zellen von \mathcal{Z}' von Dimension $\leq n$, die \bar{e}' trifft, und der Produkte der endlich vielen Zellen von \mathcal{Z} von Dimension $\leq m$, die \bar{e} trifft, mit den endlich vielen Zellen von \mathcal{Z}' von Dimension $< n$, die $\partial e'$ trifft.

Das ist insgesamt eine Vereinigung von endlich vielen Zellen aus $\tilde{\mathcal{Z}}$, jeweils von Dimension $< m + n$, und es folgt, dass der Rand von jeder $k := m + n$ -Zelle von $\tilde{\mathcal{Z}}$ nur endlich vielen Zellen trifft (so dass Bedingung „C“ gilt), und diese haben alle Dimension $< k$ (so dass 9.9 b) gilt).

Es bleibt nur noch Bedingung „W“ zu prüfen, und dafür brauchen wir die Voraussetzung, dass X oder Y lokalkompakt ist. Nehmen wir an, dass Y lokalkompakt ist (der Beweis im anderen Fall geht ganz analog).

Sei $A \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge, so dass $A \cap (\bar{e} \times \bar{e}')$ abgeschlossen ist in

$$\bar{e} \times \bar{e}' = \overline{e \times e'}$$

für jedes $e \in \mathcal{Z}$ und jedes $e' \in \mathcal{Z}'$. Wir werden zeigen, dass A abgeschlossen ist, und das wird beweisen, dass $X \times Y$ die schwache Topologie bezüglich der Zellenzerlegung $\tilde{\mathcal{Z}}$ besitzt.

Sei $(x, y) \notin A$. Weil Y lokal kompakt ist, gibt es eine offene Menge $W \subseteq Y$ mit $y \in W$ und \bar{W} kompakt. Nach Lemma 9.25 d) ist \bar{W} und somit auch W in einem endlichen CW-Unterkomplex Y' von Y enthalten.

Sei

$$C := \{y' \in Y' \mid (x, y') \in A\}.$$

Da $\{x\}$ kompakt ist, gibt es auch einen endlichen CW-Unterkomplex $X' \subseteq X$ mit $x \in X'$.

Das Produkt $X' \times Y'$ hat eine endliche Zellenzerlegung durch Produktzellen, die nach Bemerkung 9.11 automatisch Bedingungen „C“ und „W“ erfüllt. Aus Bedingung „W“ folgt, dass $A \cap (X' \times Y')$ abgeschlossen ist in $X' \times Y'$. Die Abbildung $i_x: Y' \longrightarrow X' \times Y'$ mit $i(y') := (x, y')$ ist stetig und deshalb ist $C = i_x^{-1}(A)$ abgeschlossen in Y' .

Y' ist als endlicher CW-Raum kompakt und Hausdorffsch und deshalb normal. Da y zu der offenen Menge $Y' \setminus C$ gehört, gibt es eine offene Teilmenge $V' \subseteq Y'$ mit $y \in V' \subseteq \bar{V}' \subseteq Y' \setminus C$.

Sei $V := V' \cap W$. Diese Menge ist offen in $W \subseteq Y'$, weil V' offen in Y' ist, aber weil W offen in Y ist, ist V auch offen in Y . Ferner $\bar{V} \subseteq \bar{V}' \subseteq Y'$ und $\bar{V} \cap C = \emptyset$.

Sei

$$B := \{x' \in X \mid \text{es gibt ein } y' \in \bar{V} \text{ mit } (x', y') \in A\}.$$

Für jede Zelle e von X ist $|e|$ ein endlicher CW-Unterkomplex von X nach Lemma 9.22 c). Der Unterraum $|e| \times Y' \subseteq X \times Y$ hat also eine endliche Zellenzerlegung durch Produktzellen, die nach Bemerkung 9.11 und nach den am Anfang des jetzigen Beweises nachgeprüften Eigenschaften automatisch eine CW-Zerlegung ist. Sie erfüllt insbesondere Bedingung „W“, und deshalb ist $A \cap (|e| \times Y')$ abgeschlossen in $|e| \times Y'$.

Da $\bar{e} \times \bar{V}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $|e| \times Y'$ ist, ist auch

$$A \cap (|e| \times Y') \cap (\bar{e} \times \bar{V}) = A \cap (\bar{e} \times \bar{V})$$

abgeschlossen in $|e| \times Y'$, welcher ein endlicher und somit kompakter CW-Komplex ist. Also ist auch $A \cap (\bar{e} \times \bar{V})$ kompakt

Offenbar ist

$$B \cap \bar{e} = \pi_1(A \cap (\bar{e} \times \bar{V}))$$

(wo π_1 die Projektion auf den ersten Faktor ist) und somit ist $B \cap \bar{e}$ als stetiges Bild einer kompakten Menge auch kompakt und somit abgeschlossen in \bar{e} . Das gilt für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$; also ist B abgeschlossen in X nach Bedingung „W“.

Wir haben $x \notin B$ weil sonst $\bar{V} \cap C \neq \emptyset$. Also ist $U := X \setminus B$ eine offene Umgebung von x in X und V ist offen um $y \in Y$. Ferner $(U \times V) \cap A = \emptyset$, weil für X' mit $(\{x'\} \times V) \cap A \neq \emptyset$ gilt, nach Definition, dass $x' \in B$, also $x' \notin U$.

Da wir eine solche von A disjunkte offene Menge $U \times V$ um jedes $(x, y) \notin A$ finden können, ist $(X \times Y) \setminus A$ offen und A abgeschlossen in $X \times Y$.

Wir haben Bedingung „W“ bewiesen und $\tilde{\mathcal{Z}}$ ist eine CW-Zerlegung. ■

Beispiel 9.29 Die Voraussetzung in Satz 9.28, dass einer der beiden Faktoren lokalkompakt sein muss, damit die Produktzellenzerlegung eines Produktes von CW-Räumen wieder eine CW-Zerlegung für die Produkttopologie ist, ist wesentlich. Ohne diese Voraussetzung gilt der Satz nämlich nicht.

Ohne auf Details und Begründungen einzugehen geben wir hier ein Gegenbeispiel.

Sei M eine mit der diskreten Topologie versehene beliebige Menge. Wir konstruieren daraus einen CW-Raum $\Xi(M) := (M \times I)/(M \times \{0\})$.

Die Bilder im Quotienten der Punkte $(m, 1)$ für $m \in M$ sind 0-Zellen, die wir x_m nennen wollen, der Punkt $*$, zu dem $M \times \{0\}$ identifiziert wird, ist eine weitere 0-Zelle, und die Bilder im Quotienten der offenen Intervalle $\{m\} \times (0, 1)$ für $m \in M$ sind 1-Zellen e_m .

Man prüft leicht nach, dass der Quotientenraum Hausdorffsch ist und dass diese Zellenzerlegung eine CW-Zerlegung ist.

Wenn M unendlich ist, dann ist $\Xi(M)$ nicht lokalkompakt, denn jede Umgebung des Punktes $*$ trifft alle 1-Zellen und kann nicht in einem endlichen Unterkomplex enthalten sein. Folglich hat $*$ keine kompakte Umgebung.

Wir setzen nun $X := \Xi(\mathbf{N})$ und $Y := \Xi(\mathbf{N}^{\mathbf{N}})$ (wo $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ die Menge aller Folgen von natürlichen Zahlen ist). Der Punkt $0 \in I$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis $\{U_n := [0, \frac{1}{n+1}) \mid n \in \mathbf{N}\}$, so dass die Elemente $f \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ benutzt werden können, um eine Umgebungsbasis $\{V_f\}$ von $*$ in X abzuzählen (V_f trifft die abgeschlossenen 1-Zellen \bar{e}_n von X jeweils in $\Phi_{e_n}(U_{f(n)})$).

Man kann eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ konstruieren, die alle 0- und 1-Zellen der Produktzellenzerlegung ganz enthält und jede abgeschlossene 2-Zelle $\bar{e}_n \times \bar{e}_f$ in einer relativ-offenen Teilmenge trifft, aber für $f \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ und für $n \in \mathbf{N}$ das Bild von $U_{f(n)} \times U_n$ in der offenen 2-Zelle $e_n \times e_f$ nicht enthält. Diese Menge W kann kein Produkt $U \times V$ von offenen Teilmengen von X und Y umfassen und kann somit nicht offen sein in der Produkttopologie auf $X \times Y$. Die Details werden dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Also ist die schwache Topologie auf $X \times Y$ nicht die Produkttopologie und die Produktzellenzerlegung ist keine CW-Zerlegung des Produktraumes.

Wir wollen jetzt den Aufbau eines CW-Raumes X als die Vereinigung seiner Skelette in Bezug auf die Homologie näher untersuchen. Am Ende werden wir daraus eine vereinfachte Berechnungsmöglichkeit für die Homologie gewinnen, mit Hilfe eines neuen Kettenkomplexes, der wesentlich kleiner als der singuläre sein wird.

Um dabei gleich von Anfang an die relative Homologie mit berücksichtigen zu können, formulieren wir folgende Definitionen für CW-Komplexe nicht in ihrer einfachsten Form, sondern in einer Variante, in der ein vorgegebener CW-Unterkomplex A von allen Konstruktionsdetails „ausgenommen“ wird. Die absolute, einfache Version erhält man mit, in dem man $A = \emptyset$ setzt.

Lemma und Definition 9.30 Sei $n \in \mathbf{N}$. Wir bezeichnen die offene ge-
lochte n -dimensionale Einheitsscheibe $E^n \setminus \{0\}$ mit E_*^n . Es gilt

$$H_k(E^n, E_*^n) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.2)$$

Beweis. Sei $D_{1/2}^n := \{x \in E^n \mid |x| \leq \frac{1}{2}\}$ und sei $S_{1/2}^{n-1} := \{x \in E^n \mid |x| = \frac{1}{2}\}$.

Offensichtlich ist $D_{1/2}^n$ ein starker Deformationsretrakt von E^n und $S_{1/2}^{n-1}$ ist ein starker Deformationsretrakt von E_*^n . Ferner $(D_{1/2}^n, S_{1/2}^{n-1}) \cong (D^n, S^{n-1})$.

Daraus folgt

$$H_*(E^n, E_*^n) \cong H_*(D_{1/2}^n, S_{1/2}^{n-1}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}),$$

und $H_*(D^n, S^{n-1})$ ist nach Beispiel 8.4 b) und Satz 8.5 wie in (9.2). ■

Definition 9.31 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex. Außerdem, sei (A, \mathcal{Z}_A) ein CW-Unterkomplex von (X, \mathcal{Z}) .

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$X_A^n := X^n \cup A.$$

Wir nennen dies das **relative n -Skelett von X modulo A** .

Für jede n -Zelle $e \in \mathcal{Z}'_A := \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_A$, also für jede n -Zelle, die nicht in A liegt, sei Φ_e ihre charakteristische Abbildung und sei

$$0_e := \Phi_e(0)$$

der „Mittelpunkt“ der Zelle e . Sei $e_* := e \setminus \{0_e\} \cong E_*^n$.

Wir setzen

$$Z_A^n := \{0_e \mid e \in \mathcal{Z}'_A \text{ und } \dim e = n\}$$

und wir setzen

$$\tilde{X}_A^n := X_A^n \setminus Z_A^n = X_A^{n-1} \cup \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e_*.$$

Wir nennen \tilde{X}_A^n das **gelochte relative n -Skelett von X modulo A** .

Lemma 9.32 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex (A, \mathcal{Z}_A) .

a) X_A^{n-1} ist ein starker Deformationsretrakt von \tilde{X}_A^n .

b) $(X_A^n, \tilde{X}_A^n, X_A^{n-1})$ ist ein Ausschneidungstripel.

c) Wenn $k \neq n$, so ist

$$H_k(X_A^n, X_A^{n-1}) = \{0\}. \quad (9.3)$$

d)

$$H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \cong \bigoplus_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} \mathbf{Z}. \quad (9.4)$$

Wenn e eine n -Zelle in \mathcal{Z}'_A ist und wenn $\Phi_e: D^n \longrightarrow X$ die charakteristische Abbildung der Zelle e ist, so ist

$$H_n(\Phi_e): H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \quad (9.5)$$

ein Isomorphismus von $H_n(D^n, S^{n-1}) = \mathbf{Z}$ auf den e -ten Summanden \mathbf{Z} in (9.4).

Beweis. Zu a): Für jede n -Zelle $e \in \mathcal{Z}'_A$ ist $\Phi_e \times \text{id}_I: D^n \times I \longrightarrow \bar{e} \times I$ identifizierend, denn sie ist eine stetige surjektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffschen Raum. (Wenn eine Teilmenge von $\bar{e} \times I$ ein abgeschlossenes Urbild hat, ist dieses Urbild kompakt, somit ist die Teilmenge selber als Bild ihres Urbildes auch kompakt und deshalb abgeschlossen. Das zeigt, dass $\bar{e} \times I$ die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung $\Phi_e \times \text{id}_I$ trägt.)

Ferner, Φ_e bildet E^n homöomorph auf e ab und $\Phi_e^{-1}(e) = E^n$.

Hieraus folgt, dass $\Phi_e^{-1}(\{0_e\}) = \{0\}$, also ist $(\Phi_e \times \text{id}_I)^{-1}(\{0_e\} \times I) = \{0\} \times I$, und weil diese Mengen abgeschlossen sind ist auch die Abbildung

$$\Phi_e \times \text{id}_I: (D^n \setminus \{0\}) \times I \longrightarrow (\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I = (\partial e \cup e_*) \times I$$

identifizierend.

Wir wissen aus Beispiel 2.9 c), dass S^{n-1} ein starker Deformationsretrakt von $D^n \setminus \{0\}$ ist. Sei $h: (D^n \setminus \{0\}) \times I \longrightarrow D^n$ eine Homotopie rel S^{n-1} von der Inklusion $i: D^n \setminus \{0\} \longrightarrow D^n$ zu einer Retraktion $p: D^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$.

Für jede n -Zelle $e \in \mathcal{Z}'_A$ können wir eine Homotopie $H_e: (\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I \rightarrow \bar{e}$ definieren, so dass

$$H_e \circ (\Phi_e \times \text{id}_I) = \Phi_e \circ h. \quad (9.6)$$

Nämlich, auf $e_* \times I$ gibt es eine eindeutige solche Abbildung H_e , weil $\Phi_e \times \text{id}_I$ ein Homöomorphismus $E_*^n \times I \longrightarrow e_* \times I$ ist; wir können also (9.6) auflösen und auf $e_* \times I$ können wir $H_e := \Phi_e \circ h \circ (\Phi_e \times \text{id}_I)^{-1}$ setzen.

Für $(x, t) \in \partial e \times I$ setzen wir $H_e(x, t) := x$. Auch dieser Teil von H_e erfüllt (9.6), weil $\partial e = \Phi_e(S^{n-1})$ und weil h eine Homotopie rel S^{n-1} ist.

Wir erhalten also insgesamt eine wohldefinierte Abbildung H_e auf ganz $(\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I$, die (9.6) erfüllt, und diese Abbildung ist stetig, weil die rechte Seite von (9.6) stetig ist und weil $\Phi_e \times \text{id}_I$ in (9.6) identifizierend ist. H_e ist also tatsächlich eine Homotopie.

Aus (9.6) und den Eigenschaften von h prüft man leicht nach, dass $(H_e)_0$ die Identität auf $\bar{e} \setminus \{0_e\}$ ist und dass $(H_e)_1$ eine Retraktion von $\bar{e} \setminus \{0_e\}$ auf ∂e ist. Aus der Definition von H_e folgt, dass H_e eine Homotopie rel ∂e ist.

Jetzt definieren wir eine Homotopie

$$H: \tilde{X}_A^n \times I \longrightarrow \tilde{X}_A^n,$$

in dem wir auf $(\bar{e} \setminus \{0_e\}) \times I$ für jede n -Zelle $e \in \mathcal{Z}'_A$ die Homotopie H als H_e definieren, und sie für $(x, t) \in X_A^{n-1} \times I$ durch die Vorschrift $H(x, t) := x$ definieren.

Weil die H_e Homotopien rel ∂e sind, und weil die offenen punktierten Zellen e_* disjunkt sind, stimmen all die Teildefinitionen an gemeinsamen Stellen überein und H ist eine wohldefinierte Abbildung auf ganz $\tilde{X}_A^n \times I$. Sie ist stetig, weil die Teildefinitionen jeweils auf einer abgeschlossenen Teilmenge von \tilde{X}_A^n erklärt und dort stetig sind.

Nach der Definition von H und wegen der Eigenschaften der H_e ist H eine Homotopie rel X_A^{n-1} von $\text{id}_{\tilde{X}_A^n}$ zu einer Retraktion von \tilde{X}_A^n auf X_A^{n-1} .

Zu b): Die Behauptung ist klar nach Satz 7.55, denn X_A^{n-1} ist eine abgeschlossene Teilmenge von X_A^n und ist enthalten im Innern von \tilde{X}_A^n , da \tilde{X}_A^n offen ist (das Komplement Z_A^n von \tilde{X}_A^n ist nach Lemma 9.24 nämlich abgeschlossen, da es jede Zelle in höchstens einem Punkt trifft).

Zu c) und d): Nach Teil a) ist $X_A^{n-1} \simeq \tilde{X}_A^n$. Mit dem Homotopieinvarianzlemma 7.30 b) und mit Ausschneidung erhalten wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_k(X_A^n, X_A^{n-1}) &\cong H_k(X_A^n, \tilde{X}_A^n) \cong H_k(X_A^n \setminus X_A^{n-1}, \tilde{X}_A^n \setminus X_A^{n-1}) \\ &= H_k\left(\bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e, \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} e_*\right) \end{aligned} \quad (9.7a)$$

$$\cong \bigoplus_{\substack{e \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim e = n}} H_k(e, e_*), \quad (9.7b)$$

wobei Gleichung (9.7a) gilt, weil $X_A^n \setminus X_A^{n-1}$ die Vereinigung der n -Zellen in \mathcal{Z}'_A ist, und (9.7b) daraus folgt, weil diese Zellen disjunkt und offen in $X_A^n \setminus X_A^{n-1}$ sind und schon die singulären Kettengruppen ihrer Vereinigung die direkte Summe der singulären Kettengruppen der einzelnen Zellen sind (man vergleiche dazu Bemerkung 8.1; die entsprechende Aussage für die relativen Kettengruppen $C_k(e, e_*)$ und somit für die relative Homologie erhält man ähnlich wie in Lemma 6.34 d)).

Jeder Summand in (9.7b) ist \mathbf{Z} , wenn $k = n$, und $\{0\}$ sonst.

Ein Isomorphismus von \mathbf{Z} auf den e -ten Summanden \mathbf{Z} in (9.4) wird gegeben durch $H_n(\Phi_e): H_n(E^n, E_*) \longrightarrow H_n(e, e_*)$, denn $H_n(E^n, E_*) = \mathbf{Z}$ nach Lemma 9.30 und $\Phi_e: (E^n, E_*) \longrightarrow (e, e_*)$ ist ein Homöomorphismus. Aber wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(E^n, E_*) & \xrightarrow{\cong} & H_n(D^n, D^n \setminus \{0\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(D^n, S^{n-1}) \\
 H_n(\Phi_e) \downarrow \cong & & H_n(\Phi_e) \downarrow & & \downarrow H_n(\Phi_e) \\
 H_n(e, e_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X_A^n, \tilde{X}_A^n) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X_A^n, X_A^{n-1})
 \end{array} \quad (9.8)$$

wo die waagerechten Pfeile durch Inklusionen induziert werden und einige von ihnen, wie auch der linke senkrechte Pfeil, Isomorphismen sind, weil sie durch Homotopieäquivalenzen induziert werden.

Die durch die Inklusion der Zelle e nach X_A^n induzierte Abbildung i_* unten links ist algebraisch die Inklusion des e -ten Summanden in die direkte Summe (9.7b). Bis auf die natürlichen Isomorphismen, die im Diagramm sichtbar sind, ist i_* aber nichts anderes als der rechte senkrechte Pfeil $H_n(\Phi_e): H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$. Insbesondere ist dieser Pfeil, die Abbildung (9.5), eine Inklusion von \mathbf{Z} als den e -ten Summanden von (9.7b). ■

Definition 9.33 Sei X ein topologischer Raum. Eine **Filtrierung** von X ist eine durch die ganzen Zahlen indizierte Folge $\mathcal{F} := \{X_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ von Unterräumen von X , so dass $X^n \subseteq X^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbf{Z}$.

Eine Filtrierung $\mathcal{F} = \{X^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ heißt **zellulär**, wenn

- a) für jedes $n \in \mathbf{Z}$ gilt $H_k(X^n, X^{n-1}) = \{0\}$ für alle $k \neq n$, und
- b) für jeden singulären Simplex σ in X gibt es ein $n \in \mathbf{Z}$ mit $\text{Bild } \sigma \subseteq X^n$.

Ein **zellulärer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{F}) , wo X ein topologischer Raum ist und \mathcal{F} eine zelluläre Filtrierung von X ist. Oft sprechen wir einfach von dem „zellulären Raum X ,“ wenn die Filtrierung \mathcal{F} fest vorgegeben ist oder wir sie nicht explizit nennen müssen oder wollen.

Sind (X, \mathcal{F}) und (Y, \mathcal{F}') zwei zelluläre Räume, so nennen wir eine stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ **zellulär**, wenn für jedes $n \in \mathbf{Z}$ gilt $f(X^n) \subseteq Y^n$.

Bemerkung 9.34 Bedingung 9.33 b) impliziert, dass eine zelluläre Filtrierung $\{X^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ eines Raumes X den ganzen Raum ausschöpft, d.h., dass

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} X^n.$$

Denn jeder einzelne Punkt von X ist ein 0-Simplex und liegt somit in einem der X^n .

Beispiel 9.35 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex (A, \mathcal{Z}_A) . Dann bilden die Unterkomplexe X_A^n für $n \in \mathbf{Z}$ eine zelluläre Filtrierung \mathcal{F}_A von X .

Bedingung 9.33 a) ist genau die Aussage von Lemma 9.32 c), und Bedingung 9.33 b) folgt aus Korollar 9.27, denn für jeden singulären m -Simplex σ ist $\sigma(\Delta_m)$ eine kompakte Teilmenge von X und somit gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ mit $\sigma(\Delta_m) \subseteq X^n \subseteq X_A^n$.

In der Filtrierung \mathcal{F}_A beachte man, dass $X_A^n = A$ für alle $n < 0$.

Ist (Y, B) ein weiterer CW-Raum und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so ist für f der Begriff, zellulär zu sein als Abbildung zwischen Zellenkomplexen im Sinne von Definition 9.4, nicht das Gleiche, wie der Begriff, zellulär zu sein als Abbildung zwischen zellulären Räumen $(X, \mathcal{F}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_B)$. Nur wenn $A = B = \emptyset$ stimmen beide Begriffe überein.

Allerdings, wenn f zellulär ist als Abbildung zwischen Zellenkomplexen und wenn f eine Abbildung von Raumpaaren $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist, dann ist f auch zellulär als Abbildung der zellulären Räume $(X, \mathcal{F}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_B)$.

Die Eigenschaften einer zellulären Filtrierung sind so gewählt, dass jede Homologiegruppe des ganzen Raumes schon in einer genügend großen Stufe X^n der Filtrierung berechnet werden kann.

Bevor wir das näher erläutern, brauchen wir eine kleine Verallgemeinerung des 5-er Lemmas:

Lemma 9.36 Sei

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen, in dem die waagerechten Reihen exakt sind.

- a) Wenn α surjektiv ist und β und δ injektiv sind, dann ist auch γ injektiv.
- b) Wenn α und γ surjektiv sind und δ injektiv ist, dann ist auch β surjektiv.

Beweis. Der Beweis wurde als Beweis des 5-er Lemmas (Lemma 7.10) schon durchgeführt, an dessen Ende sogar darauf hingewiesen wurde, dass unter den

hier genannten schwächeren Voraussetzungen die Injektivität und Surjektivität der mittleren senkrechten Abbildung im damaligen Diagramm getrennt bewiesen werden können.

Den Beweis von Teil a) kann man wörtlich übernehmen aus dem Teil des Beweises des 5-er Lemmas, in dem die Injektivität von γ bewiesen wird. Unser jetziges Diagramm mit vier Gruppen in jeder Zeile ist der unveränderte linke Teil des Diagramms für das 5-er Lemma.

Für Teil b) muss man unser jetziges „4-er“ Diagramm als den rechten Teil des Diagramms für das 5-er Lemma sehen, und nur die Namen der Gruppen und Homomorphismen haben sich geändert, in dem jeder Buchstabe in den Bezeichnungen für das 5-er Lemma durch seinen Vorgänger im Alphabet ersetzt wurde. Mit dieser Übersetzung kann man auch für die Surjektivität den Beweis des 5-er Lemmas wörtlich übernehmen. ■

Satz 9.37 Sei (X, \mathcal{F}) ein zellulärer Raum mit $\mathcal{F} = \{X^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ sei i_n die Inklusion $X^n \rightarrow X$, und für jedes $m \leq n \in \mathbf{Z}$ sei $i_{m,n}$ die Inklusion $X^m \rightarrow X^n$ und sei $j_{m,n}$ die Inklusion $(X, X^m) \rightarrow (X, X^n)$.

Für jede Teilmenge $C \subseteq X^n$ sei i_n^C die Inklusion $(X^n, C) \rightarrow (X, C)$.

Sei $k \in \mathbf{N}$.

- a) Für $k > n$ ist $H_k(X^n)$ unabhängig von n , d.h., wenn auch $m < k$, so ist $H_k(X^n) \cong H_k(X^m)$.
- b) Auch für $k < n$ ist $H_k(X^n)$ unabhängig von n .
- c) Für $k \leq n$ ist $H_k(X, X^n) = \{0\}$.
- d) Für n mit $k > n + 1$ oder mit $n < 0$ ist $H_k(X, X^n)$ unabhängig von n .
- e) $H_k(i_n): H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ ist ein Isomorphismus für $k < n$ und ist surjektiv für $k = n$.
- f) $H_k(i_{m,n}): H_k(X^m) \rightarrow H_k(X^n)$ ist ein Isomorphismus für $k < m$ und für $k > n$, ist surjektiv für $k = m$ und ist injektiv für $k = n$.
- g) $H_k(i_n^C): H_k(X^n, C) \rightarrow H_k(X, C)$ ist ein Isomorphismus wenn $k < n$.
- h) Die Abbildung $H_k(j_{m,n}): H_k(X, X^m) \rightarrow H_k(X, X^n)$ ist ein Isomorphismus für $k > n + 1$, aber auch wenn $m \leq n < 0$, und $H_k(j_{m,n})$ ist injektiv, wenn $k = n + 1$.

Beweis. Wir beginnen mit Teil f).

Sei $r \in \mathbf{Z}$. Um die Notation ein wenig zu vereinfachen schreiben wir h_r als Kürzel für $i_{r-1,r}$.

In der langen exakten Homologiefolge

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(X^r, X^{r-1}) \rightarrow H_k(X^{r-1}) \xrightarrow{H_k(h_r)} H_k(X^r) \rightarrow H_k(X^r, X^{r-1}) \rightarrow \cdots$$

des Paares (X^r, X^{r-1}) sind nach Bedingung 9.33 a) die relativen Gruppen $H_{k+1}(X^r, X^{r-1}) = \{0\}$ außer für $k+1 = r$, und $H_k(X^r, X^{r-1}) = \{0\}$ außer für $k = r$.

Hieraus folgt, dass $H_k(h_r)$ surjektiv ist für $r = k+1$, injektiv ist für $r = k$, und sogar ein Isomorphismus ist für alle anderen r und k .

Offensichtlich gilt für alle $m < n \in \mathbf{Z}$, dass

$$i_{m,n} = i_{n-1,n} \circ i_{n-2,n-1} \circ \cdots \circ i_{m,m+1} = h_n \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ h_{m+1}$$

und somit gilt für jedes k , dass

$$H_k(i_{m,n}) = H_k(h_n) \circ H_k(h_{n-1}) \circ \cdots \circ H_k(h_{m+1}). \quad (9.9)$$

Die Faktoren $H_k(h_p)$ in (9.9) sind alle Isomorphismen, wenn unter den Indizes p mit $m+1 \leq p \leq n$ weder k noch $k+1$ vorkommt, also wenn $k+1 < m+1$ (d.h., wenn $k < m$) oder wenn $k > n$. In diesem Fall ist $H_k(i_{m,n})$ ein Isomorphismus.

Wenn bis auf eine Ausnahme alle Faktoren $H_k(h_p)$ in (9.9) Isomorphismen sind, dann können wir über die Verknüpfung immer noch etwas sagen. Diese Situation tritt auf, wenn $k = m$ (dann ist $k < k+1 = m+1$ und $H_k(h_{m+1})$ ist surjektiv, die anderen Faktoren sind Isomorphismen, und $H_k(i_{m,n})$ ist also surjektiv) oder wenn $k = n$, in welchem Fall $H_k(h_n)$ injektiv ist, die anderen Faktoren $H_k(h_p)$ sind Isomorphismen weil $p < n = k < k+1$, und $H_k(i_{m,n})$ ist somit injektiv.

Damit haben wir f) bewiesen. Man beachte, dass die Aussage auch für $m = n$ richtig ist (dann ist $i_{m,n} = \text{id}_{X^m}$).

Als Nächstes beweisen wir e).

Sei $k \leq n$. Sei $\gamma \in H_k(X)$ und sei $c \in C_k(X)$ ein singulärer Zyklus mit $\gamma = [c]$.

Aus Bedingung 9.33 b) folgt, dass es ein $m \in \mathbf{Z}$ gibt (das wir natürlich beliebig groß wählen können), so dass jeder singuläre Simplex in c sein Bild in X^m hat. Wir wählen ein solches $m \geq n$.

Wir schreiben c' für die Kette c aufgefasst als Kette in $C_k(X^m)$, und wir haben $c = (i_m)_\#(c')$. Natürlich hat c auch in $C_k(X^m)$ den Rand 0, d.h., auch c' ist ein Zyklus. Wir haben

$$\gamma = [c] = [(i_m)_\#(c')] = H_k(i_m)([c'])$$

und insbesondere ist $\gamma \in \text{Bild}(H_k(i_m))$.

Dieses m kann von der Wahl von c abhängen, aber nach unserer Wahl gilt $m \geq n$. Offensichtlich ist $i_n = i_m \circ i_{n,m}$, also gilt auch

$$H_k(i_n) = H_k(i_m) \circ H_k(i_{n,m}), \quad (9.10)$$

und da $H_k(i_{n,m})$ nach Teil f) surjektiv ist weil $k \leq n$, ist $\text{Bild } H_k(i_n) = \text{Bild } H_k(i_m)$ und insbesondere $\gamma \in \text{Bild}(H_k(i_n))$.

Dies gilt für jedes $\gamma \in H_k(X)$, also ist $H_k(i_n)$ surjektiv wenn $k \leq n$.

Nun sei $k < n$ und sei $\gamma \in H_k(X^n)$ mit $H_k(i_n)(\gamma) = 0$. Sei c ein Zyklus in $C_k(X^n)$ mit $\gamma = [c]$.

$H_k(i_n)(\gamma) = 0$ bedeutet, dass $(i_n)_\#(c)$ ein Rand ist in $C_k(X)$. Es gibt also eine Kette $b \in C_k(X)$ mit $(i_n)_\#(c) = \partial b$.

Wieder folgt aus Bedingung 9.33 b), dass es ein $m \in \mathbf{Z}$ gibt (das wir natürlich beliebig groß und insbesondere $> n$ wählen können), so dass jeder singuläre Simplex in b sein Bild in X^m hat.

Wir schreiben b' für die Kette b aufgefasst als Kette in $C_k(X^m)$. Der Rand von b wird in $C_*(X^m)$ genauso berechnet, wie in $C_*(X)$, so dass

$$\partial b' = (i_{n,m})_\#(c)$$

(eine formale Begründung dieser Tatsache beruht darauf, dass $i_n = i_m \circ i_{n,m}$ und dass $(i_m)_\#$ eine injektive Kettenabbildung ist, injektiv deshalb, weil sie von einer Inklusion induziert wird).

Wir haben also $H_k(i_{n,m})(\gamma) = [(i_{n,m})_\#(c)] = 0$ und weil $H_k(i_{n,m})$ nach Teil f) ein Isomorphismus ist (denn $k < n$), ist $\gamma = 0$. Dies zeigt, dass $H_k(i_n)$ injektiv ist für $n > k$, also ein Isomorphismus ist, da wir schon wussten, dass es surjektiv ist.

Dies beweist Teil e).

Teile a) und b) folgen sofort aus Teil f), denn wenn $m \leq n < k$ oder wenn $k < m \leq n$, so ist $H_k(i_{m,n})$ ein Isomorphismus $H_k(X^m) \rightarrow H_k(X^n)$, und wenn $n < m$, so ist $H_k(i_{n,m})$ ein Isomorphismus $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^m)$.

Teil c) folgt aus Teil e), denn wenn $k \leq n$, so enthält die lange exakte Homologiefolge des Paares (X, X^n) den Abschnitt

$$H_k(X^n) \xrightarrow{H_k(i_n)} H_k(X) \rightarrow H_k(X, X^n) \rightarrow H_{k-1}(X^n) \xrightarrow{H_{k-1}(i_n)} H_{k-1}(X),$$

in dem $H_k(i_n)$ auf jeden Fall surjektiv und $H_{k-1}(i_n)$ ein Isomorphismus ist.

Wegen der Exaktheit an den Stellen $H_k(X)$ und $H_{k-1}(X^n)$ müssen die beiden mittleren Pfeile die Nullabbildung sein, und somit ist $H_k(X, X^n)$ (der Kern der rechten mittleren Nullabbildung) gleich $\{0\}$ (dem Bild der linken mittleren Nullabbildung).

Betrachten wir jetzt Teil g). Als Paar von Abbildungen, also als Morphismus von $Top \times Top$, ist $i_n^C := (i_n, \text{id}_C)$.

Dieser Top^2 -Morphismus induziert einen Morphismus eines Abschnitts der langen exakten Homologiefolge wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_k(C) & \longrightarrow & H_k(X^n) & \longrightarrow & H_k(X^n, C) & \longrightarrow & H_{k-1}(C) & \longrightarrow & H_{k-1}(X^n) \\
 \text{id} \downarrow & & H_k(i_n) \downarrow & & H_k(i_n^C) \downarrow & & \text{id} \downarrow & & H_{k-1}(i_n) \downarrow \\
 H_k(C) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, C) & \longrightarrow & H_{k-1}(C) & \longrightarrow & H_{k-1}(X)
 \end{array}$$

Die äußeren vier senkrechten Abbildungen sind alle Isomorphismen wenn $k < n$, nach Teil e). Aus dem 5-er Lemma folgt, dass dann auch $H_k(i_n^C)$ ein Isomorphismus ist.

Teil h) wird auf ähnliche Weise bewiesen. Als Paar von Abbildungen, also als Morphismus von $Top \times Top$, ist $j_{m,n} := (\text{id}_X, i_{m,n})$.

Dieser Top^2 -Morphismus induziert einen Morphismus eines Abschnitts der langen exakten Homologiefolgen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_k(X^m) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, X^m) & \longrightarrow & H_{k-1}(X^m) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\
 \downarrow H_k(i_{m,n}) & & \text{id} \downarrow & & H_k(j_{m,n}) \downarrow & & \downarrow H_{k-1}(i_{m,n}) & & \downarrow \text{id} \\
 H_k(X^n) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, X^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(X^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(X)
 \end{array}$$

Die äußeren vier senkrechten Abbildungen sind alle Isomorphismen wenn $k - 1 > n$, nach Teil f). Unabhängig von dem Wert von $k \in \mathbf{N}$ sind sie auch Isomorphismen wenn $n < 0$, weil dann immer noch gilt $k - 1 > n$, außer eventuell für $k = 0$, und in diesem Fall ist zumindest $H_0(i_{m,n})$ ein Isomorphismus nach Teil f), da $n < 0$, und $H_{-1}(i_{m,n})$ ist die Abbildung $\{0\} \longrightarrow \{0\}$ und somit auch ein Isomorphismus; die beiden anderen äußeren senkrechten Abbildungen sind Identitäten.

Aus dem 5-er Lemma folgt in den genannten Situationen, dass auch der mittlere senkrechte Pfeil $H_k(j_{m,n})$ ein Isomorphismus ist.

Wenn $k = n + 1$ (oder anders gesagt, wenn $k - 1 = n$), so ist $H_{k-1}(i_{m,n})$ noch injektiv nach Teil f) und alle anderen senkrechten Abbildungen im Diagramm sind noch Isomorphismen. Aus Lemma 9.36 a) angewendet auf den linken vier Spalten des Diagramms folgt, dass $H_k(j_{m,n})$ injektiv ist.

Teil d) folgt, zum Schluss, sofort aus Teil h), denn wenn $m < n$ Zahlen sind mit $n + 1 < k$ oder $n < 0$ (dann erfüllt m die gleiche Bedingung), so ist $H_k(j_{m,n})$ ein Isomorphismus $H_k(X, X^m) \longrightarrow H_k(X, X^n)$. ■

Für einen zellulären Raum X können wir $H_k(X)$ also schon mit der $k + 1$ -ten Filtrierungsstufe genau ausrechnen, und wenn wir beobachten, wie

$H_k(X^n)$ sich mit steigendem n verhält, so nimmt diese Homologiegruppe bis einschließlich $n = k - 1$ einen festen „Grundwert“ an, und verändert sich von diesem zum endgültigen Wert $H_k(X)$ innerhalb von nur zwei Stufen.

Entsprechend ändern sich die relativen Homologiegruppen $H_k(X, X^n)$ für steigendes n nur zwischen den Werten $n = k - 2$ und $n = k$.

Weil die k -te Homologie eines zellulären Raumes in der Nähe der k -ten Filtrierungsstufe bestimmt wird, kann man das ausnutzen, um sie mit Hilfe der Filtrierung auf eine neue einfache Art zu berechnen.

Definition 9.38 Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F} = \{X^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ eine Filtrierung von X . Wir definieren einen Kettenkomplex

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = (W_*(X), d)$$

wie folgt.

Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ definieren wir die n -te Kettengruppe von $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ als

$$W_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1}).$$

Man beachte, dass $W_n(X) = \{0\}$, wenn $n < 0$.

Wir müssen noch den Randoperator konstruieren.

Für jedes $k \in \mathbf{Z}$ sei

$$j_k: (X^k, \emptyset) \longrightarrow (X^k, X^{k-1})$$

die Inklusion und sei

$$\beta_k: H_k(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(X^{k-1})$$

der verbindende Homomorphismus aus der langen exakten Homologiefolge des Paares (X^k, X^{k-1}) . Uns interessieren nur die genannten, der Filtrierungsstufe entsprechenden Homologiegruppen, und deshalb vereinbaren wir, dass der Index k in den Bezeichnungen j_k und β_k nicht nur die Dimension der Homologiegruppen angibt, sondern auch, zwischen welchen Räumen oder der Homologie welcher Räume oder Raumpaare diese Abbildungen zu verstehen sind. Ändert man den Index, ändern sich die betrachteten Filtrierungsstufen gleich mit.

Die Inklusion $j_{n-1}: (X^{n-1}, \emptyset) \longrightarrow (X^{n-1}, X^{n-2})$ induziert einen Homomorphismus

$$(j_{n-1})_* = H_{n-1}(j_{n-1}): H_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

(der auch in der langen exakten Homologiefolge des Paares (X^{n-1}, X^{n-2}) vorkommt).

Wir definieren den n -ten Randoperator des Kettenkomplexes $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ als

$$d_n := H_{n-1}(j_{n-1}) \circ \beta_n = (j_{n-1})_* \circ \beta_n.$$

Dies ist tatsächlich ein Homomorphismus

$$W_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) = W_{n-1}(X).$$

Wir müssen nur noch nachprüfen, dass $d_{n-1} \circ d_n = 0$. Das sieht man am einfachsten in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(X^n, X^{n-1}) & & & & & & \\
 \beta_n \downarrow & \searrow d_n & & & & & \\
 H_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{(j_{n-1})_*} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & H_{n-2}(X^{n-2}) & & \\
 & & \searrow d_{n-1} & & \downarrow (j_{n-1})_* & & \\
 & & & & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) & &
 \end{array}$$

$d_{n-1} \circ d_n$ schreibt sich als eine Verknüpfung von vier Homomorphismen aus verschiedenen langen exakten Homologiefolgen, die aber insbesondere die Verknüpfung $\beta_{n-1} \circ (j_{n-1})_*$ der beiden aufeinanderfolgenden Homomorphismen in der mittleren Zeile beinhaltet. Diese Zeile ist ein Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge des Raumpaars (X^{n-1}, X^{n-2}) und wegen der Exaktheit ist $\beta_{n-1} \circ (j_{n-1})_* = 0$ und somit auch $d_{n-1} \circ d_n = 0$.

Den Kettenkomplex $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ nennt man den **zellulären Kettenkomplex** des topologischen Raumes X mit der Filtrierung \mathcal{F} .

Lemma 9.39 Seien X und Y topologische Räume. Sei $\mathcal{F} = \{X^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ eine Filtrierung auf X und sei $\mathcal{F}' = \{Y^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ eine Filtrierung auf Y . Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine zelluläre stetige Abbildung, d.h., eine stetige Abbildung, so dass $f(X^n) \subset Y^n$ für jedes $n \in \mathbf{Z}$.

Dann ist f auch eine stetige Abbildung $(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow (Y^n, Y^{n-1})$ für jedes $n \in \mathbf{Z}$.

Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ sei

$$W_n(f) := H_n(f): W_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_n(Y^n, Y^{n-1}) = W_n(Y).$$

Die Abbildungen $W_n(f)$ bilden eine Kettenabbildung

$$W_*(f): \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{F}'}.$$

Beweis. Die Randoperatoren d_n der beiden zellulären Kettenkomplexe sind Verknüpfungen von Homomorphismen aus den langen exakten Homologiefolgen von Raumpaaren von Filtrierungsstufen von \mathcal{F} und \mathcal{F}' , und diese Homomorphismen kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen Homologiefolgen mit den $H_n(f)$. Deshalb kommutiert auch d mit $W_*(f)$.

Genauer haben wir für jedes n :

$$\begin{aligned} d_n(Y) \circ W_n(f) &= (j_{n-1}(Y))_* \circ \beta_n(Y) \circ H_n(f) \\ &= (j_{n-1}(Y))_* \circ H_{n-1}(f) \circ \beta_n(X) \\ &= H_{n-1}(f) \circ (j_{n-1}(X))_* \circ \beta_n(X) = W_{n-1}(f) \circ d_n(X) \end{aligned}$$

(wobei die Abbildungen $H_k(f)$ auf verschiedenen Räumen und Raumpaaren definiert sind, was wir in der Notation nicht hervorheben). Das besagt, dass $W_*(f)$ eine Kettenabbildung ist. ■

In Definition 9.38 muss die Filtrierung nicht zellulär sein — den Kettenkomplex $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ erhält man auch ohne diese Voraussetzung. Aber weil die Konstruktion von $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ jeweils nur die speziellen Homologiegruppen $H_n(X^n, X^{n-1})$ mit einbaut, kann dieser Kettenkomplex nur dann etwas sinnvolles über die singuläre Homologie von X aussagen, wenn die relative Homologie der Paare (X^n, X^{n-1}) tatsächlich in der n -ten Dimension konzentriert ist, und das ist insbesondere der Fall, wenn die Filtrierung zellulär ist. Dann kann man mit dem zellulären Kettenkomplex die singuläre Homologie von X korrekt berechnen.

Bemerkung und Definition 9.40 Wie man sehr leicht nachprüft, bilden die zellulären Räume und zellulären Abbildungen eine Kategorie *Zell*.

Man sieht auch sofort, dass die Zuordnung des zellulären Kettenkomplexes zu einem zellulären Raum, und der zellulären Kettenabbildung $W_*(f)$ zu einer zellulären Abbildung f , einen kovarianten Funktor $W_*: \text{Zell} \longrightarrow KK$ bildet, genannt der **zelluläre Kettenkomplexfunktor**,

Das ist trivial, denn für jedes k ist $W_k(f) = H_k(f)$ zwischen den Homologiegruppen bestimmter Raumpaare, und $W_k(f)$ verhält sich richtig für Identitäten und bei Verknüpfung von Abbildungen, weil $H_k(f)$ dies schon tut.

Genauere Details bleiben dem Leser überlassen.

Lemma 9.41 (Exaktes Homologiedreieck eines Raumtripels)

Sei (X, A, B) ein topologisches Raumtripel und seien $\tilde{i}: (A, B) \longrightarrow (X, B)$ und $\tilde{j}: (X, B) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen der genannten Raumpaare. Dann

gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_*(X, B) \\
 \nwarrow \tilde{\beta} & & \swarrow \tilde{j}_* \\
 & H_*(X, A) &
 \end{array}
 \quad \text{Grad } -1 \quad (9.11)$$

zwischen den graduierten Homologiegruppen der Paare (A, B) , (X, B) und (X, A) , mit den von den Inklusionen induzierten Grad 0 Homomorphismen $\tilde{i}_* = H_*(\tilde{i})$ und $\tilde{j}_* = H_*(\tilde{j})$ und mit einem Grad -1 Homomorphismus

$$\tilde{\beta}: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A, B),$$

den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Homologiedreiecks nennen und der wie folgt leicht zu konstruieren ist:

Sei $\gamma \in H_*(X, A)$ und sei $z \in C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$ ein beliebiger Zyklus mit Homologieklassse γ . Nach der Definition von $C_*(X, A)$ ist z die Restklasse $c + C_*(A)$ einer Kette $c \in C_*(X)$. Dass z ein relativer Zyklus ist bedeutet, dass ∂c ein Element des Nenners $C_*(A) \subseteq C_*(X)$ des Quotienten $C_*(X, A)$ ist. Als Rand in $C_*(X)$ ist ∂c ein Zyklus in $C_*(A)$, und somit ist $\partial c + C_*(B)$ ein Zyklus in $C_*(A, B)$. Es ist

$$\tilde{\beta}(\gamma) = [\partial c + C_*(B)] \in H_*(A, B).$$

Das exakte Dreieck (9.11) heißt das **exakte Homologiedreieck** des Tripels (X, A, B) von topologischen Räumen.

Wenn $B = \emptyset$, so ist das exakte Homologiedreieck des Tripels (X, A, B) nichts anderes als das exakte Homologiedreieck des Paares (X, A) .

Beweis. Die kurze Folge

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A, B) & \xrightarrow{C_*(\tilde{i})} & C_*(X, B) & \xrightarrow{C_*(\tilde{j})} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & \frac{C_*(A)}{C_*(B)} & & \frac{C_*(X)}{C_*(B)} & & \frac{C_*(X)}{C_*(A)}
 \end{array}
 \quad (9.12)$$

ist natürlich, weil die Inklusionen \tilde{i} und \tilde{j} offenbar natürliche Transformationen sind zwischen den Funktoren $Top^3 \longrightarrow Top^2$, die einem Tripel (X, A, B) die Paare (A, B) , (X, B) und (X, A) zuordnen, und sie ist exakt, wie wir jetzt kurz nachprüfen.

$C_*(\tilde{i}) = \tilde{i}_\#$ ist injektiv, denn wenn $c + C_*(B) \in C_*(A, B)$ und wenn

$$\tilde{i}_\#(c + C_*(B)) = 0 \in C_*(X, B),$$

so ist $c + C_*(B) = 0 \in C_*(X, B)$, also $c \in C_*(B)$, also $c + C_*(B) = 0$ auch in $C_*(A, B)$.

Für eine relative Kette $c + C_*(B) \in C_*(X, B)$ ist

$$\tilde{j}_\#(c + C_*(B)) = 0 \in C_*(X, A)$$

genau dann, wenn $c + C_*(A) = 0 \in C_*(X, A)$, also wenn $c \in C_*(A) \subseteq C_*(X)$, und das ist genau dann der Fall, wenn $c + C_*(B) \in \tilde{i}_\#(C_*(A, B)) \subseteq C_*(X, B)$. (Für die Richtung „ \Leftarrow “ beachte man, dass wenn $c + C_*(B) = \tilde{i}_\#(c' + C_*(B))$ für ein Element $c' \in C_*(A)$, dann ist $c - c' \in C_*(B) \subseteq C_*(A)$ und somit auch $c \in C_*(A)$.)

Das bedeutet, dass die Folge an der Stelle $C_*(X, B)$ exakt ist.

Und schließlich ist $\tilde{j}_\#$ surjektiv, denn jede Restklasse $c + C_*(A) \in C_*(X, A)$ kann man schreiben als $\tilde{j}_\#(c + C_*(B))$ mit $c + C_*(B) \in C_*(X, B)$.

Also ist die kurze exakte Folge von Kettenkomplexen (9.12) exakt und natürlich. Nach Satz 7.14 hat sie ein natürliches exaktes Homologiedreieck (9.11). Wir müssen nur noch zeigen, dass $\tilde{\beta}$ die angegebene Gestalt hat.

Das folgt sofort aus der Beschreibung des verbindenden Homomorphismus in der Aussage von Satz 7.14. Sei $\gamma \in H_*(X, A)$ und sei $z \in C_*(X, A)$ ein beliebiger Zyklus mit Homologieklassse γ . Nach der Definition von $C_*(X, A)$ ist z die Restklasse $c + C_*(A)$ einer Kette $c \in C_*(X)$.

Wir müssen zunächst ein Urbild von z unter \tilde{j} finden; $c + C_*(B)$ ist ein solches Urbild.

Wir müssen dann den Rand $\partial c + C_*(B)$ dieses Urbilds bilden; diese Kette liegt automatisch im Bild von \tilde{i} , und zwar ist sie Bild unter \tilde{i} eines Zyklus von $C_*(A, B)$ und dieser Zyklus repräsentiert die Homologieklassse $\tilde{\beta}(\gamma)$.

In unserem Fall ist $\partial c + C_*(B)$ das Bild unter \tilde{i} der entsprechenden Kette $\partial c + C_*(B) \in C_*(A, B)$. Also ist $\tilde{\beta}(\gamma) = [\partial c + C_*(B)]$, wie behauptet.

Wenn $B = \emptyset$, so verschwinden die Nenner in den Quotienten $C_*(A, B)$ und $C_*(X, B)$ und die kurze exakte Folge (9.12) wird zur kurzen exakten Folge (7.14) aus Bemerkung 7.15, der kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen des Raumpaars (X, A) . Deshalb wird das exakte Homologiedreieck (9.11) in dieser Situation zum exakten Homologiedreieck (7.15) des Paares (X, A) . ■

Bemerkung 9.42 Analog zur Situation für Raumpaare (vergleiche Bemerkung 7.17) kann man das exakte Homologiedreieck eines Tripels „abwickeln“

zu einer langen exakten Homologiefolge

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\tilde{j}_*} & H_{n+1}(X, A) & & & & \\
 & & \downarrow \tilde{\beta}_{n+1} & & & & \\
 & & H_n(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & H_n(X, B) & \xrightarrow{\tilde{j}_*} & H_n(X, A) \\
 & & & & & & \downarrow \tilde{\beta}_n \\
 & & & & & & H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{\tilde{i}_*} \cdots
 \end{array} \tag{9.13}$$

der Homologiegruppen der drei beteiligten Raumpaare in den einzelnen Dimensionen.

Diese exakte Folge heißt die **lange exakte Homologiefolge** des Raumtripels (X, A, B) .

Neben der expliziten Beschreibung des verbindenden Homomorphismus $\tilde{\beta}$ des exakten Homologiedreiecks eines topologischen Raumtripels, die in Lemma 9.41 gegeben wurde, ist folgende Faktorisierung dieses Homomorphismus nützlich:

Bemerkung 9.43 Sei (X, A, B) ein topologisches Raumtripel und sei

$$\tilde{\beta}: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(A, B)$$

der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks dieses Tripels.

Sei λ die Inklusion $A = (A, \emptyset) \longrightarrow (A, B)$ und sei $\beta: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(X)$ der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks des Paares (X, A) .

Dann ist

$$\tilde{\beta} = H_*(\lambda) \circ \beta. \tag{9.14}$$

Beweis. Die Inklusion $(X, A, \emptyset) \longrightarrow (X, A, B)$ und damit verbunden die Inklusionen $\lambda: (A, \emptyset) \longrightarrow (A, B)$ und $\mu: (X, \emptyset) \longrightarrow (X, B)$ und die Identität von (X, A) induzieren einen Morphismus

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_*(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow \lambda_\# & & \downarrow \mu_\# & & \downarrow \text{id} \\
 \{0\} & \longrightarrow & C_*(A, B) & \xrightarrow{\tilde{i}_\#} & C_*(X, B) & \xrightarrow{\tilde{j}_\#} & C_*(X, A) \longrightarrow \{0\}
 \end{array}$$

zwischen den kurzen exakten Kettenkomplexfolgen der Tripel (X, A, \emptyset) und (X, A, B) , der wiederum wegen der Natürlichkeit einen Morphismus zwischen den exakten Homologiedreiecken der beiden Raumtripel induziert.

Dieser Morphismus der Homologiedreiecke beinhaltet für die Dreiecksseite mit dem verbindenden Homomorphismus ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} C_*(X, A) & \xrightarrow{\beta} & C_*(A) \\ \text{id} \downarrow & & \lambda_* \downarrow \\ C_*(X, A) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & C_*(A, B) \end{array}$$

und die Kommutativität besagt, dass $\lambda_* \circ \beta = \tilde{\beta}$. ■

Satz 9.44 Sei (X, \mathcal{F}) ein zellulärer Raum und sei $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = (W_*(X), d)$ sein zellulärer Kettenkomplex.

Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) \cong H_*(X, X^{-1})$$

(in anderen Worten, eine natürliche Äquivalenz zwischen dem Funktor $H \circ W_*$ und dem Funktor $H_* \circ R_{-1}$, wo für jedes $p \in \mathbf{Z}$ der Funktor $R_p: \text{Zell} \rightarrow \text{Top}^2$ gegeben ist durch $R_p(X, \mathcal{F}) := (X, X^p)$).

Beweis. Sei $n \in \mathbf{Z}$. Wir betrachten die n -te zelluläre Kettengruppe von (X, \mathcal{F}) und die dort eingehenden und ausgehenden Randoperatoren d_{n+1} und d_n , und wir untersuchen diese Abbildungen und ihr Umfeld in der Homologie von X und seinen Filtrierungsstufen.

Für jedes $k \in \mathbf{Z}$ sei λ_k die Inklusion $(X^k, \emptyset) \rightarrow (X^k, X^{-1})$ und sei \tilde{j}_k die Inklusion $(X^k, X^{-1}) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$ (so dass $j_k = \tilde{j}_k \circ \lambda_k$).

Ferner sei \tilde{h}_k die Inklusion $(X^{k-1}, X^{-1}) \rightarrow (X^k, X^{-1})$ und sei \tilde{i}_k die Inklusion $(X^k, X^{-1}) \rightarrow (X, X^{-1})$.

Sei

$$\tilde{\beta}_k = H_{k-1}(\lambda_{k-1}) \circ \beta_k: H_k(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X^{k-1}, X^{-1}).$$

Nach Bemerkung 9.43 ist $\tilde{\beta}_k$ der k -te verbindende Homomorphismus aus der langen exakten Homologiefolge des Tripels (X^k, X^{k-1}, X^{-1}) .

Für jedes $k \in \mathbf{Z}$ ist

$$d_k = H_{k-1}(j_{k-1}) \circ \beta_k = H_{k-1}(\tilde{j}_{k-1}) \circ H_{k-1}(\lambda_{k-1}) \circ \beta_k = H_{k-1}(\tilde{j}_{k-1}) \circ \tilde{\beta}_k$$

und wir werden fortan mit dieser neuen Faktorisierung von d_k arbeiten.

Als Erstes bemerken wir, dass $H_k(\tilde{j}_k)$ für jedes k injektiv ist, denn wenn wir den großen Raum X (und alle Filtrierungsstufen X^l für $l > k$) durch den neuen Raum $X' := X^k$ ersetzen, so ist die sich ergebende Filtrierung von X'

immer noch zellulär und \tilde{j}_k können wir auffassen als die Abbildung $j_{-1,k-1}$ aus Satz 9.37 (für den zellulären Raum $X' = X^k$); nach Teil h) jenes Satzes ist $H_k(\tilde{j}_k) = H_k(j_{-1,k-1})$ injektiv.

Zweitens ist die Folge

$$H_k(X^k, X^{-1}) \xrightarrow{H_k(\tilde{j}_k)} H_k(X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{\tilde{\beta}_k} H_k(X^{k-1}, X^{-1})$$

an der Stelle $H_k(X^k, X^{k-1})$ exakt, denn dies ist ein Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge des Raumtripels (X^k, X^{k-1}, X^{-1}) .

Drittens, $H_k(\tilde{i}_{k+1})$ ist für jedes k ein Isomorphismus nach Satz 9.37 g), denn $\tilde{i}_{k+1} = i_{k+1}^C$ für die Teilmenge $C = X^{-1}$.

Die Berechnung der Homologie des zellulären Kettenkomplexes $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ lässt sich in folgendem kommutativen Diagramm nachvollziehen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 W_{n+1}(X) & & & & & & \\
 \parallel & \searrow d_{n+1} & & & & & \\
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & & & & & & \\
 \downarrow \tilde{\beta}_{n+1} & & & & & & \\
 H_n(X^n, X^{-1}) & \xrightarrow{H_n(\tilde{j}_n)} & H_n(X^n, X^{n-1}) = W_n(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{-1}) & & \\
 \downarrow (\tilde{h}_{n+1})_* & & & & \downarrow H_{n-1}(\tilde{j}_{n-1}) & & \\
 H_n(X^{n+1}, X^{-1}) & & & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & & \\
 \downarrow & & \searrow d_n & & \parallel & & \\
 H_n(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{H_n(\tilde{i}_{n+1})} & H_n(X, X^{-1}) & & W_{n-1}(X) & & \\
 \parallel & \cong & & & & & \\
 \{0\} & & & & & &
 \end{array}$$

Hier sind die waagerechten und senkrechten Folgen von Gruppen und Homomorphismen Abschnitte aus den langen exakten Homologiefolgen von Raumtripeln und deshalb exakt.

In der linken Spalte ist $H_n(X^{n+1}, X^n) = \{0\}$ weil die Filtrierung zellulär ist. Wegen der Exaktheit dieser Spalte ist der Homomorphismus $(\tilde{h}_{n+1})_*$ surjektiv und somit induziert er einen Isomorphismus

$$\overline{(\tilde{h}_{n+1})_*}: \frac{H_n(X^n, X^{-1})}{\text{Ker}(\tilde{h}_{n+1})_*} = \frac{H_n(X^n, X^{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow \text{Bild}(\tilde{h}_{n+1})_* = H_n(X^{n+1}, X^{-1}).$$

Verknüpft man diesen mit dem Isomorphismus $H_n(\tilde{i}_{n+1})$ so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\varphi_n := H_n(\tilde{i}_{n+1}) \circ \overline{(\tilde{h}_{n+1})_*} : \frac{H_n(X^n, X^{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow H_n(X, X^{-1}). \quad (9.15)$$

Dieser Isomorphismus ist natürlich, da er durch die Anwendung von Funktoren auf Inklusionen von Raumpaaren entsteht, und diese Inklusionen sind natürliche Transformationen zwischen verschiedenen Funktoren $Zell \longrightarrow Top^2$.

Wie haben schon gesehen, dass $H_k(\tilde{j}_k)$ injektiv ist für jedes k . Da

$$d_k = H_{k-1}(\tilde{j}_{k-1}) \circ \tilde{\beta}_k,$$

folgt daraus, dass

$$Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) = \text{Ker } d_n = \text{Ker } \tilde{\beta}_n$$

und dass $H_n(\tilde{j}_n)$ die Untergruppe $\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1} \subseteq H_n(X^n, X^{-1})$ isomorph auf

$$B_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) = \text{Bild } d_{n+1}$$

abbildet, während es die ganze Gruppe $H_n(X^n, X^{-1})$ isomorph auf

$$\text{Bild } H_n(\tilde{j}_n) = \text{Ker } \tilde{\beta}_n = Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

abbildet.

Somit induziert $H_n(\tilde{j}_n)$ einen Isomorphismus der Quotienten

$$\overline{H_n(\tilde{j}_n)} : \frac{H_n(X^n, X^{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \longrightarrow \frac{Z_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})}{B_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})} = H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}),$$

und dieser Isomorphismus ist auch natürlich, weil in seine Konstruktion nur die natürliche Transformationen \tilde{j}_n und $\tilde{\beta}_{n+1}$ eingehen, sowie Funktoren auf den Filtrierungsstufen von \mathcal{F} , die letztendlich Funktoren auf $Zell$ sind.

Die Verknüpfung der natürlichen Isomorphismen

$$H_n(X^n, X^{-1}) \xleftarrow[\cong]{\varphi_n} \frac{H_n(X^n, X^{-1})}{\text{Bild } \tilde{\beta}_{n+1}} \xrightarrow[\cong]{\overline{H_n(\tilde{j}_n)}} H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

(d.h. genauer, die Verknüpfung einer dieser Isomorphismen mit der Umkehrabbildung des anderen) liefert einen natürlichen Isomorphismus

$$H_n(X^n, X^{-1}) \cong H_n(\mathcal{W}_{\mathcal{F}})$$

für jedes n . ■

Korollar und Definition 9.45 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex und (A, \mathcal{Z}_A) ein CW-Unterkomplex von (X, \mathcal{Z}) . Sei \mathcal{F}_A die durch die relativen n -Skelette X_A^n gegebene zelluläre Filtrierung von X .

Den Kettenkomplex $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A} =: (W_*(X, A), d)$ nennen wir den (relativen) **zellulären Kettenkomplex des CW-Paares** (X, A) .

Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A}) \cong H_*(X, A).$$

Wenn $A = \emptyset$ und wenn \mathcal{F} die durch die Skelette X^n gegebene Filtrierung von X ist, so nennen wir den Kettenkomplex $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} =: (W_*(X), d)$ den (absoluten) **zellulären Kettenkomplex des CW-Raumes** X .

Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$H(\mathcal{W}_{\mathcal{F}}) \cong H_*(X).$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Satz 9.44, da

$$X_A^{-1} = X^{-1} \cup A = \emptyset \cup A = A$$

nach Definition 9.31.

Die Aussage für den Fall $A = \emptyset$ ist einfach ein Spezialfall hiervon. ■

Wir wollen dieses neue Werkzeug gleich ausprobieren und einige bisher schwer zu erschließende Homologiegruppen ausrechnen. Eine kleine Vorbereitung wird uns die Arbeit erleichtern.

In Lemma 9.32 d) haben wir die einzelnen zellulären Kettengruppen genau beschrieben. Im folgenden Lemma geben wir noch eine nützliche explizite Beschreibung des zellulären Randoperators.

Lemma 9.46 a) Sei $n > 0 \in \mathbf{N}$ und sei \mathcal{Z} die CW-Zerlegung von D^n aus Beispiel 9.13 f). Diese Zerlegung hat genau drei Zellen, eine n -Zelle $e_2 := E^n$, eine $n-1$ -Zelle $e_1 := S_+^{n-1}$ und eine 0-Zelle e_0 bestehend aus dem Südpol von S^{n-1} .

Sei $\mathcal{W} = (W_*(D^n), d)$ der zelluläre Kettenkomplex des CW-Raumes D^n .

Sei γ_n ein Erzeugendes der n -ten zellulären Kettengruppe

$$W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z},$$

und sei c_n eine Kette in $C_n(D^n)$, so dass $c_n + C_n(S^{n-1})$ ein relativer Zyklus in $C_n(D^n, S^{n-1})$ ist mit $\gamma_n = [c_n + C_n(S^{n-1})]$.

Dann ist $d_n(\gamma_n)$ die von der Kette ∂c_n repräsentierte Homologieklassse, in folgendem Sinne. Wir unterscheiden zwischen den Fällen $n = 1$ und $n > 1$.

Wenn $n = 1$, so sind beide Zellen e_0 und e_1 nulldimensional, und

$$W_0(D^1) = H_0((D^1)^0, (D^1)^{-1}) = H_0(S^0, \emptyset) = H_0(S^0) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z},$$

wobei die Summanden \mathbf{Z} erzeugt werden von den Klassen der 0-Ketten $e_0 = -1$ und $e_1 = 1$. Man kann c_1 (nach eventuellem Vorzeichenwechsel wenn erforderlich) so wählen, dass

$$\partial c_1 = e_1 - e_0 \in C_0((D^1)^0, (D^1)^{-1}) = C_0(S^0), \quad (9.16)$$

und es gilt

$$d_1 \gamma_1 = [\partial c_1] = (1, -1) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = H_0(S^0). \quad (9.17)$$

Wenn $n > 1$, so ist $((D^n)^{n-1}, (D^n)^{n-2}) = (S^{n-1}, \{e_0\})$ und die Inklusion $j_{n-1}: (S^{n-1}, \emptyset) \longrightarrow (S^{n-1}, \{e_0\})$ induziert einen Isomorphismus

$$H_{n-1}(j_{n-1}): \mathbf{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}). \quad (9.18)$$

Die Homologieklassse $[\partial c_n]$ erzeugt die linke Gruppe $H_{n-1}(S^{n-1})$ und wird durch $H_{n-1}(j_{n-1})$ auf

$$d_n \gamma_n = [\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\})] \quad (9.19)$$

abgebildet, welches die rechte Gruppe $H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}) = W_{n-1}(D^n)$ erzeugt.

- b) Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex (A, \mathcal{Z}_A) . Sei $e \in \mathcal{Z}'_A$ eine n -Zelle von \mathcal{Z} , die nicht in A liegt, und sei $\Phi_e: D^n \longrightarrow X$ eine charakteristische Abbildung der Zelle e .

Der e -te Summand von

$$W_n(X, A) = H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \cong \bigoplus_{\substack{\zeta \in \mathcal{Z}'_A \\ \dim \zeta = n}} \mathbf{Z}$$

wird erzeugt von

$$\gamma_e := H_n(\Phi_e)(\gamma_n) = [c_e + C_n(X_A^{n-1})],$$

wo $c_e = (\Phi_e)_\#(c_n)$.

Wir nennen c_e die **Grundkette** der Zelle e .

Es gilt

$$d_n(\gamma_e) = [\partial c_e + C_{n-1}(X_A^{n-2})]. \quad (9.20)$$

Beweis. a), Fall $n = 1$: Sei $i: S^0 \longrightarrow D^1$ die Inklusion. Wir betrachten folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Homologiefolge von (D^1, S^0) :

$$\{0\} = H_1(D^1) \rightarrow H_1(D^1, S^0) \xrightarrow{\beta_1} H_0(S^0) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{H_0(i)} H_0(D^1) = \mathbf{Z}.$$

Weil $(D^1)^{-1} = \emptyset$, ist die Inklusion $j_0: ((D^1)^0, \emptyset) \longrightarrow ((D^1)^0, (D^1)^{-1})$ einfach die Identität, und deshalb ist $d_1 = H_0(j_0) \circ \beta_1 = \beta_1$.

Aus der Exaktheit folgt, dass β_1 ein Isomorphismus

$$\mathbf{Z} = H_1(D^1, S^0) \longrightarrow \text{Bild } \beta_1 = \text{Ker } H_0(i)$$

ist.

Nach Beispiel 8.4 c) ist $H_0(i)(k, l) = k + l$ und folglich ist

$$\text{Ker } H_0(i) = \{(k, l) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \mid k + l = 0\} = \{(k, -k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

und dies wird von $(-1, 1)$ erzeugt.

Wir finden also ein Erzeugendes γ_1 von $H_1(D^1, S^0)$ mit

$$d_1 \gamma_1 = \beta_1 \gamma_1 = (-1, 1).$$

Nach der Beschreibung von β_1 in Korollar 7.16 sehen wir, dass wenn $c_1 \in C_1(D^1)$ mit $\gamma_1 = [c_1 + C_1(S^0)]$, so ist

$$\beta_1 \gamma_1 = [\partial c_1] = (-1, 1) = [e_1 - e_0].$$

Da $B_0(S^0) = \{0\}$, ist die Projektion $Z_0(S^0) \longrightarrow H_0(S^0)$ injektiv, und aus der Gleichheit der Homologieklassen folgt somit $\partial c_1 = e_1 - e_0$.

a), Fall $n > 1$: Weil \mathcal{Z} nur eine n -Zelle enthält, ist

$$W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}.$$

Wie in der Aussage des Lemmas, sei γ_n ein Erzeugendes von $H_n(D^n, S^{n-1})$ und sei c_n eine Kette in $C_n(D^n)$ mit $\gamma_n = [c_n + C_n(S^{n-1})]$.

Für $n > 1$ ist der verbindende Homomorphismus

$$\beta_n: \mathbf{Z} = W_n(D^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

ein Isomorphismus, weil die angrenzenden Gruppen $H_n(S^{n-1})$ und $H_{n-1}(D^n)$ in der langen exakten Homologiefolge von (D^n, S^{n-1}) beide $\{0\}$ sind.

Aus einem ähnlichen Grund ist

$$H_{n-1}(j_{n-1}): H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$$

ein Isomorphismus. Der diese Abbildung umgebende Abschnitt aus der langen exakten Homologiefolge von $(S^{n-1}, \{e_0\})$ hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \{0\} = H_{n-1}(\{e_0\}) &\rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(j_{n-1})} \\ &H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\}) \xrightarrow{\beta} H_{n-2}(\{e_0\}) \xrightarrow{H_{n-2}(i)} H_{n-2}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Für $n > 1$ ist $H_{n-1}(\{e_0\})$ immer $\{0\}$. Und $H_{n-2}(\{e_0\})$ ist $\{0\}$ außer für $n = 2$, aber dann ist $H_{n-2}(i) = H_0(i)$ und $H_0(i)$ ist injektiv nach Lemma 8.2, da $\{e_0\}$ wegweise zusammenhängend ist. Da $\text{Bild } \beta = \text{Ker } H_0(i) = \{0\}$, ist β auf jeden Fall die Nullabbildung und die Exaktheit der Homologiefolge bedingt, dass $H_{n-1}(j_{n-1})$ ein Isomorphismus ist.

Nach der Beschreibung von β_n in Korollar 7.16 ist $\beta_n(\gamma_n) = [\partial c_n]$ und dies erzeugt $H_{n-1}(S^{n-1})$, weil β_n ein Isomorphismus ist und γ_n die Gruppe $H_n(D^n, S^{n-1})$ erzeugt.

$(j_{n-1})_\#$ bildet ∂c_n nach Definition auf

$$\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\}) \in C_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$$

ab und $d_n = H_{n-1}(j_{n-1}) \circ \beta_n$ bildet γ_n somit auf $[\partial c_n + C_{n-1}(\{e_0\})]$ ab. Dies ist ein erzeugendes Element von $H_{n-1}(S^{n-1}, \{e_0\})$, weil β_n und $H_{n-1}(j_{n-1})$ Isomorphismen sind.

b) Nach Lemma 9.32 d) ist $H_n(\Phi_e)$ ein Isomorphismus von $H_n(D^n, S^{n-1})$ auf den e -ten Summanden \mathbf{Z} von $W_n(X, A) = H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$. Deshalb wird dieser Summand erzeugt von $\gamma_e := H_n(\Phi_e)(\gamma_n)$.

Φ_e ist eine Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X_A^n, X_A^{n-1})$, und weil die lange exakte Homologiefolge eines Raumpaars natürlich ist, kommutiert $H_*(\Phi_e)$ mit β_n , d.h.,

$$\begin{aligned} \beta_n(\gamma_e) &= \beta_n H_n(\Phi_e)(\gamma_n) = H_{n-1}(\Phi_e) \beta_n(\gamma_n) \\ &= H_{n-1}(\Phi_e)[\partial c_n] \\ &= [(\Phi_e)_\#(\partial c_n)] \\ &= [\partial((\Phi_e)_\# c_n)] = [\partial c_e]. \end{aligned}$$

Daraus folgt Gleichung (9.20)

$$d_n(\gamma_e) = H_{n-1}(j_{n-1}) \beta_n(\gamma_e) = H_{n-1}(j_{n-1})[\partial c_e] = [\partial c_e + C_{n-1}(X_A^{n-1})].$$

■

Notation 9.47 Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex (A, \mathcal{Z}_A) .

Die graduierte Kettengruppe

$$W_*(X, A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$$

des zellulären Kettenkomplexes $\mathcal{W}_{\mathcal{F}_A}$ ist eine freie abelsche Gruppe, mit einem Erzeugenden γ_e für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}'_A = \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_A$.

Um es angenehmer zu machen, in diesem Kettenkomplex zu rechnen, wollen wir eine vereinfachte Notation für Ketten einführen, in dem wir $W_*(X, A)$ mit der zu ihr isomorphen Gruppe $F(\mathcal{Z}'_A)$ identifizieren.

Die Identifikation wird vorgenommen vermöge des Isomorphismus, der für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}'_A$ den gemäß Lemma 9.46 b) gewählten Erzeugenden γ_e des e -ten Summanden \mathbf{Z} von $W_*(X, A)$ auf den entsprechenden formalen Erzeugenden e von $F(\mathcal{Z}'_A)$ abbildet.

Das bedeutet, das wir fortan zelluläre Ketten als formale Linearkombinationen von *Zellen* schreiben werden, statt wörtlich nach der Definition von $W_*(X, A)$ als Summen von Homologieklassen aus den homogenen Anteilen $H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$.

Diese Notation behalten wir auch bei, wenn wir tatsächlich über die Homologieklassen oder über die sie repräsentierenden Ketten in $C_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ oder $C_n(X_A^n)$ sprechen müssen.

Das heißt, wir benutzen die gleiche Bezeichnung e für die Zelle e , für ihre Grundkette c_e und für die von c_e bestimmte Homologiekategorie γ_e . Aus dem Umfeld wird immer klar sein, welche Bedeutung gemeint ist, und Formeln mit zellulären Ketten werden in dieser vereinfachten Schreibweise viel lesbarer.

Für 1-dimensionale Zellen kann man die Beschreibung des Randoperators aus Lemma 9.46 b) noch präziser machen.

Bemerkung 9.48

Sei (X, \mathcal{Z}) ein CW-Komplex mit einem CW-Unterkomplex (A, \mathcal{Z}_A) und sei $e \in \mathcal{Z}'_A$ eine 1-Zelle. Sei $\Phi_e: [-1, 1] = D^1 \rightarrow X$ ihre charakteristische Abbildung.

Dann gilt

$$d_1 e = \Phi_e(1) - \Phi_e(-1)$$

(in der vereinfachten Notation 9.47).

Beweis. Dies folgt aus Lemma 9.46.

Die Grundkette c_e der Zelle e ist $(\Phi_e)_\#(c_1)$, wo $c_1 \in C_1(D^1)$ gewählt ist gemäß Lemma 9.46 a), Fall $n = 1$, und zwar so, dass $[c_1 + C_1(S^0)]$ die Gruppe

$W_1(D^1)$ erzeugt und Formel (9.16) gilt, also $\partial c_1 = e_1 - e_0 := (1) - (-1)$ in unserer vereinfachten Notation.

Nach Teil b) von Lemma 9.46 haben wir dann

$$\begin{aligned}
 d_1 e &= [\partial c_e + C_0(X_A^0)] && \text{nach Formel (9.20)} \\
 &= [\partial((\Phi_e)_\#(c_1)) + C_0(X_A^0)] \\
 &= [(\Phi_e)_\#(\partial c_1) + C_0(X_A^0)] \\
 &= [(\Phi_e)_\#(e_1 - e_0) + C_0(X_A^0)] && \text{nach Formel (9.16)} \\
 &= [(\Phi_e)_\#(e_1) - (\Phi_e)_\#(e_0) + C_0(X_A^0)] \\
 &= \Phi_e(1) - \Phi_e(-1) && \text{in der vereinfachten Notation.}
 \end{aligned}$$

■

Als erste Anwendung der zellulären Hilfsmittel berechnen wir die Homologie des Torus und der Kleinschen Flasche.

Beispiel 9.49 a) Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der zweidimensionale Torus. Er hat nichttriviale Homologiegruppen nur in Dimension 0, 1 und 2, und dort gilt:

$$H_0(T^2) = \mathbf{Z} \quad (9.21a)$$

$$H_1(T^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \quad (9.21b)$$

$$H_2(T^2) = \mathbf{Z} \quad (9.21c)$$

b) Sei K^2 die Kleinsche Flasche, die wir in Beispiel 9.13 g) definiert haben. Die Kleinsche Flasche hat nichttriviale Homologiegruppen nur in Dimension 0 und 1, und dort gilt:

$$H_0(K^2) = \mathbf{Z} \quad (9.22a)$$

$$H_1(K^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2 \quad (9.22b)$$

wobei \mathbf{Z}_2 , wie in der Topologie üblich, die Gruppe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ bezeichnet.

Beweis. Nach Beispiel 9.13 g) haben sowohl T^2 wie auch K^2 eine CW-Zerlegung mit einer 2-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 0-Zelle. Für $X = T^2$ oder K^2 ist folglich

$$W_n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n=0; \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } n=1; \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } n=2; \\ \{0\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

und nur die Randoperatoren unterscheiden sich zwischen den beiden Räumen.

Die gilt es jetzt auszurechnen. Für beide Räume haben wir die identifizierende Projektion

$$\pi: I^2 \longrightarrow X$$

und sie bildet jede der vier Seiten des Quadrats I^2 wie eine charakteristische Abbildung auf eine der beiden 1-Zellen von X .

Wir betrachten nun die CW-Zerlegung von I^2 aus Beispiel 9.13 g), mit dem Innern des Quadrats als eine 2-Zelle, mit den vier Eckpunkten als 0-Zellen und mit den vier offenen Seiten (ohne die Eckpunkte) als 1-Zellen.

Um einfacher darüber reden zu können, benennen wir diese Zellen mit Buchstaben wie in Abbildung 9.2, und zwar die 0-Zellen mit lateinischen Kleinbuchstaben p, q, r und s , die 1-Zellen mit lateinischen Großbuchstaben P, Q, R und S , und die 2-Zelle nennen wir ζ .

Für jede geschlossene 1-Zelle \bar{Y} wählen wir eine charakteristische Abbildung Φ_Y , die $D^1 = [-1, 1]$ konform zur Pfeilrichtung auf die Seite \bar{Y} in Abbildung 9.2 abbildet, d.h., so dass $\Phi_Y(-1)$ der Eckpunkt ist, von dem der Pfeil wegzeigt (wir nennen diesen Eckpunkt Y_-), und $\Phi_Y(1)$ der Eckpunkt ist, zu dem der Pfeil hinzeigt (wir nennen diesen Eckpunkt Y_+).

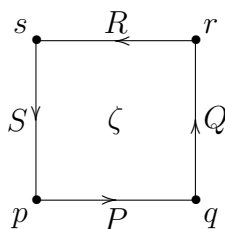


Abbildung 9.2: Die CW-Zerlegung von I^2 .

Nach Bemerkung 9.48 ist d_1 gegeben durch $d_1 Y = Y_+ - Y_-$ für jede 1-Zelle Y , also $d_1 P = q - p$, $d_1 Q = r - q$, $d_1 R = s - r$ und $d_1 S = p - s$.

Hieraus sieht man sofort, dass eine 1-Kette $a_1 P + a_2 Q + a_3 R + a_4 S$ in $W_1(I^2)$ genau dann ein Zyklus ist, wenn alle Koeffizienten a_i gleich sind.

Folglich wird $Z_1(W_*(I^2))$ von $P + Q + R + S$ erzeugt. Dies muss ein Rand sein weil $H_1(I^2) = \{0\}$, und weil $W_2(I^2) \cong \mathbf{Z}$ und von der einzigen 2-Zelle ζ erzeugt wird, muss dieser Rand die Form $d_2(n\zeta) = n(d_2\zeta)$ haben. Das ist nur möglich, wenn $n = \pm 1$.

Wir können es also durch eine geeignete Wahl der Vorzeichen für die Erzeugenden der Kettengruppen so einrichten, dass

$$d_2\zeta = P + Q + R + S. \quad (9.23)$$

Diese Daten bilden wir jetzt mit der Projektion π (die eine zelluläre Abbildung ist) nach $W_*(X)$ ab.

Die einzige 0-Zelle von X werden wir u nennen, die beiden 1-Zellen nennen wir $U := \pi(P) = \pi(R)$ und $V := \pi(Q) = \pi(S)$, und die 2-Zelle nennen wir χ .

π identifiziert gegenüberliegende Seiten von I^2 , und zwar vermöge Homöomorphismen $\varphi: P \rightarrow R$ und $\psi: S \rightarrow Q$, wobei $\varphi(s, 0) = (s, 1)$ für jedes $s \in I$, und $\psi(0, t) = (1, t)$ für $t \in I$ im Falle des Torus und $\psi(0, t) = (1, 1 - t)$ im Falle der Kleinschen Flasche.

Die zellulären Kettenabbildungen von φ und ψ im zellulären Kettenkomplex der entsprechenden Seiten (eindimensionale CW-Unterkomplexe von I^2) sind leicht zu berechnen, denn diese Abbildungen sind Homöomorphismen und bilden somit Erzeugende der zellulären Kettengruppen wieder auf Erzeugende ab. Es muss nur das Vorzeichen bestimmt werden, und das kann aus der Wirkung auf dem zellulären Rand abgelesen werden.

Da $\varphi(p) = s$ und $\varphi(q) = r$ haben wir

$$W_0(\varphi)(d_1 P) = \varphi(q - p) = r - s = -d_1 R.$$

Da $W_*(\varphi)$ eine Kettenabbildung ist, muss gelten

$$W_1(\varphi)(P) = -R. \quad (9.24)$$

Das gleiche Argument zeigt, dass

$$W_1(\psi)(S) = -Q \quad (9.25a)$$

im Falle des Torus und

$$W_1(\psi)(S) = +Q \quad (9.25b)$$

im Falle der Kleinschen Flasche (weil dann $\psi(p) = r$ und $\psi(s) = q$ und somit $W_0(\psi)(d_1 S) = \psi(p - s) = r - q = +d_1 Q$).

Weil φ und ψ die Verklebung der Seiten beschreiben, haben wir $\pi\varphi = \pi$ auf P und $\pi\psi = \pi$ auf S .

Jede einzelne Seite von I^2 wird von π wie eine charakteristische Abbildung auf eine der abgeschlossenen 1-Zellen von X abgebildet und wir wählen die Erzeugenden von $W_1(X)$, so dass $W_1(\pi)(P) = U$ und $W_1(\pi)(S) = V$.

Wir haben dann

$$\begin{aligned}
 W_1(\pi)(R) &= W_1(\pi)(-W_1(\varphi)(P)) && \text{nach (9.24)} \\
 &= -W_1(\pi)(W_1(\varphi)(P)) \\
 &= -(W_1(\pi) \circ W_1(\varphi))(P) \\
 &= -W_1(\pi\varphi)(P) \\
 &= -W_1(\pi)(P) \\
 &= -U
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 W_1(\pi)(Q) &= W_1(\pi)(\mp W_1(\psi)(S)) && \text{nach (9.25)} \\
 &= \mp W_1(\pi)(W_1(\psi)(S)) \\
 &= \mp(W_1(\pi) \circ W_1(\psi))(S) \\
 &= \mp W_1(\pi\psi)(S) \\
 &= \mp W_1(\pi)(S) \\
 &= \mp V,
 \end{aligned}$$

wo das Vorzeichen \mp für den Torus $-$ ist und für die Kleinsche Flasche $+$ ist.

$\pi: I^2 \longrightarrow X$ ist eine charakteristische Abbildung für die 2-Zelle χ von X und $W_2(\pi)$ bildet somit das Erzeugende von $W_2(I^2)$ auf ein Erzeugendes von $W_2(X)$ ab; wir wählen das Vorzeichen des Erzeugenden χ so, dass

$$W_2(\pi)(\zeta) = \chi.$$

Aus den berechneten zellulären Randoperatoren für I^2 und der Tatsache, dass $W_*(\pi)$ eine zelluläre Kettenabbildung ist, erhalten wir folgende zelluläre Randoperatoren und Homologiegruppen für den Torus und die Kleinsche Flasche:

a): Für den Torus haben wir

$$\begin{aligned}
 d_2\chi &= d_2W_2(\pi)(\zeta) \\
 &= W_1(\pi)(d_2\zeta) \\
 &= W_1(\pi)(P + Q + R + S) \\
 &= U - V - U + V = 0
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

und

$$d_1U = d_1W_1(\pi)(P) = W_1(\pi)(d_1P) = W_1(\pi)(q - p) = u - u = 0. \tag{9.27}$$

Entsprechend, $d_1V = 0$.

Für den Torus ist also $d = 0$, jede zelluläre Kette ist ein Zyklus und es gibt keine nichttrivialen zellulären Ränder.

Folglich ist $H_*(T^2) \cong W_*(T^2)$, wie in (9.21) angegeben.

b): Für die Kleinsche Flasche ändert sich nur das Vorzeichen von $W_1(\pi)(Q)$ und das geht nur in die Berechnung von $d_2\chi$ ein.

Wir haben jetzt

$$\begin{aligned} d_2\chi &= d_2W_2(\pi)(\zeta) \\ &= W_1(\pi)(d_2\zeta) \\ &= W_1(\pi)(P + Q + R + S) \\ &= U + V - U + V = 2V. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Es gilt aber nach wie vor

$$d_1U = d_1V = 0. \tag{9.29}$$

Hieraus folgt: es gibt keine nichttrivialen 2-Zyklen und somit ist

$$H_2(K^2) = Z_2(W_*(K^2)) = \{0\}.$$

Weil d_0 und d_1 immer noch beide 0 sind, ist

$$H_0(K^2) = Z_0(W_*(K^2)) = W_0(K^2) \cong \mathbf{Z}.$$

Und schließlich

$$Z_1(W_*(K^2)) = W_1(K^2) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z},$$

wobei $B_1(W_*(K^2))$ von $2V = (0, 2) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ erzeugt wird. Daraus folgt

$$H_1(K^2) \cong \frac{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}}{\{0\} \oplus 2\mathbf{Z}} \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2$$

(der letzte Isomorphismus ist ähnlich zu beweisen wie Lemma 6.34 d)).

Damit sind alle Angaben in (9.22) bestätigt. ■

Bemerkung 9.50 Wegen der orientierungsumkehrenden Verklebung bei der Konstruktion von K^2 wird in der Homologie der Kleinschen Flasche ein Teil der geometrischen Struktur „unsichtbar“, was sich dadurch zeigt, dass $H_2(K^2) = \{0\}$ (obwohl K^2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist) und nur ein winziger Teil von $W_1(K^2)$ in $H_1(K^2)$ überlebt.

Diese unsichtbare Geometrie kann man wieder sichtbar machen, indem man statt ganzzahligen Koeffizienten \mathbf{Z}_2 -Koeffizienten verwendet. Dann gibt

es bei der Berechnung von $W_1(\psi)(S)$ in den Formeln (9.25) keinen Unterschied mehr zwischen $+Q$ und $-Q$ und aus diesem Grund ist

$$W_*(K^2; \mathbf{Z}_2) \cong W_*(T^2; \mathbf{Z}_2).$$

Deshalb hat K^2 in \mathbf{Z}^2 -Koeffizienten die gleiche Homologie, wie T^2 , und diese kann man genau so berechnen, wie wir in Beispiel 9.49 a) die \mathbf{Z} -Homologie von T^2 berechnet haben (außer dass man natürlich \mathbf{Z} überall durch \mathbf{Z}_2 ersetzen muss). Als Ergebnis erhält man:

$$H_n(K^2, \mathbf{Z}_2) \cong H_n(T^2, \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } n=0; \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } n=1; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } n=2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.30)$$

Um dieses Kapitel zu schließen wollen wir noch mit der zellulären Methode die Homologie der projektiven Räume $\mathbf{R}P^n$ und $\mathbf{C}P^n$ berechnen, die in Beispiel 9.13 h) mit ihrer CW-Zerlegung beschrieben wurden. Mit den klassischen Werkzeugen (lange exakte Homologiefolge, Satz von Mayer-Vietoris oder Ausschneidung) ist diese Homologie sehr schwer zu bestimmen.

Beispiel 9.51 Sei $n \in \mathbf{N}$ und sei $k \in \mathbf{Z}$.

a)

$$H_k(\mathbf{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } 0 \leq k \leq 2n \text{ und } k \text{ gerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b)

$$H_k(\mathbf{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 1 \leq k < n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c)

$$H_k(\mathbf{R}P^n, \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 0 \leq k \leq n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. a): Laut Beispiel 9.13 h) hat $\mathbf{C}P^n$ eine CW-Zerlegung mit einer Zelle e_m von Dimension $2m$ für jedes m mit $0 \leq m \leq n$ (und mit keinen weiteren Zellen).

Es folgt, dass $W_{2m}(\mathbf{CP}^n) = \mathbf{Z}$ für jedes m mit $0 \leq m \leq n$, und alle anderen zellulären Kettengruppen sind $\{0\}$.

Insbesondere sind alle ungeradedimensionalen zellulären Kettengruppen trivial und aus diesem Grund sind alle Randoperatoren $d_k = 0$. Deshalb ist $Z_*(W_*(\mathbf{CP}^n)) = W_*(\mathbf{CP}^n)$ und $B_*(W_*(\mathbf{CP}^n)) = \{0\}$, also

$$H_*(W_*(\mathbf{CP}^n)) \cong Z_*(W_*(\mathbf{CP}^n)) = W_*(\mathbf{CP}^n)$$

und diese graduierte Gruppe ist wie unter a) angegeben.

b): Weil \mathbf{RP}^0 ein Einpunktraum ist (und tatsächlich die angegebene Homologie hat), brauchen wir diesen Fall hier nicht ausführlich zu behandeln und können in der Folge annehmen, dass $n > 0$.

Laut Beispiel 9.13 h) hat \mathbf{RP}^n eine CW-Zerlegung mit einer Zelle e_k von Dimension k für jedes k mit $0 \leq k \leq n$ (und mit keinen weiteren Zellen).

Es folgt, dass $W_k(\mathbf{RP}^n) = \mathbf{Z}$ für jedes k mit $0 \leq k \leq n$, und alle anderen zellulären Kettengruppen sind $\{0\}$.

Um die Homologie ausrechnen zu können, müssen wir noch den zellulären Randoperator bestimmen.

Dazu nehmen wir, ähnlich wie im Beweis von Beispiel 9.49, einen anderen, verwandten CW-Raum zu Hilfe, dessen Homologie wir schon kennen, diesmal aber nicht I^2 , sondern S^n mit der CW-Zerlegung aus Beispiel 9.13 c), mit zwei Zellen in jeder Dimension k von 0 bis n . Diese Zellen sind E_+^k und E_-^k .

Sei $\tau_n: S^n \rightarrow S^n$ die Antipodenabbildung mit $\tau(x) = -x$ für jedes $x \in S^n$. Diese Abbildung bildet für jedes $k \leq n$ das Raumpaars $(\bar{E}_+^k, \partial E_+^k) = (D_+^k, S^{k-1})$ homöomorph auf $(\bar{E}_-^k, \partial E_-^k) = (D_-^k, S^{k-1})$ ab, und ihre Einschränkung auf $\partial E_+^k = \partial E_-^k = S^{k-1}$ ist τ_{k-1} . Ferner gilt $\tau_n^2 = \text{id}_{S^n}$, d.h., τ_n ist ihre eigene Umkehrabbildung.

Insbesondere ist $H_k(\tau_n): H_k(D_+^k, S^{k-1}) \rightarrow H_k(D_-^k, S^{k-1}) \cong \mathbf{Z}$ ein Isomorphismus, und wir können die Erzeugenden dieser Homologiegruppen (die Summanden von $W_k(S^n)$ sind) und die Grundketten der k -Zellen so wählen, dass

$$W_k(\tau_n)(E_+^k) = E_-^k \quad \text{und umgekehrt} \quad (9.31a)$$

und

$$C_k(\tau_n)(c_{E_+^k}) = c_{E_-^k} \quad \text{und umgekehrt.} \quad (9.31b)$$

Die umgekehrte Beziehung gilt jeweils sogar automatisch, weil $\tau_n^2 = \text{id}_{S^n}$.

\mathbf{RP}^n ist ein Quotient von S^n und die Projektion $\pi: S^n \rightarrow \mathbf{RP}^n$ identifiziert antipodische Punkte, d.h.,

$$\pi \circ \tau_n = \pi. \quad (9.32)$$

Nach der Definition der Zellen von $\mathbf{R}P^n$ auf Seite 268 ist

$$e_k = \pi(S^k \setminus S^{k-1}) = \pi(E_+^k \cup E_-^k),$$

und π bildet jede der offenen k -Zellen E_\pm^k von S^n homöomorph auf e_k ab.

Hieraus folgt erstens, dass π zellulär ist, denn das k -Skelett S^k von S^n wird durch π in das k -Skelett von $\mathbf{R}P^n$ abgebildet. Und weil π die offenen k -Zellen E_\pm^k homöomorph auf e_k abbildet, ist $\pi|_{D_\pm^k}$ eine charakteristische Abbildung für e_k .

Folglich ist

$$H_k(\pi): H_k(D_\pm^k, S^{k-1}) \longrightarrow H_k(\bar{e}_k, \partial e_k)$$

für jede Wahl des Vorzeichens ein Isomorphismus, und wir können das Erzeugende von

$$H_k(\bar{e}_k, \partial e_k) = H_k(\mathbf{R}P^k, \mathbf{R}P^{k-1}) = W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}$$

so wählen, dass $e_k = W_k(\pi)(E_+^k)$ (in der vereinfachten Notation 9.47). Wegen (9.31a) und (9.32) gilt dann automatisch auch $e_k = W_k(\pi)(E_-^k)$.

Um das bisher ermittelte kurz zusammenzufassen, π ist eine zelluläre Abbildung und $W_k(\pi)$ bildet jedes der beiden Erzeugenden von $W_k(S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ auf das gewählte Erzeugende von $W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}$. Mit Hilfe dieser Kettenabbildung wollen wir jetzt den Randoperator von $W_*(\mathbf{R}P^n)$ berechnen.

Betrachten wir zunächst den Randoperator von $W_*(S^n)$.

Lemma 9.46 b) besagt, dass $d_k E_\pm^k$ von der Kette $\partial c_{E_\pm^k} \in C_{k-1}(S^{k-1})$ repräsentiert wird. Genauer gilt

$$d_k E_\pm^k = (j_{k-1})_*([\partial c_{E_\pm^k}]),$$

wo j_{k-1} im jetzigen Fall die Inklusion $(S^{k-1}, \emptyset) \longrightarrow (S^{k-1}, S^{k-2})$ ist.

Weil die Grundketten Bedingung (9.31b) erfüllen, haben wir

$$\begin{aligned} d_k E_-^k &= (j_{k-1})_*([\partial c_{E_-^k}]) \\ &= (j_{k-1})_*\left(\left[\partial((\tau_n)_\# c_{E_+^k})\right]\right) \\ &= (j_{k-1})_*\left(\left[(\tau_n)_\# \partial c_{E_+^k}\right]\right) \\ &= (j_{k-1})_*(\tau_n)_*([\partial c_{E_-^k}]) \\ &= (\tau_n)_*(j_{k-1})_*([\partial c_{E_-^k}]) \\ &= (\tau_n)_*(d_k E_+^k) \\ &= (\tau_{k-1})_*(d_k E_+^k). \end{aligned}$$

Aber Korollar 8.9 besagt, dass $(\tau_{k-1})_*$ auf $H_{k-1}(S^{k-1})$ die Multiplikation mit $(-1)^k$ ist, und weil j_{k-1} eine natürliche Transformation ist gilt das Gleiche für $(\tau_{k-1})_*$ auf $H_{k-1}(S^{k-1}, S^{k-2})$, d.h.,

$$d_k E_-^k = (-1)^k d_k E_+^k \quad (9.33)$$

für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ (und natürlich ist $d_0 = 0$).

Aus (9.33) folgt, dass Bild d_k von $d_k(E_+^k)$ erzeugt wird und dass

$$d_k(E_-^k + (-1)^{k+1} E_+^k) = 0$$

und somit

$$E_-^k + (-1)^{k+1} E_+^k \in Z_k(W_*(S^n)).$$

Insbesondere sind die zellulären Zyklen­gruppen in Dimensionen $1 \leq k \leq n$ nicht $\{0\}$.

Nun ist aber $d_k \neq 0$ für $1 \leq k \leq n$, denn sonst ist $B_{k-1}(W_*(S^n)) = \{0\}$ und $H_{k-1}(S^n) \cong Z_{k-1}(W_*(S^n))$.

Für $1 < k \leq n$ ist das nicht möglich, weil für diese Dimensionen bekanntlich $H_{k-1}(S^n) = \{0\}$, aber die Zyklen­gruppe ist nicht $\{0\}$. Für $k = 1$ ist es nicht möglich, weil dann auf Grund der Tatsache, dass $d_0 = 0$ ist, gilt $H_0(S^n) \cong Z_0(W_*(S^n)) = W_0(S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Wir wissen aber, dass $H_0(S^n) \cong \mathbf{Z}$, da $n > 0$.

Also ist $B_{k-1}(W_*(S^n))$ eine nichttriviale zyklische Gruppe, erzeugt von $d_k(E_+^k)$, und sie enthält das Element $E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}$, als Vielfaches des Erzeugenden. Aber dieses Element ist Vielfaches nur von \pm sich selber.

In anderen Worten, für $1 < k \leq n$ ist

$$d_k(E_+^k) = \pm(E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}). \quad (9.34)$$

Betrachten wir jetzt das Bild des Ketten­komplexes $W_*(S^n)$ unter der Ketten­abbildung $W_*(\pi)$. Wir schreiben d' für den Randoperator von $W_*(\mathbf{R}P^n)$.

Da wir es so eingerichtet haben, dass $W_*(\pi)(E_{\pm}^k) = e_k$, erhalten wir aus (9.33) und (9.34) für $1 < k \leq n$, dass

$$\begin{aligned} d'_k(e_k) &= W_*(\pi)(d_k E_+^k) \\ &= \pm W_*(\pi)(E_-^{k-1} + (-1)^k E_+^{k-1}) \\ &= \pm(e_{k-1} + (-1)^k e_{k-1}) \end{aligned}$$

oder in anderen Worten,

$$d'_k(e_k) = \begin{cases} \pm 2e_{k-1}, & \text{wenn } k \text{ gerade ist und } 1 < k \leq n; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.35)$$

Und natürlich ist $d'(0) = 0$.

Hieraus erhalten wir

$$Z_k(W_*(\mathbf{R}P^n)) = \begin{cases} W_0(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ W_k(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}, & \text{wenn } 1 \leq k \leq n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$B_k(W_*(\mathbf{R}P^n)) = \begin{cases} 2W_k(\mathbf{R}P^n), & \text{wenn } 1 \leq k < n \text{ und } k \text{ ungerade ist;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bedeutet $2W_k(\mathbf{R}P^n)$ die Untergruppe von $W_k(\mathbf{R}P^n)$ bestehend aus allen „durch 2 teilbaren“ Elementen (die also 2 mal ein anderes Element sind). Da $W_k(\mathbf{R}P^n)$ zyklisch ist, sind das in diesem Fall alle geraden Vielfachen des Erzeugenden.

Bildet man den Quotienten $H_k(\mathbf{R}P^n) = Z_k/B_k$, so erhält man genau die behauptete Homologie des reellen projektiven Raumes. Die Homologie kann nur in Dimension 0 oder in den ungeraden Dimensionen von 1 bis n nichttrivial sein, weil in allen anderen Dimensionen schon die zellulären Zyklengruppen $\{0\}$ sind. In Dimension 0 oder in Dimension n , wenn dies ungerade ist, sind die Rändergruppen $\{0\}$ und die Homologie ist also isomorph zur Zyklengruppe, die unendlich zyklisch ist. In den ungeraden Dimensionen k mit $1 \leq k < n$ ist

$$H_k(\mathbf{R}P^n) = \frac{W_k(\mathbf{R}P^n)}{2W_k(\mathbf{R}P^n)} \cong \frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_2.$$

c): Wenn wir mit \mathbf{Z}_2 -Koeffizienten rechnen, ändert sich kaum etwas an den Details. Ähnlich wie für \mathbf{Z} -Koeffizienten gilt für die Homologie von S^n immer noch

$$H_k(S^n; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

(das kann man herleiten wie in Kapitel 8 oder man sieht es auch sehr einfach, wenn man die Homologie mit dem zellulären Kettenkomplex der CW-Zerlegung aus Beispiel 9.13 e) berechnet, in der es nur eine 0-Zelle und eine n -Zelle gibt).

Deshalb kann man für die CW-Zerlegung von S^n aus Beispiel 9.13 c), die wir zur Untersuchung von $\mathbf{R}P^n$ benutzen, den zellulären Randoperator d genauso herleiten wie in Teil b) mit \mathbf{Z} -Koeffizienten, außer dass man die Vorzeichen weglassen kann, weil jetzt $+1 = -1$.

Die Übertragung mit $W_*(\pi)$ nach $(W_*(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2), d')$ funktioniert auch auf die gleiche Weise wie in b) und Gleichung (9.35) gilt entsprechend, aber liest sich jetzt

$$d'_k(e_k) = 0 \quad \text{für alle } k \text{ mit } 0 \leq k \leq n,$$

da $2 = 0$ in \mathbf{Z}_2 .

Folglich sind alle Rändergruppen $\{0\}$ und jede Kette ist ein Zyklus, und wir haben

$$H_*(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong W_*(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 0 \leq k \leq n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

■

Kapitel 10

Homologische Algebra

Wir haben jetzt solide Grundkenntnisse über Homologietheorie, haben einige Anwendungen davon gesehen und im letzten Kapitel eine neue, vereinfachte Methode kennen gelernt, um Homologiegruppen zu berechnen.

Wir wissen, dass die Homologietheorie nicht alle topologische Fragen beantworten kann — das ist schon klar aus der Tatsache, dass die Homologie homotopieinvariant ist und somit Räume vom gleichen Homotopietyp und homotope Abbildungen nicht unterscheiden kann. Aber die Varianten der Homologietheorie, die wir bisher kennen gelernt haben, sind noch nicht einmal mächtig genug, um manche Fragen zu lösen, die prinzipiell für die Homologietheorie zugänglich sind. Es gibt einige wichtige Probleme, zu deren Lösung neue Varianten der Homologietheorie erforderlich sind.

Einen Vorgeschmack darauf haben wir in Kapitel 9 in der Berechnung der Homologie der Kleinschen Flasche und der reellen projektiven Räume gesehen. Obwohl die Kleinsche Flasche zweidimensional ist, verschwindet ihre zweidimensionale ganzzahlige Homologie. Obwohl $\mathbf{R}P^n$ in jeder Dimension $\leq n$ eine gleichaussehende geometrische Struktur hat, sieht man in der Homologie die Dimension n nur, wenn n ungerade ist, und die Dimensionen dazwischen sieht man unterschiedlich, je nachdem, ob sie gerade oder ungerade sind. Diese Besonderheiten verschwinden aber, sobald man \mathbf{Z}_2 -Koeffizienten verwendet.

Es kann sich also durchaus auch in anderen Fällen lohnen, andere Koeffizientenringe als \mathbf{Z} in der Homologie zu verwenden. Obwohl diese Erweiterung prinzipiell schon in Kapitel 6 eingeführt wurde, wollen wir sie bald auf eine neue, bequemere Weise wiederholen, die zudem den Vorteil hat, dass als Koeffizientenbereich dann nicht nur Ringe, sondern beliebige abelsche Gruppen zulässig sind.

Eine andere Art, die Homologietheorie zu erweitern, besteht in ihrer *Dualisierung*, d.h., wir ersetzen die Kettengruppen $C_k(X)$ durch ihre dualen

Gruppen $C^k(X) := \text{Hom}(C_k(X), \mathbf{Z})$ und ersetzen die Randoperatoren durch die von ihnen induzierten dualen Homomorphismen, und wir erhalten aus dem so konstruierten dualen Kettenkomplex einen *kontravarianten* Homologiefunktor, genannt die **Kohomologie** $H^*(X)$ des Raumes X . Auch hier kann man \mathbf{Z} durch eine andere Koeffizientengruppe ersetzen.

Ein sehr wichtiger Vorteil der Kohomologietheorie besteht darin, dass die graduierte Kohomologiegruppe $H^*(X)$ eines Raumes sogar eine graduierte *Ringstruktur* trägt, und diese Ringstruktur kann topologische Merkmale unterscheiden, die die additive Gruppenstruktur alleine nicht auseinanderhalten kann.

Dies mag wie ein sehr umfangreiches Programm erscheinen, aber es gibt eine erfreuliche Nachricht: es wird nicht nötig sein, diese neuen Theorien vom Fundament her aufzubauen und die ganze lange Herleitung der Homologietheorie für diese Varianten zu wiederholen, denn es gibt eine enge Beziehung zwischen den neuen Theorien und der uns schon gut bekannten ganzzahligen Homologie, die es erlaubt, die neuen Homologiegruppen oder Kohomologiegruppen aus der \mathbf{Z} -Homologie der gleichen Räume sehr einfach zu berechnen, mit Hilfe einer natürlichen kurzen exakten Folge.

Der Satz über die Existenz dieser kurzen exakten Folge nennt sich aus offensichtlichen Gründen der „Universelle Koeffizientensatz“ (in zwei Ausprägungen, einmal für die Homologie und einmal für die Kohomologie). Und es gibt sogar eine kostenlose Beigabe, denn mit einer anderen Variante des gleichen Satzes kann man die Homologie von Produkträumen ausrechnen (mit elementaren Mitteln ist das erstaunlich schwierig!).

Im nächsten Abschnitt des Semesters peilen wir also diese drei Universellen Koeffizientensätze an, die wie gesagt eine kurze exakte Folge als Berechnungshilfe bereitstellen. Was steht in dieser kurzen exakten Folge? An der mittleren Stelle steht die gewünschte Homologie- oder Kohomologiegruppe, aber an den anderen beiden Stellen stehen gewisse algebraische Funktoren von zwei Variablen, in denen man die \mathbf{Z} -Homologie und weitere Daten wie die Koeffizientengruppe eingegeben hat.

Bevor wir die Universellen Koeffizientensätze überhaupt formulieren können, müssen wir also diese algebraischen Funktoren einführen, und das wollen wir in diesem Kapitel tun.

Zwei von ihnen sind klassische Funktoren, die Sie zum Teil schon gut kennen, aber die anderen beiden sind sogenannte „abgeleitete Funktoren“, die aus den klassischen Funktoren mit Mitteln konstruiert werden, die sehr an die Konstruktion der Homologie erinnern — aus den klassischen Funktoren wird eine lange fast exakte Folge hergeleitet, und die abgeleiteten Funktoren sind eine gewisse Homologiegruppe dieser Folge (die ein Kettenkomplex ist) und messen, wie inexakt diese Folge ist.

Weil hier algebraische Konstruktionen mit den Methoden der Homologietheorie durchgeführt werden, heißt das entsprechende Gebiet, in das wir einen kleinen Einblick nehmen wollen, *homologische Algebra*.

Die Funktoren, die wir konstruieren wollen, heißen \otimes (*Tensorprodukt*), Hom , Tor und Ext , und alle vier sind Funktoren $\text{AbGp} \times \text{AbGp} \longrightarrow \text{AbGp}$, wobei \otimes und Tor in beiden Variablen kovariant sind, und Hom und Ext in der ersten Variablen kontravariant und in der zweiten Variablen kovariant sind. Die gleichen Funktoren gibt es übrigens auch als Funktoren

$$R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod},$$

wo R ein kommutativer Ring mit 1 ist und $R\text{-Mod}$ die Kategorie der Moduln über R ist, aber einige Schritte in der Konstruktion der Funktoren werden in dieser Kategorie wesentlich komplizierter. Da uns die viel elementarere Version für abelsche Gruppen reichen wird, verzichten wir gerne auf diese Allgemeinheit.

Alle vier genannte Funktoren haben, in jeder Variablen einzeln, noch ein weiteres wichtiges Merkmal, das wir zuerst besprechen wollen, um später die interessanten davon abhängenden Eigenschaften nicht für jeden Funktor einzeln beweisen zu müssen.

Bemerkung 10.1 Sei \mathcal{C} eine Kategorie, deren Objekte additive abelsche Gruppen sind (eventuell mit zusätzlicher Struktur). Beispiele solcher Kategorien sind natürlich AbGp , aber auch GAG , Ring , $K\text{-VR}$ für einen Körper K , $R\text{-Mod}$ für einen Ring R , die Kategorie KK der Kettenkomplexe und viele andere.

Seien A und $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Für je zwei Morphismen f und $g \in \text{Mor}(A, B)$ definieren wir wie üblich eine mengentheoretische Abbildung $f + g$ von A nach B durch

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a) \in B \quad \text{für jedes } a \in A.$$

Entsprechend definieren wir eine Abbildung $-f$ von A nach B durch

$$(-f)(a) := -(f(a)) \in B \quad \text{für jedes } a \in A.$$

Und wir definieren die **Nullabbildung** von A nach B als die konstante Abbildung $\mathbf{0}$ mit $\mathbf{0}(a) = 0 \in B$ für jedes $a \in A$.

Wir nehmen an, dass für je zwei Morphismen f und $g \in \text{Mor}(A, B)$ die Abbildung $f + g$ auch ein Morphismus der Kategorie \mathcal{C} ist, ferner dass für jedes $f \in \text{Mor}(A, B)$ die Abbildung $-f$ auch ein Morphismus von \mathcal{C} ist, und schließlich, dass die Nullabbildung ein Morphismus von \mathcal{C} ist — diese Annahmen gelten in den oben genannten Kategorien, darunter in AbGp .

Dann wird $\text{Mor}(A, B)$ mit der Operation $+$ zu einer additiven abelschen Gruppe, dessen neutrales Element die Nullabbildung ist, und mit $-f$ als das inverse Element zu f für jeden Morphismus f .

Insbesondere können wir Homomorphismen zwischen zwei festen additiven abelschen Gruppen G und H addieren, und die Menge aller Gruppenhomomorphismen $G \rightarrow H$ bildet eine additive abelsche Gruppe $\text{Hom}(G, H)$.

Definition 10.2 Ein (ko- oder kontravarianter) Funktor

$$F: \text{AbGp} \rightarrow \text{AbGp}$$

(oder zwischen anderen Kategorien wie in Bemerkung 10.1, deren Morphismenmengen additive abelsche Gruppen sind) heißt **additiv**, wenn für je zwei additive abelsche Gruppen G und H und je zwei Gruppenhomomorphismen f und $g: G \rightarrow H$ gilt

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Ein (ko-, kontra- oder gemischtvarianter) Funktor von zwei Variablen

$$F: \text{AbGp} \times \text{AbGp} \rightarrow \text{AbGp}$$

heißt **additiv**, wenn F in jeder Variablen einzeln additiv ist, d.h., wenn für je zwei Paaren (G, H) und (K, L) von additiven abelschen Gruppen und für je zwei Homomorphismen f und $g: G \rightarrow K$ und je zwei Homomorphismen h und $k: H \rightarrow L$ gilt

$$F(f + g, h) = F(f, h) + F(g, h)$$

und

$$F(f, h + k) = F(f, h) + F(f, k).$$

Bei diesen Formeln spielt es keine Rolle, ob F ko- oder kontravariant ist in den einzelnen Variablen; das hat nur einen Einfluss darauf, auf welchen Gruppenpaaren die von F zugeordneten Bildhomomorphismen definiert sind und wohin sie abbilden.

Bemerkung 10.3 Sei $F: \text{AbGp} \rightarrow \text{AbGp}$ ein additiver Funktor und seien G und H additive abelsche Gruppen.

- a) Sei $\mathbf{0}: G \rightarrow H$ die Nullabbildung. Dann ist auch $F(\mathbf{0})$ die Nullabbildung (zwischen den Gruppen $F(G)$ und $F(H)$).

b) Für jeden Homomorphismus $f: G \longrightarrow H$ ist

$$F(-f) = -F(f).$$

c) Für jeden Homomorphismus $f: G \longrightarrow H$ und für jedes $n \in \mathbf{Z}$ ist

$$F(n \cdot f) = n \cdot F(f).$$

Beweis. Zu a): Aus der Definition von $+$ ist klar, dass $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Wir haben nach Definition eines additiven Funktors $F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) + F(\mathbf{0})$, also gilt für jedes c in der Quellgruppe von $F(\mathbf{0})$, dass

$$F(\mathbf{0})(c) = (F(\mathbf{0}) + F(\mathbf{0}))(c) = F(\mathbf{0})(c) + F(\mathbf{0})(c)$$

und Subtraktion von $F(\mathbf{0})(c)$ von beiden Seiten liefert $F(\mathbf{0})(c) = 0$ für jedes c , also ist $F(\mathbf{0})$ die Nullabbildung.

b) folgt aus a), da $F(-f) + F(f) = F(-f + f) = F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

c) folgt für positive n durch Induktion aus der Definition von „additiv“, für $n = 0$ aus a), da $0 \cdot g = \mathbf{0}$ für jeden Homomorphismus g , und für negative n aus der Behauptung für den positiven Fall und b), da

$$F(n \cdot f) = F\left(-((-n) \cdot f)\right) \stackrel{b)}{=} -F((-n) \cdot f) = -((-n) \cdot F(f)) = n \cdot F(f).$$

■

Korollar 10.4 Sei $F: AbGp \longrightarrow AbGp$ ein additiver Funktor. Dann ist

$$F(\{0\}) = \{0\}$$

Beweis. Aus Bemerkung 10.3 a) folgt

$$\text{id}_{F(\{0\})} = F(\text{id}_{\{0\}}) = F(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

und die einzige Gruppe, deren Identitätshomomorphismus die Nullabbildung ist, ist $\{0\}$. ■

Lemma 10.5 Sei

$$F: AbGp \longrightarrow AbGp$$

ein additiver Funktor. Dann gibt es für je zwei additive abelsche Gruppen G und H einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi: F(G \oplus H) \longrightarrow F(G) \oplus F(H),$$

den wir wie folgt definieren können.

Für jedes Paar (G, H) von additiven abelschen Gruppen seien i_G und i_H die Inklusionen

$$\begin{aligned} i_G: G &\longrightarrow G \oplus H \\ g &\longmapsto (g, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} i_H: H &\longrightarrow G \oplus H \\ h &\longmapsto (0, h) \end{aligned}$$

und seien

$$\pi_G: G \oplus H \longrightarrow G$$

und

$$\pi_H: G \oplus H \longrightarrow H$$

die Projektionen. Diese Homomorphismen sind alle natürliche Transformationen (zwischen Funktoren $AbGp \times AbGp \longrightarrow AbGp$).

Wir setzen

$$\Phi := \begin{cases} i_{F(G)} \circ F(\pi_G) + i_{F(H)} \circ F(\pi_H) & (F \text{ kovariant}) \\ i_{F(G)} \circ F(i_G) + i_{F(H)} \circ F(i_H) & (F \text{ kontravariant}) \end{cases} \quad (10.1)$$

Die Umkehrabbildung von Φ nennen wir Ψ und sie wird gegeben durch

$$\Psi := \begin{cases} F(i_G) \circ \pi_{F(G)} + F(i_H) \circ \pi_{F(H)} & (F \text{ kovariant}) \\ F(\pi_G) \circ \pi_{F(G)} + F(\pi_H) \circ \pi_{F(H)} & (F \text{ kontravariant}) \end{cases} \quad (10.2)$$

Beweis. Für jedes Paar (A, B) von additiven abelschen Gruppen gelten die Relationen

$$\pi_A \circ i_A = \text{id}_A \qquad \pi_B \circ i_B = \text{id}_B \quad (10.3a)$$

$$\pi_A \circ i_B = \mathbf{0} \qquad \pi_B \circ i_A = \mathbf{0} \quad (10.3b)$$

$$i_A \circ \pi_A + i_B \circ \pi_B = \text{id}_{A \oplus B}. \quad (10.3c)$$

Wir müssen zwei Dinge beweisen: erstens, dass die oben angegebenen Abbildungen Φ und Ψ tatsächlich die behaupteten Gruppen $F(G \oplus H)$ und $F(G) \oplus F(H)$ in der richtigen Pfeilrichtung verbinden, und zweitens, dass ihre Verknüpfung in beiden möglichen Reihenfolgen jeweils die Identität liefert.

Der kontravariante Fall unterscheidet sich nicht wesentlich vom kovarianten Fall, außer dass an manchen Stellen die Pfeilrichtung sich umkehrt. Wir

wollen es deshalb so einrichten, dass wir für beide Varianzfälle einen einheitlichen Beweis durchführen können, in dem wir für die beteiligten Inklusionen und Projektionen neue, von der Varianz abhängige Namen einführen, die dann in diesem einheitlichen Beweis verwendet werden.

Im kovarianten Fall werden wir α für i schreiben und β für π , und im kontravarianten Fall machen wir es gerade umgekehrt und schreiben α für π und β für i .

Das bedeutet, dass wenn C eine der beiden Gruppen A und B ist, so ist für beide Varianzen nach Anwendung von F die Richtung der Bildhomomorphismen einheitlich

$$\begin{aligned} F(\alpha_C): F(C) &\longrightarrow F(A \oplus B) & \text{und} \\ F(\beta_C): F(A \oplus B) &\longrightarrow F(C). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Wir können mit dieser variablen Notation jetzt auch Φ und Ψ auf einheitliche Weise schreiben, und zwar ist

$$\Phi = i_{F(G)} \circ F(\beta_G) + i_{F(H)} \circ F(\beta_H) \quad (10.5)$$

und

$$\Psi = F(\alpha_G) \circ \pi_{F(G)} + F(\alpha_H) \circ \pi_{F(H)}, \quad (10.6)$$

wie man leicht bestätigen kann.

Aus (10.4) und (10.5) ist klar, dass Φ in beiden Varianzfällen tatsächlich ein Homomorphismus $F(G \oplus H) \longrightarrow F(G) \oplus F(H)$ ist, denn der rechte Faktor der Summanden bildet $F(G \oplus H)$ nach $F(G)$ oder $F(H)$ ab, der linke Faktor ist die Inklusion davon nach $F(G) \oplus F(H)$.

Entsprechend ist aus (10.4) und (10.6) klar, dass Ψ in beiden Varianzfällen tatsächlich ein Homomorphismus $F(G) \oplus F(H) \longrightarrow F(G \oplus H)$ ist, denn der rechte Faktor der Summanden ist die Projektion von $F(G) \oplus F(H)$ nach $F(G)$ oder $F(H)$ und der linke Faktor bildet dies nach $F(G \oplus H)$ ab.

Durch Anwendung von F auf die Relationen (10.3) erhalten wir:

$$F(\beta_A) \circ F(\alpha_A) = \text{id}_{F(A)} \quad F(\beta_B) \circ F(\alpha_B) = \text{id}_{F(B)} \quad (10.7a)$$

$$F(\beta_A) \circ F(\alpha_B) = \mathbf{0} \quad F(\beta_B) \circ F(\alpha_A) = \mathbf{0} \quad (10.7b)$$

$$F(\alpha_A) \circ F(\beta_A) + F(\alpha_B) \circ F(\beta_B) = \text{id}_{F(A \oplus B)}. \quad (10.7c)$$

Die rechten Seiten sind wie angegeben, weil F , wie jeder Funktor, einen Identitätsmorphimus in die Identität des Bildobjekts überführt und weil F als additiver Funktor Nullhomomorphismen in Nullhomomorphismen überführt, nach Bemerkung 10.3 a).

Im kovarianten Fall erhalten wir die linken Seiten von (10.7a) und (10.7b), weil F Verknüpfungen unter *Beibehaltung* ihrer Reihenfolge respektiert, und weil das β im linken Faktor das π aus den linken Faktoren von (10.3a) und (10.3b) bedeutet und das α im rechten Faktor das i aus den rechten Faktoren von (10.3a) und (10.3b) bedeutet.

Im kontravarianten Fall erhalten wir aber auch die linken Seiten von (10.7a) und (10.7b), weil jetzt F Verknüpfungen unter *Vertauschung* ihrer Reihenfolge respektiert aber dafür auch die Bedeutungen von β und α jetzt vertauscht sind; das β in den linken Faktoren von (10.7a) und (10.7b) entspricht jetzt dem i in den *rechten* Faktoren von (10.3a) und (10.3b), und das α in den rechten Faktoren von (10.7a) und (10.7b) entspricht dem π in den *linken* Faktoren von (10.3a) und (10.3b).

Wenn wir F auf die Summe auf der linken Seite von (10.3c) anwenden, erhalten wir in (10.7c) die Summe der Werte von F auf den einzelnen Summanden, weil F additiv ist, und der Wert von F auf den einzelnen Summanden ist wie in (10.7c) angegeben, weil Funktoren Verknüpfung von Morphismen respektieren, wobei im kovarianten Fall, wo F die Verknüpfungsreihenfolge erhält, α bzw. β in den linken und rechten Faktoren in (10.7c) dem i bzw. π in den linken und rechten Faktoren in (10.3c) entspricht, und im kontravarianten Fall, wo F die Verknüpfungsreihenfolge vertauscht, auch die Bedeutung von α und β entsprechend vertauscht ist.

Wir können jetzt leicht nachprüfen, dass $\Psi \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Psi$ Identitäten sind.

Wenn wir $\Psi \circ \Phi$ bilden, erhalten wir aus (10.5) und (10.6) eine Summe von vier Verknüpfungen von jeweils vier Faktoren, deren beide mittlere Faktoren die Form

$$\pi_{F(C)} \circ i_{F(D)} \quad (10.8)$$

haben, wobei jedes von C und D , unabhängig voneinander, entweder G oder H ist (in den vier Summanden erscheinen die vier möglichen Zuordnungen von G und H zu C und D).

Die Verknüpfung (10.8) ist die Identität wenn $C = D$, nach (10.3a), und ist $\mathbf{0}$ wenn $C \neq D$, nach (10.3b). Also werden die Summanden mit $C \neq D$ Null und müssen nicht hingeschrieben werden, und in den anderen Summanden ergeben die mittleren Faktoren die Identität, weshalb diese Faktoren weggekürzt werden können. Mit diesen Kürzungen und Vereinfachungen finden wir

$$\Psi \circ \Phi = F(\alpha_G) \circ F(\beta_G) + F(\alpha_H) \circ F(\beta_H) = \text{id}_{F(G \oplus H)}$$

nach Gleichung (10.7c).

Wenn wir $\Phi \circ \Psi$ bilden, erhalten wir aus (10.5) und (10.6) eine Summe von vier Verknüpfungen von jeweils vier Faktoren, deren beide mittlere Faktoren

die Form

$$F(\beta_C) \circ F(\alpha_D) \quad (10.9)$$

haben, wobei jedes von C und D , unabhängig voneinander, entweder G oder H ist (in den vier Summanden erscheinen die vier möglichen solchen Zuordnungen).

Die Verknüpfung (10.9) ist die Identität wenn $C = D$, nach (10.7a), und ist $\mathbf{0}$ wenn $C \neq D$, nach (10.7b). Also werden die Summanden mit $C \neq D$ Null und müssen nicht hingeschrieben werden, und in den anderen Summanden ergeben die mittleren Faktoren die Identität, weshalb diese Faktoren weggelassen werden können. Mit diesen Kürzungen und Vereinfachungen finden wir

$$\Phi \circ \Psi = i_{F(G)} \circ \pi_{F(G)} + i_{F(H)} \circ \pi_{F(H)} = \text{id}_{F(G) \oplus F(H)}$$

nach Gleichung (10.3c) mit $F(G)$ für A und $F(H)$ für B .

Da die Verknüpfung von Φ mit Ψ in beiden Reihenfolgen die Identität liefert, sind Φ und Ψ Isomorphismen. Und sie sind natürlich, weil i_G , i_H , π_G und π_H natürliche Transformationen sind, wie auch ihre Verknüpfung in beiden Reihenfolgen mit dem Funktor F , und weil Φ und Ψ Summen von Verknüpfungen der genannten natürlichen Transformationen sind.

Also sind die in (10.1) und (10.2) angegebenen Homomorphismen Φ und Ψ wie behauptet natürliche Äquivalenzen zwischen den Funktoren $F(G \oplus H)$ und $F(G) \oplus F(H)$. ■

Bemerkung 10.6 Sei

$$F: \text{AbGp} \longrightarrow \text{AbGp}$$

ein additiver Funktor. Dann respektiert F beliebige *endliche* direkte Summen, d.h., wenn G_1, G_2, \dots, G_n endlich viele additive abelsche Gruppen sind, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$F\left(\bigoplus_{i=1}^n G_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n F(G_i), \quad (10.10)$$

wie durch Induktion leicht aus Lemma 10.5 zu schließen ist.

Für *unendliche* direkte Summen muss eine Beziehung wie in (10.10) *nicht* gelten! Additive Funktoren, die (10.10) auch für direkte Summen mit unendlich vielen Summanden erfüllen, nennt man **stark additiv**.

Die wichtigen Funktoren, die wir in diesem Kapitel einführen wollen, sind alle additiv und vertragen sich deshalb im Sinne von Beziehung (10.10) mit

endlichen direkten Summen. Das werden wir ausnutzen zur Berechnung dieser Funktoren, denn in der Mehrzahl werden die uns interessierenden Gruppen endlich erzeugt sein (z.B. sind die Homologiegruppen von kompakten CW-Räumen immer endlich erzeugt, weil schon der zelluläre Kettenkomplex endlich erzeugt ist, da es nur endlich viele Zellen gibt).

Endlich erzeugte abelsche Gruppen sind immer darstellbar als eine endliche direkte Summe von zyklischen Gruppen; das ist die Aussage des berühmten Struktursatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen aus der elementaren Algebra, an dessen Beweis wir gleich zumindest im Skript erinnern werden (obwohl wir ihn nicht in der Vorlesung vortragen werden). Auf Grund dieses Satzes und der Beziehung (10.10) reduziert sich die Berechnung additiver Funktoren für endlich erzeugte abelsche Gruppen auf die Berechnung des Funktors für zyklische Gruppen.

Bevor wir diesen klassischen Satz in Erinnerung rufen, führen wir noch einige nützliche Gruppeneigenschaften und Begriffe ein, die auch im nicht-endlich erzeugten Fall sinnvoll und für unsere Funktoren relevant sind.

Definition 10.7 Sei G eine additive abelsche Gruppe und sei $a \in G$.

Wir erinnern an die Definition der **Ordnung** von a , die wir mit $\text{Ord } a$ bezeichnen; sie ist die kleinste positive natürliche Zahl n , so dass $n \cdot a = 0$, falls es überhaupt solche positive natürliche Zahlen gibt, oder ist ∞ , wenn es keine solche Zahlen gibt (außer 0).

Ein Element $a \in G$ endlicher Ordnung nennt man ein **Torsionselement**. Das neutrale Element 0 ist immer ein Torsionselement, da es Ordnung 1 hat.

G nennt sich eine **Torsionsgruppe**, wenn jedes Element von G endliche Ordnung hat (die aber nicht beschränkt sein muss!), also wenn jedes Element ein Torsionselement ist. Hingegen heißt G **torsionsfrei**, wenn kein Element $a \neq 0$ endliche Ordnung hat, also wenn 0 das einzige Torsionselement ist.

In jeder Gruppe G bilden die Torsionselemente eine Untergruppe $T(G)$, genannt die **Torsionsuntergruppe** von G , denn 0 ist ein Torsionselement, und wenn a Ordnung m und b Ordnung n hat, so ist $m \cdot (-a) = 0$ und $(mn) \cdot (a + b) = 0$, so dass das Inverse eines Torsionselementes wie auch die Summe zweier Torsionselemente auch Torsionselemente sind.

Bemerkung 10.8 Genau dann ist eine additive abelsche Gruppe G eine Torsionsgruppe, wenn $T(G) = G$.

Genau dann ist G torsionsfrei, wenn $T(G) = \{0\}$.

Lemma und Definition 10.9 Seien G und H additive abelsche Gruppen und sei $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus.

Dann ist

$$f(T(G)) \subseteq T(H). \quad (10.11)$$

Insbesondere können wir definieren

$$T(f) := f|T(G): T(G) \longrightarrow T(H).$$

Mit dieser Zuordnung wird der Torsionsanteil zu einem Funktor

$$T: \text{AbGr} \longrightarrow \text{AbGr},$$

genannt der **Torsionsanteil**.

Dieser Funktor ist nicht zu verwechseln mit dem Funktor Tor , denn wir später definieren werden.

Beweis. Wir müssen nur (10.11) beweisen. Das ist aber klar, denn wenn $a \in T(G)$ und $n = \text{Ord } a$, so ist

$$n \cdot f(a) = f(na) = f(0) = 0$$

und $f(a) \in T(H)$. ■

Lemma 10.10 a) Für jede additive abelsche Gruppe G ist der Quotient $G/T(G)$ torsionsfrei.

b) Jede freie additive abelsche Gruppe ist torsionsfrei.

Beweis. a): Sei α ein Torsionselement von $G/T(G)$ und sei $a \in G$ mit $\alpha = [a]$. Sei $n := \text{Ord } \alpha$. Dann ist $n\alpha = n[a] = [na] = 0$, also ist $na \in T(G)$. Somit gibt es eine Zahl $m > 0 \in \mathbf{N}$ mit $0 = m(na) = (mn)a$. Also war a schon ein Torsionselement und $\alpha = [a] = 0$.

Also ist 0 das einzige Torsionselement von $G/T(G)$ und diese Gruppe ist torsionsfrei.

a): Sei G eine freie additive abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Menge X mit $G \cong F(X)$, und es reicht zu zeigen, dass $F(X)$ torsionsfrei ist.

Aber $F(X)$ ist eine Untergruppe von \mathbf{Z}^X und deshalb reicht es zu zeigen, dass die Gruppe \mathbf{Z}^X torsionsfrei ist.

Das ist sie, weil bekanntlich \mathbf{Z} torsionsfrei ist. Denn wenn $f: X \longrightarrow \mathbf{Z}$ ein Element von \mathbf{Z}^X ist und wenn $nf = 0$ für $n > 0 \in \mathbf{N}$, so ist $n \cdot f(x) = 0$ und somit $f(x) = 0$ in \mathbf{Z} für jedes $x \in X$. D.h., 0 ist das einzige Torsionselement von \mathbf{Z}^X und \mathbf{Z}^X , somit auch $F(X)$, ist torsionsfrei. ■

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch einen „dualen“ Begriff zur Torsionsgruppe:

Definition 10.11 Sei G eine additive abelsche Gruppe und sei $a \in G$.

Sei $n > 0 \in \mathbf{N}$. Wir sagen, a ist n -**divisibel**, wenn a durch n „teilbar“ ist, d.h., wenn es ein Element $b \in G$ gibt mit $nb = a$.

Wir nennen a schlicht **divisibel**, wenn a n -divisibel ist für jede positive natürliche Zahl n .

Die Gruppe G heißt **divisibel**, wenn jedes Element von G divisibel ist.

Außer für gelegentliche Beispiele wird für uns der Begriff **divisibel** nicht eine besonders wichtige Rolle spielen, da Torsionsgruppen in Gegensatz zu divisiblen Gruppen überall in der Mathematik auftreten (jede endliche Gruppe, z.B., ist automatisch eine Torsionsgruppe), während nur einige spezielle häufig verwendete Gruppen divisibel sind, und diese Eigenschaft zwar zufällig besitzen, aber nicht gerade deshalb von besonderer Bedeutung sind.

Hier sind einige Beispiele:

Beispiele 10.12 a) Eine nichttriviale freie additive abelsche Gruppe G ist immer torsionsfrei, aber nie divisibel.

Die Eigenschaft „torsionsfrei“ haben wir gerade bewiesen.

Und wenn $X \subseteq G$ eine Basis von G ist, so ist wegen der Eindeutigkeit der Darstellung ein Element

$$a = \sum_{x \in X} c_x x$$

genau dann n -divisibel, wenn alle Koeffizienten c_x durch n teilbar sind. Da das (außer wenn $a = 0$) nur für endlich viele n der Fall sein kann, ist kein nichttriviales Element von G divisibel, und somit ist auch G nicht divisibel.

b) Eine nichttriviale endliche additive abelsche Gruppe G ist immer eine Torsionsgruppe, aber nie divisibel.

Denn in einer endlichen Gruppe können nicht alle Vielfache eines Elements a verschieden sein.

Aber aus $ma = na$ für $m \neq n$ folgt $(m - n)a = 0$, und somit ist jedes Element $a \in G$ ein Torsionselement und G eine Torsionsgruppe. Nicht nur das: wenn N das kleinste gemeinsame Vielfache (oder das Produkt) der Ordnungen der endlich vielen Elementen von G ist, so ist $Na = 0$ für jedes $a \in G$ und somit kann kein Element außer 0 N -divisibel sein. G ist somit keine divisible Gruppe.

c) Die additiven Gruppen \mathbf{Q} , \mathbf{R} und \mathbf{C} , oder allgemeiner jeder Oberkörper von \mathbf{Q} , ist torsionsfrei und divisibel.

Denn \mathbf{Q} und seine Oberkörper enthalten \mathbf{Z} als Unterring, und weil sie Körper (und somit auch Integritätsbereiche) sind, kann man jedes Element durch jede ganze Zahl außer 0 dividieren, und kein Produkt eines Elementes $\neq 0$ mit einer ganzen Zahl $\neq 0$ verschwindet.

- d) Die multiplikative Gruppe $S^1 \subseteq \mathbf{C}$, die zu \mathbf{R}/\mathbf{Z} isomorph ist vermöge der Abbildung $t \mapsto e^{2\pi it}$, ist divisibel, weil \mathbf{R} divisibel ist, aber sie ist weder torsionsfrei noch eine Torsionsgruppe.

Ihre Torsionsuntergruppe ist die Gruppe im nächsten Beispiel:

e)

$$\begin{aligned} C &:= \{ z \in \mathbf{C} \mid z \text{ ist eine Einheitswurzel} \} \\ &= \{ z \in \mathbf{C} \mid \exists n > 0 \in \mathbf{N} \text{ mit } z^n = 1 \} \\ &\cong \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}} \end{aligned}$$

ist nach Definition eine Torsionsgruppe, aber als Quotient von \mathbf{Q} auch divisibel.

Wir wollen uns jetzt die Zerlegung einer abelschen Gruppe in die Torsionsuntergruppe und den torsionsfreien Quotienten nach dieser Untergruppe näher ansehen. Beispiele 10.12 c) und a) zeigen, dass eine torsionsfreie Gruppe nicht unbedingt frei sein muss, denn \mathbf{Q} ist torsionsfrei aber nicht frei (da eine nichttriviale freie abelsche Gruppe nicht divisibel sein kann).

Außerdem ist die Bildung des torsionsfreien „Anteils“ einer Gruppe als Quotient bei weitem nicht so bequem, wie eine Zerlegung der ganzen Gruppe als die direkte Summe der Torsionsuntergruppe und eines torsionsfreien Komplementes.

Wenn die Gruppe aber endlich erzeugt ist, verschwinden beide Schwierigkeiten, als eine Konsequenz des Struktursatzes für endlich erzeugte abelsche Gruppen, an den wir jetzt kurz erinnern wollen.

Zunächst eine einfache aber nützliche Tatsache über endliche zyklische Gruppen:

Lemma 10.13 *Seien m und n positive natürliche Zahlen. Wenn m und n teilerfremd sind, dann ist*

$$\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_{mn}$$

und diese zyklische Gruppe wird erzeugt vom Element $(1, 1) \in \mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$.

Beweis. Wir berechnen die Ordnung des Elementes $(1, 1)$. Für $k \in \mathbf{N}$ ist

$$k(1, 1) = (k, k) = 0 \in \mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$$

genau dann, wenn $m \mid k$ und $n \mid k$, und das gilt genau dann, wenn $mn \mid k$, da m und n teilerfremd sind.

Das bedeutet, dass die Elemente $k(1, 1)$ für $0 \leq k < mn$ alle verschieden sind, d.h., die von $(1, 1)$ erzeugte zyklische Untergruppe $\langle (1, 1) \rangle$ von $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$ hat mindestens mn Elemente.

Aber die ganze Gruppe $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$ hat auch nur mn Elemente, da sie als Menge gleich $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ ist. Also ist $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n = \langle (1, 1) \rangle$, und dies ist eine zyklische Gruppe mit mn Elementen, isomorph zu \mathbf{Z}_{mn} . ■

Satz 10.14 Sei G eine endlich erzeugte additive abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Zahl n (genannt der **Rang** von G) und es gibt (nicht unbedingt verschiedene) natürliche Zahlen $d_1, d_2, \dots, d_s > 1$, so dass

$$G \cong \mathbf{Z}^n \oplus \mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{d_s}, \quad (10.12)$$

wobei n eindeutig bestimmt ist, und man die d_i so wählen kann, dass

$$d_s \mid d_{s-1} \mid \cdots \mid d_1,$$

oder man kann sie alle als Primzahlpotenzen wählen; in beiden Fällen sind die d_i (bis auf Reihenfolge, wenn man sie als Primzahlpotenzen wählt) eindeutig bestimmt.

Die d_i heißen die **Torsionskoeffizienten** von G .

Man beachte, dass

$$\mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{d_s}$$

die Torsionsuntergruppe von G ist.

Wenn G von m Elementen erzeugt werden kann, dann ist der Rang höchstens m (und ist gleich m , nur wenn G frei ist).

Beweis. Der Satz wird üblicherweise in der einführenden Algebravorlesung bewiesen, manchmal sogar in der Anfängervorlesung Lineare Algebra. Aus diesem Grund werden wir den Beweis nicht vortragen. Damit Sie ihn aber nachlesen können, falls Sie ihn noch nicht kennen, wird er hier kurz skizziert.

Dieser Beweis muss mit großer Vorsicht geführt werden, damit er klappt, und er ist deshalb etwas kompliziert. Wenn Sie Verständnisschwierigkeiten haben, lesen Sie zuerst den Beweis von Satz 10.16 weiter unten, der die gleiche Idee in viel einfacherer Form verwendet.

Sei

$$X := \{g_i \mid 1 \leq i \leq m\} \subseteq G$$

eine endliche Teilmenge von G , die G erzeugt, und sei m die Anzahl der Elemente von X .

G ist ein Quotient von der freien abelschen Gruppe $F(X)$ und im folgenden Beweis werden wir den „Nenner“ dieses Quotienten näher untersuchen. Um aber Missverständnisse über die Bedeutung der Elemente g_i zu vermeiden, werden wir nicht direkt mit $F(X)$ arbeiten, sondern mit der zu ihr isomorphen freien abelschen Gruppe \mathbf{Z}^m .

Die Elemente von \mathbf{Z}^m sind m -Tupel

$$a = (a_1, \dots, a_m)$$

von ganzen Zahlen, und für jedes i mit $1 \leq i \leq m$ haben wir die Projektion

$$\begin{aligned} \pi_i: \mathbf{Z}^m &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ a &\longmapsto a_i. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir eine Projektion $p: \mathbf{Z}^m \longrightarrow G$ gegeben durch

$$p(a_1, \dots, a_m) := \sum_{i=1}^m a_i g_i.$$

Sei $A := \text{Ker } p \subseteq \mathbf{Z}^m$. Die Projektion p ist surjektiv, weil die g_i eine Erzeugendenmenge von G bilden, und p induziert deshalb einen Isomorphismus

$$\frac{\mathbf{Z}^m}{A} \cong G.$$

Wir werden zeigen, dass es eine Basis b_1, \dots, b_m von \mathbf{Z}^m gibt und eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ von A (mit $s \leq m$), so dass jedes α_i ein Vielfaches des entsprechenden Basiselementes b_i von \mathbf{Z}^m ist. Dadurch wird sofort klar, dass der Quotient \mathbf{Z}^m/A eine direkte Summe von zyklischen Gruppen ist.

Für jedes i mit $1 \leq i \leq m+1$ setzen wir

$$N_i := \bigcap_{j < i} \text{Ker } \pi_j \quad \text{und} \quad A_i = A \cap N^i. \quad (10.13)$$

Offensichtlich ist

$$A = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_m \supseteq A_{m+1} = \{0\}.$$

Für jedes i mit $1 \leq i \leq m$ betrachten wir in \mathbf{Z} die Untergruppe

$$U_i := \pi_i(A_i).$$

Wenn $U_i \neq \{0\}$ ist, wird diese Gruppe erzeugt von ihrem kleinsten positiven Element u_i , und wir wählen ein Element $\alpha_i \in A_i$ mit

$$\pi_i(\alpha_i) = u_i. \quad (10.14)$$

Wenn $U_i = \{0\}$ setzen wir $u_i = \infty$ und $\alpha_i = 0$.

So gewählt, erfüllen die α_i leider noch nicht die gewünschten Eigenschaften; diese erreichen wir nur, wenn wir bei der Auswahl etwas Sorgfalt walten lassen, also wenn wir diese Konstruktion unter geeigneten Bedingungen durchführen. Dafür gilt folgender Maßstab.

Für jedes Element $a = (a_1, \dots, a_m)$ von \mathbf{Z}^m setzen wir

$$|a| := \sum_{j=1}^m |\pi_j(a)|.$$

Die oben erläuterte Konstruktion der α_i unter Verwendung der Daten u_i bewerten wir mit einer „Kennzahl“, genauer mit einem $2m$ -Tupel von Zahlen

$$\mu := (u_1, |\alpha_1|, u_2, |\alpha_2|, \dots, u_m, |\alpha_m|) \in (\mathbf{N} \cup \{\infty\})^{2m}.$$

Dieses Tupel μ ändert sich, wenn man die α_i anders wählt (aber immer noch mit $\pi_i(\alpha_i) = u_i$), aber auch, wenn man einen Koordinatenwechsel, also einen Basiswechsel auf \mathbf{Z}^m durchführt und die Definition der u_i und die Wahl der α_i in den neuen Koordinaten vornimmt. Denn die Werte dieser Daten sind natürlich koordinatenabhängig.

Wir wählen neue Koordinaten auf \mathbf{Z}^m (bezüglich einer Basis b_1, \dots, b_m), und in diesen Koordinaten die Elemente $\alpha_i \in A_i$ im Einklang mit (10.14) so, dass das Element μ minimal wird in der lexikographischen Ordnung auf $(\mathbf{N} \cup \{\infty\})^{2m}$, d.h. minimal unter den Ergebnissen, die mit allen möglichen Basen von \mathbf{Z}^m und allen möglichen Wahlen der α_i zu erzielen sind.

Zur Erinnerung, in der lexikographischen Ordnung ist ein Tupel genau dann kleiner als ein anderes, wenn die früheste Koordinate, bei der sich die Tupel unterscheiden, beim ersten Tupel kleiner ist als beim zweiten; die Größe späterer Koordinaten spielt dann beim Vergleich keine Rolle mehr.

Wenn die Konstruktion der α_i auf eine nach dem genannten Maßstab günstigste Weise vorgenommen wurde, dann, so behaupten wir, gilt

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m \tag{10.15}$$

und es gilt

$$\alpha_i = u_i b_i \tag{10.16}$$

für alle i , für die u_i endlich ist (wenn $u_i = \infty$ ist ja $\alpha_i = 0$).

Zunächst bemerken wir, dass es für kein Element $a \in A_i$ einen Index j gibt mit

$$0 < \pi_j(a) < u_i, \tag{10.17}$$

denn weil $A_i \subseteq N_i$ müsste ein solches $j \geq i$ sein. Für $j = i$ ist eine solche Beziehung nach der Definition von u_i nicht möglich. Angenommen, es gäbe eine Beziehung (10.17) mit $j > i$. Eine Vertauschung der i -ten und j -ten Koordinate würde u_k und $|\alpha_k|$ für $k < i$ nicht ändern (nur die Reihenfolge der Koordinaten der α_k ändert sich, nicht die Summe ihrer Beträge), aber in den neuen Koordinaten wäre das neue u_i auf jeden Fall kleiner als bisher, in Widerspruch zur Minimalität von μ in der lexikographischen Ordnung.

Also kann (10.17) niemals vorkommen. Daraus folgt aber insbesondere, dass $u_j \geq u_i$ für alle $j > i$. Das ist die Aussage von (10.15).

Wenn (10.16) nicht gilt, so gibt es ein kleinstes i , für das diese Bedingung verletzt ist.

Nach der Wahl der α_i gilt immer $\pi_i(\alpha_i) = u_i$ und $\pi_j(\alpha_i) = 0$ für alle $j < i$ (da $\alpha_i \in N_i$). Wenn also (10.16) für i nicht gilt, so gibt es ein $j > i$ mit

$$c := \pi_j(\alpha_i) \neq 0.$$

Auf Grund der Unmöglichkeit der Beziehung (10.17) muss

$$|c| \geq u_i \tag{10.18}$$

sein, denn sonst würde α_i oder $-\alpha_i$ die Beziehung (10.17) erfüllen.

Man schreibe

$$c = qu_i + r,$$

wo $q \in \mathbf{Z}$ und $0 \leq r < u_i$ (Division mit Rest). Wir ändern die Basis von \mathbf{Z}^m , in dem wir b_i ersetzen durch

$$b'_i := b_i + qb_j$$

und alle anderen Basiselemente beibehalten.

Dies liefert tatsächlich eine Basis, denn die Matrix des Homomorphismus, der die alte Basis in die neuen Basiselemente abbildet, hat Einsen auf der Diagonalen und nur eine Eintragung außerhalb der Diagonalen; ihre Determinante ist deshalb 1, und weil 1 eine Einheit in \mathbf{Z} ist, ist diese Matrix und somit auch der von ihr beschriebene Homomorphismus umkehrbar. D.h., dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus und bildet die alte Basis wieder auf eine Basis ab.

Wir haben

$$u_i b_i + c b_j = u_i b_i + u_i q b_j + r b_j = u_i b'_i + r b_j$$

und alle anderen Basiselemente, und somit der in ihrem Spann liegende Anteil von α_i , sind unverändert geblieben. Bezüglich der neuen Basis gilt also

$\pi_i(\alpha_i) = u_i$ (immer noch) und $\pi_j(\alpha_i) = r < u_i$. Alle anderen Koordinaten von α_i sind unverändert, wie auch alle u_k und α_k für $k < i$ (da nach der Wahl von i diese α_k Bedingung (10.16) erfüllen und somit nach wie vor reine Vielfache von b_k sind und b_i und b_j nicht involvieren).

In den neuen Koordinaten ist u_i auf jeden Fall nicht größer geworden, aber wegen der Minimalität von μ kann es auch nicht kleiner geworden sein. Da u_i unverändert ist, erfüllt das alte Element α_i immer noch (10.14).

Aber in den neuen Koordinaten und mit dem gleichen α_i ist nun μ kleiner geworden, weil

$$|\pi_j^{\text{neu}}(\alpha_i)| = r < u_i \leq |c| = |\pi_j^{\text{alt}}(\alpha_i)|$$

und weil alle anderen Koordinaten von α_i gleich geblieben sind. Wir haben also doch einen Widerspruch zur Minimalität von μ .

Somit gilt tatsächlich $\pi_j(\alpha_i) = 0$ für alle $j \neq i$, und (10.16) gilt.

Die $\alpha_i \neq 0$ sind als nichtverschwindende Vielfache der Basiselemente b_i offenbar linear unabhängig.

Und sie erzeugen A . Dazu bemerken wir, dass für jedes i , $1 \leq i \leq m$, gilt

$$A_i = A_{i+1} + \mathbf{Z}\alpha_i \quad (10.19)$$

Nämlich, sei $a \in A_i$. Wenn a nicht ohnehin schon Element von A_{i+1} ist, dann ist $\pi_i(a) \neq 0 \in U_i$ und diese Untergruppe von \mathbf{Z} wird von $u_i = \pi_i(\alpha_i)$ erzeugt. Es gibt somit eine Zahl $c \in \mathbf{Z}$ mit $\pi_i(a) = \pi_i(c\alpha_i)$. Daraus folgt $b := a - c\alpha_i \in A_i \cap \text{Ker } \pi_i = A_{i+1}$, also

$$a = b + c\alpha_i \in A_{i+1} + \mathbf{Z}\alpha_i.$$

Das beweist (10.19).

Durch eine Rückwärtsinduktion von $m+1$ nach 1 folgt daraus, dass jedes A_i von den α_j mit $j \geq i$ erzeugt wird (der Induktionsanfang bei $i = m+1$ ist trivial, da $A_{m+1} = \{0\}$). Für $i = 1$ besagt die so durch Induktion bewiesene Aussage, dass $A_1 = A$ von allen α_j erzeugt wird (aber die $\alpha_j = 0$ tragen dazu natürlich nichts bei).

Somit bilden die $\alpha_i \neq 0$ eine Basis von A .

Wegen der aufsteigenden Anordnung (10.15) der u_i gibt es eine Zahl k mit $0 \leq k \leq m$, so dass u_i endlich ist für alle $i \leq k$ und $u_i = \infty$ für alle $i > k$. Dann sind aber die α_i für $1 \leq i \leq k$ genau diejenigen, die nicht 0 sind und somit eine Basis von A bilden. Wir haben also

$$A = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z}\alpha_i = \bigoplus_{i=1}^k u_i \mathbf{Z}b_i$$

und

$$\mathbf{Z}^m = \bigoplus_{i=1}^m \mathbf{Z}b_i.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} G &\cong \frac{\mathbf{Z}^m}{A} = \frac{\bigoplus_{i=1}^m \mathbf{Z}b_i}{\bigoplus_{i=1}^k u_i \mathbf{Z}b_i} \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^k \frac{\mathbf{Z}}{u_i \mathbf{Z}} \oplus \bigoplus_{i=k+1}^m \mathbf{Z} \\ &= \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z}_{u_i} \oplus \mathbf{Z}^{m-k} \end{aligned}$$

und dies ist eine Darstellung wie in (10.12), mit $n = m - k$, aber ohne die dort genannten Eigenschaften für die Ordnungen der endlichen zyklischen Gruppen. Deren Summe ist aber offenbar die Torsionsuntergruppe von G .

Man beachte, dass $n \leq m$ und dass $n = m$ nur, wenn $k = 0$; in diesem Fall ist $G \cong \mathbf{Z}^m$ und ist frei, wie am Ende der Aussage des Lemmas behauptet.

Eventuelle endliche Summanden mit $u_i = 1$ oben kann man weglassen, weil $\mathbf{Z}_1 = \{0\}$.

Wenn $u_i > 1$, so kann man u_i auf eindeutige Weise schreiben als ein Produkt von teilerfremden Primzahlpotenzen, und auf Grund von Lemma 10.13 läßt sich der Summand \mathbf{Z}_{u_i} zerlegen als die direkte Summe der zyklischen Gruppen mit diesen Primzahlpotenzordnungen. Das liefert die Variante der Darstellung (10.12), in der die d_i Primzahlpotenzen sind.

Um daraus die andere Variante zu erhalten, schreibe man eine Liste aller vorkommenden Primzahlpotenzen hin, jede so oft in der Liste vertreten, wie sie auch unter den Ordnungen der Summanden tatsächlich vorkommt. Dann nimmt man zu jeder vertretenen Primzahl die höchste Potenz, die in der Liste steht, und einen zyklischen Summanden von dieser Primzahlpotenzordnung, und bildet deren direkte Summe.

Nach Lemma 10.13 ist das Ergebnis wieder eine zyklische Gruppe, deren Ordnung d_1 das Produkt der Ordnungen der zusammengefassten Summanden ist. Die verbrauchten Primzahlpotenzen streicht man aus der Liste und wiederholt das Verfahren mit der reduzierten Liste. Dieses setzt man fort, bis alle Eintragungen aus der Liste verbraucht sind.

Man erhält so eine endliche Folge von zyklischen Gruppen \mathbf{Z}_{d_i} , wo aber für $j > i$ die Primzahlpotenzen, die als Faktoren von d_j noch verfügbar sind, für jede Primzahl p höchstens so groß sind wie die Potenz von p , die als Faktor

von d_i auftritt (denn die höchsten Potenzen werden ja zuerst verbraucht). Aus diesem Grund gilt $d_j \mid d_i$ wenn $j > i$.

Diese Darstellung läßt sich durch Zerlegung der Summanden \mathbf{Z}_{d_i} zurückverwandeln in die ursprüngliche Darstellung mit Summanden von Primzahlpotenzordnung. Aus diesem Grund ist die eine Darstellung genau dann eindeutig, wenn die andere es ist.

Die *Summe* der endlichen zyklischen Summanden ist eindeutig, weil sie die Torsionsuntergruppe von G ist. Für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ kann man anhand der Anzahl der Elemente von $T(G)$ von Ordnung p^k genau bestimmen, wieviele Summanden von $T(G)$ in der Primzahlpotenzdarstellung eine Ordnung p^l haben mit $l \geq k$, und anhand dieser Daten läßt sich eindeutig bestimmen, welche Ordnungen die zyklischen Summanden von Primzahlpotenzordnung genau haben.

Deshalb sind diese Ordnungen bis auf Reihenfolge eindeutig, und deshalb sind auch die sich teilenden Ordnungen in der anderen Darstellung eindeutig.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Rang n eindeutig ist.

Die Gruppe G bestimmt eindeutig die Faktorgruppe $G/T(G)$, und diese ist eine freie Gruppe isomorph zu \mathbf{Z}^n .

Nun kann aber \mathbf{Z}^n nicht isomorph sein zu $\mathbf{Z}^{n'}$ mit $n' \neq n$, denn diese Gruppen sind freie \mathbf{Z} -Moduln und ein Homomorphismus zwischen ihnen hat als \mathbf{Z} -lineare Abbildung eine Matrixdarstellung. Für einen Isomorphismus muss diese Matrix invertierbar sein als Matrix über \mathbf{Z} , weil auch der Umkehrhomomorphismus eine Matrixdarstellung hat.

Aber eine Matrix, die über \mathbf{Z} invertierbar ist, ist auch über \mathbf{Q} invertierbar, und weil \mathbf{Q} ein Körper ist, können wir die Sätze über den Rang von Matrizen aus der linearen Algebra anwenden, um zu schließen, dass die Matrix quadratisch sein muss. Es folgt $n' = n$.

Also ist auch der Rang eindeutig bestimmt. ■

Korollar 10.15 *Eine endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe G ist frei abelsch von endlichem Rang. Der Rang ist die minimale Anzahl von Elementen, die erforderlich sind, um G zu erzeugen.*

Beweis. Wenn G endlich erzeugt und torsionsfrei ist, so erscheinen die Summanden \mathbf{Z}_{d_i} in der direkten Summendarstellung (10.12) nicht, und G ist frei von endlichem Rang, sagen wir n .

Wenn G von m Elementen erzeugt wird, dann besagt Satz 10.14, dass $n \leq m$. Aber \mathbf{Z}^n kann offensichtlich von n Elementen erzeugt werden; also ist n die minimale Anzahl von Erzeugenden. ■

Eine weitere wohlbekannte Tatsache über additive abelsche Gruppen, die

wir benötigen werden, präsentieren wir hier, weil der Zusatzaufwand gering ist, in einer allgemeineren Version für Moduln:

Satz 10.16 *Sei R ein kommutativer Hauptidealbereich mit 1. Dann ist jeder Untermodul eines freien R -Moduls wieder frei.*

(\mathbf{Z} ist ein Beispiel eines solchen Integritätsbereiches, so dass die Aussage dieses Satzes auch für \mathbf{Z} -Moduln, also für additive abelsche Gruppen gilt.)

Beweis. Auch bei diesem Satz handelt es sich um eine wohlbekannte klassische Tatsache aus der Algebra, deren Kenntnis wir in der Vorlesung voraussetzen werden und deren Beweis wir nicht vortragen werden.

Aber wieder präsentieren wir, der Vollständigkeit halber, den Beweis in schriftlicher Form, für diejenigen, die ihn nicht kennen. Die Grundidee ist die gleiche wie im Beweis von Satz 10.14, aber ist hier sehr viel einfacher zu implementieren, da wir uns diesmal nicht um die Gestalt des Quotienten des großen Moduls nach dem Untermodul kümmern müssen.

Sei F ein freier Modul über R und sei $\mathcal{B} \subseteq F$ eine Basis von F . Sei $A \subseteq F$ ein R -Untermodul.

Nach dem Wohlordnungssatz können wir auf \mathcal{B} eine Wohlordnung $<$ wählen. Diese benutzen wir in der Konstruktion einer Zuordnung, die jedem Element $b \in \mathcal{B}$ ein Element $x_b \in A$ zuordnet, so dass die x_b , die nicht 0 sind, eine Basis von A bilden. Außerdem macht die Wohlordnung es möglich, beim Beweis eine transfinite Induktion einzusetzen.

Für jedes $b \in \mathcal{B}$ sei

$$M'_b := \text{Span}(\{c \in \mathcal{B} \mid c < b\})$$

der R -Untermodul von F , der von den Vorgängern von b in der Wohlordnung erzeugt wird, und sei

$$N'_b := M'_b + Rb = \text{Span}(\{c \in \mathcal{B} \mid c \leq b\})$$

der R -Untermodul von F , der von b und seinen Vorgängern erzeugt wird. Wir brauchen aber nur die Anteile

$$M_b := M'_b \cap A \quad \text{und} \quad N_b := N'_b \cap A$$

dieser Moduln, die im Untermodul A liegen.

Jedes Element von F ist eine endliche Linearkombination von Elementen der Basis \mathcal{B} und gehört somit zu N'_b für das größte der endlich vielen $b \in \mathcal{B}$, die in dieser Linearkombination erscheinen. Hieraus folgt $F = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} N'_b$ und deshalb

$$A = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} N_b. \quad (10.20)$$

Aus dem gleichen Grund gilt für jedes $b \in \mathcal{B}$, dass

$$M_b = \bigcup_{c < b} N_c. \quad (10.21)$$

Für jedes $b \in \mathcal{B}$ haben wir eine R -lineare Projektion

$$\pi_b: F \longrightarrow R,$$

die jedem Element $z \in F$ den b -ten Koeffizienten r_b aus der eindeutigen Darstellung

$$z = \sum_{b \in \mathcal{B}} r_b b$$

von z als endliche Linearkombination von Basiselementen zuordnet.

Für jedes $b \in \mathcal{B}$ betrachten wir die Menge

$$U_b := \pi_b(N_b) \subseteq R,$$

die ein R -Untermodul, also ein Ideal von R ist. Weil R ein Hauptidealbereich ist, gibt es ein eindeutiges Element $u_b \in R$, so dass

$$U_b = (u_b)$$

das von u_b erzeugte Hauptideal ist.

Wenn $u_b = 0$ setzen wir $x_b = 0$, und sonst wählen wir ein beliebiges Element $x_b \in N_b$ mit $\pi_b(x_b) = u_b$.

Diejenigen x_b , die ungleich 0 sind, bilden eine Basis von A . Zunächst sind diese x_b linear unabhängig, denn wenn eine endliche R -Linearkombination

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ x_b \neq 0}} r_b x_b = 0$$

ist, und nicht alle Koeffizienten r_b sind 0, so gibt es, da nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0 sein können, ein größtes $d \in \mathcal{B}$ mit $r_d \neq 0$.

Für alle $c < d$ aus \mathcal{B} ist $\pi_d(x_c) = 0$ weil x_c eine Linearkombination von Basiselementen $b \leq c$ aus \mathcal{B} ist. Folglich ist

$$0 = \pi_d(0) = \pi_d\left(\sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ x_b \neq 0}} r_b x_b\right) = \pi_d(r_d x_d) = r_d u_d = 0$$

und weil R ein Integritätsbereich ist und $u_d \neq 0$ (sonst wäre $x_d = 0$), ist $r_d = 0$ in Widerspruch zur Wahl von d .

Die nichtverschwindenden x_b sind also linear unabhängig über R . Sie erzeugen auch A . Dazu reicht es wegen (10.20) zu zeigen, dass jedes N_b von den x_c mit $c \leq b$ erzeugt wird.

Diese Behauptung beweisen wir durch transfinite Induktion über b . Sei also $b \in \mathcal{B}$ und die Behauptung gelte für alle $d < b$, d.h., für alle $d < b$ sei N_d das Erzeugnis der x_c mit $c \leq d$.

Sei $a \in N_b$. Es gilt $\pi_b(a) \in U_b = (u_b)$ und somit existiert ein Element $s \in R$ mit $\pi_b(a) = su_b$. Hieraus folgt $\pi_b(a - sx_b) = 0$.

Folglich ist $a - sx_b \in M_b = \bigcup_{d < b} N_d$ nach (10.21) und aus der Induktionsannahme folgt, dass $a - sx_b$ eine endliche R -Linearkombination von Elementen x_c ist mit $c < b$. Somit ist $a = sx_b + (a - sx_b)$ eine endliche R -Linearkombination von Elementen x_c mit $c \leq b$ und das beweist die Behauptung für b .

Nach Induktion gilt die Behauptung für alle $b \in \mathcal{B}$, und aus (10.20) folgt dann, dass die x_b ganz A erzeugen.

Die nichtverschwindenden x_b bilden somit eine Basis von A . ■

Die bisherigen Vorbereitungen werden es uns ermöglichen, die Funktoren, mit deren Konstruktion wir jetzt beginnen werden, sehr schnell zu berechnen. Wir können also jetzt an die Hauptarbeit gehen.

Die ersten beiden Funktoren, die uns interessieren, können wir direkt mit algebraischen Mitteln konstruieren; die beiden anderen werden aus diesen mit Ideen aus der Homologietheorie „abgeleitet“ und heißen deshalb auch **abgeleitete Funktoren**. Zuerst müssen wir aber die Grundfunktoren dazu haben.

Wir beginnen mit dem angenehmeren der beiden Grundfunktoren von zwei Variablen, angenehmer deshalb, weil er in beiden Variablen kovariant ist. Zu seiner Definition wollen wir einen ungewöhnlichen Weg beschreiten, der in folgender Bemerkung kurz motiviert wird.

Bemerkung 10.17 Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum und W ein Unterraum von V . Wir können dann den Quotientenvektorraum V/W konstruieren, und wir wissen, wie dieser Raum aufgebaut ist. Seien Elemente nicht Elemente von irgendwelchen anderen bekannten Vektorräumen, sondern Restklassen von W in V , also Teilmengen von V , die Äquivalenzklassen einer gewissen Äquivalenzrelation sind. Für diese Klassen werden dann auch noch Vektorraumoperationen, eine Addition und eine skalare Multiplikation, erklärt.

Diese Definitionen sind nicht sehr kompliziert aber trotzdem nicht ganz angenehm in der Anwendung und etwas belastend für die intuitive Vorstellung. Vor allem sind die Details dieser Konstruktion völlig irrelevant für die

Verwendung von Quotienten und sie verschleiern gerade deren wesentliche Merkmale und Eigenschaften, auch wenn sie technisch nötig sind, um diese Eigenschaften zu realisieren.

Es verhält sich genau so wie bei jedem anderen technischen Gerät — ohne einen Motor kann ein Auto nicht fahren, aber den Fahrer interessieren eigentlich die Fahreigenschaften, Komfort und Geschwindigkeit des Autos, und nicht die Konstruktionsdetails des Motors oder die Nietstellen am Fahrzeugrahmen, auch wenn die Fahreigenschaften nur durch diese technischen Merkmale zu realisieren sind.

Wichtig an Quotientenräumen ist, dass sie lineare Abbildungen auf V beschreiben, die auf W verschwinden (und für die deshalb die innere Struktur von W gar nicht sichtbar ist). Der Quotientenraum ist versehen mit einer kanonischen Projektion $\pi: V \longrightarrow V/W$, die auf W verschwindet, und jede andere lineare Abbildung $f: V \longrightarrow U$ in einen dritten Vektorraum U , die auf W verschwindet, faktorisiert eindeutig durch π , d.h., es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{f}: V/W \longrightarrow U$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.

Diese sogenannte „universelle Eigenschaft“ des Quotienten charakterisiert ihn eindeutig, und schwierige Fragen über den Quotientenraum (z.B., der Nachweis, dass eine gewisse Restklasse γ nicht 0 ist), lassen sich oft viel einfacher über die universelle Eigenschaft beantworten (z.B., in dem man sie benutzt, um eine lineare Abbildung \bar{f} zu konstruieren mit $\bar{f}(\gamma) \neq 0$), als direkt über die technische Konstruktion des Quotienten als Menge von Restklassen.

Aus diesem Grund werden wir bei der nun folgenden Konstruktion des neuen Funktors **Tensorprodukt** zunächst nur durch eine universelle Eigenschaft beschreiben, welchen Zweck das Tensorprodukt hat.

Auch das Tensorprodukt hat natürlich eine technische Konstruktion (deren Sinn man aber erst erkennt, wenn man die charakterisierende Eigenschaft des Tensorprodukts verstanden hat), und diese Konstruktion müssen wir irgendwann erläutern als Nachweis, dass es überhaupt Tensorprodukte gibt. Aber die technischen Details sind zweiträngig, und wir werden sie auch so behandeln.

Uns interessieren Tensorprodukte von additiven abelschen Gruppen, aber Tensorprodukte sind nicht auf diese Kategorie beschränkt, sondern lassen sich auch für Moduln über einen beliebigen kommutativen Ring R mit 1 betrachten (der Gruppenfall ist der Spezialfall $R = \mathbf{Z}$).

Obwohl wir den Modulfall später kaum mehr brauchen werden, wollen wir trotzdem die Definition in der allgemeineren Version erläutern, weil in der Spezialisierung auf Gruppen einige wichtige Details wegfallen (und man deshalb, wenn man später doch die Modulversion betrachten will, nicht ein-

fach sagen kann, es gehe „genau so wie für abelsche Gruppen“, und weil der Zusatzaufwand sehr gering ist, und wegen den ausgeprägteren Details auch deutlicher hervorhebt, worauf es bei diesem Begriff ankommt.

Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts hat mit folgendem aus der linearen Algebra bekanntem Begriff zu tun.

Definition 10.18 Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien A , B und C Moduln über R . Eine Abbildung

$$f: A \times B \longrightarrow C$$

heißt *R -bilinear*, wenn f , die ja eine Abbildung in zwei Variablen ist, in jeder Variablen *einzeln* R -linear ist, d.h., wenn für $a, a' \in A$, für $b, b' \in B$, und für $r \in R$ gilt

$$f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b) \quad (10.22a)$$

$$f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b') \quad (10.22b)$$

und

$$f(ra, b) = rf(a, b) = f(a, rb). \quad (10.22c)$$

Wenn $R = \mathbf{Z}$ ist dies eine Eigenschaft von Gruppenhomomorphismen, und in diesem Fall ist Bedingung (10.22c) überflüssig (und folgt automatisch aus den anderen beiden).

Bemerkung 10.19 Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien A , B und C Moduln über R . Sei

$$f: A \times B \longrightarrow C$$

eine R -bilineare Abbildung.

Wenn C' ein R -Modul ist und wenn $g: C \longrightarrow C'$ eine R -lineare Abbildung ist, dann ist

$$g \circ f: A \times B \longrightarrow C'$$

wieder R -bilinear.

Wenn A' und B' Moduln über R sind und wenn $h: A' \longrightarrow A$ und $k: B' \longrightarrow B$ zwei R -lineare Abbildungen sind, dann ist

$$f \circ (h \times k): A' \times B' \longrightarrow C$$

wieder eine R -bilineare Abbildung (wo

$$(h \times k)(a', b') := (h(a'), k(b')) \in A \times B$$

für $a \in A'$ und $b \in B'$).

In beiden Fällen ist der Nachweis trivial und durch direktes Nachrechnen möglich.

Definition 10.20 Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien A und B Moduln über R . Ein **Tensorprodukt** von A und B über den Ring R ist ein R -Modul

$$A \otimes_R B$$

zusammen mit einer R -bilinearen Abbildung

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes_R B,$$

(die wir die **charakteristische bilineare Abbildung** des Tensorprodukts nennen wollen) so dass es für jede R -bilineare Abbildung

$$f: A \times B \longrightarrow C$$

in einen beliebigen R -Modul C eine eindeutige R -lineare Abbildung

$$\bar{f}: A \otimes_R B \longrightarrow C$$

gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & C \\ \mu \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A \otimes_R B & & \end{array} \quad (10.23)$$

kommutiert, d.h., so dass $\bar{f} \circ \mu = f$.

Das klassische Beispiel einer R -bilinearen Abbildung ist die Multiplikation im Ring R oder allgemeiner, in einer Algebra über R . Deshalb kann man sich die Abbildung μ auch als eine Art Multiplikation denken. Aus diesem Grund ist es üblich, für $a \in A$ und $b \in B$ die Notation

$$a \otimes b := \mu(a, b) \quad (10.24)$$

für die Bildelemente der charakteristischen bilinearen Abbildung μ zu verwenden.

Für additive abelsche Gruppen, d.h., im Falle $R = \mathbf{Z}$, schreiben wir auch für den Tensorproduktmodul einfach $A \otimes B$ statt $A \otimes_R B$.

Um ein bisschen Gefühl dafür zu bekommen, wollen wir einige Grundeigenschaften des Tensorprodukts herleiten, bevor wir durch eine explizite Konstruktion den Nachweis antreten, dass ein solcher Modul mit der bilinearen Abbildung μ tatsächlich immer existiert.

Lemma 10.21 Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien A und B Moduln über R . Sei $A \otimes_R B$ ein Tensorprodukt von A und B und sei

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$$

die charakteristische bilineare Abbildung. Dann gilt:

a) Für alle a und $a' \in A$ und für alle $b \in B$ ist

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$$

b) Für alle $a \in A$ und für alle b und $b' \in B$ ist

$$a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$$

c) Für alle $a \in A$ und $b \in B$ und für alle $r \in R$ ist

$$(ra) \otimes b = r(a \otimes b) = a \otimes (rb).$$

d) Für alle $a \in A$ und $b \in B$ ist

$$0 \otimes b = 0 = a \otimes 0.$$

e) Jedes Element von $A \otimes_R B$ ist eine endliche Summe von Elementen der Gestalt $a \otimes b$.

Beweis. a), b) und c) drücken einfach die Tatsache aus, dass μ bilinear ist.

d) folgt sofort aus Teil c) mit $r = 0$.

e): Es reicht zu zeigen, dass $A \otimes_R B$ von Bild μ erzeugt wird, denn dann ist jedes Element von $A \otimes_R B$ eine endliche R -Linearkombination von Elementen der Form $a \otimes b$, also eine endliche Summe von Elementen der Form $r(a \otimes b)$ mit $r \in R$. Da man nach Teil c) jedes Element $r(a \otimes b)$ als ein einfaches Element $a' \otimes b$ mit $a' = ra$ umschreiben kann, ist eine endliche R -Linearkombination von Elementen der Form $a \otimes b$ immer auch schreibbar als eine endliche Summe solcher Elemente.

Sei C der von $\mu(A \times B)$ erzeugte R -Untermodul von $A \otimes_R B$. Dann können wir μ auch als eine bilineare Abbildung $\mu': A \times B \longrightarrow C$ auffassen, und nach der Definition des Tensorproduktes gibt es eine eindeutig bestimmte R -lineare Abbildung $\bar{\mu}: A \otimes_R B \longrightarrow C$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\mu'} & C \\ \mu \downarrow & \nearrow \bar{\mu} & \\ A \otimes_R B & & \end{array}$$

kommutiert, also so dass

$$\bar{\mu}' \circ \mu = \mu'. \quad (10.25)$$

Sei $i: C \longrightarrow A \otimes_R B$ die Inklusion (so dass $\mu = i \circ \mu'$). Wir wenden die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes jetzt auf die charakteristische bilineare Abbildung $\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ an.

Nach (10.25) ist $i \circ \bar{\mu}'$ eine R -lineare Abbildung $A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B$ mit $i \circ \bar{\mu}' \circ \mu = i \circ \mu' = \mu$, und $\text{Bild } i \circ \bar{\mu}' = C$.

Aber $\text{id}_{A \otimes_R B}$ ist auch eine R -lineare Abbildung $A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B$ mit $\text{id}_{A \otimes_R B} \circ \mu = \mu$, und das Bild von $\text{id}_{A \otimes_R B}$ ist natürlich ganz $A \otimes_R B$.

Wegen der Eindeutigkeit der linearen Abbildung f , die als schräg nach oben verlaufender Pfeil das Diagramm (10.23) ergänzt, ist $i \circ \bar{\mu}' = \text{id}_{A \otimes_R B}$ und beide Abbildungen haben das gleiche Bild.

Es folgt $C = A \otimes_R B$, d.h., $\text{Bild } \mu$ erzeugt ganz $A \otimes_R B$. ■

Bemerkung 10.22 (Warnung!) Die Elemente $a \otimes b$ erzeugen nur $A \otimes_R B$. Nicht jedes Element von $A \otimes_R B$ hat diese einfache Form, auch wenn die Notation dazu verführt, sich das einzubilden.

Hier ist ein Gegenbeispiel: Sei $A := \mathbf{Z}[X]$ der Polynomring über \mathbf{Z} in einem Unbekannten X , und sei $B := \mathbf{Z}[Y]$ der Polynomring über \mathbf{Z} in einem anderen Unbekannten Y , beide Ringe jetzt aufgefasst nur als additive abelsche Gruppen.

Sei $C := \mathbf{Z}[X, Y]$ der Polynomring über \mathbf{Z} in zwei Unbekannten X und Y . Man kann A und B als Untergruppen von C auffassen.

Sei $f: A \times B \longrightarrow C$ die auf $A \times B$ eingeschränkte Ringmultiplikation von $\mathbf{Z}[X, Y]$, eine \mathbf{Z} -bilineare Abbildung. D.h., für $p = p(X) \in \mathbf{Z}[X]$ und $q = q(Y) \in \mathbf{Z}[Y]$ setzen wir

$$f(p, q) = p(X)q(Y) \in \mathbf{Z}[X, Y].$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes induziert f einen Gruppenhomomorphismus $\bar{f}: \mathbf{Z}[X] \otimes \mathbf{Z}[Y] \longrightarrow \mathbf{Z}[X, Y]$ mit

$$\bar{f}(p \otimes q) = f(p, q) = p(X)q(Y)$$

für jedes $p = p(X) \in \mathbf{Z}[X]$ und $q = q(Y) \in \mathbf{Z}[Y]$.

Der Homomorphismus \bar{f} bildet jedes Element von $A \otimes B$ der Form $a \otimes b$ also in ein Polynom in $\mathbf{Z}[X, Y]$ ab, dass sich schreiben lässt als Produkt eines Polynoms nur in X mit einem Polynom nur in Y .

Man rechnet sofort nach, dass

$$\bar{f}(X \otimes 1 + 1 \otimes Y) = X + Y,$$

und dieses Polynom lässt sich nicht faktorisieren als Produkt eines Polynoms nur in X mit einem Polynom nur in Y , denn weil $\text{Grad}(X + Y) = 1$ und weil der Grad von Polynomen sich bei Multiplikation additiv verhält, müsste bei einem solchen Produkt ein Faktor Grad 1 haben und der andere Grad 0, also eine Konstante in \mathbf{Z} sein. Deshalb kann in dem Produkt nur einer der Unbekannten X oder Y erscheinen und das Produkt kann nicht $X + Y$ sein.

Es folgt, dass das Element $X \otimes 1 + 1 \otimes Y \in A \otimes B$ nicht umgeschrieben werden kann als ein einzelnes Element der Form $a \otimes b$.

Obwohl die charakteristische R -bilineare Abbildung nicht surjektiv sein muss, reicht es für viele Zwecke, dass ihr Bild den Tensorproduktmodul erzeugt. Insbesondere kann man μ aus Verknüpfungsgleichungen „wegheben“:

Korollar 10.23 Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien A , B und C Moduln über R . Sei $A \otimes_R B$ ein Tensorprodukt von A und B und sei

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$$

die charakteristische bilineare Abbildung.

Wenn f und $g: A \otimes_R B \longrightarrow C$ Modulhomomorphismen sind und wenn $f \circ \mu = g \circ \mu$, dann ist $f = g$.

Beweis. Sei $\varphi: A \times B \longrightarrow C$ die R -bilineare Abbildung $\varphi = f \circ \mu = g \circ \mu$. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts besagt, dass es eine *eindeutige* R -lineare Abbildung $\bar{\varphi}: A \otimes_R B \longrightarrow C$ gibt mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \mu$, und deshalb muss $f = g$ sein. ■

Bemerkung 10.24 Sie werden sehr bald feststellen, dass das Rechnen in Tensorprodukten etwas undurchsichtig ist und dass man oft schlecht erkennen kann, wann zwei verschiedene Ausdrücke in den Elementen $a \otimes b$ das gleiche Element von $A \otimes B$ darstellen oder nicht. Deshalb hier ein paar aufmunternde Worte und Vorschläge, wie man dabei am besten vorgeht.

Zu zeigen, dass zwei Elemente von $A \otimes B$ gleich sind (obwohl sie verschieden hingeschrieben wurden) ist meistens sehr leicht, und erfordert nur eine geradlinige Anwendung der Rechenregeln 10.21 a), b) und c).

Schwierig ist immer der Nachweis, dass zwei Elemente *verschieden* sind und dass zwei Ausdrücke *nicht* durch Anwendung der genannten Regeln ineinander überführt werden können. Das probateste Hilfsmittel dazu ist der Trick, der auch im Beispiel in Bemerkung 10.22 angewendet wurde: man konstruiert eine lineare Abbildung von $A \otimes B$ in einen dritten Modul C , die auf beiden Elementen verschiedene Werte annimmt, und diese lineare Abbildung selber konstruiert man am einfachsten durch Angabe einer sie erzeugenden bilinearen Abbildung $A \times B \longrightarrow C$.

Lemma 10.25 *Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien A und B Moduln über R .*

Wenn das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ im Sinne von Definition 10.20 existiert, dann ist es eindeutig bestimmt bis auf einen R -Modul Isomorphismus.

Beweis. Seien C und D Moduln über R , die in der Rolle von $A \otimes_R B$ die universelle Eigenschaft aus Definition 10.20 erfüllen, und seien

$$\mu: A \times B \longrightarrow C \quad \text{und} \quad \nu: A \times B \longrightarrow D$$

die charakteristischen bilinearen Abbildungen der Tensorprodukte C und D .

Weil C ein Tensorprodukt ist und weil ν bilinear ist, gibt es eine eindeutig bestimmte R -lineare Abbildung $\varphi = \bar{\nu}: C \longrightarrow D$ mit

$$\varphi \circ \mu = \nu. \quad (10.26)$$

Weil D ein Tensorprodukt ist und weil μ bilinear ist, gibt es eine eindeutig bestimmte R -lineare Abbildung $\psi = \bar{\mu}: D \longrightarrow C$ mit

$$\psi \circ \nu = \mu. \quad (10.27)$$

Statt μ und ν auf diese Weise miteinander in Verbindung zu bringen, können wir jede von ihnen mit sich selber vergleichen. Die Abbildung μ ist nicht nur die charakteristische bilineare Abbildung des Tensorproduktes C , sondern schlicht und einfach eine R -bilineare Abbildung $A \times B \longrightarrow C$, und aus (10.26) und (10.27) folgt, dass $\psi \circ \varphi$ eine R -lineare Abbildung $C \longrightarrow C$ ist mit

$$\psi \circ \varphi \circ \mu = \mu.$$

Nach Korollar 10.23 kann man μ wegstreichen und wir haben

$$\psi \circ \varphi = \text{id}_C.$$

Auf die gleiche Weise, mit den Rollen von C und D vertauscht, zeigt man

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_D.$$

Es folgt, dass φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen sind. ■

Lemma 10.26 *Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wenn für je zwei R -Moduln A und B das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ im Sinne von Definition 10.20 existiert (was wir gleich in Lemma 10.27 beweisen werden), dann ist \otimes_R ein additiver Funktor*

$$R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod},$$

der in beiden Variablen kovariant ist.

Ferner ist die charakteristische R -bilineare Abbildung

$$\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$$

eine natürliche Transformation (in dem Sinne, dass μ mit Morphismen von $R\text{-Mod} \times R\text{-Mod}$ und den von ihnen induzierten R -linearen Abbildungen der Tensorprodukte auf die naheliegende Weise kommutiert, wie in Gleichung (10.28) unten).

Beweis. Die Objektzuordnung des nachzuweisenden Funktors ist nach Voraussetzung gegeben, und wir müssen nur die zugehörige Zuordnung von Morphismen zu Morphismen konstruieren und zeigen, dass sie die erforderlichen Eigenschaften hat.

Seien (A, B) und (C, D) Objekte von $R\text{-Mod} \times R\text{-Mod}$ und sei

$$(f, g) \in \text{Mor}(A, C) \times \text{Mor}(B, D),$$

also f sei eine R -lineare Abbildung $A \longrightarrow C$ und g eine R -lineare Abbildung $B \longrightarrow D$. Sie induzieren eine mengentheoretische Abbildung

$$f \times g: A \times B \longrightarrow C \times D$$

mit $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$, und \times ist offensichtlich ein in beiden Variablen kovarianter Funktor $R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Men}$.

Seien $\mu: A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ und $\nu: C \times D \longrightarrow C \otimes_R D$ die charakteristischen R -bilinearen Abbildungen.

Nach Bemerkung 10.19 ist $\nu \circ (f \times g): A \times B \longrightarrow C \otimes_R D$ eine R -bilineare Abbildung, und sie induziert wegen der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes eine eindeutig bestimmte R -lineare Abbildung

$$f \otimes g: A \otimes_R B \longrightarrow C \otimes_R D$$

mit

$$(f \otimes g) \circ \mu = \nu \circ (f \times g). \quad (10.28)$$

Diese Abbildung nehmen wir als $\otimes_R(f, g)$ (aber man beachte, dass wir in der Notation $f \otimes g$ den Ring R nicht erwähnen wollen). Diese Zuordnung ist in beiden Variablen kovariant.

Seien G und H weitere R -Moduln und seien $h: C \longrightarrow G$ und $k: D \longrightarrow H$ Morphismen der Kategorie $R\text{-Mod}$, also R -lineare Abbildungen. Sei

$$\lambda: G \times H \longrightarrow G \otimes_R H$$

die charakteristische R -bilineare Abbildung.

Dann ist $(h \otimes k) \circ (f \otimes g)$ eine R -lineare Abbildung $A \otimes_R B \longrightarrow G \otimes_R H$, und sie erfüllt

$$(h \otimes k) \circ (f \otimes g) \circ \mu = (h \otimes k) \circ \nu \circ (f \times g) = \lambda \circ (h \times k) \circ (f \times g) = \lambda \circ (hf \times kg).$$

Daraus folgt aus Eindeutigkeitsgründen

$$(h \otimes k) \circ (f \otimes g) = hf \otimes kg, \quad (10.29)$$

also ist die Morphismuzuordnung von \otimes_R verträglich mit Verknüpfung.

Wenn $A = C$ und $B = D$ und wenn $f = \text{id}_A$ und $g = \text{id}_B$, so ist $\text{id}_{A \otimes_R B}: A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B$ eine lineare Abbildung mit

$$\text{id}_{A \otimes_R B} \circ \mu = \mu = \mu \circ \text{id}_{A \times B} = \mu \circ (\text{id}_A \times \text{id}_B)$$

und nach Definition haben wir somit

$$\text{id}_A \otimes \text{id}_B = \text{id}_{A \otimes_R B}. \quad (10.30)$$

Damit sind alle funktoriellen Eigenschaften nachgewiesen.

Nebenbei beweist Gleichung (10.28) die Natürlichkeit der charakteristischen bilinearen Abbildung.

Die Additivität ist noch zu zeigen.

Dazu seien $f': A \longrightarrow C$ und $g': B \longrightarrow D$ weitere R -lineare Abbildungen. Aus

$$(f \otimes g) \circ \mu = \nu \circ (f \times g) \quad \text{und} \quad (f' \otimes g) \circ \mu = \nu \circ (f' \times g)$$

folgt

$$\begin{aligned} ((f \otimes g) + (f' \otimes g)) \circ \mu &= (f \otimes g) \circ \mu + (f' \otimes g) \circ \mu \\ &= \nu \circ (f \times g) + \nu \circ (f' \times g) \\ &= \nu \circ ((f + f') \times g) \quad (\text{weil } \nu \text{ bilinear ist}) \end{aligned}$$

und das bedeutet nach Definition, dass

$$(f + f') \otimes g = (f \otimes g) + (f' \otimes g).$$

Auf ähnliche Weise zeigt man

$$f \otimes (g + g') = (f \otimes g) + (f \otimes g').$$

Somit ist \otimes_R in jeder Variablen einzeln additiv, also im Sinne von Definition 10.2 als Funktor von zwei Variablen additiv. ■

Jetzt wissen wir schon ziemlich gut, was wir mit der Einführung des Tensorproduktes gewinnen, auch wenn wir noch nicht alle schönen Eigenschaften dieses Funktors kennen. Es ist höchste Zeit für uns, uns zu vergewissern, dass die ganze Arbeit nicht umsonst war:

Lemma 10.27 *Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien A und B Moduln über R . Dann existiert ein Tensorprodukt $A \otimes_R B$.*

Beweis. Sei $F := F(A \times B)$ der von der Menge $A \times B$ erzeugte freie R -Modul; er enthält $A \times B$ als eine Teilmenge.

Sei N der R -Untermodule von F , der erzeugt wird von allen Elementen der folgenden Gestalten:

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b) \quad (\text{für } a \text{ und } a' \in A, b \in B) \quad (10.31a)$$

$$(a, b + b') - (a, b) - (a, b') \quad (\text{für } a \in A \text{ und } b, b' \in B) \quad (10.31b)$$

$$(ra, b) - r(a, b) \quad (\text{für } a \in A, b \in B \text{ und } r \in R) \quad (10.31c)$$

$$(a, rb) - r(a, b) \quad (\text{für } a \in A, b \in B \text{ und } r \in R). \quad (10.31d)$$

Wir setzen

$$A \otimes_R B := \frac{F}{N}. \quad (10.32)$$

Sei $f: A \times B \rightarrow C$ eine beliebige mengentheoretische Abbildung. Weil F der von $A \times B$ erzeugte freie R -Modul ist, erweitert sich f auf eindeutige Weise zu einer R -linearen Abbildung $\varphi: F \rightarrow C$. Umgekehrt ist jede R -lineare Abbildung $F \rightarrow C$ eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung auf $A \times B$.

Genau dann ist f bilinear, wenn die Gleichungen (10.22) erfüllt sind. Die Differenz der rechten und linken Seite jeder dieser Gleichungen ist eine Linearkombination von Werten von f , oder weil φ eine Erweiterung von f ist, eine Linearkombination von Werten von φ , und wegen der Linearität von φ kann man diese Linearkombination von Werten von φ auch schreiben als der Wert von φ auf der entsprechenden Linearkombination (in F) von Elementen von $A \times B$.

Diese bei allen Instanzen der Gleichungen (10.22) auftretenden Linearkombinationen von Elementen von $A \times B$ sind genau die in der Aufstellung (10.31) aufgelisteten Erzeugenden von N .

f ist genau dann bilinear, wenn die Differenzen beider Seiten der Gleichungen (10.22) alle 0 sind, und das ist nach obiger Erläuterung genau dann der Fall, wenn φ auf allen Erzeugenden von N verschwindet, oder äquivalent, wenn

$$\varphi|N = 0.$$

Sei $\pi: F \rightarrow F/N = A \otimes_R B$ die kanonische Projektion und setze

$$\mu = \pi|(A \times B): A \times B \rightarrow F/N = A \otimes_R B. \quad (10.33)$$

Weil π die Projektion auf einen Quotienten nach N ist, verschwindet π auf N und wie oben begründet bedeutet das, dass $\mu = \pi|(A \times B)$ eine R -bilineare Abbildung $A \times B \rightarrow F/N = A \otimes_R B$ ist.

Wir zeigen jetzt, dass μ die universelle Eigenschaft aus Definition 10.20 erfüllt und dass somit F/N ein Tensorprodukt von A und B ist mit μ als charakteristische bilineare Abbildung.

Dazu sei C ein R -Modul und sei $f: A \times B \rightarrow C$ eine R -bilineare Abbildung. Die *mengentheoretische* Abbildung f erweitert sich eindeutig zu einer R -linearen Abbildung

$$\varphi: F \rightarrow C,$$

die wegen der Bilinearität von f , wie oben erläutert, auf N verschwindet.

Aus der universellen Eigenschaft des Quotienten folgt, dass es eine eindeutige R -lineare Abbildung $\bar{\varphi}: F/N \rightarrow C$ gibt mit

$$\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi.$$

Nach Einschränkung auf $A \times B \subseteq F$ erhalten wir daraus

$$\bar{\varphi} \circ \mu = \bar{\varphi} \circ \pi|(A \times B) = \varphi|(A \times B) = f.$$

Wir können also $\bar{\varphi}$ als eine R -lineare Abbildung

$$\bar{f}: A \otimes_R B \rightarrow C$$

nehmen mit

$$\bar{f} \circ \mu = f. \tag{10.34}$$

Diese Abbildung ist auch eindeutig, denn sei \bar{f} ein beliebiger Homomorphismus $A \otimes_R B \rightarrow C$, der (10.34) erfüllt. Weil beide Seiten von (10.34) sich *eindeutig* zu F erweitern, gilt

$$\bar{f} \circ \pi = \varphi$$

auf ganz F .

Wir haben also $\bar{f} \circ \pi = \bar{\varphi} \circ \pi$. Da π surjektiv ist, ist $\bar{f} = \bar{\varphi}$ und es gibt nur eine Abbildung \bar{f} mit der Eigenschaft (10.34). ■

Die explizite Konstruktion aus Lemma 10.27 *dürfen* wir natürlich benutzen, um weitere Eigenschaften von Tensorprodukten herzuleiten oder zu beweisen, aber wir *müssen* es nicht. Das Lemma versichert uns einfach, dass das Universum, über das wir reden, nicht leer ist, aber die Details dieser Konstruktion haben nichts mit dem „Wesen“ des Tensorprodukts zu tun und es ist viel eleganter und befriedigender, in Beweisen die universelle Eigenschaft einzusetzen.

Hier noch ein paar wichtige, obwohl einfache, Grundeigenschaften und Beispiele.

Lemma 10.28 *Sei R ein kommutativer Ring mit 1.*

- a) *Seien A und B Moduln über R . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$A \otimes_R B \cong B \otimes_R A,$$

der für jedes $a \in A$ und $b \in B$ das Erzeugende $a \otimes b \in A \otimes_R B$ auf $b \otimes a \in B \otimes_R A$ abbildet (und sich linear fortsetzt auf ganz $A \otimes_R B$).

- b) *Sei A ein Modul über R . Wir können auch R als Modul über sich auffassen, mit der Ringmultiplikation als die skalare Multiplikation. Es gibt natürliche Isomorphismen*

$$A \otimes_R R \cong A \cong R \otimes_R A.$$

Diese Isomorphismen bilden $a \otimes r \in A \otimes_R R$ oder $r \otimes a \in R \otimes_R A$ auf das Element $ra \in A$ ab (und setzen sich linear fort auf die ganzen Moduln $A \otimes_R R$ bzw. $R \otimes_R A$).

- c) *Seien A und B Moduln über R , und die Teilmenge $X \subseteq A$ erzeuge A als R -Modul, die Teilmenge $Y \subseteq B$ erzeuge B .*

Dann ist

$$X \otimes Y := \{x \otimes y \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

eine Erzeugendenmenge für $A \otimes_R B$.

- d) *Seien A und B freie Moduln über R , und sei $X \subseteq A$ eine Basis für A und $Y \subseteq B$ eine Basis für B .*

Dann ist $A \otimes_R B$ auch ein freies R -Modul und hat

$$X \otimes Y := \{x \otimes y \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

als eine Basis.

- e) *Seien A und B Moduln über R , und es gebe direkte Summenzerlegungen*

$$A = \bigoplus_{\kappa \in K} A_{\kappa} \quad \text{und} \quad B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_{\lambda}.$$

Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \bigoplus_{\kappa \in K} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A_{\kappa} \otimes_R B_{\lambda}).$$

Für endliche Indexmengen K und Λ wäre dies eine sofortige Konsequenz von Lemma 10.5, aber die Aussage gilt für beliebige direkte Summenzerlegungen, auch wenn sie unendlich vielen Summanden haben.

Einen additiven Funktor wie \otimes , der beliebige, auch unendliche direkte Summenzerlegungen respektiert, nennt man **stark additiv**.

f) Seien A und A' , B und B' Moduln über R und seien $f: A \rightarrow A'$ und $g: B \rightarrow B'$ Homomorphismen.

Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $(f \otimes g): A \otimes_R B \rightarrow A' \otimes_R B'$ surjektiv.

Beweis. a): Seien $\tau: A \times B \rightarrow B \times A$ und $\tau': B \times A \rightarrow A \times B$ die Koordinatenvertauschungen $\tau(a, b) := (b, a)$ und $\tau(b, a) := (a, b)$, die Umkehrabbildungen zueinander sind.

Weil Bilinearität eine symmetrische Bedingung in beiden Variablen ist, bleiben bilineare Abbildungen bilinear, wenn man zuerst Koordinaten vertauscht. Insbesondere gilt für die charakteristischen R -bilinearen Abbildungen $\mu: A \times B \rightarrow A \otimes_R B$ und $\nu: B \times A \rightarrow B \otimes_R A$, dass auch

$$\nu \circ \tau: A \times B \rightarrow B \otimes_R A$$

und

$$\mu \circ \tau': B \times A \rightarrow A \otimes_R B$$

bilineare Abbildungen sind. Wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts induzieren sie eindeutig bestimmte R -lineare Abbildungen

$$\bar{\tau}: A \otimes_R B \rightarrow B \otimes_R A$$

und

$$\bar{\tau}': B \otimes_R A \rightarrow A \otimes_R B$$

mit $\bar{\tau} \circ \mu = \nu \circ \tau$ und $\bar{\tau}' \circ \nu = \mu \circ \tau'$.

Hieraus folgt schon, dass

$$\bar{\tau}(a \otimes b) = \bar{\tau} \circ \mu(a, b) = \nu \circ \tau(a, b) = \nu(b, a) = b \otimes a$$

und entsprechend $\bar{\tau}'(b \otimes a) = a \otimes b$. Anhand dieser Gleichungen lässt sich auch sehr leicht nachprüfen, dass $\bar{\tau}$ und $\bar{\tau}'$ natürlich sind; es reicht dabei, Elemente der Form $a \otimes b$ zu betrachten, weil diese die Tensorproduktmoduln erzeugen.

Ferner haben wir

$$\bar{\tau}' \circ \bar{\tau} \circ \mu = \bar{\tau}' \circ \nu \circ \tau = \mu \circ \tau' \circ \tau = \mu.$$

Nach Korollar 10.23 können wir μ wegekürzen und es gilt $\bar{\tau}'\bar{\tau} = \text{id}_{A \otimes_R B}$. Entsprechend ist $\bar{\tau}\bar{\tau}' = \text{id}_{B \otimes_R A}$, und $\bar{\tau}$ und $\bar{\tau}'$ sind Isomorphismen.

b) Wegen a) reicht es, A mit $R \otimes_R A$ zu vergleichen. Die skalare Multiplikation

$$\begin{aligned}\lambda: R \times A &\longrightarrow A \\ (r, a) &\longmapsto ra\end{aligned}$$

ist R -bilinear und induziert wegen der universellen Eigenschaft eine eindeutige R -lineare Abbildung $\bar{\lambda}: R \otimes_R A \longrightarrow A$ mit $\bar{\lambda}(r \otimes a) = \lambda(r, a) = ra$ für jedes $r \in R$ und $a \in A$.

Diese Abbildung ist auch offensichtlich natürlich, d.h., wenn B ein R -Module ist und $f: A \longrightarrow B$ eine R -lineare Abbildung ist, dann ist

$$f \circ \bar{\lambda}_A = \bar{\lambda}_B \circ (\text{id}_R \otimes f)$$

(für Erzeugende $r \otimes a$ besagt dies nämlich nichts anderes als $f(ra) = rf(a)$, was aus der Linearität von f folgt).

Auf Grund der Eigenschaften 10.21 a), b) und c) (die Bilinearität von \otimes) ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\kappa: A &\longrightarrow R \times A \\ a &\longmapsto 1 \otimes a\end{aligned}$$

linear und eine Umkehrabbildung zu λ , so dass λ ein Isomorphismus ist.

c) Sei $a \in A$ und $b \in B$. Dann ist a eine endliche R -Linearkombination von Elementen $x_i \in X$ und b ist eine endliche R -Linearkombination von Elementen $y_j \in Y$. Wegen der Bilinearität von \otimes (Lemma 10.21) kann man $a \otimes b$ umschreiben als eine endliche R -Linearkombination der $x_i \otimes y_j$.

Da aber $A \otimes_R B$ von den Elementen der Form $a \otimes b$ erzeugt wird, kann man jedes Element von $A \otimes_R B$ als eine endliche Linearkombination aus $X \otimes Y$ schreiben und diese Menge erzeugt $A \otimes_R B$.

d) In Teil c) haben wir schon gesehen, dass $X \otimes Y$ eine Erzeugendenmenge für $A \otimes_R B$ ist.

Wir müssen nur noch zeigen, dass es keine nichttrivialen linearen Relationen zwischen den $x \otimes y \in X \otimes Y$ gibt, in anderen Worten, dass sie R -linear unabhängig sind. Dazu sei

$$\sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} r_{xy} x \otimes y = 0, \quad (10.35)$$

wo auf der linken Seite nur endlich viele Koeffizienten r_{xy} ungleich 0 sind.

Für jedes $x_0 \in X$ gibt es eine eindeutige R -lineare Abbildung $x_0^*: A \longrightarrow R$ mit

$$x_0^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = x_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend, für jedes $y_0 \in Y$ gibt es eine eindeutige R -lineare Abbildung $y_0^*: B \longrightarrow R$ mit

$$y_0^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y = y_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei λ der Isomorphismus $R \otimes_R R \longrightarrow R$ aus Teil b), mit $\lambda(r \otimes s) = rs$. Dann ist

$$(\lambda \circ (x_0^* \otimes y_0^*))(x \otimes y) = x_0^*(x)y_0^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = x_0 \text{ und } y = y_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wendet man die lineare Abbildung $\lambda \circ (x_0^* \otimes y_0^*)$ auf die linke Seite von (10.35) an, so erhält man folglich $r_{x_0 y_0}$ als Wert, aber weil die rechte Seite 0 ist, muss dieser Wert 0 sein für jedes $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$, d.h., die Linearkombination in (10.35) hat nur Koeffizienten 0, was zu zeigen war.

e) Es reicht zu zeigen, dass für ein R -Modul A und eine beliebige Familie $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ von R -Moduln B_λ gilt

$$A \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes_R B_\lambda), \quad (10.36)$$

denn diese Tatsache gilt dann wegen Teil a) auch mit vertauschten Faktoren, und beide Versionen hintereinander angewendet ergeben die zu beweisende Behauptung.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: A \times \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) &\longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes_R B_\lambda) \\ (a, \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda) &\longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} a \otimes b_\lambda \end{aligned}$$

(in den Summationen sind natürlich nur endlich viele $b_\lambda \neq 0$) ist offensichtlich R -bilinear, und induziert eine eindeutige R -lineare Abbildung

$$\varphi: A \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes_R B_\lambda)$$

mit

$$\varphi\left(a \otimes \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a \otimes b_\lambda$$

für jede Wahl von $a \in A$ und $b_\lambda \in B_\lambda$, nur endlich viele ungleich 0.

Eine Umkehrabbildung zu φ ist leicht anzugeben. Für jedes $\mu \in \Lambda$ haben wir die Inklusion $i_\mu: B_\mu \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$. Sei

$$\psi: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (A \otimes_R B_\lambda) \longrightarrow A \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right)$$

die eindeutige R -lineare Abbildung, die für jedes $\mu \in \Lambda$ auf dem μ -ten Summanden des Definitionsbereichs, $A \otimes_R B_\mu$, durch $\text{id}_A \otimes i_\mu$ gegeben ist.

Aus Teil c) folgt, dass beide Seiten von (10.36) von den Elementen $a \otimes b_\lambda$, wo $a \in A$ und b_λ aus einem der B_λ ist, erzeugt werden.

Aus den Definitionen von φ und ψ ist klar, dass für solche Elemente gilt $(\psi \circ \varphi)(a \otimes b_\lambda) = a \otimes b_\lambda$ und $(\varphi \circ \psi)(a \otimes b_\lambda) = a \otimes b_\lambda$. Weil die genannten Elemente die ganzen Gruppen erzeugen, sind $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ jeweils die Identität, und somit sind φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen.

f) $f \otimes g$ ist R -linear, und weil f und g surjektiv sind, enthält $\text{Bild}(f \otimes g)$ alle Elemente der Form $a' \otimes b'$ mit $a' \in A'$ und $b' \in B'$, und somit den von ihnen erzeugten Untermodul.

Dieser ist aber ganz $A' \otimes_R B'$, also ist $f \otimes g$ surjektiv. ■

Wir wollen uns jetzt wieder auf den Fall $R = \mathbf{Z}$, also auf den Fall additiver abelscher Gruppen beschränken. In Verbindung mit dem Struktursatz 10.14 für endlich erzeugte abelsche Gruppen hat das „Distributivgesetz“ für Tensorprodukte, Lemma 10.28 e), zur Folge, dass wir alle Tensorprodukte von endlich erzeugten abelschen Gruppen kennen, sobald wir die Tensorprodukte der zyklischen Gruppen kennen.

Diese sind leicht auszurechnen:

Beispiele 10.29 a)

$$\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ ist

$$\mathbf{Z}_n \otimes \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_n.$$

c) Seien m und n positive natürliche Zahlen und sei $d = \text{ggT}(m, n)$. Dann ist

$$\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_d.$$

Beweis. Teile a) und b) folgen sofort aus Lemma 10.28 d). Wir widmen uns also Teil c).

Lemma 10.28 c) impliziert, dass ein Tensorprodukt $A \otimes B$ zweier zyklischer Gruppen von einem Einzelement erzeugt wird (nämlich vom Tensorprodukt des Erzeugenden von A mit dem Erzeugenden von B) und somit zyklisch ist. Im jetzigen Fall ist $1 \otimes 1$ also ein Erzeugendes von $\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n$. Wir müssen nur die Ordnung berechnen.

Nach dem Lemma von Bézout lässt sich der größte gemeinsame Teiler d von m und n schreiben in der Form

$$d = am + bn$$

für geeignete ganze Zahlen a und b . Wir haben dann

$$\begin{aligned} d(1 \otimes 1) &= (am + bn)(1 \otimes 1) \\ &= am(1 \otimes 1) + bn(1 \otimes 1) \\ &= a((m \cdot 1) \otimes 1) + b(1 \otimes (n \cdot 1)) && \text{(nach Lemma 10.21 c))} \\ &= a(0 \otimes 1) + b(1 \otimes 0) \\ &= 0 + 0 = 0. && \text{(nach Lemma 10.21 d))} \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass d tatsächlich die Ordnung von $1 \otimes 1$ ist, d.h., dass kein kleineres Vielfaches von $1 \otimes 1$ verschwindet.

Dazu betrachte man die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \rho: \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n &\longrightarrow \mathbf{Z}_d \\ (k, l) &\longmapsto kl \bmod d. \end{aligned}$$

Der von ihr durch die universelle Eigenschaft induzierte Gruppenhomomorphismus $\bar{\rho}: \mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n \longrightarrow \mathbf{Z}_d$ bildet $1 \otimes 1$ auf $\rho(1, 1) = 1 \in \mathbf{Z}_d$ ab, und weil dieses Bildelement Ordnung d hat, kann $1 \otimes 1$ keine kleinere Ordnung haben, sondern nur eine Ordnung, die durch d teilbar ist.

Da aber schon $d(1 \otimes 1) = 0$, ist d genau die Ordnung des Erzeugenden $1 \otimes 1$ von $\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n$ und diese Gruppe ist deshalb isomorph zu \mathbf{Z}_d . Der Homomorphismus $\bar{\rho}$ ist sogar ein Isomorphismus. ■

Wir haben oben bewiesen, dass ein Paar von surjektiven Gruppenhomomorphismen auf dem Tensorprodukt der Gruppen wieder einen surjektiven Homomorphismus induziert. Diese Aussage lässt sich sogar etwas erweitern:

Definition 10.30 Sei $F: AbGp \longrightarrow AbGp$ ein additiver kovarianter oder kontravarianter Funktor.

Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (10.37)$$

eine kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Wenn wir F auf diese Folge anwenden, so erhalten wir je nach der Varianz von F eine Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \{0\} \quad (\text{kovariant}) \\ \{0\} &\longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow \{0\} \quad (\text{kontravariant}) \end{aligned} \quad (10.38)$$

Im Allgemeinen können wir über diese Folge nur sagen, dass wegen der Additivität von F die äußeren Gruppen tatsächlich $\{0\}$ sind (Korollar 10.4), und dass die Verknüpfung je zwei aufeinanderfolgender Homomorphismen in (10.38), insbesondere die Verknüpfung $F(g) \circ F(f)$ bzw. $F(f) \circ F(g) = F(g \circ f)$, die Nullabbildung ist, wegen Bemerkung 10.3 a) und der Exaktheit der ursprünglichen Folge (10.37).

Exakt muss die Bildfolge (10.38) in der Regel nicht sein!

Wenn sie es aber doch ist, d.h., wenn für jede kurze exakte Folge (10.37) die Folge (10.38) exakt ist, so nennen wir F einen **exakten Funktor**.

In Abschwächung davon nennen wir F **links-exakt** (bzw. **rechts-exakt**), wenn die linke bzw. rechte Seite der Bildfolge (10.38) exakt ist, in dem Sinne, dass die Exaktheitsbedingung zumindest an den beiden linken (bzw. beiden rechten) der drei Stellen gilt, an denen es eingehende und abgehende Pfeile gibt.

Anders kann man das ausdrücken, indem man sagt, die verkürzte Folge, die durch Entfernung der Nullgruppe am entgegengesetzten (also am rechten bzw. am linken) Ende der Bildfolge entsteht, ist exakt.

Ganz ausführlich: F ist **links-exakt** wenn für jede kurze exakte Folge (10.37) von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen die Folge

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) && (F \text{ kovariant}) \\ \{0\} &\longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) && (F \text{ kontravariant}) \end{aligned} \quad (10.39)$$

exakt ist.

F ist **rechts-exakt** wenn für jede kurze exakte Folge (10.37) von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen die Folge

$$\begin{aligned} F(A) &\xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \{0\} && (F \text{ kovariant}) \\ F(C) &\xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow \{0\} && (F \text{ kontravariant}) \end{aligned} \quad (10.40)$$

exakt ist.

Natürlich ist F genau dann exakt, wenn F sowohl links- als auch rechts-exakt ist.

Bemerkung 10.31 Bei der Definition eines links- oder rechts-exakten Funktors spielt eine der beiden Nullgruppen am Ende der Bildfolge keine Rolle mehr, weil an der angrenzenden mittleren Stelle die Exaktheit nicht behauptet wird.

Man darf auch die Voraussetzungen für die definierende Bedingung entsprechend abschwächen (womit die Folgerung etwas verstärkt wird), denn wenn in der ursprünglichen Folge (10.37) die entsprechende Nullgruppe fehlt und man nicht mehr verlangt, dass die Ausgangsfolge an der angrenzenden mittleren Stelle exakt ist, gilt immer noch die gleiche Folgerung über die teilweise Exaktheit der Bildfolge.

Ein additiver kovarianter Funktor $F: AbGp \rightarrow AbGp$ ist also genau dann links-exakt, wenn für jede exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen der Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad (10.41)$$

die Bildfolge

$$\{0\} \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

exakt ist, und F ist genau dann rechts-exakt, wenn für jede exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen der Gestalt

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (10.42)$$

die Bildfolge

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \{0\}$$

exakt ist.

Entsprechend ist ein additiver *kontravarianter* Funktor

$$F: AbGp \longrightarrow AbGp$$

genau dann links-exakt, wenn für jede exakte Folge der Gestalt (10.42) die Bildfolge

$$\{0\} \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$

exakt ist, und F ist genau dann rechts-exakt, wenn für jede exakte Folge der Gestalt (10.41) die Bildfolge

$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow \{0\}$$

exakt ist.

Beweis. Betrachten wir zunächst die kovarianten rechts-exakten und kontravarianten links-exakten Fälle, wo die Bildfolge an der Stelle $F(A)$ nicht exakt sein muss.

Sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

exakt, aber f nicht unbedingt injektiv, d.h., $\text{Ker } f$ sei nicht unbedingt $\{0\}$. Sei $\pi: A \longrightarrow A/\text{Ker } f$ die kanonische Projektion.

Dann induziert f einen Homomorphismus

$$\bar{f}: \frac{A}{\text{Ker } f} \longrightarrow B$$

mit $\bar{f} \circ \pi = f$, und es gilt

$$\text{Ker } \bar{f} = \pi(\text{Ker } f) = \{0\} \in \frac{A}{\text{Ker } f},$$

so dass \bar{f} injektiv ist.

Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \{0\} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \text{Ker } f & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & A & & & & \\
 & & \downarrow \pi & \searrow f & & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & \frac{A}{\text{Ker } f} & \xrightarrow{\bar{f}} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \{0\} & & & &
 \end{array}$$

in dem die senkrechte und waagerechte Folge kurze exakte Folgen sind.

Nehmen wir zuerst an, F ist kovariant (und rechts-exakt). Dann ist der in folgendem Diagramm angegebene Teil der waagerechten und senkrechten

Bildfolgen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & F(\text{Ker } f) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & F(A) & & & & \\
 & & \downarrow F(\pi) & \searrow F(f) & & & \\
 & F\left(\frac{A}{\text{Ker } f}\right) & \xrightarrow{F(\bar{f})} & F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) & \longrightarrow \{0\} \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & \{0\} & & & & &
 \end{array}$$

Im kontravarianten links-exakten Fall ändert sich in diesem Diagramm nur die Richtung der Pfeile! Die gleichnamigen Gruppen und Homomorphismen stehen an den gleichen Stellen im Diagramm, und auch in diesem Fall sind die waagerechte und senkrechte Folge exakt.

Wir haben zu zeigen, dass der schräge Pfeil zusammen mit dem angrenzenden rechten Teil der waagerechten Folge eine exakte Folge bildet, und da wir schon wissen, dass die ganze waagerechte Folge exakt ist, müssen wir die Exaktheit dieser abgeknickten Folge nur an der Stelle $F(B)$ nachweisen.

Weil aber die senkrechte Folge exakt ist, ist $F(\pi)$ im kovarianten Fall surjektiv, so dass $\text{Bild } F(f) = \text{Bild } F(\bar{f}) = \text{Ker } F(g)$ wegen der Exaktheit der ungeknickten waagerechten Folge, und das ist genau das, was zu zeigen ist.

Im kontravarianten Fall ist $F(\pi)$ injektiv und wir haben $\text{Ker } F(f) = \text{Ker } F(\bar{f}) = \text{Bild } F(g)$ wegen der Exaktheit der ungeknickten waagerechten Folge, und wieder ist das die Beziehung, die zu zeigen ist.

Ähnlich aber noch einfacher sind die Fälle, wo F kovariant und links-exakt oder kontravariant und rechts-exakt ist und die Bildfolge an der Stelle $F(C)$ nicht exakt sein muss.

Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

exakt, aber g nicht unbedingt surjektiv, d.h., $\text{Bild } g$ sei nicht unbedingt C . Sei $i: \text{Bild } g \longrightarrow C$ die Inklusion und sei g' gleich g aufgefasst als eine Abbildung $B \longrightarrow \text{Bild } g$ (die dann nach Definition surjektiv ist).

Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \{0\} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g'} & \text{Bild } g \longrightarrow \{0\} \\
 & & & & \searrow g & & \downarrow i \\
 & & & & C & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{Coker } g & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \{0\} & &
 \end{array}$$

in dem die senkrechte und die waagerechte Folge kurze exakte Folgen sind.

Nehmen wir zuerst an, F ist kovariant (und links-exakt). Dann ist der in folgendem Diagramm angegebene Teil der waagerechten und senkrechten Bildfolgen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \{0\} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) & \xrightarrow{F(g')} & F(\text{Bild } g) \\
 & & & & \searrow F(g) & & \downarrow F(i) \\
 & & & & F(C) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & F(\text{Coker } g) & &
 \end{array}$$

Im kontravarianten rechts-exakten Fall ändert sich in diesem Diagramm nur die Richtung der Pfeile. Die gleichnamigen Gruppen und Homomorphismen stehen an den gleichen Stellen im Diagramm, und auch in diesem Fall sind die waagerechte und die senkrechte Folge exakt.

Wir haben zu zeigen, dass der schräge Pfeil zusammen mit dem links angrenzenden Teil der waagerechten Folge eine exakte Folge bildet, und da wir schon wissen, dass die ganze waagerechte Folge exakt ist, müssen wir die Exaktheit dieser abgeknickten Folge nur an der Stelle $F(B)$ nachweisen.

Weil aber die senkrechte Folge exakt ist, ist $F(i)$ im kovarianten Fall injektiv, so dass $\text{Ker } F(g) = \text{Ker } F(g') = \text{Bild } F(f)$ wegen der Exaktheit der ungeknickten waagerechten Folge, und das war es, was zu zeigen war.

Im kontravarianten Fall ist $F(i)$ surjektiv und wir haben $\text{Bild } F(g) = \text{Bild } F(g') = \text{Ker } F(f)$ wegen der Exaktheit der ungeknickten waagerechten Folge, und wieder ist das die verlangte Beziehung.

Somit lassen sich die Voraussetzungen für die Anwendung der Halbexaktheit von additiven Funktoren wie behauptet abschwächen. ■

Es ist zwar schade, dass additive Funktoren die Exaktheit von Folgen nicht immer erhalten, aber andererseits können wir gerade deshalb neue Funktoren definieren, die die Nichtexaktheit der Bildfolge messen. Das werden wir etwas später auch ausführen.

Es gibt aber spezielle Situationen und spezielle kurze exakte Folgen von additiven abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen, deren Bilder unter *jedem* additiven Funktor wieder exakt sind. Eine auch für andere Zwecke sehr nützliche Situation, in der das so ist, wollen wir jetzt beschreiben.

Lemma und Definition 10.32 Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (10.43)$$

eine kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Folgende Bedingungen sind zueinander äquivalent (die in den Bedingungen genannten Abbildungen sind in Diagramm (10.44) eingetragen):

$$\{0\} \longrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{r} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{s} \end{array} C \longrightarrow \{0\} \quad (10.44)$$

- a) Es gibt einen Homomorphismus $r: B \longrightarrow A$ mit $r \circ f = \text{id}_A$.
- b) Es gibt einen Homomorphismus $s: C \longrightarrow B$ mit $g \circ s = \text{id}_C$.
- c) Es gibt eine Untergruppe $C' \subseteq B$, so dass

$$B = f(A) \oplus C'$$

und so dass $g|_{C'}: C' \longrightarrow C$ ein Isomorphismus ist.

Wenn eine dieser Bedingungen gilt (dann gelten gleich alle), so sagen wir, dass die kurze exakte Folge (10.43) **spaltet**, und wir nennen jede der Abbildungen r oder s eine **Spaltung** der Folge.

Für eine spaltende kurze exakte Folge (10.43) gelten alle drei Bedingungen a), b) und c), und man sie so erfüllen, also man kann die Abbildungen r in a) und s in b) so wählen, dass

$$r \circ s = 0. \quad (10.45)$$

Ferner, in c) kann man C' so wählen, dass

$$(s \circ g)|_{C'} = \text{id}_{C'}, \quad (10.46)$$

und gleichzeitig so, dass

$$C' = \text{Ker } r = s(C). \quad (10.47)$$

Und schließlich, wann immer r und s zueinander passend gewählt wurden, so dass (10.45) erfüllt ist, gilt auch

$$f \circ r + s \circ g = \text{id}_B. \quad (10.48)$$

Das Interessante an einer Spaltung ist natürlich die direkte Summendarstellung in c).

Beweis. (b) \implies (a) : Sei $s: C \longrightarrow B$ ein Homomorphismus mit $g \circ s = \text{id}_C$.

Da die Folge (10.43) exakt ist, ist f injektiv und somit ein Isomorphismus $A \longrightarrow f(A)$. Wir definieren einen Homomorphismus $\rho: B \longrightarrow B$ durch

$$\rho := \text{id}_B - s \circ g.$$

Man prüft sofort nach, dass

$$g \circ \rho = g \circ (\text{id}_B - s \circ g) = g \circ \text{id}_B - g \circ s \circ g = g - \text{id}_C \circ g = g - g = 0.$$

Also ist $\text{Bild } \rho \subseteq \text{Ker } g = f(A)$ und wir können ρ mit der Umkehrabbildung des Isomorphismus $f: A \longrightarrow f(A)$ verknüpfen.

Wir setzen

$$r := f^{-1} \circ \rho: B \longrightarrow A.$$

Man beachte, dass $g = 0$ auf $f(A)$ und somit ist

$$\rho|_{f(A)} = \text{id}_B|_{f(A)} = \text{id}_{f(A)}.$$

Daraus folgt

$$r \circ f = f^{-1} \circ \rho \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_B \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_A,$$

wie gewünscht.

Ferner, wir haben

$$\rho \circ s = (\text{id}_B - s \circ g) \circ s = s - s \circ g \circ s = s - s \circ \text{id}_C = s - s = \mathbf{0},$$

und deshalb gilt

$$r \circ s = f^{-1} \circ \rho \circ s = f^{-1} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

für r wie oben definiert. In anderen Worten, für diese Wahl von r ist (10.45) erfüllt.

(a) \implies (c) : Sei $r: B \longrightarrow A$ ein Homomorphismus mit $r \circ f = \text{id}_A$. Dann ist

$$rfr = \text{id}_A \circ r = r.$$

Setze $C' := \text{Ker } r$. Für jedes $b \in B$ ist

$$b = f(r(b)) + (b - f(r(b)))$$

und der erste Summand ist in $f(A)$, der zweite ist in C' weil

$$r(b - f(r(b))) = r(b) - r(f(r(b))) = r(b) - rfr(b) = r(b) - r(b) = 0.$$

Also ist $B = f(A) + C'$. Die Summe ist direkt, weil $f(A) \cap C' = \{0\}$, denn wenn $a \in A$ und $f(a) \in C'$, dann ist $r(f(a)) = 0$, und weil $r \circ f = \text{id}_A$ ist $a = 0$ und somit $f(a) = 0$.

Wir haben also $B = f(A) \oplus C'$.

Weil $\text{Ker } g = f(A)$, ist

$$C = g(B) = g(f(A) + C') = \{0\} + g(C') = g(C'),$$

und g ist injektiv auf C' , da

$$\text{Ker } g \cap C' = f(A) \cap C' = \{0\}.$$

Also bildet g die Untergruppe $C' \subseteq B$ surjektiv und injektiv, in anderen Worten isomorph auf C ab.

(c) \implies (b): Sei C' eine Untergruppe von B , so dass

$$B = f(A) \oplus C'$$

und so dass $g|_{C'}: C' \longrightarrow C$ ein Isomorphismus ist.

Sei $i: C' \longrightarrow B$ die Inklusion und setze

$$s := i \circ (g|_{C'})^{-1}: C \longrightarrow B.$$

Offensichtlich ist dann

$$g \circ s = g \circ i \circ (g|_{C'})^{-1} = (g|_{C'}) \circ (g|_{C'})^{-1} = \text{id}_C,$$

wie gewünscht.

Wir haben also jetzt gezeigt, dass die drei Bedingungen a), b) und c) zueinander äquivalent sind, und am Ende des Beweises (b) \implies (a) haben

wir gezeigt, dass man zu gegebenem s die Abbildung r so wählen kann, dass (10.45) erfüllt ist.

Im Beweis von (a) \implies (c) wurde $C' = \text{Ker } r$ gewählt (das ist eine Hälfte von (10.47)), und wir können jetzt zusätzlich annehmen, dass $r \circ s = 0$.

Wir zeigen als Nächstes, dass (10.46) für diese Wahl von C' gilt. Dazu sei $c' \in C' = \text{Ker } r$ und sei

$$b' = c' - (s \circ g)(c')$$

die Differenz beider Seiten von (10.46).

Wir haben

$$g(b') = g(c') - (g \circ s \circ g)(c') = g(c') - (\text{id}_C \circ g)(c') = g(c') - g(c') = 0,$$

und weil die Folge (10.43) exakt ist, ist $b' \in \text{Ker } g = \text{Bild } f$ und es gibt ein Element $a \in A$ mit $b' = f(a)$.

Wir haben dann

$$a = r(f(a)) = r(b') = r(c') - (r \circ s \circ g)(c') = 0 - (\mathbf{0} \circ g)(c') = 0$$

und somit ist $b' = f(0) = 0$, d.h., beide Seiten von (10.46) sind gleich.

Aus (10.46) folgt $C' \subseteq \text{Bild } s$, und wegen (10.45) ist $\text{Bild } s \subseteq \text{Ker } r = C'$. Also ist $\text{Bild } s = C'$ und das beweist die andere Hälfte von (10.47).

Es bleibt noch (10.48) zu beweisen.

Im Beweis benutzen wir die direkte Summendarstellung c) mit zu r und s passendem C' , aber Formel (10.48) hängt nur von r und s und (10.45) ab und erwähnt die direkte Summendarstellung und ihre Eigenschaften nicht.

Wir können trotzdem C' und seine oben genannten schönen Eigenschaften (10.46) und (10.47) als *Hilfsmittel* beim Beweis verwenden, da wir ja immer, ohne r und s zu verändern, ein C' mit diesen Eigenschaften finden können. Das Ergebnis selber hängt aber nicht mehr von der Wahl von C' ab.

Sei also $b \in B$ und schreibe b im Einklang mit der direkten Summendarstellung c) als

$$b = f(a) + c'$$

mit $a \in A$ und $c' \in C' = \text{Ker } r$.

Weil $r(c') = 0$ und $g(f(a)) = 0$, haben wir

$$\begin{aligned} (f \circ r + s \circ g)(b) &= (f \circ r + s \circ g)(f(a) + c') \\ &= (f \circ r)(f(a)) + (s \circ g)(c') \\ &= (f \circ r \circ f)(a) + (s \circ g)(c') \\ &= (f \circ \text{id}_A)(a) + \text{id}_{C'}(c') \\ &= f(a) + c' = b. \end{aligned}$$

Also ist $f \circ r + s \circ g = \text{id}_B$, wenn r und s im Sinne von (10.45) zueinander passend gewählt werden. ■

Lemma 10.33 Sei $F: \text{AbGp} \longrightarrow \text{AbGp}$ ein additiver kovarianter oder kontravarianter Funktor und sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (10.49)$$

eine spaltende kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Dann ist die Bildfolge

$$\{0\} \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \{0\} \quad (F \text{ kovariant})$$

bzw.

$$\{0\} \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow \{0\} \quad (F \text{ kontravariant})$$

auch exakt.

Ferner, sie spaltet, und $F(r)$ und $F(s)$ sind Spaltungen.

Beweis. Weil die kurze exakte Folge (10.49) spaltet, gibt es Homomorphismen r und s wie in folgendem Diagramm

$$\{0\} \longrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{r} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{s} \end{array} C \longrightarrow \{0\}, \quad (10.50)$$

so dass

$$r \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad g \circ s = \text{id}_C. \quad (10.51a)$$

Bei einer, nach Lemma 10.32 immer möglichen passenden Wahl von r und s , und weil die ursprüngliche Folge (10.49) exakt ist, gilt ferner

$$r \circ s = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathbf{0} \quad (10.51b)$$

und schließlich

$$f \circ r + s \circ g = \text{id}_B. \quad (10.51c)$$

Wir wenden jetzt auf alle Gruppen und Homomorphismen und auf das Diagramm (10.50) den Funktor F an. Weil F additiv ist, bleiben dabei alle Relationen (10.51) bis auf die Reihenfolge von Verknüpfungen weiter bestehen, denn jeder Funktor bildet Identitäten in Identitäten ab und respektiert Verknüpfung, und additive Funktoren respektieren Summen von Homomorphismen und bilden Nullabbildungen in Nullabbildungen ab.

Im kovarianten Fall bleibt sogar das Aussehen aller Gleichungen (10.51) und des Diagramms (10.50) bis auf die Ersetzung der Gruppen und Homomorphismen durch ihre Bilder unter F genau erhalten. Im kontravarianten Fall kehrt sich allerdings die Richtung aller Pfeile um und die Reihenfolge der Faktoren in den Verknüpfungen wird vertauscht.

Wir wollen trotzdem versuchen, für beide Varianzfälle einen einheitlichen Beweis zu präsentieren, und das erreichen wir mit dem Trick, die Notation dem Bilddiagramm unter F anzupassen und nicht dem ursprünglichen Diagramm.

Schauen wir uns die Gleichungen (10.51) an.

Die Gleichungen (10.51a) besagen, dass im Diagramm (10.50) die Verknüpfungen der Homomorphismen von den Endgruppen A und C in die mittlere Gruppe B und dann zurück jeweils die Identität der Endgruppe ergeben. Das bleibt in beiden Varianzfällen nach Anwendung von F erhalten, im kovarianten Fall ganz offensichtlich, aber im kontravarianten Fall auch, weil Endgruppen wieder zu Endgruppen der Bildfolge werden (allerdings am anderen Ende) und somit die Bildverknüpfung wieder bei einer Endgruppe beginnt, in die mittlere Gruppe geht und dann zur Endgruppe zurück abbildet. Die Umkehrung der Pfeilrichtungen und die Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren kompensieren sich gegenseitig.

Die Gleichungen (10.51b) besagen, dass die Verknüpfung der beiden oberen Pfeile f und g und die Verknüpfung der beiden unteren Pfeile r und s jeweils die Nullabbildung ergeben. Das bleibt nach Anwendung von F so, weil obere Pfeile in beiden Varianzfällen zu oberen Pfeilen werden und untere Pfeile zu unteren.

Gleichung (10.51c) besagt, dass die Summe der beiden im Diagramm möglichen Verknüpfungen von einem Homomorphismus von der mittleren Gruppe nach außen und dann zurück die Identität der mittleren Gruppe ergibt. F verwandelt diese beiden Verknüpfungen, wie oben erklärt, unabhängig von der Varianz wieder in Verknüpfungen der gleichen Art, und respektiert Summen, so dass auch diese Gleichung erhalten bleibt und sich immer noch so beschreiben lässt.

Wir werden alle nichttrivialen Gruppen und Homomorphismen im Bilddiagramm mit gestrichelten Buchstaben bezeichnen, wobei von den nichttrivialen Gruppen A' die erste in Pfeilrichtung sein soll, B' die mittlere, und C' die letzte. Entsprechend bezeichne f' den ersten oberen Pfeil in Pfeilrichtung (mit Definitionsbereich A') und g' den zweiten, und r' sei der letzte untere Pfeil (mit Zielgruppe A') und s' der erste (in der Reihenfolge der unteren Pfeilrichtungen).

Das bedeutet, dass im kovarianten Fall, wo Pfeile ihre Richtung beibehalten, alle Bilder unter F von Gruppen und Homomorphismen mit den gleichen

Buchstaben wie vorher bezeichnet werden, aber mit einem Strich versehen: $F(A) = A'$, $F(f) = f'$, usw.

Im kontravarianten Fall ist aber $A' := F(C)$ die erste Gruppe in der umgekehrten Pfeilrichtung und $f' := F(g)$ ist der erste nichttriviale Homomorphismus in der Folge. Ganz allgemein: wegen der geänderten Pfeilrichtung werden die Bilder unter F der Gruppen und Homomorphismen mit ursprünglichen Namen aus den Paaren A und C , f und g , oder r und s jeweils mit dem gestrichelten *anderen* Buchstaben des Paares bezeichnet. In anderen Worten, wir schreiben C' für $F(A)$, A' für $F(C)$, und weiterhin B' für $F(B)$, wir schreiben g' für $F(f)$, f' für $F(g)$, und wir schreiben s' für $F(r)$ und r' für $F(s)$.

So entsprechen auch im kontravarianten Fall die Bezeichnungen der Reihenfolge der Gruppen und Homomorphismen im Bilddiagramm, und aus diesem Grund gelten in beiden Varianzfällen die Gleichungen (10.51) mit den gestrichelten Buchstaben immer noch in der (abgesehen von den Strichen) wörtlich gleichen Gestalt wie vorher.

Wer dieser Argumentation nicht folgen kann oder will, kann alles auch sehr leicht direkt nachprüfen. Für einen kovarianten Funktor F ist die Behauptung ohnehin klar. Wenn F kontravariant ist, muss man nur die Gleichungen (10.51) mit vertauschten Verknüpfungsfaktoren hinschreiben, auf jeden Buchstaben „ $F(\)$ “ anwenden und nach obiger Übersetzungsvorschrift in einen gestrichelten Buchstaben umwandeln, und man stellt sofort fest, dass die Gleichungen in der ursprünglichen Form wieder erscheinen.

Die Exaktheit der Bildfolge lässt sich jetzt unabhängig von der Varianz beweisen. Sie muss an den drei mittleren Stellen in der Folge nachgeprüft werden.

An der Stelle A' ist zu zeigen, dass f' injektiv ist. Das folgt sofort aus der Gleichung $r'f' = \text{id}_{A'}$ in (10.51a).

An der Stelle C' ist zu zeigen, dass g' surjektiv ist. Das folgt sofort aus der Gleichung $g's' = \text{id}_{C'}$ in (10.51a).

An der Stelle B' ist zu zeigen, dass $\text{Ker } g' = \text{Bild } f'$.

Die Inklusion $\text{Ker } g' \supseteq \text{Bild } f'$ folgt sofort aus der Gleichung $g' \circ f' = 0$ in (10.51b).

Für die andere Inklusion, sei $b' \in \text{Ker } g' \subseteq B'$. Wegen (10.51c) ist

$$b' = f'r'(b') + s'g'(b') = f'r'(b') + s'(0) = f'r'(b') + 0 = f'r'(b') \in \text{Bild } f',$$

was zu zeigen war.

Auch in der Bildfolge erfüllen die unteren Pfeile die Gleichungen (10.51a), also $r'f' = \text{id}_{A'}$ und $g's' = \text{id}_{C'}$.

Damit ist gesagt, dass die Bildfolge spaltet, und r' und s' , also in geeigneter Reihenfolge $F(r)$ und $F(s)$, sind Spaltungen. ■

Schön wäre es also, ein paar Beispiele von spaltenden kurzen exakten Folgen zu haben. Sie sind leicht zu finden:

Lemma 10.34 *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

eine kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Wenn die Gruppe C frei abelsch ist, dann spaltet die Folge.

Beweis. Sei $X \subseteq C$ eine Basis von C . Da der Homomorphismus g wegen der Exaktheit der Folge surjektiv ist, finden wir für jedes $x \in X$ ein Element $b_x \in B$ mit $g(b_x) = x$.

Weil X eine Basis von C ist, gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $s: C \longrightarrow B$ mit $s(x) = b_x$ für jedes $x \in X$.

Der Homomorphismus $g \circ s: C \longrightarrow C$ hat die Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ gilt

$$(g \circ s)(x) = g(s(x)) = g(b_x) = x.$$

Es gibt zwischen gegebenen additiven abelschen Gruppen aber nur einen Homomorphismus mit vorgegebenen Werten auf einer Basis, und da auch id_C jedes Basiselement in sich abbildet, ist $g \circ s = \text{id}_C$.

Also ist s eine Spaltung der gegebenen kurzen exakten Folge. ■

Wir wollen jetzt in Bezug auf Exaktheit den Funktor \otimes näher untersuchen.

Notation 10.35 Seien \mathcal{K} , \mathcal{L} und \mathcal{M} Kategorien und sei

$$F: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$$

ein Funktor von zwei Variablen.

Für jedes Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ notieren wir mit $F(X, \cdot)$ oder mit ${}_XF$ den Funktor $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$, der jedem Objekt $Y \in \text{Ob}(\mathcal{L})$ das Objekt $F(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ zuordnet, und jedem Morphismus g von \mathcal{L} den Morphismus $F(\text{id}_X, g)$ von \mathcal{M} zuordnet.

Für jedes Objekt $Y \in \text{Ob}(\mathcal{L})$ notieren wir mit $F(\cdot, Y)$ oder mit F_Y den Funktor $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$, der jedem Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ das Objekt $F(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ zuordnet, und jedem Morphismus f von \mathcal{K} den Morphismus $F(f, \text{id}_Y)$ von \mathcal{M} zuordnet.

Diese Bezeichnungen benennen also den Funktor F in Abhängigkeit von nur einer der beiden Variablen und werden sich nützlich erweisen bei der Beschreibung der Eigenschaften von F als Funktor von jeder Variablen einzeln.

Lemma 10.36 *Der Funktor \otimes ist in jeder Variablen einzeln rechtsexakt, d.h., für jede additive abelsche Gruppe D sind die Funktoren $\cdot \otimes D$ und $D \otimes \cdot$ rechtsexakte Funktoren $AbGp \longrightarrow AbGp$.*

Beweis. Wegen der natürlichen Äquivalenz von $D \otimes E$ zu $E \otimes D$ aus Lemma 10.28 a) hat \otimes in beiden Variablen die gleichen Eigenschaften, und es reicht zu zeigen, dass für jede additive abelsche Gruppe D der Funktor $\otimes D$ rechtsexakt ist.

Sei also

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (10.52)$$

eine exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Wir müssen zeigen, dass die Folge

$$A \otimes D \xrightarrow{f \otimes \text{id}_D} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes \text{id}_D} C \otimes D \longrightarrow \{0\} \quad (10.53)$$

exakt ist.

Die Exaktheit an der Stelle $C \otimes D$ folgt sofort aus Lemma 10.28 f), da g und id_D surjektiv sind.

Eine Hälfte der Exaktheit an der Stelle $B \otimes D$ folgt aus der Tatsache, dass

$$(g \otimes \text{id}_D) \circ (f \otimes \text{id}_D) = (g \circ f) \otimes (\text{id}_D \circ \text{id}_D) = \mathbf{0} \otimes \text{id}_D = \mathbf{0}.$$

Deshalb ist

$$\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D) \subseteq \text{Ker}(g \otimes \text{id}_D),$$

und wir müssen nur noch zeigen, dass

$$\text{Ker}(g \otimes \text{id}_D) \subseteq \text{Bild}(f \otimes \text{id}_D).$$

Wir betrachten den Quotienten $(B \otimes D)/\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)$ und die Projektion π von $B \otimes D$ auf diesen Quotienten.

Wir konstruieren wie folgt einen Homomorphismus

$$r: C \otimes D \longrightarrow \frac{B \otimes D}{\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)},$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B \otimes D & \xrightarrow{g \otimes \text{id}_D} & C \otimes D \\ \pi \downarrow & \swarrow r & \\ B \otimes D & & \\ \hline & \text{Bild}(f \otimes \text{id}_D) & \end{array}$$

kommutiert.

Dazu konstruieren wir zunächst eine bilineare Abbildung

$$\rho: C \times D \longrightarrow \frac{B \otimes D}{\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)}.$$

Für $c \in C$ und $d \in D$ sei $b \in B$ ein beliebiges Urbild von c unter g und setze $\rho(c, d) := \pi(b \otimes d)$.

Dies ist tatsächlich eine Wohldefinition, denn wenn b' ein anderes Urbild von c unter g ist, so ist $b - b' \in \text{Ker } g = \text{Bild } f$ und es gibt somit ein $a \in A$ mit $b - b' = f(a)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (b \otimes d) - (b' \otimes d) &= (b - b') \otimes d \\ &= f(a) \otimes d \\ &= (f \otimes \text{id}_D)(a \otimes d) \in \text{Bild}(f \otimes \text{id}_D) = \text{Ker } \pi, \end{aligned}$$

und deshalb ist $\pi(b \otimes d) = \pi(b' \otimes d)$.

Es ist klar, dass ρ in der zweiten Variablen linear ist, also für festes $c \in C$ ein Homomorphismus auf D . Aber ρ ist auch ein Homomorphismus in der ersten Variablen, denn sei $d \in D$ und seien c_1 und $c_2 \in C$. Wenn $b_i \in B$ Urbilder der c_i sind, also Elemente mit $g(b_i) = c_i$, so ist $g(b_1 + b_2) = c_1 + c_2$ und folglich ist

$$\begin{aligned} \rho(c_1 + c_2, d) &:= \pi((b_1 + b_2) \otimes d) \\ &= \pi((b_1 \otimes d) + (b_2 \otimes d)) \\ &= \pi(b_1 \otimes d) + \pi(b_2 \otimes d) \\ &= \rho(b_1, d) + \rho(b_2, d). \end{aligned}$$

Die bilineare Abbildung ρ induziert einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$r: C \otimes D \longrightarrow \frac{B \otimes D}{\text{Bild}(f \otimes \text{id}_D)},$$

so dass für jedes $c \in C$ und $d \in D$ gilt

$$r(c \otimes d) = \rho(c, d).$$

Sei $b \in B$ und $d \in D$. Wir haben dann

$$(r \circ (g \otimes \text{id}_D))(b \otimes d) = r(g(b) \otimes d) = \rho(g(b), d) := \pi(b \otimes d)$$

und somit stimmen $r \circ (g \otimes \text{id}_D)$ und π auf den erzeugenden Elementen der Form $b \otimes d$ überein. Folglich ist

$$r \circ (g \otimes \text{id}_D) = \pi$$

auf ganz $B \otimes D$ wie gewünscht.

Hieraus folgt

$$\operatorname{Ker}(g \otimes \operatorname{id}_D) \subseteq \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Bild}(f \otimes \operatorname{id}_D)$$

und wir sind fertig. ■

Der Funktor \otimes ist im Allgemeinen nicht exakt, und dafür wollen wir gleich ein Beispiel geben. Zunächst eine Bemerkung, die erklärt, worauf wir achten müssen:

Bemerkung 10.37 Ein kovarianter rechts-exakter Funktor $F: \operatorname{Ab} Gp \rightarrow \operatorname{Ab} Gp$ ist genau dann exakt, wenn für jeden injektiven Homomorphismus $f: G \rightarrow H$ gilt: $F(f)$ ist auch injektiv.

Ein kovarianter links-exakter Funktor $F: \operatorname{Ab} Gp \rightarrow \operatorname{Ab} Gp$ ist genau dann exakt, wenn für jeden surjektiven Homomorphismus $g: G \rightarrow H$ gilt: $F(g)$ ist auch surjektiv.

Ein kontravarianter rechts-exakter Funktor $F: \operatorname{Ab} Gp \rightarrow \operatorname{Ab} Gp$ ist genau dann exakt, wenn für jeden surjektiven Homomorphismus $g: G \rightarrow H$ gilt: $F(g)$ ist injektiv.

Ein kontravarianter links-exakter Funktor $F: \operatorname{Ab} Gp \rightarrow \operatorname{Ab} Gp$ ist genau dann exakt, wenn für jeden injektiven Homomorphismus $f: G \rightarrow H$ gilt: $F(f)$ ist surjektiv.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass man jeden injektiven Homomorphismus $f: G \rightarrow H$ als den linken der beiden mittleren Homomorphismen in eine kurze exakte Folge einbetten kann, nämlich in die Folge

$$\{0\} \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker} f \longrightarrow \{0\},$$

und dass man jeden surjektiven Homomorphismus $g: G \rightarrow H$ als den rechten der beiden mittleren Homomorphismen in eine kurze exakte Folge einbetten kann, nämlich in die Folge

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker} g \xrightarrow{i} G \xrightarrow{g} H \longrightarrow \{0\}.$$

Ein Funktor $F: \operatorname{Ab} Gp \rightarrow \operatorname{Ab} Gp$ ist genau dann exakt, wenn er jede kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \tag{10.54}$$

wieder in eine exakte Folge überführt.

Ist der Funktor rechts-exakt, so ist die Bildfolge aber schon exakt, außer vielleicht an ihrem linken Ende, d.h., wenn der Funktor kovariant ist, außer an der Stelle $F(A)$, und wenn der Funktor kontravariant ist, außer an der Stelle $F(C)$ (wegen der Pfeilenumkehrung).

Der Funktor ist also genau dann exakt, wenn die Bildfolge *auch an dieser Stelle* exakt ist, d.h. im kovarianten Fall, genau dann wenn $F(f)$ injektiv ist, und im kontravarianten Fall, genau dann wenn $F(g)$ injektiv ist.

Ist der Funktor links-exakt, so ist die Bildfolge schon exakt, außer vielleicht an ihrem rechten Ende, d.h., wenn der Funktor kovariant ist, außer an der Stelle $F(C)$, und wenn der Funktor kontravariant ist, außer an der Stelle $F(A)$.

Der Funktor ist also genau dann exakt, wenn die Bildfolge auch an dieser Stelle exakt ist, d.h. im kovarianten Fall, genau dann wenn $F(g)$ surjektiv ist, und im kontravarianten Fall, genau dann wenn $F(f)$ surjektiv ist.

Da jeder injektiver Homomorphismus als der Homomorphismus f in einer kurzen exakten Folge (10.54) erscheinen kann und jeder surjektiver Homomorphismus als der Homomorphismus g , ergeben sich genau die in der Aussage angegebenen Bedingungen. ■

Beispiel 10.38 Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Die Multiplikation mit n ist ein injektiver Homomorphismus $\mu_n: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, aber wenn wir darauf den Funktor $\cdot \otimes \mathbf{Z}_n$ anwenden, erhalten wir die Nullabbildung

$$(\mu_n \otimes \text{id}_{\mathbf{Z}_n}): \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_n \longrightarrow \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_n,$$

denn für jedes $k \in \mathbf{Z}_n$ ist

$$(\mu_n \otimes \text{id}_{\mathbf{Z}_n})(k) = (\mu_n \otimes \text{id}_{\mathbf{Z}_n})(1 \otimes k) = n \otimes k = n(1 \otimes k) = 1 \otimes nk = 1 \otimes 0 = 0.$$

Da $\mathbf{Z}_n \neq \{0\}$, ist $(\mu_n \otimes \text{id}_{\mathbf{Z}_n})$ nicht injektiv, und folglich ist $\cdot \otimes \mathbf{Z}_n$ nicht exakt.

Dieses Gegenbeispiel beruht natürlich auf den speziellen Eigenschaften der Gruppe \mathbf{Z}_n . Für andere spezielle Gruppen D kann $\cdot \otimes D$ schon ein exakter Funktor sein.

Lemma 10.39 Sei F eine freie abelsche Gruppe. Dann ist $\cdot \otimes F$ exakt.

(Natürlich ist dann $F \otimes \cdot$ auch ein exakter Funktor.)

Beweis. Sei X eine Basis von F . Für jedes $x \in X$ ist $\mathbf{Z}x \cong \mathbf{Z}$, weil $\{x\}$ linear unabhängig ist, und wir haben

$$F = \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}x \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}.$$

Seien A und B additive abelsche Gruppen und sei $f: A \longrightarrow B$ ein injektiver Homomorphismus.

Nach Lemma 10.28 b) ist

$$A \otimes \mathbf{Z}x \cong A \otimes \mathbf{Z} \cong A$$

für jedes $x \in X$. Unter diesen Isomorphismen entspricht ein Element $a \in A$ dem Element $a \otimes 1$ in $A \otimes \mathbf{Z}$, bzw. dem Element $a \otimes x$ in $A \otimes \mathbf{Z}x$.

Nach Lemma 10.28 e) ist

$$A \otimes F = A \otimes \left(\bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}x \right) \cong \bigoplus_{x \in X} (A \otimes \mathbf{Z}x) \cong \bigoplus_{x \in X} A$$

und jedes Element α von $A \otimes F$ hat eine eindeutige Darstellung in der rechten direkten Summe und somit auch eine eindeutige Darstellung als eine endliche Summe

$$\alpha = \sum_{x \in X} a_x \otimes x \quad (10.55)$$

mit $a_x \in A$ und mit nur endlich vielen $a_x \neq 0$.

Entsprechende Aussagen gelten für B .

Für jedes Element $\alpha \in A \otimes F$ mit der Darstellung (10.55) ist

$$(f \otimes \text{id}_F)(\alpha) = (f \otimes \text{id}_F) \left(\sum_{x \in X} a_x \otimes x \right) = \sum_{x \in X} (f \otimes \text{id}_F)(a_x \otimes x) = \sum_{x \in X} f(a_x) \otimes x$$

und dies ist genau dann 0, wenn $f(a_x) = 0$ für jedes $x \in X$.

Das wiederum gilt genau dann, wenn $a_x = 0$ für jedes $x \in X$, denn f ist injektiv. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (10.55) sind alle a_x genau dann 0, wenn $\alpha = 0$.

Damit ist gezeigt, dass $f \otimes \text{id}_F$ injektiv ist.

Da $\cdot \otimes \text{id}_F$ rechts-exakt und kovariant ist, folgt nun aus Bemerkung 10.37, dass $\cdot \otimes \text{id}_F$ exakt ist. ■

Auch wenn $\cdot \otimes D$ nicht exakt ist, lässt sich etwas machen. Wir können nämlich einen neuen Funktor definieren, der misst, wie „inexakt“ der Funktor $\cdot \otimes D$ ist. Darauf kommen wir später zurück, aber zunächst wollen wir einen weiteren „elementaren“ Funktor untersuchen.

Dieser Funktor ist Ihnen schon wohlbekannt und erfordert daher keine langwierige Konstruktion:

Definition 10.40 Seien G und H additive abelsche Gruppen. Wir setzen

$$\text{Hom}(G, H) := \{ \alpha: G \longrightarrow H \mid \alpha \text{ ist ein Gruppenhomomorphismus} \}.$$

Man beachte, dass $\text{Hom}(G, H)$ selber eine additive abelsche Gruppe ist, mit der in Bemerkung 10.1 auf die gängige Weise erklärten Addition von Homomorphismen als Gruppenoperation.

Wenn K und L zwei weitere additive abelsche Gruppen sind, und wenn $f: K \rightarrow G$ und $g: H \rightarrow L$ Gruppenhomomorphismen sind, und wenn $\alpha \in \text{Hom}(G, H)$, so definieren wir

$$\text{Hom}(f, g)(\alpha) := g \circ \alpha \circ f \in \text{Hom}(K, L). \quad (10.56)$$

Diese Verknüpfung von drei Homomorphismen erfüllt für jeden Faktor das Distributivgesetz in Bezug auf die Addition von Gruppenhomomorphismen. Für den mittleren Faktor bedeutet das, dass $\text{Hom}(f, g)$ ein Gruppenhomomorphismus $\text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(K, L)$ ist.

Es ist trivial nachzuprüfen, dass diese Zuordnung mit Verknüpfungen der Homomorphismenpaare (f, g) verträglich ist, und offensichtlich ist

$$\text{Hom}(\text{id}_G, \text{id}_H) = \text{id}_{\text{Hom}(G, H)}.$$

Hom ist also ein Funktor von zwei Variablen $AbGp \times AbGp \rightarrow AbGp$, kontravariant in der ersten Variablen und kovariant in der zweiten.

Für die äußeren Faktoren g und f in der Verknüpfung (10.56) bedeutet die Gültigkeit des Distributivgesetzes, dass Hom in beiden Variablen additiv ist, also insgesamt ein additiver Funktor von zwei Variablen ist.

Lemma 10.41 a) Für jede additive abelsche Gruppe G gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) \cong G.$$

Er identifiziert $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{Z}, G)$ mit $\alpha(1) \in G$.

b) Sei G eine additive abelsche Gruppe und sei $n > 0 \in \mathbf{N}$. Wir definieren die n -**Torsionsgruppe** von G als die Untergruppe

$$G^{(n)} := \{ a \in G \mid na = 0 \}.$$

Für jede additive abelsche Gruppe G gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}(\mathbf{Z}_n, G) \cong G^{(n)}.$$

Er identifiziert $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{Z}_n, G)$ mit $\alpha(1) \in G$, und dieses Element gehört zu $G^{(n)}$.

- c) Sei T eine abelsche Torsionsgruppe und N eine torsionsfreie abelsche Gruppe. Dann ist

$$\operatorname{Hom}(T, N) = \{0\}.$$

- d) Sei D eine divisible abelsche Gruppe und F eine freie abelsche Gruppe. Dann ist

$$\operatorname{Hom}(D, F) = \{0\}.$$

Beweis. a) Jeder Homomorphismus $\alpha: \mathbf{Z} \rightarrow G$ ist eindeutig bestimmt durch den Wert $\alpha(1)$, weil 1 die Gruppe \mathbf{Z} erzeugt, und umgekehrt, für jedes $a \in G$ definiert

$$\alpha_a(n) := na$$

offensichtlich einen Homomorphismus $\mathbf{Z} \rightarrow G$ mit $\alpha_a(1) = a$.

Die Zuordnung $\alpha \mapsto \alpha(1)$ ist also eine Bijektion $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, G) \rightarrow G$, und sie ist sogar ein Isomorphismus, da sie mit der Addition in beiden Gruppen verträglich ist.

- b) Sei $a \in G$ und sei $\alpha: \mathbf{Z} \rightarrow G$ der (nach Teil a) eindeutige) Homomorphismus mit $\alpha(1) = a$. Die Gruppe $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ist ein Quotient von \mathbf{Z} ; sei $\pi: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_n$ die kanonische Projektion.

Die zyklische Gruppe \mathbf{Z}_n wird erzeugt vom Element 1, dem Bild von $1 \in \mathbf{Z}$ unter π , und somit ist jeder Homomorphismus $\mathbf{Z}_n \rightarrow G$ eindeutig bestimmt durch seinen Wert auf diesem Element.

Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \\ \mathbf{Z}_n & & \end{array}$$

Genau dann existiert ein (dann eindeutiger) Homomorphismus

$$\bar{\alpha}: \mathbf{Z}_n \rightarrow G$$

mit $\bar{\alpha}(1) = a$, wenn es einen Homomorphismus $\bar{\alpha}$ gibt mit $\bar{\alpha} \circ \pi(1) = a = \alpha(1)$, also genau dann, wenn der gestrichelte Pfeil $\bar{\alpha}$ im Diagramm so eingefüllt werden kann, dass das Diagramm beim Element $1 \in \mathbf{Z}$ kommutiert und somit ganz kommutiert, da 1 die zyklische Gruppe \mathbf{Z} erzeugt.

Aber das Diagramm lässt sich genau dann einfüllen, wenn

$$\operatorname{Ker} \pi = n\mathbf{Z} \subseteq \operatorname{Ker} \alpha,$$

und das ist genau dann der Fall, wenn $n \in \operatorname{Ker} \alpha$, also wenn $\alpha(n) = na = 0$ oder in anderen Worten, wenn $a \in G^{(n)}$.

Wie im Fall \mathbf{Z} ist auch hier die Zuordnung $\bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha}(1)$ ein injektiver Homomorphismus $\text{Hom}(\mathbf{Z}_n, G) \rightarrow G$, und somit ein Isomorphismus auf ihr Bild. Und wir haben gerade gesehen, dass das Bild die Untergruppe $G^{(n)}$ ist.

c) folgt sofort aus Bemerkung 10.8 und der Relation (10.11), denn jeder Homomorphismus $\alpha: T \rightarrow N$ bildet $T = T(T)$ nach $\{0\} = T(N)$ ab.

d) Ein Homomorphismus $\alpha: G \rightarrow H$ bildet divisible Elemente $a \in G$ immer in divisible Elemente von H ab, denn für jedes $n \neq 0 \in \mathbf{Z}$ existiert ein $b \in G$ mit $nb = a$, und es gilt $n\alpha(b) = \alpha(nb) = \alpha(a)$, also ist $\alpha(a)$ n -divisibel für jedes $n \neq 0 \in \mathbf{Z}$.

Aber in einer divisiblen Gruppe ist jedes Element divisibel, und in einer freien abelschen Gruppe ist, wie wir in Beispiel 10.12 a) festgestellt haben, nur die 0 divisibel.

Also nimmt ein Homomorphismus von einer divisiblen Gruppe in eine freie abelsche Gruppe nur den Wert 0 an. ■

Für zyklische Gruppen ergeben sich aus Lemma 10.41 folgende Werte des Hom-Funktors, mit deren Hilfe man $\text{Hom}(G, H)$ für jedes Paar von endlich erzeugten abelschen Gruppen ausrechnen kann.

Beispiele 10.42 Seien m und n positive natürliche Zahlen, und sei $d := \text{ggT}(m, n)$ ihr größter gemeinsamer Teiler. Es gilt

- a) $\text{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$
- b) $\text{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_n$
- c) $\text{Hom}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \{0\}$
- d) $\text{Hom}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_d$

Beweis. a) und b) folgen sofort aus Lemma 10.41 a) und c) ist die Aussage von Lemma 10.41 c).

a) Nach Lemma 10.41 b) besteht $\text{Hom}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n)$ aus den m -Torsionselementen von \mathbf{Z}_n und wir müssen also die Gruppe $\mathbf{Z}_n^{(m)}$ berechnen.

Sei 1 das Erzeugende von \mathbf{Z}_n und sei $k \in \mathbf{Z}$. Dann ist $m \cdot (k \cdot 1) = 0$ genau dann, wenn $n \mid mk$.

Das ist genau dann der Fall, wenn $(n/d) \mid (m/d)k$ und da n/d und m/d teilerfremd sind, ist dies genau dann erfüllt, wenn k ein Vielfaches von n/d ist.

Also wird $\mathbf{Z}_n^{(m)}$ vom Element $\frac{n}{d} \cdot 1$ in \mathbf{Z}_n erzeugt, und dieses Element hat offensichtlich Ordnung d , so dass $\mathbf{Z}_n^{(m)} \cong \mathbf{Z}_d$. ■

Lemma 10.43 Sei D eine additive abelsche Gruppe. Der kovariante Funktor $\text{Hom}(D, \cdot)$ und der kontravariante Funktor $\text{Hom}(\cdot, D)$ sind beide linksexakt.

Beweis. Sei

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \quad (10.57)$$

eine kurze exakte Folge von additiven abelschen Gruppen und Homomorphismen.

Für einen beliebigen Homomorphismus $h: G \longrightarrow H$ zwischen additiven abelschen Gruppen G und H ist $\text{Hom}(D, h) = \text{Hom}(\text{id}_D, h) = \lambda_h$, die Verknüpfung mit h von links (also $\text{Hom}(D, h)(\alpha) = h \circ \alpha$ für jeden Homomorphismus $\alpha: D \longrightarrow G$).

Entsprechend ist $\text{Hom}(h, D) = \text{Hom}(h, \text{id}_D, h) = \rho_h$, die Verknüpfung mit h von rechts (also $\text{Hom}(h, D)(\beta) = \beta \circ h$ für jeden Homomorphismus $\beta: H \longrightarrow D$).

Wir betrachten zuerst den Funktor $\text{Hom}(D, \cdot)$ und die Folge

$$\{0\} \longrightarrow \text{Hom}(D, A) \xrightarrow{\lambda_f} \text{Hom}(D, B) \xrightarrow{\lambda_g} \text{Hom}(D, C), \quad (10.58)$$

deren Exaktheit wir zu beweisen haben.

Wenn $\alpha \in \text{Hom}(D, A)$ und $f \circ \alpha = 0$, dann ist $\alpha = \mathbf{0}$, weil f injektiv ist. Also ist (10.58) exakt an der Stelle $\text{Hom}(D, A)$.

Weil $g \circ f = \mathbf{0}$ ist auch $\lambda_g \circ \lambda_f = \mathbf{0}$ und somit $\text{Bild } \lambda_f \subseteq \text{Ker } \lambda_g$, und für die Exaktheit an der Stelle $\text{Hom}(D, B)$ müssen wir nur noch nachprüfen, dass $\text{Ker } \lambda_g \subseteq \text{Bild } \lambda_f$.

Sei $B' := f(A) = \text{Ker } g$. Weil f injektiv ist, ist f als Abbildung $A \longrightarrow B'$ ein Isomorphismus und besitzt einen Umkehrhomomorphismus $\varphi: B' \longrightarrow A$ mit $f \circ \varphi = \text{id}_{B'}$.

Wenn $\beta \in \text{Hom}(D, B)$ und $\lambda_g(\beta) = \mathbf{0}$, so ist $\text{Bild } \beta \subseteq \text{Ker } g = B'$ und $\alpha := \varphi \circ \beta$ ist definiert und ist ein Element von $\text{Hom}(D, A)$ mit $\lambda_f(\alpha) = \beta$, weshalb $\beta \in \text{Bild } \lambda_f$.

Damit ist (10.58) auch exakt an der Stelle $\text{Hom}(D, B)$, und der Funktor $\text{Hom}(D, \cdot)$ ist links-exakt.

Nun betrachten wir den kontravarianten Funktor $\text{Hom}(\cdot, D)$ und die Folge

$$\{0\} \longrightarrow \text{Hom}(C, D) \xrightarrow{\rho_g} \text{Hom}(B, D) \xrightarrow{\rho_f} \text{Hom}(A, D). \quad (10.59)$$

Wenn $\beta \in \text{Hom}(C, D)$ und $\beta \circ g = 0$, dann muss β die Nullabbildung sein weil g surjektiv ist. Also ist (10.59) exakt an der Stelle $\text{Hom}(C, D)$.

Weil $g \circ f = \mathbf{0}$ ist auch $\rho_f \circ \rho_g = \mathbf{0}$ und somit $\text{Bild } \rho_g \subseteq \text{Ker } \rho_f$, und für die Exaktheit an der Stelle $\text{Hom}(B, D)$ müssen wir nur noch zeigen, dass $\text{Ker } \rho_f \subseteq \text{Bild } \rho_g$.

Sei $\tilde{B} := \text{Coker } f = B/\text{Bild } f = B/\text{Ker } g$ und sei $\pi: B \longrightarrow \tilde{B}$ die kanonische Projektion. Weil g surjektiv ist, induziert g einen Isomorphismus

$$\tilde{g}: \tilde{B} = \frac{B}{\text{Ker } g} \longrightarrow \text{Bild } g = C$$

mit $\tilde{g} \circ \pi = g$. Sei $\psi := \tilde{g}^{-1}$ der Umkehrhomomorphismus dieses Isomorphismus.

Sei $\beta \in \text{Hom}(B, D)$ mit $\rho_f(\beta) = \mathbf{0}$. Dann ist $\text{Ker } g = \text{Bild } f \subseteq \text{Ker } \beta$ und β induziert einen Homomorphismus $\tilde{\beta}: \tilde{B} \longrightarrow D$ mit $\tilde{\beta} \circ \pi = \beta$.

Setze $\gamma := \tilde{\beta} \circ \psi: C \longrightarrow D$. Dann ist

$$\rho_g(\gamma) = \gamma \circ g = \tilde{\beta} \circ \psi \circ \tilde{g} \circ \pi = \tilde{\beta} \circ \text{id}_{\tilde{B}} \circ \pi = \tilde{\beta} \circ \pi = \beta,$$

weshalb $\beta \in \text{Bild } \rho_g$.

Damit ist (10.59) auch exakt an der Stelle $\text{Hom}(B, D)$, und der Funktor $\text{Hom}(\cdot, D)$ ist links-exakt. ■

Die Funktoren $\text{Hom}(D, \cdot)$ und $\text{Hom}(\cdot, D)$ sind im Allgemeinen nicht exakt. Bevor wir Beispiele geben, wollen wir uns kurz vergewissern, worauf es ankommt, denn die Exaktheit dieser Funktoren für *spezielle* D ist eine wichtige Eigenschaft von D , wichtig genug, dass sie in der Literatur einen eigenen Namen erhält:

Definition 10.44 Sei G eine additive abelsche Gruppe.

G heißt **projektiv**, wenn jedes Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \longrightarrow \{0\} \\ & \nwarrow \bar{\alpha} & \uparrow \alpha \\ & & G \end{array} \quad (10.60)$$

mit einer exakten Zeile und mit einem beliebigen Gruppenhomomorphismus $\alpha: G \longrightarrow C$ sich durch den gestrichelten Pfeil $\bar{\alpha}$ zu einem kommutativen Diagramm ergänzen lässt.

In anderen Worten, G ist **projektiv**, wenn jeder Homomorphismus von G in das Ziel eines surjektiven Gruppenhomomorphismus f sich zur Quelle von f liften lässt, oder noch prägnanter gesagt, wenn für jede additive abelsche Gruppe B jeder Homomorphismus von G in einen Quotienten von B sich nach B hochheben lässt.

Hierzu gibt es folgenden dualen Begriff: G heißt eine *injektive Gruppe*, wenn jedes Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow \alpha & \nearrow \bar{\alpha} & \\ & & G & & \end{array} \quad (10.61)$$

mit einer exakten Zeile und mit einem beliebigen Gruppenhomomorphismus $\alpha: A \rightarrow G$ sich durch den gestrichelten Pfeil $\bar{\alpha}$ zu einem kommutativen Diagramm ergänzen lässt.

In anderen Worten, G ist *injektiv*, wenn jeder Homomorphismus von der Quelle eines injektiven Gruppenhomomorphismus f nach G sich zum Ziel von f erweitern lässt, oder noch prägnanter gesagt, wenn für jede additive abelsche Gruppe B jeder Homomorphismus von einer Untergruppe von B nach G sich zu ganz B erweitern lässt.

Bemerkung 10.45 Eine additive abelsche Gruppe G ist projektiv genau dann, wenn für jeden surjektiven Gruppenhomomorphismus $g: B \rightarrow C$ der Homomorphismus

$$\text{Hom}(G, g) = \lambda_g: \text{Hom}(G, B) \rightarrow \text{Hom}(G, C)$$

auch surjektiv ist.

Nach Bemerkung 10.37 ist dies genau die Bedingung dafür, dass der der kovariante links-exakte Funktor $\text{Hom}(G, \cdot)$ exakt ist. Also: $\text{Hom}(G, \cdot)$ ist genau dann exakt, wenn G projektiv ist.

Eine additive abelsche Gruppe G ist injektiv genau dann, wenn für jeden injektiven Gruppenhomomorphismus $f: A \rightarrow B$ der Homomorphismus

$$\text{Hom}(f, G) = \rho_f: \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G)$$

surjektiv ist.

Nach Bemerkung 10.37 ist dies genau die Bedingung dafür, dass der der kontravariante links-exakte Funktor $\text{Hom}(\cdot, G)$ exakt ist. Also: $\text{Hom}(\cdot, G)$ ist genau dann exakt, wenn G injektiv ist.

Lemma 10.46 Eine additive abelsche Gruppe G ist genau dann projektiv, wenn sie frei ist.

Beweis. (\Rightarrow): Sei G projektiv und sei $F := F(G)$ die freie abelsche Gruppe erzeugt von G als Menge. Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $p: F \rightarrow G$ mit $p|_G = \text{id}_G$, und p ist natürlich surjektiv.

Weil G projektiv ist finden wir einen Homomorphismus $s: G \longrightarrow F$, so dass $p \circ s = \text{id}_G$.

Daraus folgt, dass der Homomorphismus s injektiv ist und deshalb ein Isomorphismus auf sein Bild ist. Also ist G isomorph zu einer Untergruppe von F .

Weil nach Satz 10.16 jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei ist, ist G frei.

(\Leftarrow): Sei G frei und sei X eine Basis von G . Sei $f: B \longrightarrow C$ ein surjektiver Homomorphismus von additiven abelschen Gruppen und sei α ein Homomorphismus $G \longrightarrow C$. Wir müssen einen Homomorphismus $\bar{\alpha}: G \longrightarrow B$ finden mit $f \circ \bar{\alpha} = \alpha$.

Weil f surjektiv ist, finden wir für jedes $x \in X$ ein Element $b_x \in B$ mit $f(b_x) = \alpha(x)$.

Sei $\bar{\alpha}: G \longrightarrow B$ der eindeutige Homomorphismus mit $\bar{\alpha}(x) = b_x$ für jedes $x \in X$.

Dann ist $(f \circ \bar{\alpha})(x) = f(b_x) = \alpha(x)$ für jedes $x \in X$, und weil X die Gruppe G erzeugt, gilt $f \circ \bar{\alpha} = \alpha$ auf ganz G .

Dieses $\bar{\alpha}$ ist also ein Homomorphismus wie gewünscht. ■

Beispiele 10.47 Weder $\text{Hom}(D, \cdot)$ noch $\text{Hom}(\cdot, D)$ sind im Allgemeinen exakt.

- a) Wenn D keine freie abelsche Gruppe ist, ist D nicht projektiv und somit $\text{Hom}(D, \cdot)$ nicht exakt.
- b) Nach Lemma 10.41 d) gibt es keine nichttrivialen Homomorphismen $\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Z}$. Insbesondere lässt sich $\text{id}_{\mathbf{Z}}$ nicht zu einem Gruppenhomomorphismus $\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Z}$ erweitern.

Folglich ist \mathbf{Z} keine injektive Gruppe und $\text{Hom}(\cdot, \mathbf{Z})$ ist nicht exakt (hier nützt es nichts, dass \mathbf{Z} frei ist!).

Es erscheint einem zunächst als ärgerlich, dass die meisten Funktoren, und insbesondere die wichtigen Funktoren \otimes und Hom , nicht exakt sind. Aber das hat sogar einen Vorteil, denn es bietet die Gelegenheit, neue Funktoren zu definieren, die die Inexaktheit der alten Funktoren „messen“.

Wie soll das gehen? Dazu ordnet man jeder additiven abelschen Gruppe eine *standardisierte* exakte Folge zu und wendet den Funktor an. Man erhält zwar nicht wieder eine exakte Folge, aber zumindest einen Kettenkomplex, und dessen Homologie liefert den neuen „abgeleiteten“ Funktor.

Definition 10.48 Sei G eine additive abelsche Gruppe. Eine **freie Resolution** oder zu Deutsch **freie Auflösung** von G ist eine exakte Folge

$$\dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_1} F_0 := G \longrightarrow \{0\} \quad (10.62)$$

mit G als rechtestes nichttriviales Folgenmitglied, in der alle anderen Gruppen F_i für $i \geq 1$ frei sind.

Wir bezeichnen solche Folgen mit geschwungenen oder kalligraphischen Buchstaben $\mathcal{F} = \{F_i\}$.

Statt zu sagen, die Folge (10.62) ist exakt, kann man gleichbedeutend sagen, sie ist ein **azyklischer Kettenkomplex**, also ein Kettenkomplex \mathcal{F} mit $H(\mathcal{F}) = \{0\}$. Diese Sichtweise ist sinnvoll in Anbetracht der beabsichtigten Anwendung zur Definition von abgeleiteten Funktoren (Definition 10.53 unten).

Jede additive abelsche Gruppe G besitzt eine freie Auflösung. Dazu sei $F(G)$, wie die Notation sagt, die freie abelsche Gruppe erzeugt von der Menge G als Basis (die Gruppenstruktur von G geht in die Definition von $F(G)$ überhaupt nicht ein!).

Die Identität von G ist eine mengentheoretische Abbildung von der Menge G , als Basis von $F(G)$, in die abelsche Gruppe G , und es gibt einen eindeutigen und offensichtlich surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi_G: F(G) \longrightarrow G$$

mit $\pi_G|_G = \text{id}_G$.

Sei $R(G) := \text{Ker } \pi_G \subseteq F(G)$ und sei $i_G: R(G) \longrightarrow F(G)$ die Inklusion. Als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist auch $R(G)$ frei abelsch.

Die Folge

$$\{0\} \longrightarrow R(G) \xrightarrow{i_G} F(G) \xrightarrow{\pi_G} G \longrightarrow \{0\} \quad (10.63)$$

ist exakt und ist eine freie Auflösung von G . Wir nennen diese Folge die **standard freie Auflösung** von G und bezeichnen sie mit \mathcal{F}_G .

Um mit Hilfe von freien Auflösungen neue algebraische Funktoren konstruieren zu können (und das ist ja unser Vorhaben), müssen wir noch abklären, was passiert, wenn man die Gruppe G durch eine andere abelsche Gruppe H ersetzt, und vor allem wie freie Auflösungen sich bezüglich Homomorphismen $G \longrightarrow H$ verhalten.

Lemma 10.49 Seien G und H additive abelsche Gruppen und sei

$$f: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Sei $\mathcal{G} = \{G_n\}$ eine freie Auflösung von G und sei $\mathcal{H} = \{H_n\}$ eine freie Auflösung von H . Dann erweitert sich f zu einer Kettenabbildung

$$\varphi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

mit $\varphi_0 = f$.

Je zwei solche Erweiterungen von f zu Kettenabbildungen sind kettenhomotop, und zwar durch eine Kettenhomotopie Φ mit $\Phi_0 = \mathbf{0}: G_0 \longrightarrow H_1$.

Beweis. Zunächst beweisen wir die Existenz einer Kettenabbildung $\varphi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ mit $\varphi_0 = f$, indem wir durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$ die homogenen Anteile φ_n von φ konstruieren.

Der Induktionsanfang ist einfach, denn φ_0 ist als f schon vorgegeben. Natürlich können wir auch für alle $k < 0$ einfach $\varphi_k = \mathbf{0}$ nehmen, und wir haben bis einschließlich der 0-ten Stufe eine Kettenabbildung.

Wir machen jetzt den Induktionsschritt. Sei $n \geq 0$ und wir nehmen an, dass für alle $k \leq n$ die Stufen φ_k einer f erweiternden Kettenabbildung schon gegeben sind.

Betrachten wir in folgendem Diagramm die Situation im Umfeld der n -ten Stufe:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{g_{n+2}} & G_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{g_n} & G_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ \cdots & \xrightarrow{h_{n+2}} & H_{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & H_n & \xrightarrow{h_n} & H_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} \cdots \end{array}$$

Alle schon existenten Quadrate kommutieren. Insbesondere ist

$$h_n \circ \varphi_n \circ g_{n+1} = \varphi_{n-1} \circ g_n \circ g_{n+1} = \varphi_{n-1} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

da \mathcal{G} ein Kettenkomplex ist.

Es folgt, dass $\text{Bild}(\varphi_n \circ g_{n+1}) \subseteq \text{Ker } h_n = \text{Bild } h_{n+1}$ ist (die letzte Gleichheit gilt, weil \mathcal{H} exakt ist).

Wenn wir h_{n+1} und $\varphi_n \circ g_{n+1}$ als Abbildungen nach $\text{Bild } h_{n+1}$ betrachten, ist h_{n+1} surjektiv, und weil G_{n+1} frei und somit projektiv ist, lässt sich der Homomorphismus $\varphi_n \circ g_{n+1}$ entlang h_{n+1} hochheben zu einem Homomorphismus $\varphi_{n+1}: G_{n+1} \longrightarrow H_{n+1}$ mit $h_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ g_{n+1}$.

Das ergänzt die Kettenabbildung φ um die $n+1$ -te Stufe, die nach Konstruktion die Kettenabbildungseigenschaft tatsächlich erfüllt.

Durch Induktion erhalten wir die gesamte Kettenabbildung φ .

Bis auf Kettenhomotopie ist φ eindeutig, denn sei $\psi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ eine andere Kettenabbildung mit $\psi_0 = f$.

Wir konstruieren durch Induktion über $n \in \mathbf{Z}$ die Stufen

$$\Phi_n: G_n \longrightarrow H_{n+1}$$

einer Kettenhomotopie $\Phi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ von φ nach ψ .

Sie muss für jedes n erfüllen

$$\psi_n - \varphi_n = h_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ g_n. \quad (10.64)_n$$

Um die Induktion zu beginnen, setzen wir $\Phi_k = \mathbf{0}$ für jedes $k \leq 0$.

Für $k < 0$ haben wir keine andere Wahl, aber auch für $k = 0$ gilt $(10.64)_0$ mit $\Phi_0 = \mathbf{0}$, da $\psi_0 = \varphi_0 = f$ und somit $\psi_0 - \varphi_0 = \mathbf{0}$.

Für den Induktionsschritt sei $n \geq 0$ und wir nehmen an, dass Φ_k schon für alle $k \leq n$ definiert ist und die Beziehungen $(10.64)_k$ für $k \leq n$ erfüllt.

Um die Konstruktion zu erklären, wollen wir wieder ein Diagramm angeben, in dem die Situation im Umfeld der Stufe n zu sehen ist. Damit das Diagramm noch lesbar bleibt, verwenden wir die Kürzel δ_k für $\psi_k - \varphi_k$.

Wir wollen dann den gestrichelten Pfeil einfüllen in

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{g_{n+3}} & G_{n+2} & \xrightarrow{g_{n+2}} & G_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{g_n} & G_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & \cdots \\ & & \delta_{n+2} \downarrow & \swarrow \Phi_{n+1} & \delta_{n+1} \downarrow & \swarrow \Phi_n & \delta_n \downarrow & \swarrow \Phi_{n-1} & \delta_{n-1} \downarrow & \swarrow \Phi_{n-2} & \\ \cdots & \xrightarrow{h_{n+3}} & H_{n+2} & \xrightarrow{h_{n+2}} & H_{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & H_n & \xrightarrow{h_n} & H_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & \cdots \end{array}$$

Sei

$$\gamma_{n+1} := \psi_{n+1} - \varphi_{n+1} - \Phi_n \circ g_{n+1} = \delta_{n+1} - \Phi_n \circ g_{n+1},$$

ein Homomorphismus von G_{n+1} nach H_{n+1} . Wir haben

$$\begin{aligned} h_{n+1} \circ \gamma_{n+1} &= h_{n+1} \circ \delta_{n+1} - h_{n+1} \circ \Phi_n \circ g_{n+1} \\ &= \delta_n \circ g_{n+1} - h_{n+1} \circ \Phi_n \circ g_{n+1} && (\delta \text{ Kettenabbildung}) \\ &= (\delta_n - h_{n+1} \circ \Phi_n) \circ g_{n+1} \\ &= \Phi_{n-1} \circ g_n \circ g_{n+1} && (\text{weil } (10.64)_n \text{ gilt}) \\ &= \mathbf{0} && (\mathcal{G} \text{ exakt}) \end{aligned}$$

und weil \mathcal{H} exakt ist, bildet γ_{n+1} und somit auch $\gamma_{n+1} \circ g_{n+2}$ in die Untergruppe $\text{Ker } h_{n+1} = \text{Bild } h_{n+2}$ von H_{n+1} ab, auf die h_{n+2} surjektiv ist.

Weil G_{n+1} projektiv ist, gibt es einen Homomorphismus

$$\Phi_{n+1}: G_{n+1} \longrightarrow H_{n+2}$$

mit $h_{n+2} \circ \Phi_{n+1} = \gamma_{n+1}$. Dies ist Bedingung $(10.64)_{n+1}$, und wir haben die Kettenhomotopie Φ um eine Stufe erweitert.

Durch Induktion über n erhalten wir die gesamte Kettenhomotopie Φ von φ nach ψ , und mit $\Phi_0 = \mathbf{0}$ wie gewünscht. ■

Bemerkung 10.50 Die gesamte Theorie der abgeleiteten Funktoren kann man auch für Moduln über einen Hauptidealbereich R entwickeln. Die einzige wichtige erforderliche Änderung oder genauer Spezifizierung ist, dass man in diesem Fall nicht freie, sondern **projektive Auflösungen** betrachten muss, denn dies ist die Eigenschaft der Auflösungsgruppen, die immer wieder verwendet wird. Für additive abelsche Gruppen sind „frei“ und „projektiv“ natürlich das Gleiche.

Bemerkung und Definition 10.51 In Definition 2.8 hatten wir zu jeder topologischen Kategorie \mathcal{K} eine entsprechende Homotopiekategorie HK definiert, die die gleichen Objekte wie \mathcal{K} hat, aber deren Morphismen die *Homotopieklassen* der Morphismen von \mathcal{K} sind. Wie wir in der Homotopietheorie und der Homologietheorie gesehen haben, sind diese Homotopiekategorien der eigentliche Definitionsbereich der algebrawertigen Funktoren der algebraischen Topologie.

Ähnlich zu diesen topologischen Homotopiekategorien können wir auch eine Homotopiekategorie HKK von *Kettenkomplexen* definieren. Sie hat die gleichen Objekte wie KK , aber für je zwei Kettenkomplexe \mathcal{C} und \mathcal{D} ist $\text{Mor}_{HKK}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ definiert als die Menge der *Kettenhomotopieklassen* von Kettenabbildungen $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, mit der offensichtlichen Verknüpfung

$$[g] \circ [f] := [g \circ f]$$

(die nach Lemma 7.19 c) wohldefiniert ist) und der offensichtlichen Identität. Man sieht sofort, dass dies wirklich eine Kategorie ergibt.

Diese Kategorie ist der eigentliche Definitionsbereich des Homologiefunktors für Kettenkomplexe.

Es gilt noch mehr. Wie schon in Bemerkung 10.1 erwähnt, haben die Morphismenmengen der Kategorie KK eine natürliche Struktur als additive abelsche Gruppen, denn weil der Randoperator ein graduierter Gruppenhomomorphismus ist, sieht man direkt, dass die Summe von zwei Kettenabbildungen wieder eine Kettenabbildung ist.

Aus dem gleichen Grund ist Kettenhomotopie verträglich mit der Addition von Kettenabbildungen, d.h., wenn $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \varepsilon)$ Kettenkomplexe sind und wenn φ_1 und φ_2 , ψ_1 und ψ_2 Kettenabbildungen $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sind mit

$$\varphi_1 \simeq_{\Phi} \varphi_2 \quad \text{und} \quad \psi_1 \simeq_{\Psi} \psi_2,$$

dann ist offensichtlich $\Phi + \Psi$ eine Kettenhomotopie von $\varphi_1 + \psi_1$ nach $\varphi_2 + \psi_2$.

Deshalb induziert die Addition von Kettenabbildungen eine wohldefinierte Addition von Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen, mit

$[\varphi] + [\psi]$ definiert als $[\varphi + \psi]$. Das bedeutet, dass auch die Kategorie HKK eine Kategorie wie in Bemerkung 10.1 ist, auf der es sinnvoll ist, von additiven Funktoren zu sprechen.

Insbesondere ist die Homologie ein additiver Funktor $HKK \longrightarrow GAG$.

Aus Lemma 10.49 ergibt sich sofort folgende elegante Konstruktion neuer additiver Funktoren:

Korollar und Definition 10.52 a) Die *standard freie Auflösung* ist ein wohldefinierter Funktor $\mathcal{F}: AbGp \longrightarrow HKK$.

Er ordnet jeder additiven abelschen Gruppe G die standard freie Auflösung \mathcal{F}_G zu, und jedem Gruppenhomomorphismus $f: G \longrightarrow H$ zwischen zwei abelschen Gruppen ordnet er die Kettenhomotopieklasse $[\varphi]$ einer beliebigen Kettenabbildung $\varphi: \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{F}_H$ mit $\varphi_0 = f$ zu.

Dieser Funktor \mathcal{F} ist additiv.

Im Folgenden sei U ein fest vorgegebener additiver Funktor $AbGp \longrightarrow AbGp$.

- b) Wie in Bemerkung 1.22 definiert, kann man U auf jede Diagrammkategorie von additiven abelschen Gruppen erweitern (wir verwenden, anders als in der genannten Definition, den gleichen Namen U für diese Diagrammfunktoren). Insbesondere kann man den Funktor U auf Kettenkomplexe anwenden.

Dabei ist es wichtig zu betonen, dass wir Kettenkomplexe hier tatsächlich als folgendgestaltige Diagramme auffassen. Wenn wir einen Kettenkomplex $\mathcal{C} = (C, \partial)$ als eine graduierte abelsche Gruppe $C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C_n$ auffassen wollen, müssen wir, um mit der anderen Sichtweise konsistent zu sein, $U(C)$ nicht als den Funktor U angewendet auf die ganze Gruppe C verstehen, sondern als das Ergebnis der stufenweisen Anwendung von U , also als die graduierte abelsche Gruppe

$$U(C) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} U(C_n).$$

Nur für stark additive Funktoren U ist dies das Gleiche, wie U angewendet auf ganz C .

Sei $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ein Kettenkomplex. Weil U additiv ist, ist auch

$$U\mathcal{C} := (U(C), U(\partial))$$

ein Kettenkomplex, denn aus $\partial \circ \partial = \mathbf{0}$ folgt

$$U(\partial) \circ U(\partial) = U(\partial \circ \partial) = U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

(Damit $U(\partial)$ Grad -1 hat, müssen wir allerdings im kontravarianten Fall die Graduierung umkehren und $(U(C))_n := U(C_{-n})$ definieren).

U bildet Kettenabbildungen wieder in Kettenabbildungen ab (weil er kommutative Diagramme wieder in kommutative Diagramme überführt), und er ist offensichtlich additiv.

Ist $\mathcal{D} = (D, \varepsilon)$ ein weiterer Kettenkomplex und sind φ und $\psi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Kettenabbildungen und ist $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Kettenhomotopie von φ nach ψ , so ist $U(\Phi)$ eine Kettenhomotopie von $U(\varphi)$ nach $U(\psi)$. Das gilt auch im Fall, wo U kontravariant ist.

Hieraus folgt, dass U auch einen wohldefinierten und offensichtlich additiven Funktor

$$U: \mathbf{HKK} \rightarrow \mathbf{HKK}$$

bestimmt, mit $U([\varphi]) := [U(\varphi)]$ für jede Kettenabbildung φ . Auch für diesen neuen Funktor behalten wir den Namen U bei.

- c) Der Homologiefunktor H für Kettenkomplexe ist ein wohldefinierter additiver Funktor auch auf der Kategorie \mathbf{HKK} , und die Verknüpfung $H \circ U \circ \mathcal{F}$ ist ein wohldefinierter additiver Funktor

$$HU\mathcal{F}: \mathbf{AbGp} \rightarrow \mathbf{GAG}.$$

Dieser Funktor hat die gleiche Varianz wie U .

- d) Ist G eine additive abelsche Gruppe und ist \mathcal{G} eine beliebige freie Auflösung von G (und nicht unbedingt die Standardauflösung), so ist

$$HU\mathcal{F}(G) \cong H(U(\mathcal{G})).$$

D.h., wenn man den Funktor U auf eine freie Auflösung einer additiven abelschen Gruppe G anwendet, so hängt die Homologie des resultierenden Kettenkomplexes nicht von der Wahl der freien Auflösung ab, sondern nur von der Gruppe G und dem Funktor U .

Diese Homologie stellt einen neuen additiven Funktor auf \mathbf{AbGp} dar, der zwar offiziell über die standard freie Auflösung definiert wird, aber zu dessen Berechnung man eine beliebige freie Auflösung verwenden darf, wann immer sich das als bequemer erweist.

Beweis. a): \mathcal{F} ist ja zunächst nur als eine Zuordnung für *Objekte* definiert, die jeder additiven abelschen Gruppe die standard freie Auflösung zuordnet.

Aber Lemma 10.49 zeigt, dass jeder Homomorphismus f von additiven abelschen Gruppen sich zu einer Kettenabbildung der standard freien Auflösung erweitern lässt. Diese ist zwar nicht eindeutig, aber ihre Kettenhomotopieklasse ist eindeutig bestimmt, und wir erklären sie als den (wohldefinierten) Wert $\mathcal{F}(f)$ des Funktors \mathcal{F} für den Morphismus f .

Die Identität id_G einer additiven abelschen Gruppe G kann man durch die identische Kettenabbildung der standard freien Auflösungen erweitern, so dass $\mathcal{F}(\text{id}_G)$ der Identitätsmorphismus des Objekts $\mathcal{F}(G)$ in der Kategorie HKK ist.

Entsprechend, wenn $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus ist und wenn φ eine Erweiterung von f zu einer Kettenabbildung der standard freien Auflösungen ist, und wenn $g: H \rightarrow K$ ein Gruppenhomomorphismus ist mit Erweiterung ψ zu einer Kettenabbildung der standard freien Auflösungen, so ist $\psi \circ \varphi$ eine Kettenabbildung $\mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(K)$, die den Homomorphismus $(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0 = g \circ f$ erweitert. Daraus ist klar, dass \mathcal{F} Verknüpfungen respektiert und alle erforderlichen Eigenschaften eines kovarianten Funktors besitzt.

Auf genau die gleiche Weise sieht man, dass \mathcal{F} additiv ist, denn um eine Kettenabbildung der standard freien Auflösungen zu erhalten, die eine Summe von zwei Gruppenhomomorphismen erweitert, kann man einfach Kettenabbildungen nehmen, die die einzelnen Homomorphismen erweitern, und sie addieren.

b): In der Aussage dieses Teils des Korollars ist schon erklärt, warum und wie man den Funktor U auf einen Kettenkomplex anwenden kann, warum das Ergebnis wieder ein Kettenkomplex ist (wenn man im kontravarianten Fall die Grade wie angegeben negiert), und warum die Anwendung von U auf eine Kettenabbildung wieder eine Kettenabbildung liefert. Auch die Additivität ist klar.

Wenn Φ eine Kettenhomotopie zwischen zwei Kettenabbildungen φ und ψ ist, so gilt

$$\varepsilon \circ \Phi + \Phi \circ \partial = \psi - \varphi.$$

Im kovarianten Fall erhält man sofort die Beziehung

$$\begin{aligned} U(\varepsilon) \circ U(\Phi) + U(\Phi) \circ U(\partial) &= U(\varepsilon \circ \Phi) + U(\Phi \circ \partial) \\ &= U(\varepsilon \circ \Phi + \Phi \circ \partial) \\ &= U(\psi - \varphi) \\ &= U(\psi) - U(\varphi) \end{aligned}$$

und $U(\Phi)$ ist eine Kettenhomotopie zwischen den Kettenabbildungen $U(\varphi)$ und $U(\psi): U(\mathcal{C}) \rightarrow U(\mathcal{D})$.

Im kontravarianten Fall erhalten wir stattdessen

$$\begin{aligned} U(\Phi) \circ U(\varepsilon) + U(\partial) \circ U(\Phi) &= U(\varepsilon \circ \Phi) + U(\Phi \circ \partial) \\ &= U(\varepsilon \circ \Phi + \Phi \circ \partial) \\ &= U(\psi - \varphi) \\ &= U(\psi) - U(\varphi) \end{aligned}$$

und jetzt ist $U(\Phi)$ trotz der Vertauschung der Faktoren in der Verknüpfung aber immer noch, wie in der Aussage behauptet, eine Kettenhomotopie zwischen den nun von $U(\mathcal{D})$ nach $U(\mathcal{C})$ verlaufenden Kettenabbildungen $U(\varphi)$ und $U(\psi)$.

Deshalb induziert U auch eine wohldefinierte Zuordnung $HKK \longrightarrow HKK$, die natürlich immer noch alle funktoriellen Eigenschaften erfüllt und somit ein Funktor ist. Es ist klar aus der Definition der Addition von Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen, dass auch dieser Funktor additiv ist.

c) folgt sofort aus Bemerkung 10.51 und Teilen a) und b) oben, denn eine Verknüpfung von additiven Funktoren ist offensichtlich wieder additiv. Da die Funktoren H und \mathcal{F} beide kovariant sind, hat $HU\mathcal{F}$ die gleiche Varianz wie U .

d): Nach Lemma 10.49 lässt sich id_G in beiden Richtungen zu Kettenabbildungen

$$\varphi: \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{G} \quad \text{und} \quad \psi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}_G$$

erweitern.

Die Verknüpfungen in beiden Reihenfolgen

$$\psi \circ \varphi: \mathcal{F}_G \longrightarrow \mathcal{F}_G \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

sind auch Kettenabbildungen, die id_G erweitern, aber hier sind die Quell- und Zielkettenkomplexe gleich und auch die identische Kettenabbildung dieses Kettenkomplexes erweitert id_G . Weil nach Lemma 10.49 je zwei Kettenabbildungen zwischen freien Auflösungen einer Gruppe, die in Dimension 0 übereinstimmen, kettenhomotop sind, ist

$$\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_{\mathcal{F}_G} \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{\mathcal{G}}.$$

Diese Beziehungen bleiben nach Teil b) bestehen, wenn man den additiven Funktor U ansetzt, d.h., es gilt (im kovarianten Fall)

$$U(\psi) \circ U(\varphi) = U(\psi \circ \varphi) \simeq U(\text{id}_{\mathcal{F}_G}) = \text{id}_{U(\mathcal{F}_G)}$$

und

$$U(\varphi) \circ U(\psi) = U(\varphi \circ \psi) \simeq U(\text{id}_{\mathcal{G}}) = \text{id}_{U(\mathcal{G})}.$$

Also sind $U(\varphi)$ und $U(\psi)$ Kettenhomotopieäquivalenzen zwischen $U(\mathcal{F}_G)$ und $U(\mathcal{G})$.

Im kontravarianten Fall vertauscht sich zwar die Reihenfolge der Faktoren in den Verknüpfungen, aber auch die Richtung der Kettenabbildungen kehrt sich um, so dass wir den gleichen Schluss erhalten: $U(\mathcal{F}_G)$ und $U(\mathcal{G})$ sind vom gleichen Kettenhomotopietyp.

Der Rest folgt aus der Tatsache, dass Kettenhomotopieäquivalenzen Isomorphismen in der Homologie induzieren, d.h., die graduierten Homologiegruppen von Kettenkomplexen vom gleichen Kettenhomotopietyp sind isomorph. ■

Unter gewissen Voraussetzungen auf U ist nur eine der Homologiegruppen $H_k(U(\mathcal{G}))$ nichttrivial, aber sie liefert dann einen nützlichen und wichtigen neuen Funktor:

Bemerkung und Definition 10.53 Sei $U: AbGp \longrightarrow AbGp$ ein *kovarianter rechts-exakter* oder *kontravarianter links-exakter* additiver Funktor.

Sei G eine additive abelsche Gruppe und sei

$$\{0\} \longrightarrow R(G) \xrightarrow{i_G} F(G) \xrightarrow{\pi_G} G \longrightarrow \{0\} \quad (10.65)$$

die standard freie Auflösung \mathcal{F}_G von G .

Die Voraussetzung, dass U kovariant und rechts-exakt oder kontravariant und links-exakt ist, besagt genau, dass $U(\mathcal{F}_G)$, die Bildfolge unter U , exakt ist bis auf die Stelle $U(R(G))$. Diese Folge können wir durch Anfügung von $\{0\}$ -Gruppen in beiden Richtungen zu einem Kettenkomplex fortsetzen, aber diese Fortsetzung ist trivialerweise an den Stellen $\{0\}$ exakt, so dass auch der resultierende unendlich lange Kettenkomplex nur an der Stelle $U(R(G))$ inexact sein kann.

Das bedeutet, dass dieser Kettenkomplex nur an dieser Stelle nichttriviale Homologie hat. Es handelt sich um die Homologie in Dimension $k_0 := 2$ im kovarianten Fall und die Homologie in Dimension $k_0 := -2$ im kontravarianten Fall.

Wir nennen den Funktor $H_{k_0}U\mathcal{F}$, die einzige nichttriviale Homologiegruppe des Bildkettenkomplexes unter U , den **ersten abgeleiteten Funktor** von U und bezeichnen ihn mit U' .

Er ist ein additiver Funktor von der gleichen Varianz wie U (weil $HU\mathcal{F}$ das ist).

Man kann diese Homologiegruppe sogar genauer beschreiben.

Im kovarianten Fall hat die Bildfolge die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U(R(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(G) \longrightarrow \{0\} \quad (10.66)$$

und die Rändergruppe an der Stelle $U(R(G))$ ist offenbar $\{0\}$, so dass

$$H_2(U(\mathcal{F}_G)) \cong Z_2(U(\mathcal{F}_G)) = \text{Ker } U(i_G),$$

d.h., im kovarianten Fall ist

$$U'(G) = \text{Ker } U(i_G), \quad (10.67)$$

wo i_G die Inklusion $R(G) \rightarrow F(G)$ ist.

Genauso gut kann man $U'(G)$ berechnen als die zweite Homologie des Bildes unter U einer beliebigen freien Auflösung von G .

Im kontravarianten Fall hat die Bildfolge die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U(G) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(R(G)) \longrightarrow \{0\} \quad (10.68)$$

und die Zyklengruppe an der Stelle $U(R(G))$ ist die ganze Gruppe $U(R(G))$, so dass

$$H_{-2}(U(\mathcal{F}_G)) \cong \frac{U(R(G))}{B_{-2}(U(\mathcal{F}_G))} = \frac{U(R(G))}{\text{Bild } U(i_G)} = \text{Coker } U(i_G),$$

d.h., im kontravarianten Fall ist

$$U'(G) = \text{Coker } U(i_G). \quad (10.69)$$

Genauso gut kann man $U'(G)$ im kontravarianten Fall berechnen als die minus-zweite Homologie des Bildes unter U einer beliebigen freien Auflösung von G .

Lemma 10.54 *Sei $U: AbGp \rightarrow AbGp$ ein kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter additiver Funktor und U' sein erster abgeleiteter Funktor.*

- a) *Wenn U ein exakter Funktor ist, dann ist U' der triviale Funktor $\{0\}$.*
- b) *Wenn G eine freie abelsche Gruppe ist, dann ist $U'(G) = \{0\}$.*

Beweis. a) ist klar, denn ein exakter Funktor bildet jede freie Auflösung (die ja eine exakte Folge ist) wieder in eine exakte Folge ab, und diese hat triviale Homologie.

b): Wenn G eine freie abelsche Gruppe ist, dann spaltet die standard freie Auflösung \mathcal{F}_G , weil freie abelsche Gruppen projektiv sind. Nach Lemma 10.33 ist auch die Bildfolge $U(\mathcal{F}_G)$ exakt und hat verschwindende Homologie. ■

Bemerkung 10.55 Sei $U: AbGp \longrightarrow AbGp$ ein kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter additiver Funktor.

Sei G eine additive abelsche Gruppe und sei

$$\{0\} \longrightarrow R(G) \xrightarrow{i_G} F(G) \xrightarrow{\pi_G} G \longrightarrow \{0\}$$

die standard freie Auflösung \mathcal{F}_G von G .

Den Wert $U'(G)$ des abgeleiteten Funktors U' erhalten wir im kovarianten Fall als $\text{Ker } U(i_G)$, wie wir in Definition 10.53 gesehen haben, und im kontravarianten Fall als $\text{Coker } U(i_G)$. Aber auch die *jeweils andere* zu $U(i_G)$ assoziierte Gruppe, nämlich $\text{Coker } U(i_G)$ im kovarianten Fall und $\text{Ker } U(i_G)$ im kontravarianten Fall, hat eine interessante Bedeutung.

Sie ist nämlich isomorph zum Wert $U(G)$ des *unabgeleiteten* Funktors, wie man aus der an der Stelle $U(G)$ noch exakten Bildfolge der standard freien Auflösung sofort sieht.

Weil im kovarianten Fall die Folge

$$U(R(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(G) \longrightarrow \{0\}$$

bei $U(G)$ exakt ist, induziert $U(\pi_G)$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\overline{U(\pi_G)}: \frac{U(F(G))}{\text{Ker } U(\pi_G)} = \frac{U(F(G))}{\text{Bild } U(i_G)} = \text{Coker } U(i_G) \xrightarrow{\cong} U(G),$$

und weil im kontravarianten Fall die Folge

$$\{0\} \longrightarrow U(G) \xrightarrow{U(\pi_G)} U(F(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(R(G))$$

bei $U(G)$ exakt ist, induziert $U(\pi_G)$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\overline{U(\pi_G)}: U(G) \xrightarrow{\cong} \text{Bild } U(\pi_G) = \text{Ker } U(i_G) \subseteq U(F(G)).$$

Es gibt noch eine andere nützliche Deutung dieser Situation. Wie $U'(G)$ kann man auch $U(G)$ als eine Homologiegruppe eines geeigneten Kettenkomplexes auffassen. Dazu entfernen wir die Gruppe $G = G_0$ aus seinen freien Auflösungen $\mathcal{G} = \{G_n\}$ und betrachten stattdessen die **gekürzte freie Auflösung**

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{G_n \mid n \geq 1\},$$

in der übrigens nur freie Gruppen vorkommen. Die gekürzte freie Auflösung ist nicht mehr exakt (an der Stelle G_1 und nur an dieser ist sie inexakt), aber sie ist immer noch ein Kettenkomplex.

In einer beliebigen exakten Folge der Gestalt

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

induziert die surjektive Abbildung g einen Isomorphismus

$$\bar{g}: B/(\text{Ker } g) = B/(\text{Bild } f) = (\text{Ker } \mathbf{0})/(\text{Bild } f) \longrightarrow C$$

und C können wir deshalb auffassen als die niedrigste nichttriviale Homologiegruppe der gekürzten Folge

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \{0\},$$

Die Abbildung g können wir dabei auffassen als die Projektion der niedrigsten Zyklengruppe B in diese Homologiegruppe.

Ferner, jeder Morphismus

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & \{0\} \\ \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & \{0\} \end{array} \quad (10.70)$$

von solchen exakten Folgen lässt sich auf die gekürzten Folgen einschränken und die Einschränkung

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \longrightarrow \{0\} \\ \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

ist eine Kettenabbildung φ der gekürzten Folgen, die in der niedrigsten Homologie die ursprüngliche Abbildung φ_0 als $H_1(\varphi)$ induziert. Denn unter der Identifikation von H_1 mit C ist $H_1(\varphi)$ der *eindeutige* Homomorphismus $C \longrightarrow C'$ mit $H_1(\varphi) \circ g = g' \circ \varphi_1$. Weil das rechte Quadrat im ungekürzten Diagramm (10.70) kommutiert, ist φ_0 ein solcher Homomorphismus und deshalb gleich $H_1(\varphi)$.

Wenden wir diese Bemerkungen auf die gekürzte freie Auflösung an, so sehen wir, dass $G \cong H_1(\tilde{\mathcal{G}})$.

Das gilt nach Herleitung unabhängig von der Wahl der freien Auflösung \mathcal{G} , aber man kann noch mehr dazu sagen.

Für die gekürzten freien Auflösungen gelten nämlich noch alle Aussagen von Lemma 10.49. Insbesondere, wenn G und H additive abelsche Gruppen

sind mit freien Auflösungen \mathcal{G} bzw. \mathcal{H} , so induziert jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow H$ eine Kettenabbildung $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ mit $f = H_1(\tilde{\varphi})$. Man erhält eine solche Kettenabbildung, indem man f zu einer Kettenabbildung φ der ungekürzten freien Auflösungen erweitert und diese auf die gekürzten freien Auflösungen einschränkt.

Umgekehrt entsteht jede Kettenabbildung $\tilde{\varphi}$ der gekürzten freien Auflösungen mit $f = H_1(\tilde{\varphi})$ genau auf diese Weise, denn die genannte Bedingung besagt nichts anderes, als dass $\tilde{\varphi}$ sich zu einer Kettenabbildung φ der ungekürzten freien Auflösungen erweitert, wenn man $\varphi_0 = f$ setzt; die Homologiebedingung ist, wie wir gesehen haben, gleichbedeutend damit, dass dann das rechteste, neu hinzugekommene Quadrat kommutiert.

Es gibt also eine Bijektion zwischen den f ergänzenden Kettenabbildungen der ungekürzten freien Auflösungen und den Kettenabbildungen der gekürzten freien Auflösungen, die in der ersten Homologie die Abbildung f induzieren.

Je zwei solche Kettenabbildungen der gekürzten freien Auflösungen sind kettenhomotop, denn je zwei f erweiternde Kettenabbildungen der *ungekürzten* freien Auflösungen sind kettenhomotop nach Lemma 10.49 vermöge einer Kettenhomotopie Φ mit $\Phi_0 = 0$. Wegen dieser Bedingung ist aber die Einschränkung $\tilde{\Phi}$ von Φ auf die gekürzten freien Auflösungen immer noch eine Kettenhomotopie zwischen den „gekürzten“ Kettenabbildungen. Φ_0 hat ja als Nullabbildung zu dieser Eigenschaft nichts beigetragen, also geht sie nicht verloren, wenn man Φ_0 nicht mehr hat.

Zusammenfassend folgt aus diesen Überlegungen, dass wie für die ungekürzte freie Auflösung in Korollar 10.52, auch die **gekürzte standard freie Auflösung** $\tilde{\mathcal{F}}$ ein wohldefinierter Funktor $AbGp \rightarrow HKK$ ist, und für jeden additiven Funktor $V: AbGp \rightarrow AbGp$ ist $H \circ V \circ \tilde{\mathcal{F}}$ ein wohldefinierter additiver Funktor $HV\tilde{\mathcal{F}}: AbGp \rightarrow GAG$ mit der gleichen Varianz wie V .

Ferner, für eine additive abelsche Gruppe G lässt sich $HV\tilde{\mathcal{F}}(G)$ auch als $H(V(\tilde{\mathcal{G}}))$ berechnen für eine *beliebige* gekürzte freie Auflösung $\tilde{\mathcal{G}}$ von G .

Kehren wir jetzt wieder zu unserer Ausgangssituation zurück, wo U ein kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter additiver Funktor $AbGp \rightarrow AbGp$ war. Wir verwenden im Folgenden die Pluszeichen im kovarianten Fall und die Minuszeichen im kontravarianten Fall.

Wie haben nach wie vor

$$U'(G) = H_{\pm 2}U\tilde{\mathcal{F}}(G) = H_{\pm 2}(U(\tilde{\mathcal{G}}))$$

für jede gekürzte freie Auflösung $\tilde{\mathcal{G}}$ von G , denn die Kürzung in Dimension 0 hat keinen Einfluss auf die Homologie in Dimension ± 2 .

Aber weil die Bildfolgen unter U der ungekürzten freien Auflösungen immer noch an der Stelle G exakt sind, gilt für die gekürzten Auflösungen nun

$$U(G) = H_{\pm 1} U\tilde{\mathcal{F}}(G) = H_{\pm 1} (U(\tilde{\mathcal{G}})).$$

Im kovarianten Fall ist das sofort klar aus der obigen Diskussion, aber auch im kontravarianten Fall ist es ganz einfach einzusehen, denn die gekürzte Bildfolge hat die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U(F(G)) \xrightarrow{U(i_G)} U(R(G))$$

und die Rändergruppe in Dimension -1 ist die Nullgruppe $\{0\}$, die Homologiegruppe $H_{-1}(U(\tilde{\mathcal{F}}_G))$ ist somit isomorph zur Zyklengruppe

$$Z_{-1}(U(\tilde{\mathcal{F}}_G)) = \text{Ker } U(i_G) \cong U(G).$$

Wir sollten zum Schluss noch bemerken, dass wir hier die Dimensionen in diesen Folgen konsistent mit unserer Wahl für die ungekürzten freien Auflösungen gewählt haben. In der Literatur werden oft nur die gekürzten Auflösungen für Homologiebetrachtungen benutzt und dann so, dass die Stelle $F(G)$ die Dimension 0 erhält, so dass alle anderen Aussagen auch mit verschobenen Dimensionen erscheinen. Das ist natürlich nur eine Frage von Konventionen; es gibt keine eindeutig „richtige“ Wahl der Dimensionen.

Wir kennen schon zwei Funktoren, die die Voraussetzung von Definition 10.53 und Bemerkung 10.55 erfüllen.

Definition 10.56 Sei H eine additive abelsche Gruppe.

Der Funktor \otimes ist in beiden Variablen kovariant und rechts-exakt. Der erste abgeleitete Funktor von $\cdot \otimes H$ heißt

$$\text{Tor}(\cdot, H).$$

Er nennt sich der **Torsionsfunktork** (nicht zu verwechseln mit der Torsionsuntergruppe einer Gruppe!) und ist ein additiver kovarianter Funktor in der ersten Variable.

Der Funktor $\text{Hom}(\cdot, H)$ ist links-exakt und kontravariant. Sein erster abgeleiteter Funktor heißt

$$\text{Ext}(\cdot, H).$$

Er nennt sich der **Extensionsfunktork** und er ist ein additiver kontravarianter Funktor in der ersten Variablen.

Lemma 10.57 Seien G und H additive abelsche Gruppen. $\text{Tor}(G, H)$ und $\text{Ext}(G, H)$ sind auch Funktoren in der zweiten Variablen H und sind in dieser Variablen additiv und kovariant.

In anderen Worten, Tor und Ext sind additive Funktoren in zwei Variablen.

Beweis. Seien H und K additive abelsche Gruppen und sei $h: H \rightarrow K$ ein Gruppenhomomorphismus.

Sei U einer der Funktoren \otimes oder Hom von zwei Variablen. Dann ist $U(\cdot, h)$ eine natürliche Transformation von dem Funktor $U_H = U(\cdot, H)$ zu dem Funktor $U_K = U(\cdot, K)$, denn wenn A und B zwei additive abelsche Gruppen sind und wenn $f: A \rightarrow B$ ein Gruppenhomomorphismus ist, so kommutieren offensichtlich die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes H & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_H} & B \otimes H \\ \text{id}_A \otimes h \downarrow & & \downarrow \text{id}_B \otimes h \\ A \otimes K & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_K} & B \otimes K \end{array} \quad (10.71a)$$

und

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B, H) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, H)} & \text{Hom}(A, H) \\ \text{Hom}(B, h) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(A, h) \\ \text{Hom}(B, K) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, K)} & \text{Hom}(A, K) \end{array} \quad (10.71b)$$

Im ersten Diagramm ergeben beide Verknüpfungen entlang den Seiten des Quadrats den Homomorphismus $f \otimes h$ und im zweiten Diagramm ergeben beide Verknüpfungen entlang den Seiten des Quadrats den Homomorphismus $\text{Hom}(f, h)$.

Hieraus folgt, dass für jeden Kettenkomplex $\mathcal{C} = (C, \partial)$ der Gruppenhomomorphismus h eine *Kettenabbildung*

$$U_h: U_H(\mathcal{C}) = U(\mathcal{C}, H) \rightarrow U_K(\mathcal{C}) = U(\mathcal{C}, K)$$

induziert, und diese induziert für jedes $n \in \mathbf{Z}$ wiederum einen Gruppenhomomorphismus

$$H_n(U_h): H_n(U_H(\mathcal{C})) \rightarrow H_n(U_K(\mathcal{C})).$$

Insbesondere, wenn G eine additive abelsche Gruppe ist und wenn \mathcal{C} die standard freie Auflösung von G ist, so induziert h einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$U'(G, h): U'(G, H) \rightarrow U'(G, K).$$

Weil schon U ein kovarianter additiver Funktor in der zweiten Variablen ist, vererben sich offensichtlich die funktoriellen Eigenschaften bezüglich Identitäten und Verknüpfungen sowie die Additivität bezüglich h auf die natürliche Transformation U_h als Kettenabbildung und auf $H_n(U_h)$ und somit auch auf $U'(G, \cdot)$.

D.h., $U' = \text{Tor}$ oder Ext ist ein additiver kovarianter Funktor in der zweiten Variablen. ■

Bemerkung 10.58 Sei U einer der Funktoren in zwei Variablen \otimes , Hom , Tor oder Ext . Seien $f: A \rightarrow B$ und $h: H \rightarrow K$ Homomorphismen zwischen additiven abelschen Gruppen.

Dann kommutieren die von dem Funktor induzierten Homomorphismen $U(f, \cdot)$ und $U(\cdot, h)$ miteinander, oder anders gesagt: $U(f, \cdot)$ ist eine natürliche Transformation $U(A, \cdot) \longleftrightarrow U(B, \cdot)$ (Pfeilrichtung entsprechend der Varianz) und $U(\cdot, h)$ ist eine natürliche Transformation $U(\cdot, H) \longrightarrow U(\cdot, K)$.

Beweis. Zu prüfen ist, dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U(A, H) & \xrightarrow{U(f, H)} & U(B, H) \\ U(A, h) \downarrow & & \downarrow U(B, h) \\ U(A, K) & \xrightarrow{U(f, K)} & U(B, K) \end{array} \quad (10.72a)$$

im kovarianten Fall, und

$$\begin{array}{ccc} U(B, H) & \xrightarrow{U(f, H)} & U(A, H) \\ U(B, h) \downarrow & & \downarrow U(A, h) \\ U(B, K) & \xrightarrow{U(f, K)} & U(A, K) \end{array} \quad (10.72b)$$

im kontravarianten Fall, kommutieren.

Für die Funktoren \otimes und Hom sind das die Diagramme (10.71), die offensichtlich kommutieren, wie schon im Beweis von Lemma 10.57 bemerkt wurde. Aber daraus folgt, dass die Diagramme (10.71) auch kommutieren, wenn man die Gruppen A und B durch ihre standard freie Auflösung ersetzt und wenn man f durch eine Erweiterung zu einer Kettenabbildung dieser Auflösungen ersetzt, und wenn $U(\cdot, h)$ nun auch eine Kettenabbildung der entstehenden Kettenkomplexe ist und nicht nur ein einzelner Homomorphismus. Die Kommutativität der Quadrate bleibt schließlich erhalten, wenn

dass auch Tor symmetrisch ist.

türlichen Isomorphismus

$$\tau': \operatorname{Tor}(G, H) \longrightarrow \operatorname{Tor}(H, G).$$

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0\} \longrightarrow R(G) \otimes R(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes i_H} & R(G) \otimes F(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_H} & R(G) \otimes H & \longrightarrow & \{0\} \\
i_G \otimes \text{id}_{R(H)} \downarrow & & i_G \otimes \text{id}_{F(H)} \downarrow & & i_G \otimes \text{id}_H \downarrow & & \\
\{0\} \longrightarrow F(G) \otimes R(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes i_H} & F(G) \otimes F(H) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_H} & F(G) \otimes H & \longrightarrow & \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0\} & & \{0\} & & \{0\} & &
\end{array}$$

ma 10.39, und die Zeilen sind noch kurze exakte Folgen.

standard freie Auflösung von G , und sie sind Kettenkomplexe.

folge

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & H_2(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes R(H)) & \longrightarrow & H_2(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes F(H)) & \longrightarrow & H_2(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes H) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H_1(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes R(H)) \longrightarrow H_1(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes F(H)) \longrightarrow H_1(\tilde{\mathcal{F}}_G \otimes H) \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

ein Homomorphismus $\tau': \operatorname{Tor}(G, H) \longrightarrow \operatorname{Tor}(G, H)$, der mit dem Rest des Diagramms kommutiert.)

Aus dem 5-er Lemma folgt sofort, dass τ' ein Isomorphismus ist.

Weil alle Gruppen und alle Homomorphismen in diesem Diagramm bis auf τ' natürlich sind (wovon man sich, auch mit Hilfe früherer Aussagen, leicht überzeugen kann), ist auch τ' natürlich, da er der eindeutige Homomorphismus ist, der das Diagramm an dieser Stelle kommutativ ergänzt. ■

Zum Schluss berechnen wir noch einige Werte unserer neuen Funktoren.

Beispiel 10.60 Sei F eine freie abelsche Gruppe und sei G eine beliebige additive abelsche Gruppe. Dann ist

$$\operatorname{Tor}(F, G) \cong \operatorname{Tor}(G, F) \cong \operatorname{Ext}(F, G) = \{0\}.$$

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 10.54. $\operatorname{Tor}(F, G)$ und $\operatorname{Ext}(F, G)$ sind $\{0\}$ nach Teil b) dieses Lemmas, und $\operatorname{Tor}(G, F) = \{0\}$ wegen der Symmetrie von Tor , oder nach Teil a) des genannten Lemmas, weil Tensorieren mit einer freien Gruppe ein exakter Funktor ist. ■

Beispiel 10.61 Sei $n \geq 2 \in \mathbf{N}$ und sei G eine beliebige additive abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit μ_n^G die Multiplikation mit n in G , also den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mu_n^G: G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto ng \end{aligned}$$

Dann ist

$$\operatorname{Tor}(\mathbf{Z}_n, G) \cong \operatorname{Tor}(G, \mathbf{Z}_n) \cong G^{(n)} = \operatorname{Ker} \mu_n^G,$$

und

$$\operatorname{Ext}(\mathbf{Z}_n, G) = G_n := \frac{G}{nG} = \operatorname{Coker} \mu_n^G.$$

Beweis. \mathbf{Z}_n hat eine freie Auflösung der Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_n^{\mathbf{Z}}} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_n \longrightarrow \{0\}. \quad (10.74)$$

Für die Berechnung von $\operatorname{Tor}(\mathbf{Z}_n, G)$ tensorieren wir (10.74) mit G und erhalten eine noch exakte Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z} \otimes G & \xrightarrow{\mu_n^{\mathbf{Z}} \otimes \operatorname{id}_G} & \mathbf{Z} \otimes G & \longrightarrow & \mathbf{Z}_n \otimes G & \longrightarrow & \{0\} \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ G & \xrightarrow{\mu_n^G} & G & & & & \end{array} \quad (10.75)$$

Die Identifizierung zwischen der oberen und der unteren Zeile in diesem Diagramm erhält man aus Lemma 10.28 b), woraus auch klar ist, dass die Abbildung $\mu_n^{\mathbf{Z}} \otimes \text{id}_G$ in der oberen Zeile die Multiplikation mit n ist und der Abbildung μ_n^G in der unteren Zeile entspricht.

$\text{Tor}(\mathbf{Z}_n, G)$ ist definiert als $\text{Ker}(\mu_n^{\mathbf{Z}} \otimes \text{id}_G) \cong \text{Ker } \mu_n^G = G^{(n)}$, und dies ist auch $\text{Tor}(G, \mathbf{Z}_n)$ wegen der Symmetrie von Tor .

Weil (10.75) am rechten Ende noch exakt ist, können wir aus diesem Diagramm auch ablesen, dass

$$\mathbf{Z}_n \otimes G \cong \text{Coker } \mu_n^G = G_n. \quad (10.76)$$

Für die Berechnung von $\text{Ext}(\mathbf{Z}_n, G)$ wenden wir $\text{Hom}(\cdot, G)$ auf (10.74) an und erhalten als noch exakte Folge

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathbf{Z}_n, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathbf{Z}, G) & \xrightarrow{\text{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \text{id}_G)} & \text{Hom}(\mathbf{Z}, G) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & G & \xrightarrow{\mu_n^G} & G \end{array}$$

Die Identifikation zwischen der oberen und der unteren Zeile in diesem Diagramm erhält man aus Lemma 10.41 a). Für jedes Element $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{Z}, G)$ und für jedes $k \in \mathbf{Z}$ ist

$$(\text{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \text{id}_G)(\alpha))(k) = (\alpha \circ \mu_n^{\mathbf{Z}})(k) = \alpha(nk) = n\alpha(k)$$

und deshalb ist $\text{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \text{id}_G)$ die Multiplikation mit n und die entsprechende Abbildung in der unteren Zeile ist μ_n^G .

$\text{Ext}(\mathbf{Z}_n, G)$ ist definiert als $\text{Coker}(\text{Hom}(\mu_n^{\mathbf{Z}}, \text{id}_G)) \cong \text{Coker } \mu_n^G = G_n$. ■

Für Paare von zyklische Gruppen gilt also

Beispiele 10.62 Seien m und n positive natürliche Zahlen, und sei $d := \text{ggT}(m, n)$ ihr größter gemeinsamer Teiler. Es gilt

- a) $\text{Tor}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \text{Ext}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \{0\}$
- b) $\text{Tor}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \cong \text{Ext}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) = \{0\}$
- c) $\text{Tor}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \{0\}$ und $\text{Ext}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_n$
- d) $\text{Tor}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_d \cong \text{Ext}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n)$

Beweis. a) und b) und die Aussage über Tor in c) folgen alle aus Beispiel 10.60.

Die Aussage über Ext in c) folgt aus Beispiel 10.61. Dieses Beispiel besagt auch, dass $\text{Tor}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) = \mathbf{Z}_n^{(m)}$ und im Beweis von Beispiel 10.42 d) haben wir schon gesehen, dass $\mathbf{Z}_n^{(m)} \cong \mathbf{Z}_d$.

Und schließlich haben wir noch $\text{Ext}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_n) = (\mathbf{Z}_n)_m$ nach Beispiel 10.61. Man kann zwar mit nicht allzu viel Mühe direkt ausrechnen, dass dies \mathbf{Z}_d ist, aber es geht auch einfacher, denn in Gleichung (10.76) haben wir gesehen, dass $(\mathbf{Z}_n)_m \cong \mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n$ und $\mathbf{Z}_m \otimes \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_d$ nach Beispiel 10.29 c).

Damit sind alle Behauptungen bewiesen. ■

Mit Hilfe dieser Berechnung für zyklische Gruppen sind wir nun wegen der Additivität in der Lage, Tor und Ext für jedes Paar von endlich erzeugten abelschen Gruppen auszurechnen.

In den folgenden Kapiteln entwickeln wir eine Reihe von homologischen Anwendungen sowohl der klassischen Funktoren \otimes und Hom wie auch der neuen abgeleiteten Funktoren.

Letztere sind insbesondere sehr nützlich, um die Homologie von Kettenkomplexen zu berechnen, die durch Anwendung von \otimes und Hom aus den singulären Kettenkomplexen gewonnen werden. Solche Kettenkomplexe kommen vor bei der Berechnung von Homologie mit anderen Koeffizienten als \mathbf{Z} , bei der Berechnung der Homologie von Produkträumen, und in der Kohomologietheorie.

Kapitel 11

Die Künneth Formel und Universelle Koeffizientensätze

In Kapitel 10 haben wir einige wichtige algebraische Funktoren intensiv untersucht und aus ihnen mit viel Arbeit neue abgeleitete Funktoren gewonnen. Die dort untersuchten Funktoren haben, wie wir jetzt sehen werden, wichtige Anwendungen in der algebraischen Topologie.

Um zu erklären, warum wir uns gerade für die Funktoren \otimes und Hom interessiert haben und was wir mit diesen Funktoren und ihren abgeleiteten Funktoren vorhaben, lohnt es sich, uns kurz noch einmal die in Kapitel 10 entwickelten Methoden vor Augen zu führen, denn diese Methoden kommen jetzt wieder zum Einsatz, allerdings mit einem anderen Ziel und in einem allgemeineren Rahmen.

Der erste Schritt bei der Definition des abgeleiteten Funktors eines additiven Funktors U war die Einbettung einer gegebenen additiven abelschen Gruppe G in eine freien Auflösung, also in eine exakte Folge oder passender gesagt in einen azyklischen Kettenkomplex, in dem alle Kettengruppen außer G frei abelsch waren. Anschließend haben wir U auf diesen Kettenkomplex angewendet, um einen neuen Kettenkomplex zu gewinnen. Die Homologie dieses neuen Kettenkomplexes lieferte den abgeleiteten Funktor U' , und die ganze komplizierte Konstruktion hatte allein diesen Zweck.

Die Idee, additive Funktoren auf Kettenkomplexe anzuwenden, macht aber auch sonst Sinn, denn bei geeigneter Wahl der Funktoren haben die sich ergebenden neuen Kettenkomplexe eine nützliche Bedeutung für schwierige Homologieberechnungen oder sie führen zu interessanten und leistungsfähigen Varianten der üblichen ganzzahligen singulären Homologie. Letzteres gilt insbesondere für die Funktoren \otimes und Hom , und die von ihnen erzeugten Homologievarianten werden wir in diesem Kapitel definieren und ihre elementaren Grundeigenschaften kurz erleuchten.

Der Funktor \otimes führt zur *singulären Homologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe*. Die Anwendung von Hom ergibt eine *duale* Homologietheorie, die *singuläre Kohomologie*, die automatisch mit der Möglichkeit beliebiger Koeffizientengruppen ausgestattet ist.

Es ergibt sich das Problem, die neuen Homologievarianten berechnen zu können. Aber statt das für jedes einzelne Beispiel machen zu müssen, stellt sich heraus, dass eine *allgemeine Berechnung* möglich ist, die die neue Homologie in einen direkten Bezug zur alten setzt, und die immer anwendbar ist, wenn die Kettenkomplexe \mathcal{C} , aus denen die „alte“ Homologie gewonnen wird, frei sind (was für den singulären Kettenkomplex ja der Fall ist).

Diese allgemeine Formel für die Homologie von $U(\mathcal{C})$, die so genannte **Künneth Formel**, besteht aus einer *spaltenden kurzen exakten Folge*, die die Gruppen UHC , HUC und $U'HC$ miteinander verbindet. Ihre Herleitung ist das Hauptthema von Kapitel 11.

Da die abstrakte Version dieser Formel aber keinen Selbstzweck bildet, werden wir sie sofort anwenden auf die zu Beginn des Kapitels eingeführten Homologievarianten. Praktisch als Korollar erhalten wir dann sogenannte *universelle Koeffizientensätze* für Homologie und Kohomologie, die die singuläre Homologie und Kohomologie mit beliebigen Koeffizienten auf eindeutige und effektiv berechenbare Weise durch die singuläre Homologie mit \mathbf{Z} -Koeffizienten ausdrücken.

Das geht so einfach, dass man kaum glauben kann, dass diese neuen Homologietheorien wirklich neue Information beinhalten. Die Homologie mit anderen Koeffizienten kann aber geometrische Eigenschaften deutlicher anzeigen, die in der \mathbf{Z} -Homologie nur implizit oder versteckt vorkommen. Die einzelnen Kohomologiegruppen haben zwar im Wesentlichen den gleichen Informationsgehalt, wie die Homologiegruppen, aber die Kohomologie erlaubt die einfache Einführung zusätzlicher algebraischer Struktur, die dann tatsächlich neue geometrische Information enthält.

Zunächst, wie gesagt, wollen wir durch Anwendung von \otimes und Hom auf den singulären Kettenkomplex zwei neue Homologievarianten einführen.

Bemerkung 11.1 Damit wir weiterhin die bequeme Beschreibung von Kettenkomplexen als graduierte abelsche Gruppen benutzen können, und damit die Anwendung eines additiven aber nicht unbedingt stark additiven Funktors $U: AbGp \rightarrow AbGp$ auf Kettenkomplexe das gleiche Ergebnis liefert, unabhängig davon, ob wir die Kettenkomplexe als Folgediagramme verstehen, oder ob wir sie als graduierte abelsche Gruppen auffassen, werden wir die in Korollar und Definition 10.52 b) eingeführte Konvention beibehalten, dass ein solcher additiver Funktor U *stufenweise* auf graduierte abelsche Gruppen anzuwenden ist.

D.h., wir erweitern jeden additiven Funktor $U: AbGp \rightarrow AbGp$ zu einem (gleichbenannten) Funktor $U: GAG \rightarrow GAG$, in dem wir per Definition oder per Konvention

$$U\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n\right) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} U(G_n)$$

setzen.

Entsprechend definieren wir die Anwendung von U auf graduierte Homomorphismen. Wenn G und H graduierte abelsche Gruppen sind und wenn $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n: G \rightarrow H$ ein Grad k Homomorphismus ist, so setzen wir

$$U(f) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} U(f_n),$$

und dies ist offensichtlich ein Grad k Homomorphismus $U(G) \rightarrow U(H)$.

Definition 11.2 Sei (X, A) ein topologisches Raumpaar, und sei G eine additive abelsche Gruppe. Wir definieren den **singulären Kettenkomplex des Raumpaares (X, A) mit Koeffizienten in G** durch

$$C_*(X, A; G) := C_*(X, A) \otimes G. \quad (11.1)$$

In Definition 10.52 b) hatten wir schon gesehen, dass dies tatsächlich ein Kettenkomplex ist, mit Randoperator

$$\partial_G := \partial \otimes \text{id}_G = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \partial_n \otimes \text{id}_G. \quad (11.2)$$

Die Homologie dieses Kettenkomplexes wird mit $H_*(X, A; G)$ bezeichnet und heißt die **singuläre Homologie des Raumpaares (X, A) mit Koeffizienten in G** .

Eine ähnliche Notation benutzen wir für andere Gruppen, die in der Konstruktion der Homologie vorkommen. So bezeichnet $Z_*(X, A; G)$ die Zyklengruppe des Kettenkomplexes $C_*(X, A; G)$ und $B_*(X, A; G)$ bezeichnet die Rändergruppe dieses Kettenkomplexes.

Wie üblich, wenn $A = \emptyset$ schreiben wir $C_*(X; G)$ statt $C_*(X, \emptyset; G)$, und wir nennen dies den **singulären Kettenkomplex des Raumes X mit Koeffizienten in G** . Entsprechend schreiben wir $H_*(X; G)$ statt $H_*(X, \emptyset; G)$, und wir nennen dies die **singuläre Homologie des Raumes X mit Koeffizienten in G** . Und wir schreiben natürlich $Z_*(X; G)$ statt $Z_*(X, \emptyset; G)$ und $B_*(X; G)$ statt $B_*(X, \emptyset; G)$.

Bemerkung 11.3 a) Homologie „mit Koeffizienten in \mathbf{Z} “ ist die klassische singuläre Homologie über \mathbf{Z} , denn aus Lemma 10.28 b) folgt, dass $(C_*(X, A; \mathbf{Z}), \partial_{\mathbf{Z}})$ natürlich isomorph ist zum bisherigen singulären Kettenkomplex $(C_*(X, A), \partial)$.

b) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und sei H eine beliebige additive abelsche Gruppe. Auf dem \mathbf{Z} -Tensorprodukt $H \otimes_{\mathbf{Z}} R$ können wir eine R -Modul Struktur einführen, wenn wir die skalare Multiplikation σ_r mit einem Element r von R durch „Ringmultiplikation im zweiten Faktor“ definieren, also wenn wir für $h \in H$ und $s \in R$ definieren

$$\sigma_r(a \otimes s) = r(a \otimes s) := a \otimes rs, \quad (11.3)$$

und das so definierte σ_r linear auf ganz $H \otimes R$ fortsetzen.

Die rechte Seite von (11.3) ist offensichtlich trilinear in a , r und s . Weil sie insbesondere bilinear in a und s ist, gibt es für jedes r tatsächlich eine eindeutige lineare Abbildung $\sigma_r: H \otimes R \rightarrow H \otimes R$, die (11.3) erfüllt. Die Linearität von σ_r zusammen mit der Tatsache, dass die rechte Seite von (11.3) linear in r ist, bedeutet, dass diese skalare Multiplikation bezüglich beider Faktoren das Distributivgesetz erfüllt. Das Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation für Modulelemente der Form $a \otimes s$ ist klar aus (11.3) und gilt dann auf ganz $H \otimes R$, weil solche Elemente den ganzen Modul erzeugen. Ähnlich leicht sieht man, dass die skalare Multiplikation mit 1 die Identität ist. Somit definiert (11.3) tatsächlich eine R -Modul Struktur auf $H \otimes R$.

Wichtig ist aber zu betonen, dass das Tensorprodukt in dieser Definition über \mathbf{Z} genommen wird und nicht über den Ring R . Im Allgemeinen ist die Gruppe H von vornherein ja gar kein R -Modul, so dass Tensorieren über R gar nicht möglich wäre.

Sei M eine beliebige Menge und sei

$$F := F(M) \cong \bigoplus_{m \in M} \mathbf{Z}$$

die von M erzeugte freie abelsche Gruppe. Weil $\otimes R$ ein stark additiver Funktor ist, ist

$$F \otimes R \cong \bigoplus_{m \in M} \mathbf{Z} \otimes R \cong \bigoplus_{m \in M} R \cong F_R(M),$$

wo $F_R(M)$ der von M frei erzeugte R -Modul ist, und es ist sofort nachprüfbar, dass diese Isomorphismen R -linear sind bezüglich der oben

eingeführten R -Modul Struktur auf den Tensorprodukten mit R , und deshalb R -Modul Isomorphismen sind und nicht nur Isomorphismen von abelschen Gruppen.

Insbesondere folgt hieraus, wenn $M = S(X)$ die Menge der singulären Simplexe in einem topologischen Raum X ist, dass

$$C_*(X; R) = C_*(X) \otimes R$$

als Kettenkomplex isomorph ist zu dem in Kapitel 6 zumindest andeutungsweise eingeführten singulären Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in dem Ring R , und das Gleiche gilt dann natürlich auch für die Homologie mit Koeffizienten in einem Ring.

Der Vorteil der neuen Definition von „Homologie mit Koeffizienten“ durch Tensorieren des singulären Kettenkomplexes mit der Koeffizientengruppe liegt darin, dass man jetzt nicht nur Ringe, sondern beliebige abelsche Gruppen als Koeffizientengruppen nehmen kann.

Welche Grundeigenschaften hat diese neue Art von Homologie? Wir hoffen zumindest, dass sie eine richtige Homologietheorie ist im Sinne von Definition 7.57, d.h., dass sie die Eilenberg-Steenrod Axiome erfüllt, und zum Glück ist es tatsächlich so. Das lässt sich auch mit relativ wenig Aufwand beweisen, denn es folgt aus allgemeinen funktoriellen Eigenschaften.

Wir beginnen mit einem kleinen Hilfssatz.

Definition 11.4 Ein Kettenkomplex $\mathcal{C} = (C, \partial)$ heißt **frei**, wenn die graduierte Kettengruppe C eine freie abelsche Gruppe ist, oder gleichbedeutend, wenn in jeder Dimension $n \in \mathbf{Z}$ die n -te Kettengruppe C_n frei abelsch ist.

Ein Kettenkomplex $\mathcal{C} = (C, \partial)$ heißt **azyklisch**, wenn $H\mathcal{C} = \{0\}$.

Das ist offensichtlich äquivalent dazu, dass \mathcal{C} als Folge der Kettengruppen C_n und der Randhomomorphismen ∂_n exakt ist.

Man beachte, dass für einen azyklischen Raum X im Sinne von Definition 7.32 der singuläre Kettenkomplex $C_*(X)$ nicht ganz azyklisch ist im Sinne der jetzigen Definition für Kettenkomplexe, denn die 0-te Homologie $H_0(X)$ verschwindet nicht.

Lemma 11.5 Sei $U: AbGp \longrightarrow AbGp$ ein additiver Funktor und sei $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ein freier azyklischer Kettenkomplex. Dann ist auch der Kettenkomplex $U(\mathcal{C})$ azyklisch.

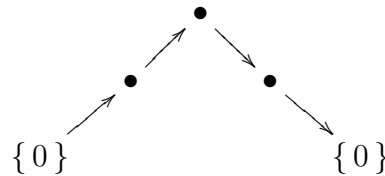
Beweis. Dies folgt aus Bemerkung 7.9 und der Tatsache, dass freie kurze exakte Folgen spalten. Hier sind die Details.

Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ sei B_n die n -te Rändergruppe von \mathcal{C} und sei Z_n die n -te Zyklengruppe. Weil \mathcal{C} azyklisch ist, sind diese Gruppen gleich.

Wie in Bemerkung 7.9 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \\
 & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 & & B_n & & B_{n-1} & & B_{n-2} \\
 & \nearrow & = Z_n & \searrow & \nearrow & = Z_{n-1} & \searrow \\
 \{0\} & & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\}
 \end{array} \quad (11.4)$$

und in diesem Diagramm sind alle kurzen Folgen



exakt.

Weil die Gruppen $B_k = Z_k$ als Untergruppen der freien abelschen Gruppen C_k auch frei sind, spalten diese kurzen Folgen und sie bleiben somit exakt, wenn wir auf das Diagramm den additiven Funktor U anwenden.

Wir erhalten dadurch wieder ein kommutatives Diagramm der Gestalt (11.4), wo in der waagerechten Folge der Kettenkomplex $U(\mathcal{C})$ steht, und wo die schräg ansteigenden und dann schräg abfallenden kurzen Folgen alle exakt sind.

Obwohl die Pfeile ihre Richtung umkehren, wenn U kontravariant ist, gelten diese Eigenschaften auch im kontravarianten Fall; das Diagramm erhält nur die spiegelbildliche Gestalt und alle Pfeile zeigen nach links, aber wir haben immer noch ein kommutatives Diagramm mit schräg ansteigenden und dann schräg abfallenden kurzen exakten Folgen.

Insbesondere sind im Bilddiagramm nach der Anwendung von U alle abfallenden Pfeile surjektiv und alle ansteigenden Pfeile sind injektiv, und die waagerechten Pfeile sind die Verknüpfung eines abfallenden Pfeils gefolgt durch einen ansteigenden Pfeil.

Das Bild einer solchen Verknüpfung ist das Bild des ansteigenden Pfeils (weil der abfallende Pfeil surjektiv ist). Der Kern einer solchen Verknüpfung ist der Kern des abfallenden Pfeils (weil der ansteigende Pfeil injektiv ist).

Also ist das Bild eines der waagerechten Pfeile gleich dem Bild des direkt darunter liegenden ansteigenden Pfeils mit der gleichen Zielgruppe. Der Kern des daran anschließenden waagerechten Pfeils ist gleich dem Kern des direkt darunter liegenden abfallenden Pfeils mit der gleichen Quellgruppe. Aber weil die schräg verlaufende kurze Folge an dieser Stelle exakt ist, ist die hier erwähnte Bildgruppe gleich der hier erwähnten Kerngruppe, d.h., die waagerechte Folge ist an jeder Stelle exakt und somit als Kettenkomplex azyklisch. ■

Satz 11.6 Sei $U: AbGp \longrightarrow AbGp$ ein additiver Funktor.

Für jedes topologische Raumpaars (X, A) wenden wir U auf den singulären Kettenkomplex von (X, A) an und erhalten nach Korollar 10.52 b) einen neuen Kettenkomplex

$$(C_*^U(X, A), \partial^U) := (U(C_*(X, A)), U(\partial))$$

(wobei wir die Graduierung negieren, also $C_n^U(X, A)$ als $U(C_{-n}(X, A))$ definieren, wenn U kontravariant ist).

Die Homologie dieses Kettenkomplexes bezeichnen wir mit $H_*^U(X, A)$.

Der Funktor

$$H_*^U: Top^2 \longrightarrow GAG$$

ist eine Homologietheorie mit Koeffizienten in $U(\mathbf{Z})$, d.h., sie erfüllt die Axiome von Eilenberg und Steenrod (mit umgekehrten Pfeilrichtungen im kontravarianten Fall) und für einen Einpunktraum P gilt

$$H_0^U(P) \cong U(\mathbf{Z})$$

(und $H_n^U(P) = \{0\}$ für alle $n \neq 0$).

Für das Ausschneidungsaxiom gilt auch für H_*^U die leicht verstärkte Version, die für die singuläre Homologie (mit \mathbf{Z} -Koeffizienten) gilt. Genauer, jedes Raumtripel (X, A, B) , das für die singuläre Homologie ein Ausschneidungstriple ist, ist auch für H_*^U ein Ausschneidungstriple.

Entsprechend sind singuläre Mayer-Vietoris Triaden auch für H_*^U Mayer-Vietoris Triaden und in H_*^U gilt der Satz von Mayer-Vietoris für jede singuläre Mayer-Vietoris Triade $(X; A, B)$.

Im kontravarianten Fall sind allerdings die Pfeile umgekehrt in Vergleich zum ursprünglichen Mayer-Vietoris Dreieck (7.58), und das Mayer-Vietoris

Dreieck erhält die Form

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^U(A \cap B) & \xleftarrow{H^U(i') \circ \pi_1 + H^U(i'') \circ \pi_2} & H_*^U(A) \oplus H_*^U(B) \\
 \searrow \beta & & \nearrow (H^U(j'), -H^U(j'')) \\
 & H_*^U(X) &
 \end{array} \quad (11.5)$$

wo $i': A \cap B \rightarrow A$, $i'': A \cap B \rightarrow B$, $j': A \rightarrow X$, und $j'': B \rightarrow X$ die Inklusionen sind und die π_i die Projektionen von $H_*^U(A) \oplus H_*^U(B)$ auf den i -ten Summanden sind.

Beweis. Homotopieaxiom: Seien f und $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotope stetige Abbildungen von Raumpaaren. Nach Satz 7.29 gibt es eine Kettenhomotopie Φ von $f_\#$ nach $g_\#$, und nach Korollar 10.52 b) ist dann $U(\Phi)$ eine Kettenhomotopie von $U(f_\#)$ nach $U(g_\#)$. Also ist

$$H_*^U(f) = H(U(f_\#)) = H(U(g_\#)) = H_*^U(g).$$

Exaktheitsaxiom: Sei (X, A) ein topologisches Raumpaar. Seien $i: A \rightarrow X$ und $k: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen.

Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ spaltet die natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_\#} C_n(X) \xrightarrow{k_\#} C_n(X, A) \rightarrow \{0\},$$

weil $C_n(X, A)$ frei ist (die relative Kettengruppe ist isomorph zur freien abelschen Gruppe, die von den n -Simplizes in X , die nicht ganz in A liegen, erzeugt wird). Deshalb bleibt für jedes n diese Folge exakt, wenn wir U darauf anwenden, und wir erhalten insgesamt wieder eine natürliche kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen

$$\{0\} \longleftrightarrow C_*^U(A) \xleftrightarrow{U(i_\#)} C_*^U(X) \xleftrightarrow{U(k_\#)} C_*^U(X, A) \longleftrightarrow \{0\}$$

(Pfeilrichtung entsprechend der Varianz von U).

Diese Folge hat ein natürliches exaktes Homologiedreieck

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^U(A) & \xleftrightarrow{H_*^U(i)} & H_*^U(X) \\
 \swarrow \text{Grad } -1 & & \swarrow H_*^U(k) \\
 & H_*^U(X, A) &
 \end{array}$$

Der verbindende Homomorphismus β^U in diesem Diagramm ist eine natürliche Transformation und ist für die Homologietheorie H_*^U die in Definition 7.57 geforderte Grad -1 natürliche Transformation β zwischen $H_*^U(X, A)$ und $H_*^U(A, \emptyset)$.

Ausschneidungsaxiom: Sei $(X; A, B)$ eine Mayer-Vietoris Triade für die singuläre Homologie mit Koeffizienten in \mathbf{Z} . Das bedeutet, dass die Inklusion

$$j: C_*(\{A, B\}) \longrightarrow C_*(X)$$

einen Isomorphismus in Homologie induziert. Sei

$$C_*(X; A, B) := \frac{C_*(X)}{C_*(\{A, B\})}.$$

Der Zähler dieses Quotienten ist die von der Menge $S(X)$ aller singulären Simplexes in X erzeugte freie abelsche Gruppe, und der Nenner wird frei erzeugt von einer Teilmenge dieser Erzeugendenmenge, nämlich von den Simplexes, die ganz in A oder ganz in B liegen. Deshalb ist der Quotient auch frei abelsch und er ist isomorph zur freien abelschen Gruppe erzeugt von den singulären Simplexes, die weder in A noch in B enthalten sind.

Wichtig für uns ist nur die Feststellung, dass $C_*(X; A, B)$ frei ist, denn daraus folgt, dass für jedes $n \in \mathbf{Z}$ die kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow C_n(\{A, B\}) \xrightarrow{j} C_n(X) \xrightarrow{\pi} C_n(X; A, B) \longrightarrow \{0\} \quad (11.6)$$

spaltet.

Folglich bleibt diese Folge für jedes n exakt, wenn wir darauf U anwenden, und die resultierende kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen hat ein natürliches exaktes Homologiedreieck

$$\begin{array}{ccc} HUC_*(\{A, B\}) & \xleftarrow{HU(j)} & H_*^U(X) \\ & \searrow & \swarrow \\ & HUC_*(X; A, B) & \end{array} \quad (11.7)$$

Weil j einen Isomorphismus in Homologie induziert, folgt aus dem exakten Homologiedreieck der kurzen exakten Folge (11.6) (vor Anwendung von U !), dass der Kettenkomplex $C_*(X; A, B)$ azyklisch ist, und wir wissen schon, dass er frei ist. Nach Lemma 11.5 ist auch $U(C_*(X; A, B))$ azyklisch.

Deshalb ist in (11.7) die Ecke $HUC_*(X; A, B) = \{0\}$ und der Homomorphismus $HU(j)$ ist somit ein Isomorphismus. In anderen Worten, $(X; A, B)$ ist auch für H_*^U Mayer-Vietoris im Sinne von Definition 7.49.

Sei

$$\{0\} \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\iota} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\kappa} C_*(\{A, B\}) \longrightarrow \{0\} \quad (11.8)$$

die natürliche exakte Kettenkomplexfolge der Triade $(X; A, B)$, konstruiert in Definition 7.46. Auch diese Folge spaltet, weil $C_*(\{A, B\})$ frei ist, und sie bleibt deshalb exakt, wenn man U anwendet.

Weil U additiv ist, ist die mittlere Gruppe der Bildfolge isomorph zu $U(C_*(A)) \oplus U(C_*(B))$; Lemma 10.5 nennt explizit einen Isomorphismus Φ und ihre Umkehrung Ψ .

Die Abbildung ι in (11.8) ist die Summe der von den Inklusionen von $A \cap B$ nach A und B induzierten Kettenabbildungen, verknüpft mit den Inklusionen der Summanden in die direkte Summe, und anhand der Gestalt von Φ und unter Verwendung der Additivität von U überzeugt man sich leicht, dass im kovarianten Fall die gleiche Beschreibung für den Homomorphismus $U(\iota)$ in der Bildfolge von (11.8) unter U gilt. Im kontravarianten Fall sind allerdings die Pfeile umgekehrt und $U(\iota)$ ist die Summe der von den Inklusionen induzierten *Projektionen* der Summanden $U(C_*(A))$ und $U(C_*(B))$ nach $U(C_*(A \cap B))$, verknüpft mit den vorher auszuführenden Projektionen der direkten Summe $U(C_*(A)) \oplus U(C_*(B))$ auf diese Summanden, wie man wieder anhand der Gestalt von Ψ leicht nachprüfen kann.

Die Abbildung κ in (11.8) ist die Differenz der Inklusionen der Summanden $C_*(A)$ und $C_*(B)$ nach $C_*(\{A, B\})$, verknüpft mit den vorher auszuführenden Projektionen der direkten Summe auf die Summanden. Wieder sieht man im kovarianten Fall leicht, dass die gleiche Beschreibung für den Homomorphismus $U(\kappa)$ in der Bildfolge gilt. Im kontravarianten Fall sind die Pfeile umgekehrt und $U(\kappa)$ ist die Differenz der von den Inklusionen induzierten Projektionen von $U(C_*(A \cap B))$ nach $U(C_*(A))$ und $U(C_*(B))$, verknüpft mit den Inklusionen dieser Summanden in die direkte Summe $U(C_*(A)) \oplus U(C_*(B))$.

Genau wie im Beweis des singulären Mayer-Vietoris Satzes 7.51 erhält man aus der langen exakten Homologiefolge der exakten Bildfolge von (11.8) unter U , indem man die Gruppe $HUC_*(\{A, B\})$ durch $H_*^U(X)$ mit Hilfe des Isomorphismus $HU(j)$ ersetzt, das exakte Mayer-Vietoris Dreieck der Mayer-Vietoris Triade $(X; A, B)$ in der Homologietheorie H_*^U .

Aus der obigen Beschreibung der Abbildungen in der Bildfolge von (11.8) unter U im kontravarianten Fall ist auch klar, dass das kontravariante Mayer-Vietoris Dreieck die Gestalt (11.5) erhält.

Schließlich ist jedes singuläre Ausschneidungstripel auch in H_*^U ein Ausschneidungstripel, denn Lemma 7.54 gilt auch für H_*^U , mit dem gleichen Beweis. Die einzige neue oder zusätzliche Überlegung, die zum Beweis dieses

Lemmas für H_*^U erforderlich ist, ist die Feststellung, dass nach Anwendung von U die Zeilen des kommutativen Diagramms (7.61) exakt bleiben, so dass das Bilddiagramm immer noch einen Morphismus von kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen darstellt. Die Zeilen bleiben exakt, weil alle Kettengruppen in diesem Diagramm frei sind und die Zeilen deshalb spalten. Der Rest des Beweises von Lemma 7.54 beruht auf der Anwendung des 5-er Lemmas auf die langen exakten Homologiefolgen der kurzen exakten Folgen von Kettenkomplexen im Diagramm und bleibt unverändert gültig nach der Anwendung von U , auch wenn im kontravarianten Fall die Pfeile umgekehrt werden.

Wenn nun (X, A, B) ein singuläres Ausschneidungstripel ist, dann folgt aus der ursprünglichen Version von Lemma 7.54, dass $(X; A, X \setminus B)$ für die singuläre Homologie eine Mayer-Vietoris Triade ist. Wir haben schon gesehen, dass sie dann auch für H_*^U eine Mayer-Vietoris Triade ist, und aus Lemma 7.54 für H_*^U folgt, dass (X, A, B) für H_*^U ein Ausschneidungstripel ist.

Dimensionsaxiom: Sei $P = \{p\}$ ein Einpunktraum. Wie wir im Beweis von Satz 7.31 gesehen haben, ist $C_n(P) = \mathbf{Z}$ für jedes $n \geq 0$ und ∂_n ist die Nullabbildung $\mathbf{0}$ für n ungerade oder $n \leq 0$, und ein Isomorphismus $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ für n gerade > 0 .

Mit dem Minuszeichen im kontravarianten Fall haben wir

$$C_n^U(P) = U(C_{\pm n}(P)) = U(\mathbf{Z})$$

für jedes $n \geq 0$ (jedes $n \leq 0$ im kontravarianten Fall). Die oben genannten Eigenschaften von ∂_n bleiben bei Anwendung eines additiven Funktors erhalten.

Also ist im kovarianten Fall $\partial_n^U = U(\partial_n)$ die Nullabbildung $\mathbf{0}$ für n ungerade oder $n \leq 0$ und ein Isomorphismus $U(\mathbf{Z}) \rightarrow U(\mathbf{Z})$ für n gerade > 0 . Das bedeutet, dass in jeder positiven Dimension entweder $Z_n^U(P) = \{0\}$ oder $B_n^U(P) = C_n^U(P)$ ist; in beiden Fällen ist $H_n^U(P) = \{0\}$. Natürlich gilt das auch in den negativen Dimensionen. Nur in Dimension 0 haben wir $Z_0^U(P) = C_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$ und $B_0^U(P) = \{0\}$, und somit ist $H_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$.

Im kontravarianten Fall ist $\partial_n^U = U(\partial_{1-n})$ die Nullabbildung $\mathbf{0}$ für n gerade oder $n > 0$ und ein Isomorphismus $U(\mathbf{Z}) \rightarrow U(\mathbf{Z})$ für n ungerade ≤ 0 . Das bedeutet, dass in jeder negativen Dimension entweder $Z_n^U(P) = \{0\}$ oder $B_n^U(P) = C_n^U(P)$ ist; in beiden Fällen ist $H_n^U(P) = \{0\}$, und natürlich gilt das auch in den positiven Dimensionen. Nur in Dimension 0 haben wir $Z_0^U(P) = C_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$ und $B_0^U(P) = \{0\}$, und somit ist auch im kontravarianten Fall $H_0^U(P) = U(\mathbf{Z})$. ■

Man beachte, dass in Satz 11.6 *keine Exaktheitseigenschaften* für den Funktor U erforderlich sind; der Satz gilt für jeden additiven Funktor.

Die Künnethsätze, die H_*^U direkt durch die normale singuläre Homologie ausdrücken, und die wir bald beweisen werden, verlangen aber doch solche Eigenschaften.

Korollar 11.7 *Sei G eine additive abelsche Gruppe.*

Der Funktor $H_(\ ; G)$, die singuläre Homologie mit Koeffizienten in G , ist eine „Homologietheorie mit Koeffizienten in G “ im Sinne der Eilenberg-Steenrod Axiome, d.h., sie erfüllt die Axiome aus Definition 7.57, wobei für einen Einpunktraum P gilt*

$$H_0(P; G) \cong G$$

(und $H_n(P; G) = \{0\}$ für alle $n \neq 0$).

Es gelten die gleichen Verstärkungen der Eilenberg-Steenrod Axiome, die auch für die singuläre Homologie mit \mathbf{Z} -Koeffizienten gelten.

Jedes Ausschneidungstripel (X, A, B) für die singuläre Homologie mit Koeffizienten in \mathbf{Z} ist auch ein Ausschneidungstripel für die singuläre Homologie mit Koeffizienten in G , und jede singuläre Mayer-Vietoris Triade $(X; A, B)$ erfüllt die Mayer-Vietoris Eigenschaft aus Definition 7.49 auch mit Koeffizienten in G und besitzt ein exaktes Mayer-Vietoris Dreieck auch für die Homologie mit Koeffizienten in G .

Beweis. $\cdot \otimes G$ ist ein additiver kovarianter Funktor $AbGp \rightarrow AbGp$. Das Korollar folgt sofort aus Satz 11.6. Die Koeffizientengruppe im Sinne des Dimensionsaxioms ist G , weil $\mathbf{Z} \otimes G \cong G$. ■

Da die Eilenberg-Steenrod Axiome für die neue Homologie mit einer beliebigen Koeffizientengruppe gelten, könnten wir anfangen, mit den gleichen Methoden wie bisher die Homologie bekannter topologischer Räume mit allgemeinen Koeffizienten auszurechnen. Natürlich müssten wir es dann auf uns nehmen, die schon einmal benutzten Argumente und die manchmal langwierigen Berechnungen für jede neue Koeffizientengruppe zu wiederholen und noch einmal durchzugehen.

Glücklicherweise gibt es einen einfacheren Weg, der die neue Homologie direkt aus der alten berechnet, ohne Kettenkomplexe konstruieren zu müssen oder mit Ausschneidung, Homotopie und der langen exakten Homologiefolge die Homologie aus Vergleichen mit einfachen Standardräumen „zusammenzubasteln“.

Diesen Weg wollen wir gleichzeitig für ko- und kontravariante Funktoren erläutern. Bevor wir das tun, wollen wir kurz *noch* eine neue, diesmal kontravariante Homologietheorie einführen, damit klar ist, dass wir auch für den

kontravarianten Fall des Berechnungssatzes eine sinnvolle Anwendung vorweisen können und die Behandlung dieses Falls nicht nur von theoretischem Interesse ist.

Wenn wir jetzt verstärkt mit kontravarianten Homologietheorien arbeiten, ist es sinnvoll, eine auf sie angepasste Notation und neue Bezeichnungen einzuführen, um den bisher erforderlichen lästigen und ineleganten Umgang mit ausschließlich nichtpositiven Dimensionen zu umgehen. Die Negierung der Dimensionen war wegen der kontravarianten Pfeilumkehrung nötig, damit in kontravarianten Homologien alle Abbildungen den gleichen Grad haben, wie im kovarianten Fall. Nehmen wir es stattdessen hin, dass der *Grad* mancher Abbildungen $+1$ statt -1 ist, ist die sonstige Negierung von Dimensionen nicht mehr erforderlich und alles sieht viel glatter und gewohnter aus.

Alle bisherigen Begriffe und Sätze über Kettenkomplexe und ihre Homologie lassen sich sehr leicht in die neue Notation übertragen und finden ihre Entsprechungen in den Definitionen und Aussagen, die nun folgen. Man beachte die Notationskonvention, dass in der „Ko“-Theorie alle Dimensionen als Exponenten, also oben, geschrieben werden, und nicht als Indizes unten.

Definition 11.8 Ein **Kokettenkomplex** $\mathcal{C} = (C, \delta)$ ist ein Paar bestehend aus einer graduierten abelschen Gruppe C zusammen mit einem graduierten Homomorphismus

$$\delta: C \longrightarrow C$$

von Grad $+1$, so dass

$$\delta \circ \delta = \mathbf{0}. \quad (11.9)$$

Der Homomorphismus δ heißt der **Korandoperator** des Kokettenkomplexes \mathcal{C} .

Um schon in der Notation Kokettenkomplexe von Kettenkomplexen zu unterscheiden, schreiben wir C^n (und nicht C_n) für den n -ten homogenen Anteil der graduierten abelschen Gruppe C und notieren entsprechend den n -ten homogenen Anteil des Korandoperators mit

$$\delta^n: C^n \longrightarrow C^{n+1}.$$

Seien $\mathcal{C} = (C, \delta)$ und $\mathcal{D} = (D, \delta')$ zwei Kokettenkomplexe. Eine **Kokettenabbildung**

$$f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist ein Grad 0 Homomorphismus $f: C \longrightarrow D$, so dass

$$f \circ \delta = \delta' \circ f. \quad (11.10)$$

Entsprechend der Notationskonvention wird der n -te homogene Anteil einer Kokettenabbildung mit f^n bezeichnet, nicht mit f_n .

Offensichtlich ist die Identität eines Kokettenkomplexes eine Kokettenabbildung und die Verknüpfung von zwei Kokettenabbildungen ist wieder eine Kokettenabbildung, so dass die Kokettenkomplexe und die Kokettenabbildungen die Objekte und Morphismen einer Kategorie bilden, der **Kategorie $KoKK$ der Kokettenkomplexe und Kokettenabbildungen**.

Ist $\mathcal{C} = (C, \delta)$ ein Kokettenkomplex, so nennen wir

$$Z(\mathcal{C}) := \text{Ker } \delta$$

die **graduierete Kozyklengruppe** von \mathcal{C} (und für jedes $n \in \mathbf{Z}$ nennen wir $Z^n(\mathcal{C}) := \text{Ker } \delta^n$ die **n -te Kozyklengruppe** von \mathcal{C}). Ein Element der Kozyklengruppe wird ein **Kozyklus** genannt.

Entsprechend nennen wir

$$B(\mathcal{C}) := \text{Bild } \delta$$

die **graduierete Korändergruppe** von \mathcal{C} (und für jedes $n \in \mathbf{Z}$ nennen wir $B^n(\mathcal{C}) := \text{Bild } \delta^{n-1}$ die **n -te Korändergruppe** von \mathcal{C}). Ein Element der Korändergruppe wird ein **Korand** genannt.

Weil $\delta \circ \delta = 0$ haben wir

$$B(\mathcal{C}) \subseteq Z(\mathcal{C}) \subseteq C.$$

Den Quotienten

$$H(\mathcal{C}) := \frac{Z(\mathcal{C})}{B(\mathcal{C})} \quad (11.11)$$

nennen wir die **graduierete Kohomologiegruppe** des Kokettenkomplexes \mathcal{C} , und entsprechend heißt ihr n -ter homogener Anteil die **n -te Kohomologiegruppe**

$$H^n(\mathcal{C}) := \frac{Z^n(\mathcal{C})}{B^n(\mathcal{C})}$$

des Kokettenkomplexes \mathcal{C} . Ist $\gamma \in Z(\mathcal{C})$ ein Kozyklus, so nennen wir ihre Restklasse in $H(\mathcal{C}) := Z(\mathcal{C})/B(\mathcal{C})$ ihre **Kohomologieklass**e und wir bezeichnen sie wie üblich mit $[\gamma]$.

Weil Kokettenabbildungen mit dem Korandoperator kommutieren, bilden sie Kozyklen wieder in Kozyklen ab und Koränder in Koränder. Daraus folgt, dass jede Kokettenabbildung

$$f: \mathcal{C} = (C, \delta) \longrightarrow \mathcal{D} = (D, \delta')$$

einen wohldefinierten Kohomologiemorphismus

$$f^* := H(f): H(\mathcal{C}) \longrightarrow H(\mathcal{D})$$

induziert mit $f^*([\gamma]) := [f(\gamma)]$ für jeden Kozyklus γ . Mit dieser Zuordnung für Morphismen wird die Kohomologie zu einem kovarianten Funktor $KoKK \longrightarrow GAG$.

Bemerkung 11.9 a) Natürlich sind in Definition 11.8 nicht wirklich neue Begriffe eingeführt worden, sondern nur eine neue Notation für Altbekanntes. Wenn wir \square als Platzhalter für ein beliebiges Bezeichnungssymbol für Gruppen, Homomorphismen usw. schreiben, so wandelt die Notationsübersetzung $\square^n \longleftrightarrow \square_{-n}$ (für beliebiges $n \in \mathbf{Z}$) die gesamte Kokettenkomplex- und Kohomologietheorie wörtlich genau in die bekannte Kettenkomplex- und Homologietheorie um und umgekehrt. Somit braucht man auch die hier erwähnten Grundeigenschaften der Kokettenkomplextheorie nicht extra zu überlegen—sie sind einfach Übersetzungen der bekannten Eigenschaften der Kettenkomplextheorie.

Insbesondere ist die gesamte Definition 11.8 im Grunde nichts anderes als eine Neufassung von Definition 6.35 in anderer Notation.

- b) Um die Notation einfach zu halten, schreiben wir für die Kozyklengruppen und die Korändergruppen $Z(\mathcal{C})$ und $B(\mathcal{C})$ wie in der Homologietheorie, und den Kohomologiefunktor bezeichnen wir auch mit einem einfachen H ; der Unterschied ist in der Notation nur sichtbar, wenn es um einzelne homogene Anteile geht, deren Dimension in der Kohomologietheorie dann oben geschrieben wird. Das ist in Anbetracht von Teil a) auch nicht weiter schlimm, denn es handelt sich ja tatsächlich um die Zyklengruppen, Rändergruppen und Homologie des zugehörigen, umgekehrt graduierten Kettenkomplexes. Und bei jeder Anwendung ist ohnehin klar aus dem Grad des (Ko-)Randoperators, ob Homologie oder Kohomologie gemeint ist.

Wen es stört, dass die Notation für die graduierten Gruppen und Abbildungen keinen Hinweis darauf gibt, dass es sich um Kohomologie und nicht um Homologie handelt, kann sich mit einem hochgesetzten Punkt behelfen, indem er etwa $Z^{\cdot}(\mathcal{C})$ statt $Z(\mathcal{C})$, $B^{\cdot}(\mathcal{C})$ statt $B(\mathcal{C})$ und H^{\cdot} statt H schreibt.

- c) Wie wir es für Kettenkomplexe gewohnt sind, kann man auch Kokettenkomplexe als Diagramme der Gestalt Folge auffassen. Die Knoten der Folge sind die Kokettengruppen in den einzelnen Dimensionen, die

Kanten sind die homogenen Anteile des Korandoperators und der einzige Unterschied zu einem Kettenkomplexdiagramm besteht darin, dass die Pfeile in Richtung aufsteigender Dimension und nicht in Richtung absteigender Dimension zeigen.

Im Folgenden übertragen wir ohne Beweis und ohne viel Erläuterung andere bekannte und wichtige Definitionen und Sätze aus der Homologietheorie von Kettenkomplexen in die neue Sprache und Situation von Kokettenkomplexen.

Satz 11.10 *Sei*

$$\{0\} \longrightarrow (C, \delta) \xrightarrow{f} (D, \delta') \xrightarrow{g} (E, \delta'') \longrightarrow \{0\} \quad (11.12)$$

eine kurze exakte Folge von Kokettenkomplexen und Kokettenabbildungen.

Dann gibt es ein natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} H(C) & \xrightarrow{f^*} & H(D) \\ & \nwarrow \text{Grad } +1 & \swarrow g^* \\ & H(E) & \end{array} \quad (11.13)$$

zwischen den graduierten Kohomologiegruppen der drei Kokettenkomplexe, mit den von den Kokettenabbildungen induzierten Grad 0 Homomorphismen $f^* = H(f)$ und $g^* = H(g)$ und mit einem Grad +1 Homomorphismus $\beta: H(E) \longrightarrow H(C)$, den wir den **verbindenden Homomorphismus** des exakten Kohomologiedreiecks nennen wollen, und der (unter Verwendung des Korandoperators statt des Randoperators) auf die gleiche Weise erklärt ist, wie der verbindende Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen.

Beweis. Dies ist die „Kohomologie-Übersetzung“ von Satz 7.14. ■

Definition 11.11 Seien $\mathcal{C} = (C, \delta)$ und $\mathcal{D} = (D, \delta')$ Kokettenkomplexe und seien f und $g: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei Kokettenabbildungen.

Eine **Kokettenhomotopie** von f nach g ist ein Grad -1 Homomorphismus $\Psi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, so dass

$$g - f = \delta' \circ \Psi + \Psi \circ \delta. \quad (11.14)$$

In diesem Fall sagen wir, f und g sind **kokettenhomotop** vermöge Ψ und wir schreiben $f \simeq_{\Psi} g$ (die gleiche Notation, wie für eine Kettenhomotopie).

Diese Definition ist einfach die Kokettenübersetzung der Definition von **Kettenhomotopie** (Definition 7.18).

Lemma 11.12 Seien $\mathcal{C} = (C, \delta)$ und $\mathcal{D} = (D, \delta')$ Kokettenkomplexe und seien f und $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Kokettenabbildungen.

- a) Wenn $f \simeq g$, dann induzieren f und g den gleichen Homomorphismus der Kohomologiegruppen, d.h., $f^* = g^*: H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{D})$.
- b) Kokettenhomotopie \simeq ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kokettenabbildungen $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.
- c) Sei $\mathcal{E} = (E, \delta'')$ ein dritter Kokettenkomplex und seien h und k Kokettenabbildungen $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Wenn $f \simeq g$ und $h \simeq k$, dann ist $h \circ f \simeq k \circ g$.

Beweis. Dies ist die „Kokettenübersetzung“ von Lemma 7.19. ■

Definition 11.13 Seien $\mathcal{C} = (C, \delta)$ und $\mathcal{D} = (D, \delta')$ Kokettenkomplexe.

Eine Kokettenabbildung $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt eine **Kokettenhomotopieäquivalenz**, wenn es eine Kokettenabbildung $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gibt (genannt eine **Kokettenhomotopieinverse** zu f), so dass

$$g \circ f \simeq \text{id}_{\mathcal{C}} \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Wenn es eine Kokettenhomotopieäquivalenz $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gibt, sagen wir, dass \mathcal{C} und \mathcal{D} **kokettenhomotopieäquivalent** oder **vom gleichen Kokettenhomotopietyp** sind und wir schreiben $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ (wie für Kettenhomotopieäquivalenz).

Definition 11.13 ist nur die Kokettenübersetzung von Definition 7.20.

In ihrer Struktur ist die Theorie der Kokettenkomplexe, wie wir gesehen haben, nichts anderes als eine Theorie von Kettenkomplexen mit Randoperatoren von Grad $+1$. Es würde sich also kaum lohnen, diesen Begriff einzuführen, gäbe es nicht natürliche und nützliche Beispiele von Kokettenkomplexen mit ihrer Kohomologie.

So wie die Anwendung des Funktors $\otimes G$ auf den singulären Kettenkomplex zur singulären Homologietheorie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe G führt, erhalten wir durch die Anwendung des *kontravarianten* additiven Funktors $\text{Hom}(\cdot, G)$ eine andere schöne, diesmal kontravariante Verallgemeinerung der klassischen singulären Homologie, die **singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in G** , und in ihrer Konstruktion treten wegen der Kontravarianz als Zwischenstufe nicht Kettenkomplexe auf, sondern Kokettenkomplexe.

Definition 11.14 Sei (X, A) ein topologisches Raumpaard und sei G eine additive abelsche Gruppe. Für jedes $n \in \mathbf{Z}$ definieren wir die *n -dimensionale singuläre Kokettengruppe auf (X, A) mit Koeffizienten in G* als

$$C^n(X, A; G) = \text{Hom}(C_n(X, A), G) \quad (11.15)$$

und wir definieren den *n -ten singulären Korandoperator*

$$\delta^n: C^n(X, A; G) \longrightarrow C^{n+1}(X, A; G)$$

als

$$\delta^n := \text{Hom}(\partial_{n+1}, G) = \rho_{\partial_{n+1}}. \quad (11.16)$$

In anderen Worten, für jede Kokette $\gamma \in C^n(X, A; G) = \text{Hom}(C_n(X, A), G)$ ist $\delta^n(\gamma) = \gamma \circ \partial_{n+1} \in \text{Hom}(C_{n+1}(X, A), G) = C^{n+1}(X, A; G)$.

Wir definieren den *singulären Kokettenkomplex*

$$\mathcal{C}(X, A; G) := (C^*(X, A; G), \delta)$$

des Raumpaares (X, A) mit Koeffizienten in G durch

$$C^*(X, A; G) := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C^n(X, A; G) \quad (11.17)$$

und

$$\delta := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n. \quad (11.18)$$

In anderen Worten,

$$\mathcal{C}(X, A; G) := \text{Hom}(\mathcal{C}(X, A), G)$$

unter Berücksichtigung der Konvention aus Bemerkung 11.1 über die Anwendung von additiven Funktoren auf graduierte abelsche Gruppen.

In Definition 10.52 b) hatten wir gesehen, dass $\mathcal{C}(X, A; G)$ ein Kettenkomplex ist, wenn wir die Graduierung negieren; wenn wir die Graduierung *nicht* negieren und so belassen wie in (11.15)–(11.18), erhalten wir also einen Kokettenkomplex $\mathcal{C}(X, A; G)$.

Die Kohomologiegruppe dieses Kokettenkomplexes wird mit $H^*(X, A; G)$ bezeichnet und heißt die *graduierte singuläre Kohomologiegruppe des Raumpaares (X, A) mit Koeffizienten in G* .

Eine ähnliche Notation benutzen wir für die anderen Gruppen, die in der Konstruktion der Kohomologie vorkommen. So bezeichnet $Z^*(X, A; G)$

die Kozyklengruppe des Kokettenkomplexes $C^*(X, A; G)$ und $B^*(X, A; G)$ bezeichnet die Korändergruppe.

Wie üblich, wenn $A = \emptyset$ schreiben wir $C^*(X; G)$ statt $C^*(X, \emptyset; G)$, und wir nennen dies den **singulären Kokettenkomplex des Raumes X mit Koeffizienten in G** .

Entsprechend schreiben wir $H^*(X; G)$ statt $H^*(X, \emptyset; G)$, und wir nennen dies die **singuläre Kohomologie des Raumes X mit Koeffizienten in G** . Und wir schreiben natürlich $Z^*(X; G)$ statt $Z^*(X, \emptyset; G)$ und $B^*(X; G)$ statt $B^*(X, \emptyset; G)$.

Notation 11.15 Wie bei der Homologie, ist auch für die Kohomologie die Gruppe \mathbf{Z} die am häufigsten verwendete Koeffizientengruppe.

Für diesen Standardfall benutzt man auch in der Kohomologie die bekannte vereinfachte Notation, d.h., wir schreiben in der Regel $C^*(X, A)$ als Abkürzung für $C^*(X, A; \mathbf{Z})$, $H^*(X, A)$ als Abkürzung für $H^*(X, A; \mathbf{Z})$, und entsprechend für alle anderen in Definition 11.14 vorkommenden Gruppen.

Bemerkung 11.16 Sei G eine additive abelsche Gruppe und sei (X, A) ein topologisches Raumpaars. Wie im Beweis des Exaktheitsaxioms in Satz 11.6 schon erläutert, bleibt die natürliche kurze exakte Folge (7.14) von Kettenkomplexen dieses Raumpaars nach Anwendung des Funktors $\text{Hom}(\cdot, G)$ exakt (weil die ursprüngliche Folge spaltet) und wir erhalten wegen der Umkehrung der Pfeilrichtungen eine **natürliche kurze exakte Folge von Kokettenkomplexen**

$$\{0\} \rightarrow C^*(X, A; G) \xrightarrow{\text{Hom}(\pi, G)} C^*(X; G) \xrightarrow{i^\sharp} C^*(A; G) \rightarrow \{0\}, \quad (11.19)$$

wo π die Projektion $C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A)$ ist und wo i die Inklusion $A \rightarrow X$ ist und $i^\sharp := \text{Hom}(i_\sharp, G)$.

Man beachte, dass hier $\text{Hom}(\pi, G)$ *injektiv* ist und wir somit $C^*(X, A; G)$ als *Untergruppe* von $C^*(X; G)$ auffassen können.

Eine Kokette γ auf X ist ein auf Ketten definierter G -wertiger Homomorphismus und γ gehört genau dann zur Untergruppe $C^*(X, A; G)$, wenn γ durch π faktorisiert, d.h., wenn γ auf dem Nenner des Quotienten $C_*(X, A)$, also auf $C_*(A)$, verschwindet.

Bemerkung und Definition 11.17 Sei G eine additive abelsche Gruppe und (X, A) ein topologisches Raumpaars. Der singuläre Kokettenkomplex $C^*(X, A; G)$ entsteht durch Anwendung des additiven Funktors $\text{Hom}(\cdot, G)$ auf den singulären Kettenkomplex $C_*(X, A)$ des Raumpaars. Wie in Korollar 10.52 b) begründet, bestimmt $\text{Hom}(\cdot, G)$ einen additiven kontravarianten

Funktor $KK \rightarrow KK$ oder mit unnegierter Graduierung einen additiven kontravarianten Funktor $KK \rightarrow KoKK$.

$C^*(X, A; G)$ ist die Verknüpfung dieses Funktors mit dem additiven kovarianten Funktor $C_*: Top^2 \rightarrow KK$, und ist somit insgesamt ein kontravarianter additiver Funktor

$$C^*(\cdot; G): Top^2 \rightarrow KoKK.$$

Insbesondere induziert jede stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zwischen topologischen Raumpaaren zunächst eine Kettenabbildung $C_*(f) = f_\#: C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$ und dann nach Anwendung von $\text{Hom}(\cdot, G)$ eine **Kokettenabbildung**

$$C^*(f; G) := \text{Hom}(f_\#, G): C^*(Y, B; G) \rightarrow C^*(X, A; G),$$

die wir auch mit $f^\#$ bezeichnen wollen.

Verknüpfen wir den Funktor $C^*(\cdot; G)$ mit dem Kohomologiefunktor $H: KoKK \rightarrow GAG$, so erhalten wir insgesamt den kontravarianten singulären Kohomologiefunktor

$$H^*(\cdot; G): Top^2 \rightarrow GAG$$

mit Koeffizienten in G . Dies ist die singuläre Kohomologie aus Definition 11.14 und diese Herleitung zeigt, dass die singuläre Kohomologie eines Raumpaares mit Koeffizienten in einer gegebenen Gruppe G wie zu erwarten ein kontravarianter additiver Funktor ist.

Bemerkung 11.18 Die induzierte Kokettenabbildung einer stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen verhält sich manchmal etwas unerwartet.

Insbesondere, wenn G eine additive abelsche Gruppe ist und wenn A ein Unterraum eines topologischen Raumes X ist und wenn $i: A \rightarrow X$ die Inklusion ist, so ist

$$i^\#: C^*(X; G) \rightarrow C^*(A; G)$$

eine *Einschränkungsabbildung*.

Denn $i_\#: C_*(A) \rightarrow C_*(X)$ ist zwar eine Inklusion einer Untergruppe in $C_*(X)$, aber wenn wir $\text{Hom}(\cdot, G)$ anwenden, dann wird daraus, als $i^\#$, die Abbildung, die jeder Kokette $\gamma: C_n(X) \rightarrow G$ ihre *Einschränkung* auf die Untergruppe $C_n(A)$ zuordnet.

In der Notation von Satz 11.6 ist $H^*(\cdot; G)$ der Funktor $H_*^{\text{Hom}(\cdot, G)}$ und aus diesem Satz folgen sofort weitere wichtige Eigenschaften der singulären Kohomologie.

Korollar 11.19 Sei G eine additive abelsche Gruppe. Die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in G erfüllt die Eilenberg-Steenrod Axiome in ihrer kontravarianten Version und ist somit eine Kohomologietheorie, also eine „kontravariante Homologietheorie“, im Sinne von Eilenberg und Steenrod, mit Koeffizienten in G .

Insbesondere besagt das Dimensionsaxiom, dass für einen Einpunktraum P gilt

$$H^0(P) = G \quad \text{und} \quad H^n(P) = \{0\} \quad \text{für alle } n \neq 0.$$

Das Exaktheitsaxiom gilt in der folgenden kontravarianten Form. Für jedes topologische Raumpaars (X, A) gibt es ein natürliches exaktes Kohomologiedreieck der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} H^*(A; G) & \xleftarrow{i^*} & H^*(X; G) \\ & \searrow \text{Grad} + 1 & \nearrow j^* \\ & H^*(X, A; G) & \end{array} \quad (11.20)$$

wo $i: A \rightarrow X$ und $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen sind.

Jedes singuläre Ausschneidungstrippel ist auch für die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in G ein Ausschneidungstrippel.

Wenn $(X; A, B)$ eine singuläre Mayer-Vietoris Triade ist, so induziert die Einschränkungabbildung

$$\begin{aligned} C^*(X; G) &\rightarrow C^*(\{A, B\}, G) := \text{Hom}(C_*(\{A, B\}), G) \\ \gamma &\mapsto \gamma|_{C_*(\{A, B\})} \end{aligned}$$

einen Isomorphismus in Kohomologie, und wir haben ein natürliches exaktes Mayer-Vietoris Dreieck der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} H^*(A \cap B; G) & \xleftarrow{(i')^* \circ \pi_1 + (i'')^* \circ \pi_2} & H^*(A; G) \oplus H^*(B; G) \\ & \searrow \text{Grad} + 1 & \nearrow \\ & H^*(X; G) & \end{array} \quad (11.21)$$

β $((j')^*, -(j'')^*)$

wo $i': A \cap B \rightarrow A$, $i'': A \cap B \rightarrow B$, $j': A \rightarrow X$, und $j'': B \rightarrow X$ die Inklusionen sind und die π_i die Projektionen von $H^*(A; G) \oplus H^*(B; G)$ auf den i -ten Summanden sind.

Beweis. Dies ist einfach die Aussage von Satz 11.6 für den kontravarianten additiven Funktor $U := \text{Hom}(\cdot, G)$.

Für einen Einpunktraum P hat $H^0(P; G)$ nach Satz 11.6 und nach Lemma 10.41 a) den Wert $\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) = G$. Wie in Bemerkung 11.18 erläutert, induziert für eine Triade $(X; A, B)$ die Inklusion $C_*(\{A, B\}) \longrightarrow C_*(X)$ eine Einschränkungabbildung zwischen den entsprechenden Kokettengruppen mit Koeffizienten in G . Alle anderen Behauptungen in der Aussage folgen unmittelbar aus Satz 11.6.

Das exakte Kohomologiedreieck (11.20) eines Raumpaars kann man alternativ auch aus Satz 11.10 angewendet auf die kurze exakte Folge (11.19) herleiten. ■

Wir haben gesehen, dass wir durch Anwendung von additiven Funktoren U auf den singulären Kettenkomplex eines Raumpaars neue interessante Homologietheorien und Kohomologietheorien H_*^U erhalten, für die auf Grund von Satz 11.6 die Eilenberg-Steenrod Axiome automatisch gelten. Diese Tatsache ermöglicht schon prinzipiell die Berechnung dieser neuen Homologie- und Kohomologietheorien.

Aber sofern der Funktor U teilweise exakt ist und eine Ableitung besitzt, ist eine neue Berechnung gar nicht erforderlich. Man kann dann die neuen Homologie- oder Kohomologiegruppen mit Hilfe der folgenden kurzen exakten **Künnethfolge** direkt aus der klassischen Variante bestimmen.

Definition 11.20 Sei

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$$

eine graduierte abelsche Gruppe.

Wir können aus dieser Gruppe unter Beibehaltung der gegebenen direkten Summenzerlegung eine neue graduierte abelsche Gruppe G_+ machen, indem wir nur die Graduierung um eine Stufe verschieben. Wir definieren also

$$G_+ := G$$

als Gruppe, aber für jedes $n \in \mathbf{Z}$ setzen wir

$$(G_+)_n := G_{n-1}.$$

Diese Konstruktion erlaubt es manchmal, Homomorphismen, die es eigentlich nicht sind, als Grad 0 Homomorphismen zu betrachten. Sie wird in der Aussage und im Beweis des folgenden Satzes nützlich sein.

Satz 11.21 (Künneth) Sei $U: AbGp \longrightarrow AbGp$ ein additiver, kovarianter rechts-exakter oder kontravarianter links-exakter Funktor. Ein solcher Funktor U besitzt einen abgeleiteten Funktor U' .

Sei $\mathcal{C} = (C, \partial)$ ein freier Kettenkomplex.

Dann gibt es eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow U(H\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} H(U\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{Grad } -1]{\zeta} U'(H\mathcal{C}) \longrightarrow \{0\} \quad (11.22a)$$

wenn U kovariant ist, oder

$$\{0\} \longrightarrow U'(H\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{Grad } +1]{\zeta} H(U\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} U(H\mathcal{C}) \longrightarrow \{0\} \quad (11.22b)$$

wenn U kontravariant ist, wobei in (11.22b) die unnegierte Graduierung zu verstehen ist (insbesondere ist $U\mathcal{C}$ ein Kokettenkomplex und die mittlere Gruppe $H(U\mathcal{C})$ in dieser Zeile ist eine Kohomologiegruppe; alle anderen Instanzen von H sind Homologiegruppen).

Die zur Varianz von U passende Folge (11.22) spaltet (aber die Spaltung ist nicht natürlich).

Diese Folge heißt die **Künnethfolge** des Kettenkomplexes \mathcal{C} bezüglich des Funktors U .

Weil die Künnethfolge spaltet, gibt es einen (nichtnatürlichen) Isomorphismus

$$H(U\mathcal{C}) \cong U(H\mathcal{C}) \oplus U'(H_+\mathcal{C}) \quad (11.23)$$

(wo „ H_+ “ im Sinne von Definition 11.20 zu verstehen ist).

Beweis. Sei Z die Zyklengruppe von \mathcal{C} und sei B die Rändergruppe; als Untergruppen der freien Gruppe C sind sie freie graduierte abelsche Gruppen. Aus diesen Gruppen und aus der Konstruktion von $H\mathcal{C}$ gewinnen wir einige nützliche spaltende kurze exakte Folgen von Kettenkomplexen.

Auf Z ist der Randoperator $\partial \equiv \mathbf{0}$, denn Z ist ja definiert als $\text{Ker } \partial$, und ∂ ist natürlich auch $\mathbf{0}$ auf der Untergruppe B von Z . Das bedeutet aber, dass $\partial Z \subseteq Z$ und $\partial B \subseteq B$, d.h., Z und B sind Unterkettenkomplexe von C , mit verschwindendem Randoperator. Weil der Randoperator auf ihnen $\mathbf{0}$ ist, sind sie gleich ihrer eigenen Zyklengruppen, ihre Rändergruppen sind $\{0\}$, und sie sind somit natürlich isomorph zu ihrer eigenen Homologie.

Sei i die Inklusion $i: Z \longrightarrow C$ und sei j die Inklusion $j: B \longrightarrow Z$. Sei $\pi: Z \longrightarrow H\mathcal{C} = Z/B$ die Projektion.

Die Abbildung ∂ ist zunächst definiert als eine Abbildung $C \longrightarrow C$, aber ihre Werte liegen alle in der Untergruppe $B \subseteq Z \subseteq C$. Je nachdem welchen Definitionsbereich und unabhängig davon welchen Zielbereich wir

für diese Abbildung wählen, liefert die gleiche Wertezuordnung insgesamt 9 verschiedene Abbildungen zwischen den Gruppen B , Z und C ! Die auf Z oder B definierten Abbildungen sind aber alle Nullabbildungen; nur die auf C definierten Varianten können nichttrivial sein.

Wir wollen nicht unnötig pedantisch sein, aber der Rest des Beweises wird etwas klarer, wenn wir für den Definitionsbereich C zumindest die Zielgruppen C und B in der Notation für den Randoperator unterscheiden. Fortan schreiben wir ∂ nur für den Randoperator als Abbildung $C \rightarrow C$, und wir schreiben $\tilde{\partial}$ für den Randoperator als Abbildung $C \rightarrow B$.

Den Randoperator als Abbildung nach Z können wir dann mit $j \circ \tilde{\partial}$ bezeichnen, und es gilt die Beziehung

$$\partial = ij\tilde{\partial}. \quad (11.24)$$

Weil $Z = \text{Ker } \partial$ und $B = \text{Bild } \partial$ haben wir eine kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow Z \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\tilde{\partial}} B_+ \longrightarrow \{0\}, \quad (11.25)$$

wo die Verwendung von B_+ statt B am rechten Ende bewirkt, dass $\tilde{\partial}$ in dieser Folge den Grad 0 hat. Die Homomorphismen i und $\tilde{\partial}$ in (11.25) sind, wie man leicht nachprüft, Kettenabbildungen.

(11.25) ist sogar eine spaltende kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen, da B_+ frei ist (die Spaltung besteht allerdings nicht aus Kettenabbildungen).

Weil HC definiert ist als $\text{Coker } j$, haben wir eine kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{\pi} HC \longrightarrow \{0\}. \quad (11.26)$$

Diese Folge spaltet nicht, aber sie ist eine freie Auflösung von HC , da B und Z frei sind.

Weil die Folge (11.25) spaltet, bleibt sie exakt, wenn wir darauf U anwenden, und wir erhalten wieder eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$\{0\} \longrightarrow UZ \xrightarrow{U(i)} UC \xrightarrow{U(\tilde{\partial})} UB_+ \longrightarrow \{0\}, \quad (11.27a)$$

wenn U kovariant ist, oder

$$\{0\} \longrightarrow UB_+ \xrightarrow{U(\tilde{\partial})} UC \xrightarrow{U(i)} UZ \longrightarrow \{0\}, \quad (11.27b)$$

wenn U kontravariant ist.

Weil der Randoperator der äußeren Kettenkomplexe Z und B_+ in (11.25) die Nullabbildung ist und weil U additiv ist, haben auch die Bildkettenkomplexe oder Bildkokettenkomplexe UZ und UB_+ die gleiche Eigenschaft: ihr Randoperator ist $\mathbf{0}$, jede ihrer Ketten oder Koketten ist ein Zyklus bzw. ein Kozyklus, und sie sind isomorph zu ihrer eigenen Homologiegruppe bzw. Kohomologiegruppe.

Jede Kette oder Kokette in UZ und UB_+ repräsentiert eine eindeutige Homologie- oder Kohomologiekategorie und jede solche Klasse wird von einer eindeutigen Kette oder Kokette repräsentiert, und aus diesem Grund können wir die Ketten und Koketten mit den Homologieklassen oder Kohomologieklassen identifizieren und brauchen die Klassenklammern $[\]$ nicht zu schreiben.

Wir wollen als Nächstes den verbindenden Homomorphismus β des exakten Homologie- oder Kohomologiedreiecks der Folge (11.27) bestimmen.

Wenn U kovariant ist, so sei b eine beliebige Kette (=Homologiekategorie) von UB_+ und sei $c \in UC$ mit $U(\tilde{\partial})(c) = b$. Nach Konstruktion des verbindenden Homomorphismus ist $\beta(b) = z$, wo $z \in UZ$ die eindeutige bestimmte Kette ist mit

$$U(i)(z) = U(\partial)(c) = U(ij\tilde{\partial})(c) = (U(i) \circ U(j))(U(\tilde{\partial})(c)) = (U(i) \circ U(j))(b).$$

Weil $U(i)$ injektiv ist, gilt $\beta(b) = z = U(j)(b)$ und wir haben also

$$\beta = U(j). \quad (11.28)$$

Wenn U kontravariant ist, so sei z eine beliebige Kokette (oder Kohomologiekategorie) von UZ und sei $c \in UC$ mit $U(i)(c) = z$. Nach Konstruktion des verbindenden Homomorphismus ist $\beta(z) = b$ die eindeutig bestimmte Kokette $b \in UB_+$ mit

$$U(\tilde{\partial})(b) = U(\partial)(c) = U(ij\tilde{\partial})(c) = (U(\tilde{\partial}) \circ U(j))(U(i)(c)) = (U(\tilde{\partial}) \circ U(j))(z).$$

Weil jetzt $U(\tilde{\partial})$ injektiv ist, ist $\beta(z) = b = U(j)(z)$ und auch im kontravarianten Fall gilt (11.28).

Das exakte Homologie- oder Kohomologiedreieck der kurzen exakten Folge (11.27) hat also die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} UZ = H(UZ) & \xleftarrow{HU(i)} & H(UC) \\ & \searrow U(j) & \swarrow HU(\tilde{\partial}) \\ & UB_+ = H(UB_+) & \end{array} \quad (11.29)$$

wo die Pfeile für kovariantes U im Uhrzeigersinn zeigen und für kontravariantes U entgegen dem Uhrzeigersinn.

Ein wichtiger Punkt ist noch zu erwähnen: der verbindende Homomorphismus β hat Grad ± 1 , aber j ist eigentlich ein Grad 0 Homomorphismus $B \rightarrow Z$ und somit hat $U(j)$ eigentlich auch den Grad 0. Im exakten Dreieck (11.29) steht aber nicht die graduierte Gruppe UB , sondern UB_+ , und als Abbildung $B_+ \rightarrow Z$ bildet j den homogenen Anteil $(B_+)_n := B_{n-1}$ nach Z_{n-1} ab und hat somit Grad -1 . Wenn U kovariant ist, hat $U(j)$ in (11.29) auch Grad -1 , und wenn U kontravariant ist, Grad $+1$, genau wie β , so dass alles passt.

Das exakte Dreieck (11.29) können wir auch als eine lange exakte Folge von Gruppen und Homomorphismen lesen, und diese lange exakte Folge können wir wiederum nach Bemerkung 7.9 in lauter kurze exakte Folgen zerlegen, deren mittlere Gruppe eine der Gruppen aus der langen Folge ist und deren äußere Gruppen Kerne und Bilder von Homomorphismen der langen Folge sind.

Uns interessieren dabei besonders die kurzen Faktorfolgen, die auf die homogenen Anteile von $H(UC)$ zentriert sind, und wir können diese Faktorfolgen durch direkte Summenbildung zusammenfassen zu einer kurzen exakten Folge von graduierten abelschen Gruppen und Homomorphismen zentriert auf die ganze Gruppe $H(UC)$.

Die äußeren Gruppen dieser kurzen exakten Folge sind das Bild des nach $H(UC)$ eingehenden Pfeils und das Bild des aus $H(UC)$ ausgehenden Pfeils in (11.29), aber weil das ganze Dreieck (11.29) exakt ist, kann man diese Gruppen auch anders beschreiben, denn sie sind auch mit dem der Stelle $H(UC)$ gegenüberliegenden Pfeil, also mit $U(j)$, verbunden.

Für das Bild des aus $H(UC)$ ausgehenden Pfeils ist das leicht einzusehen, denn das Bild dieses Pfeils ist gleich dem Kern des darauffolgenden Pfeils, also gleich $\text{Ker } U(j)$.

Die Beziehung für das Bild des eingehenden Pfeils ist nur ein wenig komplizierter. Um die Notation zu fixieren, betrachten wir ein allgemeines exaktes Dreieck von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & G \\ & \searrow k & \swarrow g \\ & K & \end{array}$$

Der Homomorphismus f induziert nach dem ersten Isomorphiesatz der Gruppentheorie einen natürlichen Isomorphismus

$$\bar{f}: \frac{F}{\text{Ker } f} = \frac{F}{\text{Bild } k} = \text{Coker } k \longrightarrow \text{Bild } f,$$

und in unserem Fall ist also das Bild des nach $H(UC)$ eingehenden Pfeils natürlich isomorph (vermöge eines von diesem Pfeil induzierten Homomorphismus) zu $\text{Coker } U(j)$.

Wir haben also für beide Varianzfälle eine kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow \text{Coker } U(j) \xrightarrow[\text{HU}(\tilde{\partial})]{\overline{\text{HU}(i)}} H(UC) \xrightarrow[\text{HU}(i)]{\text{HU}(\tilde{\partial})} \text{Ker } U(j) \longrightarrow \{0\}, \quad (11.30)$$

wo die obere Pfeilbelegung im kovarianten Fall gilt und die untere Pfeilbelegung gilt, wenn U kontravariant ist. Wir sollten aber festhalten, dass die mittleren Pfeile in dieser Folge Grad 0 haben (denn sie werden induziert von den Grad 0 Homomorphismen des exakten Dreiecks (11.29)), und das bestimmt, welche homogenen Anteile von $\text{Ker } U(j)$ und $\text{Coker } U(j)$ (mit j als Grad -1 Homomorphismus $B_+ \longrightarrow Z$) durch die Folge (11.30) mit $H_n(UC)$ verbunden sind.

Wir müssen jetzt nur noch den Kern und den Cokern von $U(j)$ bestimmen. Dazu wenden wir U auf die kurze exakte Folge (11.26) an, die eine freie Auflösung von HC ist. Das Ergebnis ist keine exakte Folge mehr, aber es lässt sich mit dem abgeleiteten Funktor erweitern zur exakten Folge

$$\{0\} \longrightarrow U'HC \longrightarrow UB \xrightarrow{U(j)} UZ \xrightarrow{U(\pi)} UHC \longrightarrow \{0\},$$

wenn U kovariant und rechts-exakt ist, oder

$$\{0\} \longrightarrow UHC \xrightarrow{U(\pi)} UZ \xrightarrow{U(j)} UB \longrightarrow U'HC \longrightarrow \{0\},$$

wenn U kontravariant und links-exakt ist. In dieser Folge steht UB und nicht UB_+ und alle Homomorphismen haben Grad 0.

Um den Bezug zu (11.29) deutlicher zu machen, ersetzen wir B durch B_+ (so dass das als Abbildung unveränderte $U(j)$ den Grad ± 1 erhält) und passen die obige Folge so an, dass alle anderen Pfeile Grad 0 behalten. Nur so können wir sehen, welche homogenen Anteile von $\text{Ker } U(j)$ und $\text{Coker } U(j)$ in (11.30) zum homogenen Anteil $H_n(UC)$ gehören.

Die angepassten Folgen haben die Gestalt

$$\{0\} \longrightarrow U'H_+C \longrightarrow UB_+ \xrightarrow{U(j)} UZ \xrightarrow{U(\pi)} UHC \longrightarrow \{0\}, \quad (11.31a)$$

wenn U kovariant und rechts-exakt ist, oder

$$\{0\} \longrightarrow UHC \xrightarrow{U(\pi)} UZ \xrightarrow{U(j)} UB_+ \longrightarrow U'H_+C \longrightarrow \{0\}, \quad (11.31b)$$

wenn U kontravariant und links-exakt ist.

Im kovarianten Fall sehen wir, dass $\text{Ker } U(j) = U'(H_+\mathcal{C})$ und $U(\pi)$ induziert einen Grad 0 Isomorphismus $\text{Coker } U(j) \cong U(H\mathcal{C})$. Im kontravarianten Fall ist $\text{Ker } U(j) = U(H\mathcal{C})$ und $U(\pi)$ induziert einen Grad 0 Isomorphismus $\text{Coker } U(j) \cong U'(H_+\mathcal{C})$.

Einsetzen in (11.30) liefert die kurzen exakten Folgen (11.22), allerdings mit $U'(H_+\mathcal{C})$ statt $U'(H\mathcal{C})$, dafür aber mit Grad 0 Homomorphismen. Wenn wir das „+“ weglassen, verändert sich der Grad von ζ wie angegeben. Damit haben wir die Existenz und die Gestalt (11.22) der Künnethfolge bewiesen.

Wir müssen noch begründen, warum diese Folge natürlich ist.

Der Randoperator eines Kettenkomplexes ist eine natürliche Transformation, weil Kettenkomplexmorphismen, also Kettenabbildungen, nach Definition mit dem Randoperator kommutieren.

Z und B sind also Kern und Bild einer natürlichen Transformation und, wie man leicht einsieht, somit Funktoren $KK \rightarrow GAG$, die einer Kettenabbildung $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ihre Einschränkung auf Z oder B zuordnen (in Definition 6.35 f) wurde schon erklärt, dass diese Einschränkung tatsächlich $Z(\mathcal{C})$ nach $Z(\mathcal{D})$ bzw. $B(\mathcal{C})$ nach $B(\mathcal{D})$ abbildet). Die Inklusionen i und j wie auch die Projektion $\pi: Z \rightarrow H$ sind offenbar natürliche Transformationen. Da ∂ eine natürliche Transformation ist, ist auch $\hat{\partial}$ eine.

Die graduierten Homomorphismen in den kurzen exakten Folgen (11.25) und (11.26) sind also natürliche Transformationen zwischen Funktoren definiert auf KK . Somit sind diese exakten Folgen natürlich. Man kann das auch so ausdrücken, dass diese kurzen Folgen funktoriell von \mathcal{C} abhängen.

Wenn wir auf (11.25) den Funktor U anwenden, erhalten wir deshalb wieder eine natürliche Folge (11.27), und weil das exakte Homologiedreieck einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen bzw. das exakte Kohomologiedreieck einer kurzen exakten Folge von Kokettenkomplexen natürlich ist, ist schließlich auch das exakte Dreieck (11.29) funktoriell in \mathcal{C} , und die in ihm vorkommenden Homomorphismen sind natürliche Transformationen.

Weil $U(j)$ eine natürliche Transformation ist, sind die in der kurzen exakten Folge (11.30) vorkommenden Gruppen $\text{Ker } U(j)$ und $\text{Coker } U(j)$ Funktoren von \mathcal{C} , und die Homomorphismen in dieser Folge sind, wie man leicht einsieht, natürliche Transformationen, so dass die gesamte Folge (11.30) natürlich ist.

Diese Folge unterscheidet sich noch geringfügig von der Folge (11.22), in der anstelle von $\text{Ker } U(j)$ und $\text{Coker } U(j)$ die Gruppen $U(H\mathcal{C})$ und $U'(H\mathcal{C})$ erscheinen. Diese sind zwar isomorph zu $\text{Ker } U(j)$ und $\text{Coker } U(j)$ in geeigneter Reihenfolge, aber formal nicht die gleichen Gruppen. Insbesondere wird das „Standardexemplar“ von $U'(H\mathcal{C})$ aus der standard freien Auflösung von $H\mathcal{C}$ gewonnen und nicht aus der „exotischen“ freien Auflösung (11.26). Wir

müssen also zeigen, dass es *natürliche* Isomorphismen zwischen den hier auftretenden standard und exotischen Repräsentanten von $U(HC)$ und $U'(HC)$ gibt.

Das „echte“ $U(HC)$ kommt schon im Bild von (11.26) unter U vor und somit in der exakten Erweiterung (11.31) dieser Folge, aus der ersichtlich wird, dass die natürliche Transformation $U(\pi)$ im kontravarianten Fall $U(HC)$ isomorph auf $\text{Ker } U(j)$ abbildet und im kovarianten Fall einen Isomorphismus zwischen $\text{Coker } U(j)$ und $U(HC)$ induziert, der offenbar auch natürlich ist. Für $U(HC)$ können wir also den natürlichen Isomorphismus explizit angeben und an seiner expliziten Gestalt erkennen, dass er natürlich ist.

Für $U'(HC)$ sind weitergehende Überlegungen nötig. Wir erinnern dazu an die Aussage von Bemerkung 10.55: Sind G und K beliebige additive abelsche Gruppen und sind \tilde{G} und \tilde{K} beliebige gekürzte freie Auflösungen von G bzw. K , so bestimmt jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow K$ eine *bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmte* Kettenabbildung $\varphi: \tilde{G} \rightarrow \tilde{K}$ mit $f = H_1(\varphi)$. Wenden wir auf diese Kettenkomplexe und diese Kettenabbildung den Funktor U an, so bestimmt f eine *bis auf Kettenhomotopie oder Kokettenhomotopie eindeutig bestimmte* Kettenabbildung oder Kokettenabbildung $U(\varphi)$, die einen *eindeutig bestimmten* Homologie- oder Kohomologiehomomorphismus $HU(\varphi)$ induziert. In Dimension 2 ist $HU(\varphi)$ nach Definition $U'(f)$, wenn \tilde{G} und \tilde{K} die standard gekürzten freien Auflösungen sind.

In unserer jetzigen Situation ist $G = HC$ und (11.26) liefert uns eine exotische gekürzte freie Auflösung

$$\{0\} \rightarrow B \xrightarrow{j} Z \rightarrow \{0\}$$

von HC , die wir als \tilde{G} nehmen wollen. Bezüglich dieser gekürzten freien Auflösung ist $H_2(U\tilde{G})$ im kovarianten Fall genau die in (11.30) vorkommende Gruppe $\text{Ker } U(j)$ und im kontravarianten Fall ist $H^2(U\tilde{G})$ genau die in (11.30) vorkommende Gruppe $\text{Coker } U(j)$.

Die „echte“ Gruppe $U'(HC)$ aus (11.22) erhalten wir als die zweite Homologie oder Kohomologie des U -Bildes der *standard* gekürzten freien Auflösung \tilde{F} von HC .

Wir haben gerade gesehen, dass id_{HC} , erweitert zu einer Kettenabbildung $\varphi_C: \tilde{G} \rightarrow \tilde{F}$, einen *eindeutig bestimmten* Isomorphismus zwischen $\text{Ker } U(j)$ oder $\text{Coker } U(j)$ und $U'(HC)$ induziert.

Wegen der Eindeutigkeit ist dieser Isomorphismus auch natürlich, denn jede Kettenabbildung $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induziert eine Kettenabbildung ψ_e zwischen den „exotischen“ gekürzten freien Auflösungen von HC und $H\mathcal{D}$ und eine Kettenabbildung ψ_s zwischen den standard gekürzten freien Auflösungen.

Die Verknüpfungen $\varphi_{\mathcal{D}} \circ \psi_e$ und $\psi_s \circ \varphi_{\mathcal{C}}$ sind wegen der Eindeutigkeitsaussage kettenhomotop. Deshalb kommutieren die von $\varphi_{\mathcal{C}}$ bzw. $\varphi_{\mathcal{D}}$ schließlich induzierten Isomorphismen von $\text{Ker } U(j)$ oder $\text{Coker } U(j)$ nach $U'(H\mathcal{C})$ (bzw. zwischen den entsprechenden Gruppen für den Kettenkomplex \mathcal{D}) mit den von f induzierten Homomorphismen zwischen den Varianten dieser Gruppen für den Kettenkomplex \mathcal{C} und den Varianten für den Kettenkomplex \mathcal{D} .

Das bedeutet, dass der Isomorphismus von $\text{Ker } U(j)$ oder $\text{Coker } U(j)$ nach $U'(H\mathcal{C})$ natürlich ist.

Es bleibt zum Schluss noch zu zeigen, dass die Folge (11.22) spaltet. Kehren wir zurück zur kurzen exakten Folge (11.25). Weil die Pfeile in dieser Folge Grad 0 Homomorphismen sind und weil B_+ und somit auch jeder homogene Anteil von B_+ frei ist, spaltet jeder homogene Anteil von (11.25). Also spaltet die ganze Folge durch eine Grad 0 Spaltung (die aber keine Kettenabbildung ist—deshalb wird die Spaltung von (11.22) nicht natürlich sein).

Aus Lemma 10.33 folgt, dass auch die Bildfolge unter U , (11.27), exakt ist und eine Grad 0 Spaltung besitzt.

Im kovarianten Fall haben wir als Spaltung einen Grad 0 Homomorphismus $s: UB_+ \rightarrow UC$ mit

$$U(\tilde{\partial}) \circ s = \text{id}_{UB_+}.$$

Hieraus folgt

$$U(\partial) \circ s = U(ij\tilde{\partial}) \circ s = U(i) \circ U(j) \circ U(\tilde{\partial}) \circ s = U(i) \circ U(j).$$

Daraus sehen wir, dass $U(\partial) \circ s = \mathbf{0}$ auf $\text{Ker } U(j)$ und s bildet deshalb Elemente der rechten Gruppe in (11.30), also der rechten Gruppe in (11.22a), in *Zyklen* des Kettenkomplexes UC ab und induziert somit einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{s}: U'(H_+\mathcal{C}) = \text{Ker } U(j) &\longrightarrow H(UC) \\ b &\longmapsto [s(b)] \end{aligned}$$

mit

$$\zeta \circ \bar{s}(b) = HU(\tilde{\partial})[s(b)] = [U(\tilde{\partial})s(b)] = [b] = b$$

für jedes $b \in \text{Ker } U(j) \subseteq UB_+ = HUB_+$.

Der Homomorphismus \bar{s} ist also eine Spaltung von (11.22) im kovarianten Fall.

Im kontravarianten Fall haben wir als Spaltung einen Grad 0 Homomorphismus $s: UZ \rightarrow UC$ mit

$$U(i) \circ s = \text{id}_{UZ}.$$

Hieraus folgt

$$U(\partial) \circ s = U(ij\tilde{\partial}) \circ s = U(\tilde{\partial}) \circ U(j) \circ U(i) \circ s = U(\tilde{\partial}) \circ U(j).$$

Daraus sehen wir wieder, dass $U(\partial) \circ s = \mathbf{0}$ auf $\text{Ker } U(j)$ und s bildet deshalb Elemente der rechten Gruppe in (11.30), also der rechten Gruppe in (11.22b), in Kozyklen des Kokettenkomplexes UC ab und induziert somit einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{s}: U(HC) = \text{Ker } U(j) &\longrightarrow H(UC) \\ b &\longmapsto [s(b)] \end{aligned}$$

mit

$$\alpha \circ \bar{s}(b) = HU(i)[s(b)] = [U(i)s(b)] = [b] = b$$

für jedes $b \in \text{Ker } U(j) \subseteq UZ = H \cdot UZ$.

Dieser Homomorphismus \bar{s} ist im kontravarianten Fall eine Spaltung von (11.22). ■

Diesen allgemeinen und abstrakten Künnethsatz wollen wir natürlich anwenden auf die zwei speziellen Funktoren, die wir bisher intensiv untersucht haben. Als Ergebnis erhalten wir folgende **Universelle Koeffizientensätze** für die singuläre Homologie und die singuläre Kohomologie.

Satz 11.22 (Universeller Koeffizientensatz für die Homologie) Sei (X, A) ein topologisches Raumpaard und sei G eine additive abelsche Gruppe. Es gibt eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow H_n(X, A) \otimes G \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} H_*(X, A; G) \xrightarrow[\text{Grad } -1]{\zeta} \text{Tor}(H_*(X, A), G) \rightarrow \{0\} \quad (11.32)$$

und sie spaltet (aber nicht natürlich).

Weil sie spaltet, gibt es für jedes $n \in \mathbf{Z}$ einen (nichtnatürlichen) Isomorphismus

$$H_n(X, A; G) \cong (H_n(X, A) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G). \quad (11.33)$$

Die Abbildungen α und ζ in (11.32) haben folgende Gestalt: sei $\gamma \in H_n(X, A)$ und sei $g \in G$. Sei $z \in Z_n(X, A)$ ein Zyklus mit $\gamma = [z]$. Dann ist $z \otimes g$ ein Zyklus in $C_n(X, A; G)$ und es ist

$$\alpha(\gamma \otimes g) = [z \otimes g]. \quad (11.34)$$

Sei j die Inklusion $B_*(X, A) \longrightarrow Z_*(X, A)$ und sei π die Projektion $Z_*(X, A) \longrightarrow H_*(X, A)$. Dann ist

$$\{0\} \longrightarrow B_*(X, A) \xrightarrow{j} Z_*(X, A) \xrightarrow{\pi} H_*(X, A) \longrightarrow \{0\} \quad (11.35)$$

eine freie Auflösung von $H_*(X, A)$, aus der wir $\text{Tor}(H_*(X, A), G)$ als eine Untergruppe von $B_*(X, A) \otimes G$ erhalten.

Sei $\omega \in H_n(X, A; G)$ und sei $c \in C_n(X, A; G) = C_n(X, A) \otimes G$ ein Zyklus mit $\omega = [c]$. Man kann c schreiben als eine endliche Summe

$$\sum_{i=1}^k c_i \otimes g_i,$$

wo $c_i \in C_n(X, A)$ und $g_i \in G$.

Für jedes i ist $b_i := \partial c_i \in B_{n-1}(X, A)$. Sei

$$d := \sum_{i=1}^k b_i \otimes g_i \in B_{n-1}(X, A) \otimes G.$$

Dieses Element gehört zu $\text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G)$ und es ist

$$\zeta(\omega) = d. \quad (11.36)$$

Beweis. Bis auf die Details über das Aussehen von α und ζ ist dies genau die Aussage des Künnethsatzes 11.21 für den Spezialfall $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, A) = (C_*(X, A), \partial)$ und $U = \cdot \otimes G$.

Die Künnethfolge (11.22a) nimmt dann die Gestalt der universellen Koeffizientenfolge (11.32) an, denn $H_*(X, A; G)$, die mittlere Gruppe in der universellen Koeffizientenfolge, ist nach Definition 11.2 die Homologie des Kettenkomplexes $C_*(X, A) \otimes G$, und an rechter Stelle in der universellen Koeffizientenfolge steht der abgeleitete Funktor von $\cdot \otimes G$ angewendet auf die Homologie von $C_*(X, A)$, nämlich $\text{Tor}(H_*(X, A), G)$.

Wir müssen nur noch erklären, warum α und ζ so sind wie hier beschrieben. Die universelle Koeffizientenfolge ist, bis auf natürliche Äquivalenzen für die äußeren Gruppen, die kovariante Version der kurzen exakten Folge (11.30) aus dem Beweis von Satz 11.21 und in der Notation jenes Beweises entspricht α dem Homomorphismus $\overline{HU(i)}$ und ζ dem Homomorphismus $HU(\tilde{\partial})$.

Hier ist i die Inklusion $Z_*(X, A) \longrightarrow C_*(X, A)$, und $U(i)$ ist der Homomorphismus $i \otimes \text{id}_G$.

Wir müssen bestimmen, welche Abbildung die Kettenabbildung $i \otimes \text{id}_G$ in Homologie induziert. Die Kettenabbildung ist definiert auf dem Kettenkomplex $Z_*(X, A) \otimes G$, dessen Randoperator identisch 0 ist, so dass jede Kette ein

Zyklus ist, die Rändergruppe trivial ist, und wir deshalb Ketten mit Homologieklassen identifizieren können und jede Kette ihre eigene Homologieklassse ist.

Das Bild von $i \otimes \text{id}_G$ besteht nur aus Zyklen von $C_*(X, A; G)$, und der Homomorphismus $H(i \otimes \text{id}_G)$ bildet die Ketten oder gleichbedeutend, die Homologieklassen von $Z_*(X, A) \otimes G$ ab auf die Homologieklassen dieser Zyklen. In anderen Worten, wenn p die Projektion $Z_*(X, A; G) \longrightarrow H_*(X, A; G)$ ist, dann ist $H(i \otimes \text{id}_G) = p \circ (i \otimes \text{id}_G)$.

$\alpha = \overline{HU(i)}$ ist die von diesem Homomorphismus induzierte Abbildung auf $\text{Coker}(j \otimes \text{id}_G)$, wo j die Inklusion $B_*(X, A) \longrightarrow Z_*(X, A)$ ist.

Weil $\cdot \otimes G$ rechts-exakt ist, ist die aus der exakten Folge (11.35) gewonnene Folge

$$B_*(X, A) \otimes G \xrightarrow{j \otimes \text{id}_G} Z_*(X, A) \otimes G \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}_G} H_*(X, A) \otimes G \longrightarrow \{0\}$$

noch exakt, und die Projektion π induziert somit einen Isomorphismus

$$\pi \otimes \text{id}_G: \text{Coker}(j \otimes \text{id}_G) = \frac{Z_*(X, A) \otimes G}{(j \otimes \text{id}_G)(B_*(X, A) \otimes G)} \longrightarrow H_*(X, A) \otimes G.$$

$\alpha = \overline{H(i \otimes \text{id}_G)}$ ist die eindeutige Abbildung $H_*(X, A) \otimes G \longrightarrow H_*(X, A; G)$ mit

$$\alpha \circ (\pi \otimes \text{id}_G) = H(i \otimes \text{id}_G) = p \circ (i \otimes \text{id}_G).$$

Das bedeutet, dass für ein Erzeugendes $[z] \otimes g = \pi(z) \otimes g$ von $H_*(X, A) \otimes G$ (mit $z \in Z_*(X, A)$) gilt $\alpha([z] \otimes g) = [i(z) \otimes g] = [z \otimes g] \in H_*(X, A; G)$, wie behauptet.

Der Homomorphismus ζ entspricht in der Folge (11.30) dem Homomorphismus $HU(\tilde{\partial})$, der Grad 0 hat. Da wir in der Künnethfolge und in der universellen Koeffizientenfolge die Graduierung auf die natürlichen Dimensionen angepasst haben (und dadurch ζ zu einer Grad -1 Abbildung gemacht haben), müssen wir in der jetzigen Instanz $\tilde{\partial}$ durch den „unverfälschten“ Randoperator ∂ ersetzen, und wir haben

$$\zeta = H(\partial \otimes \text{id}_G),$$

aufgefasst als Abbildung

$$H_*(X, A; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_*(X, A), G) = \text{Ker}(j \otimes \text{id}_G) \subseteq B \otimes G.$$

Wie oben $Z_*(X, A) \otimes G$ ist $B_*(X, A) \otimes G$ ein Kettenkomplex mit verschwindendem Randoperator, in dem jede Kette gleichzeitig ihre eigene Homologieklassse ist. Folglich hat $H(\partial \otimes \text{id}_G): H_*(X, A; G) \longrightarrow B_*(X, A) \otimes G$

die Gestalt, dass für jede Homologieklassse $\omega \in H_*(X, A; G)$ und für jeden Zyklus $c \in C_*(X, A; G) = C_*(X, A) \otimes G$ mit $\omega = [c]$ gilt

$$H(\partial \otimes \text{id}_G)(\omega) = (\partial \otimes \text{id}_G)(c) \in B_*(X, A) \otimes G.$$

Die Kette $(\partial \otimes \text{id}_G)(c)$ ist die in der Satzaussage definierte Kette d , die wir gleichzeitig als Kette in $B_*(X, A) \otimes G$, in $Z_*(X, A) \otimes G$ oder in $C_*(X, A) \otimes G$ betrachten können. Um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen, wollen wir den Namen d reservieren für die in der Aussage definierte Kette mit diesem Namen in $B_*(X, A) \otimes G$. Der gleiche Ausdruck, aufgefasst als Kette in $Z_*(X, A) \otimes G$, ist dann $(j \otimes \text{id}_G)(d)$, und der gleiche Ausdruck, aufgefasst als Kette in $C_*(X, A) \otimes G$, ist $(ij \otimes \text{id}_G)(d) = ((i \otimes \text{id}_G) \circ (j \otimes \text{id}_G))(d)$.

In $C_*(X, A) \otimes G$ ist diese Kette $((i \otimes \text{id}_G) \circ (j \otimes \text{id}_G))(d) = 0$, denn c war ja ein Zyklus von $C_*(X, A; G)$. Weil die Folge

$$\{0\} \longrightarrow Z_*(X, A) \xrightarrow{i} C_*(X, A) \xrightarrow{\partial} B_*(X, A) \longrightarrow \{0\}$$

spaltet (da $B_*(X, A)$ frei ist), bleibt sie exakt nach Anwendung von $\cdot \otimes G$ und insbesondere ist $(i \otimes \text{id}_G)$ noch injektiv, so dass auch $(j \otimes \text{id}_G)(d) = 0$.

Nur in $B_*(X, A) \otimes G$ muss d nicht 0 sein, aber es liegt auf jeden Fall in $\text{Ker}(j \otimes \text{id}_G) = \text{Tor}(H_*(X, A), G)$ und ist, wie in der Satzaussage behauptet, der Wert von $\zeta(\omega) = (\partial \otimes \text{id}_G)(c) \in \text{Tor}(H_*(X, A), G)$. ■

Satz 11.23 (Universeller Koeffizientensatz für die Kohomologie) Sei (X, A) ein topologisches Raumpaard und sei G eine additive abelsche Gruppe. Es gibt eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow \text{Ext}(H_*(X, A), G) \xrightarrow[\text{Grad } 1]{\zeta} H^*(X, A; G) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} \text{Hom}(H_*(X, A), G) \rightarrow \{0\} \quad (11.37)$$

und sie spaltet (aber nicht natürlich).

Weil sie spaltet, gibt es für jedes $n \in \mathbf{Z}$ einen (nichtnatürlichen) Isomorphismus

$$H^n(X, A; G) \cong \text{Hom}(H_n(X, A), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), G). \quad (11.38)$$

Die Abbildungen ζ und α in (11.37) haben folgende Gestalt:

Sei $\theta \in \text{Ext}(H_*(X, A), G)$. Sei j die Inklusion $B_*(X, A) \longrightarrow Z_*(X, A)$. Sie induziert einen Homomorphismus

$$\text{Hom}(j, G): \text{Hom}(Z_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Hom}(B_*(X, A), G)$$

und $\text{Ext}((H_*(X, A), G)$ ist definiert als der Cokern dieser Abbildung, also ein Quotient von $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$.

Sei $p: \text{Hom}(B_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Ext}(H_*(X, A), G)$ die Projektion. Wähle ein Element $\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$ mit $\theta = p(\omega)$.

Dann ist

$$\omega \circ \partial: C_*(X, A) \longrightarrow G$$

ein Kozyklus von $C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$ und

$$\zeta(\theta) = [\omega \circ \partial]. \quad (11.39)$$

Nun sei $\gamma \in H^*(X, A; G)$ und sei ξ ein Kozyklus in $C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$ mit $\gamma = [\xi]$.

Sei π die Projektion

$$Z_*(X, A) \longrightarrow H_*(X, A) = \frac{Z_*(X, A)}{B_*(X, A)}.$$

Weil ξ ein Kozyklus ist, verschwindet ξ auf $B_*(X, A)$ und somit induziert $\xi|_{Z_*(X, A)}$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\Xi: H_*(X, A) \longrightarrow G$ mit $\Xi \circ \pi = \xi$ auf $Z_*(X, A)$. Es ist

$$\alpha(\gamma) = \Xi \in \text{Hom}(H_*(X, A), G). \quad (11.40)$$

Beweis. Bis auf die Details über das Aussehen von ζ und α ist dies genau die Aussage des Künnethsatzes 11.21 für den Spezialfall $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, A) = (C_*(X, A), \partial)$ und $U = \text{Hom}(\cdot, G)$.

Die Künnethfolge (11.22b) nimmt dann die Gestalt der universellen Koeffizientenfolge (11.37) an, denn $H^*(X, A; G)$, die mittlere Gruppe in der universellen Koeffizientenfolge, ist nach Definition 11.14 die graduierte Kohomologiegruppe des Kokettenkomplexes $\text{Hom}(C_*(X, A), G)$, und an der linken Stelle in der universellen Koeffizientenfolge steht der abgeleitete Funktor von $\text{Hom}(\cdot, G)$ angewendet auf die Homologie von $C_*(X, A)$, nämlich $\text{Ext}(H_*(X, A), G)$.

Wir müssen nur noch erklären, warum ζ und α so sind wie hier beschrieben. Die universelle Koeffizientenfolge ist, bis auf natürliche Äquivalenzen für die äußeren Gruppen, die kontravariante Version der kurzen exakten Folge (11.30) aus dem Beweis von Satz 11.21 und in der Notation jenes Beweises entspricht ζ dem Homomorphismus $\overline{HU(\tilde{\partial})}$ und α dem Homomorphismus $HU(i)$.

Hier ist i die Inklusion $Z_*(X, A) \longrightarrow C_*(X, A)$, und $U(i)$ ist der Homomorphismus $\text{Hom}(i, G)$, die Verknüpfung von rechts mit i oder in einfacherer Sprache, die Einschränkung einer Kokette aus $\text{Hom}(C_*(X, A), G)$ auf $Z_*(X, A)$.

Wie in der Satzaussage erklärt, ist $\text{Ext}((H_*(X, A), G)$ definiert als der Cokern von

$$\text{Hom}(j, G): \text{Hom}(Z_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Hom}(B_*(X, A), G)$$

und ist ein Quotient von $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$.

Der Homomorphismus ζ entspricht in der Folge (11.30) dem Homomorphismus von diesem Quotienten nach

$$H^*(X, A; G) = H\left(\text{Hom}(C_*(X, A), G)\right),$$

der von $HU(\tilde{\partial})$ induziert wird. Dieser Homomorphismus hat Grad 0 in der Folge (11.30). Da wir in der Künnethfolge und in der universellen Koeffizientenfolge die Graduierung auf die natürlichen Dimensionen angepasst haben (und dadurch ζ zu einer Grad +1 Abbildung gemacht haben), müssen wir in der jetzigen Instanz $\tilde{\partial}$ durch den „unverfälschten“ Randoperator ∂ ersetzen, und in der universellen Koeffizientenfolge wird

$$\zeta: \text{Ext}(H_*(X, A), G) \longrightarrow H_*(X, A; G)$$

von

$$H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G)): \text{Hom}(B_*(X, A), G) \longrightarrow H^*(X, A; G)$$

induziert.

Wir müssen zunächst erklären, was dieser Kohomologiemorphismus genau ist. $B_*(X, A)$ ist ein Kettenkomplex, dessen Randoperator $\mathbf{0}$ ist. Deshalb ist $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$ ein Kokettenkomplex mit verschwindendem Korandoperator, und aus diesem Grund ist jede Kokette ein Kozyklus und da $\mathbf{0}$ der einzige Korand ist, besteht jede Kohomologieklass aus einem einzigen Kozyklus—es gibt eine Bijektion zwischen Koketten und Kohomologieklassen und $\text{Hom}(B_*(X, A), G)$ ist seine eigene Kohomologiegruppe.

Die Kokettenabbildung

$$\text{Hom}(\partial, \text{id}_G): \text{Hom}(B_*(X, A), G) \longrightarrow C^*(X, A; G) = \text{Hom}(B_*(X, A), G)$$

ist die Verknüpfung von rechts mit ∂ . Sie bildet jede Kokette

$$\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$$

ab auf $\omega \circ \partial$. Eine Kokette $\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$ ist gleichzeitig eine Kohomologieklass, und $H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G))$ bildet die Kohomologieklass ω ab auf die Kohomologieklass der Bildkokette (die automatisch ein Kozyklus ist), also auf $[\omega \circ \partial]$.

ζ wird in dem Sinne von $H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G))$ induziert, dass

$$\zeta \circ p = H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G)).$$

Ist also $\theta \in \text{Ext}(H_*(X, A), G)$ und ist $\omega \in \text{Hom}(B_*(X, A), G)$ ein Element mit $\theta = p(\omega)$, so ist

$$\zeta(\theta) = H(\text{Hom}(\partial, \text{id}_G))(\omega) = [\omega \circ \partial],$$

wie in (11.39) behauptet.

Aus dem Beweis von Satz 11.21 kann man ablesen, dass der Homomorphismus α die Verknüpfung der Abbildung

$$H(\text{Hom}(i, G)): H^*(X, A; G) \longrightarrow \text{Ker}(\text{Hom}(j, G))$$

aus (11.30) und der Umkehrung des von $\text{Hom}(\pi, G)$ gegebenen Isomorphismus

$$\text{Hom}(H_*(X, A), G) \longrightarrow \text{Ker}(\text{Hom}(j, G))$$

ist.

$\text{Hom}(i, G)$ ist eine Kokettenabbildung

$$C^*(X, A; G) \longrightarrow \text{Hom}(Z_*(X, A), G),$$

wobei der Zielkettenkomplex $\text{Hom}(Z_*(X, A), G)$ einen trivialen Korandoperator hat (und somit mit seiner eigenen Kohomologiegruppe identifiziert werden kann), weil schon der Kettenkomplex $Z_*(X, A)$ einen trivialen Randoperator hat.

Sei $\gamma \in H^*(X, A; G)$ und sei $\xi \in C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$ ein Kozyklus mit $\gamma = [\xi]$.

$\text{Hom}(i, G)$ bildet ξ auf $\xi \circ i = \xi|_{Z_*(X, A)}$ ab und $H(\text{Hom}(i, G))$ bildet also γ auf die Kohomologieklassse von $\xi|_{Z_*(X, A)}$ ab, die wir aber mit der Kokette $\xi|_{Z_*(X, A)} \in \text{Hom}(Z_*(X, A), G)$ identifizieren können.

Diese Kokette liegt in $\text{Ker}(\text{Hom}(j, G))$, denn weil ξ ein Kozyklus von $C^*(X, A; G)$ ist, gilt $\delta\xi = \xi \circ \partial = 0$ und somit

$$(\xi|_{Z_*(X, A)}) \circ j = \xi \circ i \circ j = \xi|_{B_*(X, A)} = \mathbf{0}.$$

Weil $\xi|_{B_*(X, A)} = \mathbf{0}$, induziert $\xi|_{Z_*(X, A)}$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\Xi: H_*(X, A) \longrightarrow G$ mit $\Xi \circ \pi = \xi|_{Z_*(X, A)}$.

Wir haben also

$$\text{Hom}(\pi, G)(\Xi) = \Xi \circ \pi = \xi|_{Z_*(X, A)} = H(\text{Hom}(i, G))(\gamma)$$

und nach der obigen Beschreibung von α ist $\alpha(\gamma) = \Xi \in \text{Hom}(H_*(X, A), G)$, wie in (11.40) behauptet. ■

Mit Hilfe der universellen Koeffizientensätze ist es uns jetzt ein Leichtes, mit beliebigen Koeffizienten die Homologiegruppen und Kohomologiegruppen der topologischen Räume auszurechnen, deren singuläre \mathbf{Z} -Homologie wir bisher bestimmt haben. Hier also eine Reihe von fast trivialen Beispielen:

Beispiele 11.24 Sei G eine additive abelsche Gruppe. Dann ist

a)

$$H_k(S^0; G) = \begin{cases} G \oplus G, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.41)$$

b)

$$H_k(S^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.42)$$

c)

$$H_k(T^2; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G, & \text{wenn } k = 1; \\ G, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.43)$$

d)

$$H_k(K^2; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G_2, & \text{wenn } k = 1; \\ G^{(2)}, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.44)$$

e)

$$H_k(\mathbf{R}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G_2, & \text{wenn } 1 \leq k < n, k \text{ ungerade;} \\ G^{(2)}, & \text{wenn } 1 < k \leq n, k \text{ gerade;} \\ G, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.45)$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Gleichung (11.33) in der Aussage des Universellen Koeffizientensatzes 11.22, wenn man folgende Punkte bedenkt.

Die Homologie mit Koeffizienten in \mathbf{Z} der aufgeführten Räume wurde in Beispiel 8.4 a), Satz 8.5, Beispiel 9.49 und Beispiel 9.51 b) berechnet und erweist sich in allen Fällen als eine endliche direkte Summe von Summanden \mathbf{Z} oder \mathbf{Z}_2 .

Bei dem Summanden $H_n(X) \otimes G$ in Gleichung (11.33) für die n -te Homologie mit Koeffizienten in G gehen Summanden \mathbf{Z} der ganzzahligen Homologie in $\mathbf{Z} \otimes G = G$ über und Summanden \mathbf{Z}_2 gehen in $\mathbf{Z}_2 \otimes G = G_2$ über (siehe dazu Gleichung (10.76) in Beispiel 10.61).

Der Summand $\text{Tor}(H_{n-1}(X), G)$ liefert zusätzliche Beiträge nur für die nichtfreien Summanden \mathbf{Z}_2 der \mathbf{Z} -Homologie von X , da Tor mit einer freien Gruppe $\{0\}$ ist. Hingegen ist $\text{Tor}(\mathbf{Z}_2, G) = G^{(2)}$ nach Beispiel 10.61 und wir erhalten also für jeden Summanden \mathbf{Z}_2 in der \mathbf{Z} -Homologie einen zusätzlichen Beitrag $G^{(2)}$ in der *nächsthöheren Dimension* in der Homologie mit Koeffizienten in G .

Anwendung dieser Bemerkungen auf die schon berechnete \mathbf{Z} -Homologie der aufgeführten Räume liefert sofort die hier angegebene G -Homologie. ■

Beispiele 11.25 Sei G eine additive abelsche Gruppe. Dann ist

a)

$$H^k(S^0; G) = \begin{cases} G \oplus G, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.46)$$

b)

$$H^k(S^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.47)$$

c)

$$H^k(T^2; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G, & \text{wenn } k = 1; \\ G, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.48)$$

d)

$$H^k(K^2; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G \oplus G^{(2)}, & \text{wenn } k = 1; \\ G_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.49)$$

e)

$$H^k(\mathbf{R}P^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{wenn } k = 0; \\ G^{(2)}, & \text{wenn } 1 \leq k < n, k \text{ ungerade;} \\ G_2, & \text{wenn } 1 < k \leq n, k \text{ gerade;} \\ G, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.50)$$

Beweis. Der Beweis ähnelt dem Beweis der Beispiele 11.24. Die Behauptungen folgen sofort aus Gleichung (11.38) in der Aussage des Universellen Koeffizientensatzes 11.23, wenn man folgende Punkte bedenkt.

Die Homologie mit Koeffizienten in \mathbf{Z} der aufgeführten Räume wurde in Beispiel 8.4 a), Satz 8.5, Beispiel 9.49 und Beispiel 9.51 b) berechnet und erweist sich, wie wir gesehen haben, in allen Fällen als eine endliche direkte Summe von Summanden \mathbf{Z} oder \mathbf{Z}_2 .

Bei dem Summanden $\text{Hom}(H_n(X), G)$ in Gleichung (11.38) für die n -te Kohomologie mit Koeffizienten in G gehen Summanden \mathbf{Z} der ganzzahligen Homologie in $\text{Hom}(\mathbf{Z}, G) = G$ über und Summanden \mathbf{Z}_2 gehen in $\text{Hom}(\mathbf{Z}_2, G) = G^{(2)}$ über (siehe dazu Lemma 10.41 a) und b)).

Der Summand $\text{Ext}(H_{n-1}(X), G)$ liefert zusätzliche Beiträge nur für die nichtfreien Summanden \mathbf{Z}_2 der \mathbf{Z} -Homologie von X , da $\text{Ext}(\mathbf{Z}, G) = \{0\}$ nach Beispiel 10.60. Hingegen ist $\text{Ext}(\mathbf{Z}_2, G) = G_2$ nach Beispiel 10.61 und wir erhalten also für jeden Summanden \mathbf{Z}_2 in der \mathbf{Z} -Homologie einen zusätzlichen Beitrag G_2 in der *nächsthöheren Dimension* in der Kohomologie mit Koeffizienten in G .

Anwendung dieser Bemerkungen auf die \mathbf{Z} -Homologie der aufgeführten Räume liefert sofort die hier angegebene Kohomologie. ■

Es wird ihnen hoffentlich aufgefallen sein, dass für die hier aufgeführten Räume die Homologie mit Koeffizienten in G und die Kohomologie mit Koeffizienten in G sich nur dadurch unterscheiden, dass Summanden G_2 in der Homologie zu Summanden $G^{(2)}$ in der Kohomologie werden und umgekehrt. Das liegt einfach an dem verschiedenen Verhalten der Funktoren \otimes und Hom , Tor und Ext auf einem Gruppenpaar, in dem die erste Gruppe \mathbf{Z}_2 ist.

Für den Spezialfall $G = \mathbf{Z}_2$ ist $2G = 2\mathbf{Z}_2 = \{0\}$, woraus folgt, dass

$$(Z_2)_2 = \mathbf{Z}_2 = (Z_2)^{(2)}. \quad (11.51)$$

Wegen der gerade gemachten Beobachtung unterscheiden sich also in \mathbf{Z}_2 -Koeffizienten die Homologie und die Kohomologie der in Beispielen 11.24 und 11.25 behandelten Räume überhaupt nicht.

Wir erhalten aus (11.51) für die \mathbf{Z}_2 -Homologie und Kohomologie der Räume aus diesen Beispielen folgende gemeinsamen Werte (die für die Homologie mit den früheren Berechnungen für den Torus und die Kleinsche Flasche in Bemerkung 9.50 und für den reellen projektiven Raum in Beispiel 9.51 c) übereinstimmen).

Korollar 11.26 *Sei G eine additive abelsche Gruppe. Dann ist*

a)

$$H^k(S^0; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(S^0; \mathbf{Z}_2) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.52)$$

b)

$$H^k(S^n; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(S^n; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.53)$$

c)

$$H^k(T^2; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(T^2; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.54)$$

d)

$$H^k(K^2; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(K^2; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.55)$$

e)

$$H^k(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong H_k(\mathbf{R}P^n; \mathbf{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 0 \leq k \leq n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.56)$$

Zu guter Letzt halten wir noch fest, wie die Kohomologie dieser Räume mit \mathbf{Z} -Koeffizienten aussieht. Es verschwinden aus den Angaben in Beispiele 11.25 die Beiträge $G^{(2)}$, weil \mathbf{Z} als torsionsfreie Gruppe keine nichttrivialen Elemente von Ordnung 2 hat. Wir erhalten:

Beispiele 11.27 a)

$$H^k(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ und} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.57)$$

b)

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0 \text{ oder } k = n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.58)$$

c)

$$H^k(T^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.59)$$

d)

$$H^k(K^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 1; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } k = 2; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.60)$$

e)

$$H^k(\mathbf{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z}_2, & \text{wenn } 1 < k \leq n, k \text{ gerade;} \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n \text{ und } n \text{ ungerade;} \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.61)$$

Kapitel 12

Produkte

Der Künneth Satz aus Kapitel 11 hat noch eine wichtige Anwendung, und zwar handelt es sich um seine ursprüngliche und eigentlich beabsichtigte Anwendung, von der sich der Universelle Koeffizientensatz für die Homologie als ein einfacher Spezialfall erweist. Es geht dabei um die Berechnung der Homologie von Produkträumen $X \times Y$.

Die *Homotopiegruppen* eines Produktraumes sind nach Lemma 4.29 einfach das direkte Produkt der Homotopiegruppen der Faktorräume und somit sehr leicht aus den Homotopiegruppen der Faktorräume zu berechnen. Die Kehrseite davon ist aber, dass die Homotopiegruppen eines Produktraumes keine Informationen über die Geometrie des Produktraumes tragen, die nicht schon unmittelbar aus den Homotopiegruppen der Faktorräume ersichtlich wären.

Für den Torus T^2 gilt zum Beispiel $\pi_2(T^2, x) = \{0\}$ für jeden Basispunkt x (weil $\pi_2(S^1, z) = \{0\}$ für jeden Basispunkt z), obwohl T^2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist. Die Homologie verhält sich da „angemessener“, denn $H_2(T^2) = \mathbf{Z}$.

Wo kommt diese Gruppe \mathbf{Z} eigentlich her, wenn die Homologie des Kreises nur bis Dimension 1 nichttriviale Gruppen hat? Überhaupt, der Torus ist der einzige nichttriviale Produktraum, dessen Homologie wir bisher kennen, und seine Struktur (in Beispiel 9.49 a) berechnet), obwohl nicht sehr kompliziert, ist zumindest beim ersten Blick nicht ganz einfach mit der Homologie der Kreisfaktoren in Verbindung zu bringen. Dies rechtfertigt die Befürchtung, dass die Homologie anderer Produkträume vielleicht sehr kompliziert werden kann.

Ein bisschen Reflektion lässt einen aber doch einen Zusammenhang mit der Homologie des Kreises errahnen, obwohl die Idee, die wir dazu nennen wollen, eigentlich besser auf die (gleich aussehende) Kohomologie des Torus passt, die, wie wir in diesem Kapitel sehen werden, mit einer Ringstruktur

ausgestattet werden kann.

Dieser Kohomologiering des Kreises S^1 ist eine Art „Polynomring“ $\mathbf{Z}[\alpha]$ über \mathbf{Z} , erzeugt von einem Ringelement α , das allerdings die Eigenschaft hat, dass $\alpha^2 = 0$. Und der Kohomologiering des Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ sieht aus wie ein Polynomring $\mathbf{Z}[\alpha, \beta]$ in *zwei* solcher Variablen, mit $\alpha^2 = \beta^2 = 0$. Die Dimensionen der einzelnen Homologie- oder Kohomologiegruppen des Torus entsprechen genau den Dimensionen der Räume der homogenen Polynome verschiedener Grade in α und β —es gibt nämlich zwei Monome von Grad 1 (α und β), aber nur eines von Grad 0 (nämlich 1) und nur eines von Grad 2 ($\alpha\beta$), und keine von höheren Graden, weil jedes Monom von Grad ≥ 3 durch α^2 oder β^2 , also durch 0 teilbar ist.

Diese Idee ist nicht ganz abwegig aber auch nicht 100% genau, und sie macht auch eigentlich nur für die Kohomologie Sinn. Aber es gibt eine ähnliche, auch für die Homologie passende Konstruktion, die man ohne den Umweg über Polynome direkt auf die Homologiegruppen von S^1 anwenden kann.

Wir können nämlich abelsche Gruppen algebraisch miteinander „multiplizieren“, indem wir ihr Tensorprodukt bilden. Ein Tensorprodukt von zwei graduierten abelschen Gruppen trägt eine natürliche „Bigraduierung“, weil das Tensorprodukt in jeder Variablen stark additiv ist, und wenn wir, wie wir das mit den Exponenten der einzelnen Variablen in einem Monom tun, die beiden Komponenten des Bigrades addieren, um einen Gesamtgrad zu definieren, so können wir das Tensorprodukt zweier graduierter abelscher Gruppen wieder zu einer einfach graduierten abelschen Gruppe machen. In diesem Sinne ist $H_*(T^2)$ das Tensorprodukt zweier Kopien von $H_*(S^1)$.

Auch diese Idee ist nicht ganz richtig, aber sie führt uns auf die richtige Bahn. Für den Torus klappt dieser Ansatz genau, weil die Homologie des Torus frei ist. Für andere Räume ist noch ein Korrekturterm zu berücksichtigen, den wir schon kennen gelernt haben, nämlich Tor von der Homologie in der nächstniedrigeren Dimension. Dieser Tor Beitrag kommt natürlich wieder aus dem Künneth Satz.

Bisher haben wir diese Struktur nur als „plausible Erklärung“ des (an einem einzigen Beispiel!) beobachteten Verhaltens erraten. Wir müssen uns noch einen Berechnungsansatz einfallen lassen, der uns zu der vermuteten Lösung führen wird. Wie kann man die Konstruktion der Homologiegruppen eines Produktraumes $X \times Y$ mit der Konstruktion der Homologie der Faktorräume in Verbindung setzen?

Wie beide Homologien zusammenhängen versteht man am besten, wenn man am Ausgangspunkt der Homologiekonstruktion ansetzt, nämlich am singulären Kettenkomplex. $C_*(X \times Y)$ multipliziert die Räume X und Y geometrisch, aber man kann die Kettenkomplexe von X und Y auch algebraisch multiplizieren, indem man $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ bildet. Das Ergebnis ist nicht gleich

dem anderen Kettenkomplex, aber es ist so gut wie gleich, denn beide Kettenkomplexe haben den gleichen Kettenhomotopietyp und somit die gleiche Homologie.

Das zu beweisen wird einer der wichtigsten Aufgaben dieses Kapitels sein. Außerdem müssen wir die Homologie von $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ berechnen, was mit dem Künneth Satz aber nicht schwer ist.

Als Ergebnis erhalten wir die Möglichkeit, die Homologie und auch die Kohomologiegruppen von Produkträumen $X \times Y$ einfach zu berechnen. Genau so wie ein Tensorprodukt von zwei Gruppen $A \otimes B$ von Elementen der Gestalt $a \otimes b$ erzeugt wird, lassen sich Homologieklassen der Faktorräume X und Y zu „Produktklassen“ $\alpha \times \beta$ kombinieren, die die Homologie des Produktraumes erzeugen. Diese Homologieproduktoperation werden wir eingehend untersuchen.

Diese Operation lässt sich auch dualisieren und auf diese Weise lässt sich auf der graduierten Kohomologiegruppe eines einzelnen Raumes X , durch „Zurückholung“ der Homologieproduktstruktur des Raumes $X \times X$ mit der Diagonalabbildung $x \mapsto (x, x)$, eine Produktoperation für Kohomologieklassen auf X erklären, die die graduierte Kohomologiegruppe von X zu einem **graduierten Ring** macht. Als letztes Thema in diesem Kapitel werden wir diese Kohomologieringstruktur einführen und über ihre Anwendungen sprechen.

Die grundlegende Konstruktion für dieses Programm ist das Tensorprodukt von Kettenkomplexen. Dies ist wirklich etwas Neues, denn in Kapitel 10 und Kapitel 11 haben wir nur Produkte von Kettenkomplexen mit *einzelnen Gruppen* gebildet, nicht aber das Tensorprodukt von zwei Kettenkomplexen miteinander, bei dem beide Randoperatoren zum Randoperator des Produkts beitragen.

Mit dieser Konstruktion wollen wir jetzt beginnen. Wir werden sehen, dass bei den Produktkonstruktionen dieses Kapitels gewisse Vorzeichenwechsel erforderlich sind, damit störende „Mischterme“ sich wegheben. Mit diesen Vorzeichen ist einfacher zu hantieren, wenn man sie durch folgende Hilfsabbildung ausdrückt.

Definition 12.1 Sei $G = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ eine graduierte abelsche Gruppe. Wir definieren einen Grad-0 Homomorphismus $\alpha: G \longrightarrow G$ durch

$$\alpha := \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n \text{id}_{G_n}.$$

In anderen Worten, α ist die Negation auf den ungeraden homogenen Anteilen von G und die Identität auf den geraden.

Natürlich hängt α auch von der Gruppe G ab, aber in der Regel kennzeichnen wir das nicht in der Notation. Nur wenn es Missverständnisse geben kann, schreiben wir α_G , um die entsprechenden Homomorphismen für verschiedene Gruppen auseinander halten zu können.

Bemerkung 12.2 a) Auf jeder graduierten abelschen Gruppe G ist offenbar

$$\alpha \circ \alpha = \text{id}_G. \quad (12.1)$$

b) Seien G und H graduierte abelsche Gruppen und sei $f: G \rightarrow H$ ein graduierter Homomorphismus von Grad k .

Dann ist

$$\alpha_H \circ f = (-1)^k f \circ \alpha_G \quad (12.2)$$

(denn die beiden Instanzen von α in dieser Gleichung wirken jeweils auf homogene Anteile, deren Grad sich um $\text{Grad } f = k$ unterscheidet).

c) Insbesondere kommutiert α mit Grad-0 Homomorphismen und ist somit eine natürliche Transformation des Identitätsfunktors von GAG_0 in sich.

d) Wenn (C, ∂) aber ein Kettenkomplex (oder Kokettenkomplex) ist, so ist $\alpha: C \rightarrow C$ eine **Antikettenabbildung** oder **Antikokettenabbildung**, in dem Sinne, dass gilt

$$\partial \circ \alpha = -\alpha \circ \partial \quad (12.3)$$

(denn ∂ hat ungeraden Grad).

Definition 12.3 Seien $G = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_n$ und $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$ graduierte abelsche Gruppen und sei

$$F: AbGp \times AbGp \rightarrow AbGp$$

ein additiver Funktor in zwei Variablen. Um die Definition nicht unnötig zu verkomplizieren nehmen wir an, F ist in beiden Variablen kovariant.

Entsprechend unserer Konvention für Funktoren einer Variablen (vgl. Definition 10.52 b) und Bemerkung 11.1) definieren wir $F(G, H)$ als die **bigradierte Gruppe**

$$F(G, H) := \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} F(G_p, H_q).$$

Im Allgemeinen, außer wenn F stark additiv ist, ist dies *nicht* gleich dem Ergebnis, das man erhält, wenn man F auf das Paar (G, H) als Paar von

Gruppen (ohne Graduierung) anwendet. Das soll uns aber nicht besonders stören.

Aus der Bigraduierung können wir leicht eine Graduierung machen, wenn wir uns an den Polynomring in zwei Variablen orientieren, der durch die Exponenten der beiden Variablen eine Bigraduierung trägt aber durch den totalen Grad der Monome auch mit einer einfachen Graduierung versehen ist. Wir setzen

$$F(G, H)_n := \bigoplus_{p+q=n} F(G_p, H_q). \quad (12.4)$$

Wenn G und H nichtnegativ graduiert sind (also $G_n = H_n = \{0\}$ für alle $n < 0$), dann sind die direkten Summen in (12.4) endlich (denn wegen der Additivität in beiden Variablen ist $F(G_p, H_q) = \{0\}$ wenn $G_p = \{0\}$ oder wenn $H_q = \{0\}$). Im Allgemeinen könnten diese Summen aber unendlich sein.

Seien auch K und L graduierte abelsche Gruppen, und sei $f: G \rightarrow K$ ein Grad k Homomorphismus und $g: H \rightarrow L$ ein Grad l Homomorphismus. Dann ist

$$F(f, g): F(G, H) \rightarrow F(K, L)$$

offenbar ein Grad $k + l$ Homomorphismus.

Mit dieser Definition wird F zu einem Funktor

$$GAG \times GAG \rightarrow GAG$$

von zwei Variablen über der Kategorie der graduierten abelschen Gruppen, der in beiden Variablen kovariant ist. Wir können F auch als einen Funktor $GAG_0 \times GAG_0 \rightarrow GAG_0$ auffassen.

Bemerkung 12.4 Die Konstruktion aus Definition 12.3 wollen wir in erster Linie auf die Funktoren \otimes und Tor anwenden. Diese Funktoren sind stark additiv (für Tor folgt das leicht aus der starken Additivität von \otimes), so dass in diesem Fall für graduierte abelsche Gruppen G und H die graduierte abelsche Gruppe $G \otimes H$ gleich der Gruppe $G \otimes H$ ist. Entsprechendes gilt für Tor .

Wenn wir einen kovarianten additiven Funktor von zwei Variablen auf ein Paar von Kettenkomplexen anwenden, entsteht wieder ein Kettenkomplex.

Obwohl das für jeden kovarianten additiven Funktor gilt, werden wir uns ab jetzt und auch im Nachweis dieser Eigenschaft auf den Funktor \otimes spezialisieren, weil diese Kettenkomplexbauweise gerade für diesen Funktor eine wichtige geometrische Bedeutung hat und wir sie für andere Funktoren nicht brauchen.

Definition 12.5 Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \varepsilon)$ Kettenkomplexe.

Wir definieren wie folgt einen **Produktkettenkomplex** $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ durch

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} := (C \otimes D, \partial \odot \varepsilon), \quad (12.5)$$

wo der Randoperator definiert ist durch

$$\partial \odot \varepsilon := \partial \otimes \text{id}_D + \alpha_C \otimes \varepsilon \quad (12.6)$$

Dies ist offenbar ein Grad -1 Homomorphismus, und weil $\alpha_C \circ \partial + \partial \circ \alpha_C = \mathbf{0}$ nach (12.3), haben wir

$$\begin{aligned} (\partial \odot \varepsilon) \circ (\partial \odot \varepsilon) &= (\partial \otimes \text{id}_D + \alpha_C \otimes \varepsilon) \circ (\partial \otimes \text{id}_D + \alpha_C \otimes \varepsilon) \\ &= (\partial \otimes \text{id}_D) \circ (\partial \otimes \text{id}_D) + (\alpha_C \otimes \varepsilon) \circ (\partial \otimes \text{id}_D) \\ &\quad + (\partial \otimes \text{id}_D) \circ (\alpha_C \otimes \varepsilon) + (\alpha_C \otimes \varepsilon) \circ (\alpha_C \otimes \varepsilon) \\ &= \partial^2 \otimes \text{id}_D + (\alpha_C \circ \partial) \otimes \varepsilon + (\partial \circ \alpha_C) \otimes \varepsilon + \alpha_C^2 \otimes \varepsilon^2 \\ &= \mathbf{0} \otimes \text{id}_D + (\alpha_C \circ \partial + \partial \circ \alpha_C) \otimes \varepsilon + \text{id}_C \otimes \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \otimes \text{id}_D + \mathbf{0} \otimes \varepsilon + \text{id}_C \otimes \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

In anderen Worten, $\partial \odot \varepsilon$ ist tatsächlich ein Randoperator eines Kettenkomplexes.

Man sieht übrigens an dieser Berechnung, welche Funktion α_C im rechten Summand von $\partial \odot \varepsilon$ hat. Ohne diese „Korrektur“ würden sich die mittleren Terme in $(\partial \odot \varepsilon)^2$ nicht wegheben und das Ergebnis wäre nicht $\mathbf{0}$.

Entsprechend zu dieser Definition kann man auch das Tensorprodukt von zwei *Kokettenkomplexen* definieren.

Bemerkung 12.6 Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$, $\mathcal{D} = (D, \varepsilon)$, $\mathcal{C}' = (C', \partial')$ und $\mathcal{D}' = (D', \varepsilon')$ Kettenkomplexe, und seien $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ und $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ Kettenabbildungen.

Dann ist $f \otimes g$ eine Kettenabbildung $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}' \otimes \mathcal{D}'$.

Denn weil f von Grad 0 ist, kommutiert es mit α_C und $\alpha_{C'}$ (in anderen Worten, $f \circ \alpha_C = \alpha_{C'} \circ f$), und unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Kettenabbildungen f und g mit den Randoperatoren von \mathcal{C} und \mathcal{C}' bzw. von \mathcal{D} und \mathcal{D}' kommutieren, können wir sofort nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} (f \otimes g) \circ (\partial \odot \varepsilon) &= (f \otimes g) \circ (\partial \otimes \text{id}_D + \alpha_C \otimes \varepsilon) \\ &= (f \circ \partial) \otimes (g \circ \text{id}_D) + (f \circ \alpha_C) \otimes (g \circ \varepsilon) \\ &= (\partial' \circ f) \otimes (\text{id}_{D'} \circ g) + (\alpha_{C'} \circ f) \otimes (\varepsilon' \circ g) \\ &= (\partial' \otimes \text{id}_{D'} + \alpha_{C'} \otimes \varepsilon') \circ (f \otimes g) \\ &= (\partial' \odot \varepsilon') \circ (f \otimes g). \end{aligned}$$

Weil ein Tensorprodukt von Kettenabbildungen wieder eine Kettenabbildung der Tensorproduktkettenkomplexe ist, wird \otimes mit Definition 12.5 zu einem Funktor $KK \times KK \longrightarrow KK$. Dieser Funktor ist in jeder Variablen kovariant und ist offensichtlich additiv.

Wir werden bald sehen, dass es eine enge Beziehung zwischen den Kettenkomplexen $C_*(X \times Y)$ (für topologische Räume X und Y) und $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ gibt, und das wir mittels des Kettenkomplexes $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ die Homologie vom Produktraum $X \times Y$ berechnen kann.

Obwohl der Kettenkomplex $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ recht kompliziert zu sein scheint, können wir dessen Homologie mit Hilfe einer Künnethfolge berechnen, und das wollen wir als Nächstes tun, unter anderem, weil wir diese Homologie in Spezialfällen kennen müssen, um die Beziehung zur Homologie von $X \times Y$ überhaupt herstellen zu können.

Satz 12.7 (Künneth Formel) Seien $\mathcal{C} = (C, \partial)$ und $\mathcal{D} = (D, \varepsilon)$ Kettenkomplexe, und \mathcal{C} sei frei. Dann gibt es eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\alpha} H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) \xrightarrow[\text{Grad } -1]{\zeta} \text{Tor}(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{D})) \longrightarrow \{0\}, \quad (12.7)$$

in der α folgende Gestalt hat: ist $\gamma \in H(\mathcal{C})$ und $z \in \mathcal{C}$ ein Zyklus mit $\gamma = [z]$, und ist $\omega \in H(\mathcal{D})$ und $w \in \mathcal{D}$ ein Zyklus mit $\omega = [w]$, dann ist

$$\alpha(\gamma \otimes \omega) = [z \otimes w]. \quad (12.8)$$

Wenn auch \mathcal{D} ein freier Kettenkomplex ist, dann spaltet die Folge (12.7), aber die Spaltung ist nicht natürlich.

Beweis. Die Beweisidee ist fast die gleiche, wie für Satz 11.21. Die Tatsache, dass der zweite Tensorfaktor \mathcal{D} jetzt ein Kettenkomplex und nicht einfach eine Gruppe ist, ändert zwar die Einzelheiten ein wenig aber bereitet keine wirklichen Schwierigkeiten.

Wie im Beweis von Satz 11.21, bezeichnen wir mit $i_{\mathcal{C}}$ die Inklusion

$$i_{\mathcal{C}}: Z(\mathcal{C}) \longrightarrow C$$

und mit $j_{\mathcal{C}}$ die Inklusion

$$j_{\mathcal{C}}: B(\mathcal{C}) \longrightarrow Z(\mathcal{C}).$$

Die graduierte Rändergruppe $B(\mathcal{C})$ und die graduierte Zyklengruppe $Z(\mathcal{C})$ sind Unterkettenkomplexe von \mathcal{C} mit $\mathbf{0}$ als Randoperator, und die Inklusionen $i_{\mathcal{C}}$ und $j_{\mathcal{C}}$ sind natürliche Kettenabbildungen.

Für den Kettenkomplex \mathcal{D} haben wir die entsprechenden Inklusionen

$$i_{\mathcal{D}}: Z(\mathcal{D}) \longrightarrow C$$

und

$$j_{\mathcal{D}}: B(\mathcal{D}) \longrightarrow Z(\mathcal{D}),$$

mit den entsprechenden Eigenschaften.

Wir schreiben $\tilde{\partial}$ für den Randoperator von \mathcal{C} aufgefasst als Abbildung $C \longrightarrow B(\mathcal{C})$ (statt $C \longrightarrow C$). Auch diese Abbildung ist eine natürliche Kettenabbildung (natürlich weil Kategoriemorphismen, also Kettenabbildungen, per Definition mit dem Randoperator kommutieren).

Es gilt wieder die Beziehung

$$\partial = i_{\mathcal{C}} j_{\mathcal{C}} \tilde{\partial}. \quad (12.9)$$

Entsprechend schreiben wir $\tilde{\varepsilon}$ für den Randoperator von \mathcal{D} aufgefasst als Abbildung $D \longrightarrow B(\mathcal{D})$ (statt $D \longrightarrow D$), und es gilt

$$\varepsilon = i_{\mathcal{D}} j_{\mathcal{D}} \tilde{\varepsilon}. \quad (12.10)$$

Auch $\tilde{\varepsilon}$ ist natürlich.

Weil $Z(\mathcal{C}) = \text{Ker } \partial$ und $B(\mathcal{C}) = \text{Bild } \tilde{\partial}$ haben wir eine natürliche kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$\{0\} \longrightarrow Z(\mathcal{C}) \xrightarrow{i_{\mathcal{C}}} C \xrightarrow{\tilde{\partial}} B_+(\mathcal{C}) \longrightarrow \{0\}, \quad (12.11)$$

wo die Verwendung von $B_+(\mathcal{C})$ statt $B(\mathcal{C})$ am rechten Ende wieder bewirkt, dass $\tilde{\partial}$ in dieser Folge den Grad 0 hat.

(12.11) ist sogar eine spaltende kurze exakte Folge von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen, da $B_+(\mathcal{C})$ als Untergruppe von C frei ist. Deshalb bleibt sie exakt, wenn man sie mit einer beliebigen abelschen Gruppe von rechts tensoriert.

Durch Tensorieren mit D erhalten wir wieder eine in \mathcal{C} und in \mathcal{D} natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow Z(\mathcal{C}) \otimes D \xrightarrow{i_{\mathcal{C}} \otimes D} C \otimes D \xrightarrow{\tilde{\partial} \otimes D} B_+(\mathcal{C}) \otimes D \longrightarrow \{0\}. \quad (12.12)$$

Nach Bemerkung 12.6 sind die Homomorphismen in dieser Folge Kettenabbildungen und die Folge ist eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen.

Anders als im Beweis von Satz 11.21 ist der Randoperator der äußeren Kettenkomplexe in dieser Folge nicht mehr trivial. Er hat aber jeweils, weil

der Randoperator von $Z(\mathcal{C})$ und $B_+(\mathcal{C})$ die Nullabbildung ist, die einfache Form

$$\mathbf{0} \odot \varepsilon = \alpha \otimes \varepsilon, \quad (12.13)$$

wie aus Definition 12.5, Gleichung (12.6) klar ist.

Man sollte bemerken, dass der Faktor α in $\alpha \otimes \varepsilon$ nur das Vorzeichen einiger bigraduiert-homogener Summanden dieses Homomorphismus ändert, was keinen Einfluss auf ihren Kern oder ihr Bild hat. Weil die Gesamtkettengruppen direkte Summen der bigraduierten homogenen Anteile sind, hat der Vorzeichenwechsel auch keinen Einfluss auf Kern oder Bild des Homomorphismus insgesamt.

Insbesondere sind die Zyklen- und Rändergruppen der Kettenkomplexe $Z(\mathcal{C}) \otimes D$ und $B_+(\mathcal{C}) \otimes D$ die gleichen, als wäre der Randoperator $\text{id} \otimes \varepsilon$.

Wir wollen zeigen, dass der verbindende Homomorphismus β des exakten Homologiedreiecks der Folge (12.12) diesmal (bis auf die durch das Pluszeichen veränderte Graduierung) der *Homologiehomomorphismus* der Kettenabbildung $j_{\mathcal{C}} \otimes D$ ist. Das ist nicht ganz so einfach wie für die entsprechende Behauptung im Beweis von Satz 11.21, weil die Randoperatoren von $B_+(\mathcal{C}) \otimes D$ und von $Z(\mathcal{C}) \otimes D$ nicht mehr trivial sind.

Sei $\gamma \in H(B_+(\mathcal{C}) \otimes D)$ und sei b ein Zyklus von $B_+(\mathcal{C}) \otimes D$ mit $\gamma = [b]$. Dass b ein Zyklus ist bedeutet, dass $(\alpha_{B_+(\mathcal{C})} \otimes \varepsilon)(b) = 0$, oder, wie wir gesehen haben, dass $(\text{id}_{B_+(\mathcal{C})} \otimes \varepsilon)(b) = 0$.

Für den Kettenkomplex \mathcal{D} haben wir eine natürliche exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow Z(\mathcal{D}) \xrightarrow{i_{\mathcal{D}}} D \xrightarrow{\varepsilon} D \quad (12.14)$$

und diese Folge bleibt exakt, wenn wir sie mit einer der freien Gruppen $Z(\mathcal{C})$, C oder $B_+(\mathcal{C})$ tensorieren.

Wenn wir die Folgen (12.11) und (12.14) miteinander tensorieren, erhalten wir ein (natürliches) Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{0\} & \longrightarrow & Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D}) & \xrightarrow{i_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}} & C \otimes Z(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\tilde{\partial} \otimes \text{id}} & B_+(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D}) \longrightarrow \{0\} \\
& & \downarrow \text{id} \otimes i_{\mathcal{D}} & & \downarrow \text{id} \otimes i_{\mathcal{D}} & & \downarrow \text{id} \otimes i_{\mathcal{D}} \\
\{0\} & \longrightarrow & Z(\mathcal{C}) \otimes D & \xrightarrow{i_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}} & C \otimes D & \xrightarrow{\tilde{\partial} \otimes \text{id}} & B_+(\mathcal{C}) \otimes D \longrightarrow \{0\} \\
& & \downarrow \text{id} \otimes \varepsilon & & \downarrow \text{id} \otimes \varepsilon & & \downarrow \text{id} \otimes \varepsilon \\
\{0\} & \longrightarrow & Z(\mathcal{C}) \otimes D & \xrightarrow{i_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}} & C \otimes D & \xrightarrow{\tilde{\partial} \otimes \text{id}} & B_+(\mathcal{C}) \otimes D \longrightarrow \{0\}
\end{array}$$

(12.15)

in dem aus den oben erwähnten Gründen alle Zeilen und Spalten exakt sind, und dieses Diagramm kommutiert offensichtlich, weil in den waagerechten Homomorphismen der zweite Faktor die Identität ist und in den senkrechten Homomorphismen der erste Faktor die Identität ist.

Man beachte, dass die unteren beiden Zeilen die exakte Folge (12.12) sind (aber die senkrechten Pfeile zwischen diesen Zeilen sind nicht die Randoperatoren der Kettenkomplexe!).

Weil b im Kern der Abbildung $\text{id} \otimes \varepsilon$ in der rechten Spalte des Diagramms liegt, gibt es ein Element $b' \in B_+(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D})$ mit $(\text{id}_{B_+(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}})(b') = b$. Weil die oberste Zeile exakt ist, gibt es ein Element $c' \in C \otimes Z(\mathcal{D})$ mit $(\tilde{\partial} \otimes \text{id}_{Z(\mathcal{D})})(c') = b'$.

Weil das Diagramm kommutiert, ist $c := (\text{id}_C \otimes i_{\mathcal{D}})(c')$ ein Element von $C \otimes D$ mit $(\tilde{\partial} \otimes \text{id}_D)(c) = b$. Nach Konstruktion des verbindenden Homomorphismus des exakten Homologiedreiecks der Folge (12.12) ist $\beta(\gamma) = [z]$, wo $z \in Z(\mathcal{C}) \otimes D$ die eindeutige bestimmte Kette ist mit

$$\begin{aligned}
(i_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D)(z) &= (\partial \odot \varepsilon)(c) \\
&= (\partial \otimes \text{id}_D)(c) + (\alpha \otimes \varepsilon)(c) \\
&= (i_{\mathcal{C}} j_{\mathcal{C}} \tilde{\partial} \otimes \text{id}_D)(c) + (\alpha \otimes \varepsilon)(c) \\
&= (i_{\mathcal{C}} j_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D)((\tilde{\partial} \otimes \text{id}_D)(c)) + (\alpha \otimes \varepsilon)(c).
\end{aligned}$$

Der rechte Summand verschwindet, weil $c \in \text{Bild}(\text{id}_C \otimes i_{\mathcal{D}}) = \text{Ker}(\text{id}_C \otimes \varepsilon) = \text{Ker}(\alpha_C \otimes \varepsilon)$. Im linken Summand kann man $(\tilde{\partial} \otimes \text{id}_D)(c)$ durch b ersetzen und man findet

$$(i_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D)(z) = (i_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D)((j_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D)(b)).$$

Und weil $i_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D$ wegen der Exaktheit von (12.12) injektiv ist, ist

$$z = (j_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D)(b)$$

und β ist somit gleich der Abbildung

$$H(j_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D): H(B_+(\mathcal{C}) \otimes D) \longrightarrow H(Z(\mathcal{C}) \otimes D).$$

Das natürliche exakte Homologiedreieck der natürlichen kurzen exakten Folge (12.12) hat also die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} H(Z(\mathcal{C}) \otimes D) & \xrightarrow{H(i_{\mathcal{C}} \otimes D)} & H(\mathcal{C} \otimes D) \\ & \nwarrow \text{Grad } -1 \quad \nearrow H(\tilde{\partial} \otimes D) & \\ & H(B_+(\mathcal{C}) \otimes D) & \end{array} \quad (12.16)$$

Weil der Randoperator der Kettenkomplexe $Z(\mathcal{C}) \otimes D$ und $B_+(\mathcal{C}) \otimes D$ nicht mehr $\mathbf{0}$ ist, ist ihre Homologie nicht einfach gleich den Kettenkomplexen, aber sie ist trotzdem wegen der einfachen Gestalt des Randoperators nicht schwer zu berechnen, was uns erlauben wird, das exakte Dreieck (12.16) in eine angenehmere Form zu bringen.

Weil $\alpha \otimes \varepsilon$ und $\text{id} \otimes \varepsilon$ den gleichen Kern haben, folgt aus den exakten Spalten im Diagramm (12.15), dass $\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}}$ die Gruppe $Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D})$ isomorph auf

$$\text{Ker}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \varepsilon) = \text{Ker}(\alpha_{Z(\mathcal{C})} \otimes \varepsilon) = Z(Z(\mathcal{C}) \otimes D)$$

abbildet.

Für die Rändergruppe haben wir

$$\begin{aligned} B(Z(\mathcal{C}) \otimes D) &= \text{Bild}(\alpha_{Z(\mathcal{C})} \otimes \varepsilon) \\ &= \text{Bild}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \varepsilon) \\ &= \text{Bild}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}} j_{\mathcal{D}} \tilde{\varepsilon}) \\ &= (\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}})(\text{Bild}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}} \tilde{\varepsilon})). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\tilde{\varepsilon}: D \longrightarrow B(\mathcal{D})$ ist nach Definition von $B(\mathcal{D})$ surjektiv, und weil das Tensorieren mit der freien Gruppe $Z(\mathcal{C})$ ein exakter Funktor ist, ist auch $\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \tilde{\varepsilon}$ surjektiv auf $Z(\mathcal{C}) \otimes B(\mathcal{D})$. Folglich ist

$$\text{Bild}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}} \tilde{\varepsilon}) = \text{Bild}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}})$$

und diese Untergruppe von $Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D})$ wird von $\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}}$ isomorph auf $B(Z(\mathcal{C}) \otimes D)$ abgebildet. Die natürliche Abbildung $\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}}$ induziert also einen in beiden Variablen ebenfalls natürlichen Isomorphismus $\overline{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}}}$ von

$$\text{Coker}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}}) = \frac{Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D})}{\text{Bild}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}})} \xrightarrow{\cong} \frac{Z(Z(\mathcal{C}) \otimes D)}{B(Z(\mathcal{C}) \otimes D)} = H(Z(\mathcal{C}) \otimes D). \quad (12.17)$$

Sei

$$\pi_{\mathcal{D}}: Z(\mathcal{D}) \longrightarrow H(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D})/B(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D})/j_{\mathcal{D}}(B(\mathcal{D}))$$

die natürliche Projektion. Wir haben eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow B(\mathcal{D}) \xrightarrow{j_{\mathcal{D}}} Z(\mathcal{D}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{D}}} H(\mathcal{D}) \longrightarrow \{0\}$$

und Tensorieren mit der freien Gruppe $Z(\mathcal{C})$ liefert wieder eine in beiden Variablen natürliche exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow Z(\mathcal{C}) \otimes B(\mathcal{D}) \xrightarrow{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}}} Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D}) \xrightarrow{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \pi_{\mathcal{D}}} Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) \rightarrow \{0\}, \quad (12.18)$$

so dass der natürliche Homomorphismus $\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \pi_{\mathcal{D}}$ einen in beiden Variablen natürlichen Isomorphismus

$$\overline{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \pi_{\mathcal{D}}}: \text{Coker}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}}) \longrightarrow Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$$

induziert.

Die Kombination der Isomorphismen $\overline{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}}}$ und $\overline{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \pi_{\mathcal{D}}}$ (genauer gesagt, die Verknüpfung eines dieser Isomorphismen mit der Umkehrabbildung des anderen) liefert schließlich einen in beiden Variablen natürlichen Isomorphismus

$$H(Z(\mathcal{C}) \otimes D) \cong Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}). \quad (12.19a)$$

Bei der Herleitung dieses Isomorphismus haben wir neben der Struktur des Kettenkomplexes \mathcal{D} nur ausgenutzt, dass $Z(\mathcal{C})$ ein *freier* Kettenkomplex mit verschwindendem Randoperator ist. Da der Kettenkomplex $B_+(\mathcal{C})$ die gleichen Eigenschaften hat, erhalten wir auf die gleiche Weise einen entsprechenden natürlichen Isomorphismus

$$H(B_+(\mathcal{C}) \otimes D) \cong B_+(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}). \quad (12.19b)$$

Vermöge der genannten Isomorphismen geht der Homomorphismus

$$H(j_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D): H(B_+(\mathcal{C}) \otimes D) \longrightarrow H(Z(\mathcal{C}) \otimes D)$$

über in den Homomorphismus

$$j_{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{H(\mathcal{D})}: B_+(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) \longrightarrow Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}).$$

Das folgt sofort aus der Tatsache, dass die genannten Isomorphismen natürliche Transformationen zwischen den Funktoren $H(\cdot \otimes \mathcal{D})$ und $\cdot \otimes H(\mathcal{D})$ auf der Kategorie der freien Kettenkomplexe mit trivialem Randoperator sind, und $j_{\mathcal{C}}$ ist (für festes \mathcal{C}) ein Morphismus dieser Kategorie.

Wir können also in dem natürlichen exakten Homologiedreieck (12.16) die linke Seite mit diesen Isomorphismen austauschen und erhalten ein neues, wegen der Natürlichkeit der verwendeten Isomorphismen ebenfalls natürliches exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\varphi} & H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) \\ & \nwarrow \text{Grad } -1 & \nearrow \\ & B_+(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) & \end{array} \quad (12.20)$$

Den natürlichen Homomorphismen φ wollen wir noch kurz beschreiben.

Zunächst betrachten wir ein erzeugendes Element $z \otimes \gamma$ von $Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$, wo z ein Zyklus von \mathcal{C} ist und $\gamma \in H(\mathcal{D})$. Sei $d \in D$ ein Zyklus von \mathcal{D} mit $\gamma = [d]$. Unter dem Homomorphismus $\overline{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes \pi_{\mathcal{D}}}$ entspricht $z \otimes \gamma = z \otimes [d]$ der Restklasse $z \otimes d + \text{Bild}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}})$ in $\text{Coker}(\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes j_{\mathcal{D}})$, und der Isomorphismus $\overline{\text{id}_{Z(\mathcal{C})} \otimes i_{\mathcal{D}}}$ bildet diese Restklasse ab auf $[z \otimes d] \in H(Z(\mathcal{C}) \otimes D)$. Der Homomorphismus $H(i_{\mathcal{C}} \otimes D)$ des ursprünglichen exakten Homologiedreiecks (12.16) bildet wiederum diese Homologieklassse ab in die entsprechende Homologieklassse $[z \otimes d] \in H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$. Also gilt

$$\varphi(z \otimes \gamma) = \varphi(z \otimes [d]) = [z \otimes d] \in H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}). \quad (12.21)$$

Der Pfeil auf der rechten Seite von (12.20) erlaubt keine so einfache Beschreibung in geschlossener Form. Deshalb lassen wir ihn anonym bleiben.

Das exakte Dreieck (12.20) können wir auch als eine lange exakte Folge von Gruppen und Homomorphismen lesen, die wir nach Bemerkung 7.9 in lauter kurze exakte Folgen zerlegen können. Uns interessieren dabei die auf die Ecke $H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$ zentrierten Abschnitte.

Wir haben im Beweis von Satz 11.21 schon gesehen, dass die direkte Summe der auf eine Stelle im exakten Dreieck zentrierten Abschnitte eine kurze exakte Folge von graduierten abelschen Gruppen bildet, in der die

äußeren Gruppen der Cokern und der Kern des gegenüberliegenden Pfeils sind. Für die Stelle $H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$ hat diese kurze exakte Folge die Gestalt

$$\{0\} \rightarrow \text{Coker}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})) \xrightarrow{\bar{\varphi}} H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) \rightarrow \text{Ker}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})) \rightarrow \{0\}. \quad (12.22)$$

Wir müssen den Kern und den Cokern von $j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})$ noch berechnen.

Sei

$$\pi_{\mathcal{C}}: Z(\mathcal{C}) \longrightarrow H(\mathcal{C}) = Z(\mathcal{C})/B(\mathcal{C}) = Z(\mathcal{C})/j_{\mathcal{C}}(B(\mathcal{C}))$$

die Projektion. Wir haben eine kurze exakte Folge

$$\{0\} \longrightarrow B(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_{\mathcal{C}}} Z(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}}} H(\mathcal{C}) \longrightarrow \{0\}. \quad (12.23)$$

Diese Folge spaltet nicht, aber sie ist eine freie Auflösung von $H(\mathcal{C})$, da $B(\mathcal{C})$ und $Z(\mathcal{C})$ als Untergruppen von C frei sind.

Wenn wir diese Folge mit $H(\mathcal{D})$ tensorieren, bleibt sie nicht exakt, aber wir können sie zu folgender exakten Folge ergänzen:

$$\begin{aligned} \{0\} \rightarrow \text{Tor}(H_+(\mathcal{C}), H(\mathcal{D})) \rightarrow B_+(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) &\xrightarrow{j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})} \\ Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) &\xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})} H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) \rightarrow \{0\}. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Hier haben wir uns erlaubt, die Graduierung des Knotens $B(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$ zu verändern, um den Pfeil $j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})$ an die Situation im Diagramm (12.20) anzupassen. Wenn wir dann den Kern dieses Pfeiles als Untergruppe von $B(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$ auf der linken Seite ergänzen, müssen wir dafür die gleiche Graduierung wählen; deshalb steht links $\text{Tor}(H_+(\mathcal{C}), H(\mathcal{D}))$ und nicht $\text{Tor}(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{D}))$.

Wohlbemerkt: es sind keine Gruppen geändert worden und $j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})$ ist „eigentlich“ ein Grad-0 Homomorphismus $B(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}) \longrightarrow Z(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$; die veränderte Graduierung dient nur der Graduierungsangleichung der mittleren mit den äußeren Gruppen in der Folge (12.22).

Aus (12.24) sehen wir, dass die natürliche Abbildung $\pi_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})$ einen natürlichen Grad 0 Isomorphismus

$$\text{Coker}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})) \xrightarrow{\overline{\pi_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})}} H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$$

induziert, und dass $\text{Ker}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D}))$, wie es in (12.22) erscheint, isomorph ist zu $\text{Tor}(H_+(\mathcal{C}), H(\mathcal{D}))$.

Obwohl man das an der Folge (12.24) nicht sieht, ist auch dieser Isomorphismus natürlich. Das eigentliche $\text{Tor}(H_+(\mathcal{C}), H(\mathcal{D}))$ erhält man, wenn man die standard freie Auflösung von $H_+(\mathcal{C})$ mit $H(\mathcal{D})$ tensoriert, aber zwischen der freien Auflösung (12.23) und der standard freien Auflösung, oder

allgemeiner, zwischen einer beliebigen dieser Auflösungen und einer beliebigen der entsprechenden Auflösungen für $H_+(\mathcal{C}')$, für einen beliebigen anderen freien Kettenkomplex \mathcal{C}' , gibt es zu jeder Kettenabbildung $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ einen bis auf Kettenhomotopie eindeutig bestimmten Diagrammmorphismus, der einen *eindeutigen* Homomorphismus zwischen den Kernen Tor am linken Ende der mit $H(\mathcal{D})$ tensorierten Folgen induziert (eindeutig, weil der Kern am linken Ende eine Homologiegruppe der unergänzten Folge ist und die Diagrammmorphismen bis auf Kettenhomotopie eindeutig sind). Die Eindeutigkeit impliziert, dass jedes Quadrat aus solchen Homomorphismen kommutiert, also dass diese Homomorphismen auch natürlich sind.

Vermöge dieser natürlichen Isomorphismen können wir in (12.22) die Gruppe $\text{Coker}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D}))$ durch $H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$ ersetzen und $\text{Ker}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D}))$ entsprechend durch $\text{Tor}(H_+(\mathcal{C}), H(\mathcal{D}))$. So erhalten wir die Künneth Folge (12.7), wobei wir den zweiten Pfeil als Grad -1 Abbildung erklären können, wenn wir im Tor Term die natürliche und nicht die „+“ Graduierung wählen, wie wir es in (12.7) auch getan haben.

Da (12.22) eine natürliche exakte Folge ist, die wir mit natürlichen Isomorphismen in (12.7) verwandelt haben, ist auch (12.7) natürlich.

Wir wollen noch nachprüfen, dass der Homomorphismus α die angegebene Gestalt hat. Der zur Konstruktion von (12.7) eingesetzte Isomorphismus

$$\text{Coker}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})) \xrightarrow{\overline{\pi_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})}} H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$$

ist $\overline{\pi_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})}$.

Sei $\gamma \in H(\mathcal{C})$ und sei $z \in \mathcal{C}$ ein Zyklus mit $\gamma = [z]$, und sei $\omega \in H(\mathcal{D})$ und $w \in \mathcal{D}$ ein Zyklus mit $\omega = [w]$.

Das Element $\gamma \otimes \omega \in H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$ ist das Bild unter $\overline{\pi_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D})}$ von der Restklasse $z \otimes \omega + \text{Bild}(j_{\mathcal{C}} \otimes H(\mathcal{D}))$ und nach der früheren Beschreibung (12.21) des Homomorphismus φ im exakten Dreieck (12.20) bildet der Pfeil $\overline{\varphi}$ aus (12.22) diese Restklasse ab in $\varphi(z \otimes \omega) = [z \otimes w] \in H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$. Also ist $\alpha(\gamma \otimes \omega) = [z \otimes w]$.

Es bleibt zum Schluss noch zu zeigen, dass die Folge (12.7) spaltet, wenn \mathcal{D} ein freier Kettenkomplex ist.

Weil $B_+(\mathcal{C})$ frei ist, spaltet die Folge (12.11) und es gibt einen Homomorphismus $r_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \longrightarrow Z(\mathcal{C})$, so dass

$$r_{\mathcal{C}} \circ i_{\mathcal{C}} = \text{id}_{Z(\mathcal{C})}.$$

Wenn \mathcal{D} frei ist, dann ist auch $B_+(\mathcal{D})$ frei, die entsprechende Folge

$$\{0\} \longrightarrow Z(\mathcal{D}) \xrightarrow{i_{\mathcal{D}}} \mathcal{D} \xrightarrow{\varepsilon} B_+(\mathcal{D}) \longrightarrow \{0\}$$

spaltet, und es gibt einen Homomorphismus $r_{\mathcal{D}}: D \longrightarrow Z(\mathcal{D})$, so dass

$$r_{\mathcal{D}} \circ i_{\mathcal{D}} = \text{id}_{Z(\mathcal{D})}.$$

Tensorieren liefert einen Homomorphismus

$$r := r_{\mathcal{C}} \otimes r_{\mathcal{D}}: C \otimes D \longrightarrow Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D}),$$

so dass

$$r \circ (i_{\mathcal{C}} \otimes i_{\mathcal{D}}) = \text{id}_{Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D})}.$$

Die Projektionen $\pi_{\mathcal{C}}$ und $\pi_{\mathcal{D}}$ der Zyklengruppen in die Homologiegruppen von \mathcal{C} und \mathcal{D} liefern einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\pi := \pi_{\mathcal{C}} \otimes \pi_{\mathcal{D}}: Z(\mathcal{C}) \otimes Z(\mathcal{D}) \longrightarrow H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}).$$

Der Randoperator $\partial \odot \varepsilon$ von $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ hat die Gestalt $\partial \odot \varepsilon = \partial \otimes \text{id}_D + \alpha_{\mathcal{C}} \otimes \varepsilon$. Daraus sieht man, dass jede Kette, die ein Tensorprodukt von einem Zyklus von \mathcal{C} mit einem Zyklus von \mathcal{D} ist, auch ein Zyklus von $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ ist.

Ferner, $\partial \odot \varepsilon$ bildet jede erzeugende Kette $c \otimes d$ von $C \otimes D$ ab in eine Summe von Tensorprodukten von Elementen, in denen einer der beiden Faktoren ein Rand in \mathcal{C} oder \mathcal{D} ist. Ränder sind auch Zyklen, so dass der entsprechende Faktor im Bild von $i_{\mathcal{C}}$ oder $i_{\mathcal{D}}$ ist, und weil $r_{\mathcal{C}}$ und $r_{\mathcal{D}}$ als Spaltungen Linksinverse von $i_{\mathcal{C}}$ bzw. $i_{\mathcal{D}}$ sind, bilden sie diesen Faktor identisch nach $Z(\mathcal{C})$ oder $Z(\mathcal{D})$ ab, auf einen Elementen von $B(\mathcal{C})$ oder $B(\mathcal{D})$, einen Elementen, der also im Kern von $\pi_{\mathcal{C}}$ oder $\pi_{\mathcal{D}}$ liegt. Daraus folgt, dass $\pi \circ r \equiv \mathbf{0}$ auf $B(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$.

Deshalb induziert die Einschränkung $\pi \circ r|_{Z(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})}$ einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\rho: H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) \longrightarrow H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D}).$$

Aus der Form von α ist nun klar, dass ρ eine Spaltung von (12.7) ist, denn sei $\gamma \in H(\mathcal{C})$ und sei $z \in \mathcal{C}$ ein Zyklus mit $\gamma = [z]$, und sei $\omega \in H(\mathcal{D})$ und sei $w \in \mathcal{D}$ ein Zyklus mit $\omega = [w]$.

Das Element $z \otimes w$ ist ein Zyklus von $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ und wir haben, wie erforderlich,

$$\begin{aligned} (\rho \circ \alpha)(\gamma \otimes \omega) &= \rho[z \otimes w] \\ &= (\pi \circ r)(z \otimes w) \\ &= \pi(r_{\mathcal{C}}(z) \otimes r_{\mathcal{D}}(w)) \\ &= \pi(z \otimes w) \\ &= \pi_{\mathcal{C}}(z) \otimes \pi_{\mathcal{D}}(w) \\ &= [z] \otimes [w] \\ &= \gamma \otimes \omega. \end{aligned}$$

Da $\rho \circ \alpha$ auf Erzeugenden die Identität ist, ist diese Verknüpfung insgesamt die Identität von $H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{D})$ und ρ ist eine Spaltung. ■

Noch können wir mit dieser Künneth Formel wenig anfangen, denn wir wissen noch nicht, welche Bedeutung das Tensorprodukt von zwei Kettenkomplexen hat. Es lohnt sich aber, jetzt schon einen nützlichen Spezialfall zu behandeln:

Korollar 12.8 *Seien X und Y azyklische topologische Räume, also Räume mit der Homologie eines Einpunktraumes (das ist zum Beispiel der Fall, wenn X und Y zusammenziehbar sind).*

Dann hat der Kettenkomplex $C_(X) \otimes C_*(Y)$ die Homologie eines Einpunktraumes. Es ist*

$$H_n(C_*(X) \otimes C_*(Y)) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } n = 0; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.25)$$

Beweis. Wir wenden Satz 12.7 an. Alle Homologiegruppen von X oder Y sind \mathbf{Z} oder $\{0\}$ und somit frei. Deshalb ist der Tor Term in der Künneth Folge (12.7) die Nullgruppe, und die Homologie von $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ ist als graduierte abelsche Gruppe isomorph zu $H_*(X) \otimes H_*(Y)$.

Der 0-te homogene Anteil dieser Gruppe ist $H_0(X) \otimes H_0(Y) = \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$. Alle anderen homogenen Anteile sind eine direkte Summe von Tensorprodukten von Gruppen, in denen ein Faktor $\{0\}$ ist, und diese Tensorprodukte sind deshalb alle $\{0\}$. ■

Wir wollen jetzt begründen, warum wir an der Homologie von Tensorprodukten von Kettenkomplexen interessiert sind. Das liegt an der engen Beziehung, für topologische Räume X und Y , zwischen dem Kettenkomplex $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ und dem singulären Kettenkomplex $C_*(X \times Y)$ des Produktraumes, einer Beziehung, die wir als Nächstes erläutern möchten.

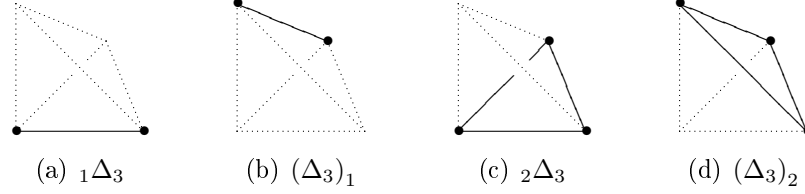
Definition 12.9 Sei $n \in \mathbf{N}$ und sei $0 \leq p \leq n$.

- a) Die **vordere p -te Seite** ${}_p\Delta_n$ des n -dimensionalen Standardsimplexes Δ_n ist der lineare p -Simplex in $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$, der von den *ersten* $p+1$ Ecken von Δ_n aufgespannt wird. In anderen Worten,

$${}_p\Delta_n := [e_0, \dots, e_p]. \quad (12.26a)$$

- b) Die **hintere p -te Seite** $(\Delta_n)_p$ des n -dimensionalen Standardsimplexes Δ_n ist der lineare p -Simplex in $\Delta_n \subseteq \mathbf{R}^n$, der von den *letzten* $p+1$ Ecken von Δ_n aufgespannt wird. In anderen Worten,

$$(\Delta_n)_p := [e_{n-p}, \dots, e_n]. \quad (12.26b)$$

Abbildung 12.1: Vorderer und hinterer p -Seiten in Δ_3 .

- c) Sei X ein topologischer Raum und sei $\sigma \in S_n(X)$ ein singulärer n -Simplex in X . Wir definieren die **vordere p -te Seite** ${}_p\sigma$ von σ als

$${}_p\sigma := \sigma_{\#}({}_p\Delta_n) = \sigma \circ {}_p\Delta_n \quad (12.27a)$$

und wir definieren die **hintere p -te Seite** σ_p von σ als

$$\sigma_p := \sigma_{\#}((\Delta_n)_p) = \sigma \circ (\Delta_n)_p \quad (12.27b)$$

Bemerkung 12.10 Aus den definierenden Gleichungen (12.27) folgen sofort zwei einfache aber nützliche Eigenschaften.

- a) Sei V ein reeller affiner Raum und seien v_0, v_1, \dots, v_n Punkte von V . Sei $0 \leq p \leq n$. Dann ist

$${}_p[v_0, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_p] \quad (12.28a)$$

und

$$[v_0, \dots, v_n]_p = [v_{n-p}, \dots, v_n]. \quad (12.28b)$$

- b) Seien X und Y topologische Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sei σ ein singulärer n -Simplex in X und sei $0 \leq p \leq n$. Dann sind die vordere und hintere p -Seite von σ natürlich, in dem Sinne, dass

$${}_p(f_{\#}\sigma) = f_{\#}({}_p\sigma) \quad \text{und} \quad (f_{\#}\sigma)_p = f_{\#}(\sigma_p). \quad (12.29)$$

Folgende Beziehungen zwischen der vorderen oder hinteren p -Seite eines Simplexes und der in die Definition des Randoperators eingehenden i -ten Seite sind offensichtlich und werden später im Zusammenhang mit Randberechnungen sehr nützlich sein.

Bemerkung 12.11 Sei X ein topologischer Raum und sei σ ein singulärer n -Simplex in X . Sei $0 \leq i \leq n$ und sei $0 \leq p \leq n - 1$. Dann ist

a)

$${}_p(\sigma^{(i)}) = \begin{cases} ({}_{p+1}\sigma)^{(i)}, & \text{wenn } 0 \leq i \leq p + 1; \\ {}_p\sigma, & \text{wenn } p + 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (12.30)$$

b)

$$(\sigma^{(i)})_{n-p-1} = \begin{cases} \sigma_{n-p-1}, & \text{wenn } 0 \leq i \leq p; \\ (\sigma_{n-p})^{(i-p)}, & \text{wenn } p \leq i \leq n. \end{cases} \quad (12.31)$$

c)

$$\begin{aligned} ({}_{p+1}\sigma)^{(p+1)} &= {}_p\sigma \\ (\sigma_{n-p})^{(0)} &= \sigma_{n-p-1} \end{aligned} \quad (12.32)$$

Beweis. Für lineare Simplexe $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ sind a) und b) klar, denn wenn man für ein gewisses q und ein gewisses i zuerst den i -ten Eckpunkt von σ weglässt und von der Hülle der anderen die vordere oder hintere q -Seite bildet, so sind zwei Situationen möglich.

Das Ergebnis ist gleich der vorderen bzw. hinteren q -Seite des ursprünglichen Simplexes σ , wenn der entfernte i -te Eckpunkt kein Eckpunkt dieser q -Seite war, also wenn $i > q$ bei einer vorderen q -Seite oder wenn $i < n - q$ bei einer hinteren q -Seite.

Andrerseits, wenn der entfernte i -te Eckpunkt zur vorderen oder hinteren $q + 1$ -Seite von σ gehörte, so erhalten wir das gleiche Ergebnis, wenn wir zuerst diese $q + 1$ -Seite bilden und aus ihr den ursprünglichen i -ten Eckpunkt entfernen und die $(q$ -dimensionale) Hülle der anderen nehmen (nach Bildung der *hinteren* $q + 1$ Seite ist der zu entfernende Eckpunkt in dieser Seite nur noch der $i - (n - (q + 1))$ -te), als wenn wir zuerst den i -ten Eckpunkt entfernen und von der $(n - 1)$ -dimensionalen Hülle der anderen die vordere oder hintere q -Seite bilden. Beide Male werden im Endeffekt die letzten bzw. die ersten $n - (q + 1) = (n - 1) - q$ Eckpunkte und der Eckpunkt v_i entfernt und die konvexe Hülle der übrig bleibenden Eckpunkte gebildet.

Auf *einen* Wert von i treffen beide Fälle zu, nämlich wenn der i -te Eckpunkt zur vorderen oder hinteren $q + 1$ Seite gehört, aber nicht zur vorderen bzw. hinteren q -Seite. Das ist der Wert $i = q + 1$ für die vordere Seite oder $i = n - q - 1$ für die hintere.

Für lineare Simplizes σ folgt Aussage a) aus den obigen Überlegungen mit $q = p$ für die vorderen Seiten, und Aussage b) folgt mit $q = n - p - 1$ für die hinteren Seiten. Das beweist diese Aussagen für *lineare* Simplizes.

Diese Aussagen gelten dann auch für beliebige singuläre Simplizes, weil sowohl die vordere oder hintere q -Seite wie auch die i -te Seite eines singulären Simplexes σ definiert sind als das Bild unter σ_{\sharp} der entsprechenden Seite des Standardsimplex id_{Δ_n} , und Gleichungen (12.30) und (12.31) sind für den Standardsimplex richtig, weil er linear ist, und bleiben natürlich gültig, wenn man auf beide Seiten σ_{\sharp} anwendet.

Die Gleichungen in Teil c) erhält man aus a) und b), wenn man für i gerade den Wert einsetzt, der auf beide Fälle innerhalb der geschweiften Klammer passt, und die sich ergebenden beiden verschiedenen Ausdrücke in der geschweiften Klammer miteinander gleichsetzt. ■

Wir können nun jeden singulären Simplex in einem topologischen Raum gewissermaßen in vordere und hintere Teilsimplizes komplementärer Dimensionen „zerlegen“, und eine solche Zerlegung kann man verwenden, um einen singulären Simplex in einem Produktraum $X \times Y$ auf die Faktoren X und Y „aufzuteilen“. Eine solche Aufteilung erlaubt uns, jedem singulären Simplex σ in $X \times Y$ ein erzeugendes Element gleicher Dimension im Kettenkomplex $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ zuzuordnen. Es gibt nur keine eindeutig sinnvolle Wahl dafür, „wie viel“ von σ man dem Faktor X und wie viel man dem Faktor Y zuteilen soll. Deshalb summieren wir einfach über alle Möglichkeiten, und erhalten so, wie sich herausstellt, eine *natürliche Kettenhomotopieäquivalenz* $\eta: C_*(X \times Y) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$.

Wie bei fast allen Konstruktionen, die wir bisher auf singulären Kettenkomplexen gemacht haben, machen wir zuerst ein „Muster“ von dieser Konstruktion auf dem Standardsimplex. Um die Konstruktion für einen beliebigen singulären Simplex σ in einem topologischen Raum X zu definieren, übertragen wir das Muster nach X mit der durch den Simplex gegebenen stetigen Abbildung. Lineare Erweiterung ermöglicht dann eine Anwendung auf beliebige singuläre Ketten.

Definition 12.12 Sei $n \in \mathbf{N}$. Wir definieren die n -dimensionale **Alexander-Whitney Standardkette** als das Element

$$\text{AW}_n := \sum_{p=0}^n p \Delta_n \otimes (\Delta_n)_{n-p} \quad (12.33)$$

in

$$\bigoplus_{p=0}^n C_p(\Delta_n) \otimes C_{n-p}(\Delta_n) = (C_*(\Delta_n) \otimes C_*(\Delta_n))_n.$$

Lemma und Definition 12.13 Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren eine natürliche Kettenabbildung

$$\tilde{\eta}: C_*(X) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X),$$

in dem wir den Wert auf jedem singulären Simplex $\sigma \in S_n(X)$ durch

$$\tilde{\eta}(\sigma) := \sum_{p+q=n} p\sigma \otimes \sigma_q \quad (12.34)$$

festsetzen und dies linear auf ganz $C_*(X)$ erweitern.

Die Abbildung $\tilde{\eta}$ ist eine natürliche Transformation und lässt sich für jeden topologischen Raum X definieren. Wenn wir deutlich machen wollen, für welchen Raum X wir sie betrachten, schreiben wir $\tilde{\eta}_X$ (und nicht die unhandlichere Notation $\tilde{\eta}(X)$).

Beweis. Da alle Summanden auf der rechten Seite von (12.34) die Dimension $p+q=n$ haben, ist $\tilde{\eta}$ ein Grad 0 Homomorphismus. Aus Gleichung (12.29) folgt unmittelbar, dass $\tilde{\eta}$ natürlich ist.

Wir müssen nur noch nachweisen, dass $\tilde{\eta}$ eine Kettenabbildung ist, wobei es reicht, das Kommutieren mit den Randoperatoren für singuläre Simplexes nachzuweisen, da sie $C_*(X)$ ja erzeugen.

Sei σ ein n -dimensionaler singulärer Simplex in X . Mit Hilfe der Relationen aus Bemerkung 12.11 erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\partial\sigma) &= \tilde{\eta}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{p=0}^{n-1} p(\sigma^{(i)}) \otimes (\sigma^{(i)})_{n-p-1} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i p(\sigma^{(i)}) \otimes (\sigma^{(i)})_{n-p-1} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{p+1} \sigma^{(i)} \otimes \sigma_{n-p-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=p+1}^n (-1)^i p\sigma \otimes (\sigma_{n-p})^{(i-p)} \right] \end{aligned} \quad (12.35a)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{p+1} \sigma^{(i)} \otimes \sigma_{n-p-1} + (-1)^{p+1} \binom{p+1}{p+1} \sigma^{(p+1)} \otimes \sigma_{n-p-1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^p p\sigma \otimes (\sigma_{n-p})^{(0)} + \sum_{i=p+1}^n (-1)^i p\sigma \otimes (\sigma_{n-p})^{(i-p)} \right] \end{aligned} \quad (12.35b)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \binom{p+1}{i} \sigma^{(i)} \otimes \sigma_{n-p-1} + \sum_{i=p}^n (-1)^i \sigma \otimes (\sigma_{n-p})^{(i-p)} \right] \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \binom{p+1}{i} \sigma^{(i)} \otimes \sigma_{n-p-1} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^p \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \sigma \otimes (\sigma_{n-p})^{(j)} \right] \tag{12.35c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \binom{p+1}{i} \sigma^{(i)} \right) \otimes \sigma_{n-p-1} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^p \sigma \otimes \left(\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j (\sigma_{n-p})^{(j)} \right) \right] \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\partial(\sigma_{p+1}) \otimes \sigma_{n-p-1} + (-1)^p \sigma \otimes \partial(\sigma_{n-p}) \right] \\
&= \sum_{p'=0}^{n-1} \left(\partial(\sigma_{p'+1}) \otimes \sigma_{n-p'-1} \right) + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left(\sigma \otimes \partial(\sigma_{n-p}) \right) \tag{12.35d}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{p=1}^n \left(\partial(\sigma_p) \otimes \sigma_{n-p} \right) + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left(\sigma \otimes \partial(\sigma_{n-p}) \right) \tag{12.35e}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\partial(\sigma_0) \otimes \sigma_n \right) + \sum_{p=1}^n \left(\partial(\sigma_p) \otimes \sigma_{n-p} \right) \\
&\quad + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left(\sigma \otimes \partial(\sigma_{n-p}) \right) + (-1)^n \left(\sigma \otimes \partial(\sigma_0) \right) \tag{12.35f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^n \partial(\sigma_p) \otimes \sigma_{n-p-1} + \sum_{p=0}^n (-1)^p \sigma \otimes \partial(\sigma_{n-p-1}) \\
&= (\partial \otimes \text{id}_{C_*(X)} + \alpha \otimes \partial) \left(\sum_{p=0}^n \sigma_p \otimes \sigma_{n-p-1} \right) \\
&= (\partial \odot \partial)(\tilde{\eta}(\sigma)).
\end{aligned}$$

In (12.35a) wurden die Gleichheiten aus Bemerkung 12.11 a) und b) verwendet. Die zusätzlichen Terme in (12.35b) heben sich nach Bemerkung 12.11 c) weg, so dass sie die rechte Seite effektiv nicht verändern.

In (12.35c) haben wir in der zweiten Summe das Vorzeichen $(-1)^p$ herausfaktorisiert und eine neue Laufvariable $j := i - p$ eingeführt. In (12.35d)

haben wir in der ersten Summe p kurz in p' umbenannt, damit wir in (12.35e) p mit der neuen Bedeutung $p := p' + 1$ wieder einführen können.

In den zusätzlichen Termen in (12.35f) ist einer der Faktoren der Rand eines 0-Simplex, so dass diese Terme 0 sind, aber mit diesen Termen kann p in beiden Summen von 0 bis n laufen, und wir erkennen nun den Rand von $\tilde{\eta}(\sigma)$ in $C_*(X) \otimes C_*(X)$.

Damit ist gezeigt, dass $\tilde{\eta}$ sich auf Simplizes und somit auf allen Ketten als eine Kettenabbildung verhält.

Die Natürlichkeit von $\tilde{\eta}$ folgt sofort aus Gleichung (12.29). ■

Die Abbildung $\tilde{\eta}$ haben wir nur als ein Zwischenschritt eingeführt und weil für sie die Gleichungen (12.35) zum Nachweis der Kettenabbildungseigenschaft etwas einfacher aussehen. Die Abbildung, die wir eigentlich benötigen, erhalten wir durch eine leichte Abwandlung.

Definition 12.14 Seien X und Y topologische Räume. Seien π_X und π_Y die Projektionen des kartesischen Produkts $X \times Y$ auf die Faktoren X bzw. Y .

Wir definieren eine natürliche Kettenabbildung

$$\eta: C_*(X \times Y) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

durch die Festsetzung

$$\eta := ((\pi_X)_\# \otimes (\pi_Y)_\#) \circ \tilde{\eta}_{X \times Y}. \quad (12.36)$$

Diese Abbildung heißt die **Alexander-Whitney Abbildung**. Manchmal schreiben wir statt η auch AW dafür.

Bemerkung 12.15 Seien X und Y topologische Räume. Ein 0-Simplex in $X \times Y$ ist einfach ein Punkt (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$. In Dimension 0 hat die Alexander-Whitney Abbildung η die Form

$$\eta_0(x, y) = x \otimes y \in C_0(X) \otimes C_0(Y). \quad (12.37)$$

Denn wenn Z ein beliebiger topologischer Raum ist und wenn $z \in Z$ ein 0-Simplex ist, so folgt aus Gleichung (12.34) in Definition 12.13, dass $\tilde{\eta}(z) = {}_0z \otimes z_0 = z \otimes z$, und deshalb haben wir nach Gleichung (12.36) in Definition 12.14

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &:= ((\pi_X)_\# \otimes (\pi_Y)_\#) (\tilde{\eta}_{X \times Y}(x, y)) \\ &= ((\pi_X)_\# \otimes (\pi_Y)_\#) ((x, y) \otimes (x, y)) \\ &= (\pi_X)_\#(x, y) \otimes (\pi_Y)_\#(x, y) \\ &= x \otimes y. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Alexander-Whitney Abbildung liegt in der nicht einfach zu beweisenden Tatsache, dass sie eine natürliche *Kettenhomotopieäquivalenz* ist, so dass wir die Homologie von $X \times Y$ mit dem Kettenkomplex $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ ausrechnen können. Und weil dieser Kettenkomplex mit dem Tensorprodukt aufgebaut ist, lässt sich der Künneth Satz zur einfachen Berechnung seiner Homologie anwenden.

Um zu zeigen, dass AW eine natürliche Kettenhomotopieäquivalenz ist, müssen wir eine zu ihr kettenhomotopieinverse natürliche Kettenabbildung $C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$ finden. Aber in diese Richtung ist es kaum vorstellbar, wie man überhaupt eine sinnvolle Abbildung definieren kann. Wie, z.B., kann man aus dem Tensorprodukt eines p -Simplex σ in X mit einem q -Simplex τ in Y eine irgendwie geartete mit σ und τ zusammenhängende $(p+q)$ -Kette auf $X \times Y$ konstruieren?

Das erstaunliche ist, dass uns die Konstruktion der Umkehrabbildung gelingen wird, ohne dass wir diese Frage beantworten können! Die Methode, die wir dazu verwenden werden, ist eine Induktion über die Dimension, die nur ausnutzt, dass die Kettengruppen frei sind und einfache Erzeugende haben, die auf ein azyklisches „Standardexemplar“ modelliert sind.

Den eigentlichen Gedanken, der dahinter steckt, haben wir schon in vielen Beweisen verwendet, allerdings in einer viel weniger abstrakten Form, als jetzt. Ein typisches Beispiel verwandter Methoden ist die Konstruktion der baryzentrischen Unterteilung in Definition 7.39 und der Nachweis mit Lemma 7.40, dass sie kettenhomotop zur Identität ist.

Diese Methoden müssen wir jetzt formalisieren, mit einer beim ersten Durchlesen sehr undurchsichtigen Definition. Sobald wir sie aber verstanden haben, werden wir ein sehr effizientes Werkzeug besitzen, um natürliche Transformationen zu bestimmen durch die einfache Angabe, wie sie sich in Dimension 0 verhalten sollen.

In Dimension 0 gibt es eine offensichtliche Bijektion zwischen den freien Erzeugenden von $C_*(X \times Y)$ und von $C_*(X) \otimes C_*(Y)$, und um weitere Details müssen wir uns gar nicht kümmern, um die Umkehrabbildung zu AW zu erhalten!

Definition 12.16 Eine *Kategorie mit Modellen* \mathcal{M} ist ein Paar $(\mathcal{K}, \mathcal{M})$, wo \mathcal{K} eine Kategorie ist und \mathcal{M} ist eine Menge von Objekten von \mathcal{K} .

Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ eine Kategorie mit Modellen und sei $F: \mathcal{K} \longrightarrow AbGp$ ein kovarianter Funktor.

Eine *\mathcal{M} -Menge* für F ist eine Menge \mathcal{B} von geordneten Paaren (M, m) , wo für jedes Paar $(M, m) \in \mathcal{B}$ gilt:

- M ist ein Objekt aus \mathcal{M} , und

- m ist ein Element der abelschen Gruppe $F(M)$.

Eine \mathcal{M} -Menge \mathcal{B} heißt eine \mathcal{M} -**Basis** oder schlicht eine **Basis für F** , wenn für jedes Objekt $C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ gilt, dass $F(C)$ eine freie abelsche Gruppe ist, wobei die Menge der Elemente

$$\{ F(\sigma)(m) \mid (M, m) \in \mathcal{B} \text{ und } \sigma \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(M, C) \}$$

eine Basis dieser freien abelschen Gruppe ist.

Wenn F eine \mathcal{M} -Basis besitzt, sagen wir, der Funktor F ist **frei mit Modellen in \mathcal{M}** .

Man beachte, dass die dargebotene Basis für die abelsche Gruppe $F(C)$ viele Elemente hat, die aus einem oder mehreren Modellobjekten M und zugehörigen „Standardelementen“ m der Gruppe $F(M)$ fabriziert werden, durch Anwendung *aller möglichen \mathcal{K} -Morphismen* von M in das gegebene Objekt C .

Diese Definition ist wegen ihrer „Vielschichtigkeit“ etwas kompliziert, aber der Gedanke, der dahinter steckt, ist uns sehr geläufig, wie Sie am folgenden ersten Beispiel 12.17 a) sofort erkennen werden.

Durch leichte Abwandlungen erhalten wir aus diesem Beispiel weitere Beispiele, die nicht nur illustrativ, sondern für unser jetziges Vorhaben auch besonders nützlich sind.

Beispiele 12.17 a) Sei n eine natürliche Zahl und sei F die *n -te singuläre Kettengruppe* C_n , als Funktor

$$\mathcal{K} := \text{Top} \longrightarrow \text{AbGp}.$$

Für jeden topologischen Raum X ist $C_n(X)$ eine freie abelsche Gruppe, erzeugt von allen singulären n -Simplizes σ in X .

Ein solcher Simplex ist eigentlich nur eine stetige Abbildung (also ein *Top*-Morphismus) $\sigma: \Delta_n \longrightarrow X$, aber als Element von $C_n(X)$ kann man σ auch schreiben als $\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta_n}) = C_n(\sigma)(\text{id}_{\Delta_n})$, wobei id_{Δ_n} ein „standard“ singulärer n -Simplex in $C_n(\Delta_n)$ ist.

Hier haben wir genau die Situation, die in Definition 12.16 beschrieben wird, und das einzelne Paar $(\Delta_n, \text{id}_{\Delta_n})$ bildet schon eine Basis für den Funktor C_n . Die n -te singuläre Kettengruppe ist also frei mit einem einzelnen Modell Δ_n , dem n -dimensionalen Standardsimplex.

- b) Sei n eine natürliche Zahl und nun sei $\mathcal{K} := \text{Top} \times \text{Top}$ und F der Funktor

$$F(X, Y) := C_n(X \times Y),$$

die n -te singuläre Kettengruppe des kartesischen Produkts eines Paares von Räumen. Diese Gruppe ist immer frei und wird erzeugt von allen n -dimensionalen singulären Simplizes σ in $X \times Y$. Ein solcher singulärer Simplex ist wieder eine stetige Abbildung

$$\sigma: \Delta_n \longrightarrow X \times Y.$$

Die Verknüpfung mit den Projektionen π_X und π_Y definiert eine Bijektion zwischen den stetigen Abbildungen nach $X \times Y$ und den Paaren von stetigen Abbildungen nach X und nach Y , so dass wir jeden singulären n -Simplex σ in $X \times Y$ auffassen können als ein Paar (σ_X, σ_Y) von n -Simplizes in X und in Y , den beiden „Koordinaten“ $\sigma_X = \pi_X \circ \sigma$ und $\sigma_Y = \pi_Y \circ \sigma$ von σ .

Sei

$$d: \Delta_n \longrightarrow \Delta_n \times \Delta_n$$

die **Diagonalabbildung** $t \mapsto (t, t)$, die als stetige Abbildung auf Δ_n auch ein singulärer Simplex ist, der singuläre Simplex

$$d = (\text{id}_{\Delta_n}, \text{id}_{\Delta_n}) \in C_n(\Delta_n \times \Delta_n). \quad (12.38)$$

Jeden singulären Simplex σ in $X \times Y$ erhalten wir auch als

$$(\sigma_X \times \sigma_Y) \circ d = (\sigma_X \times \sigma_Y)_\#(d) = F(\sigma_X, \sigma_Y)(d)$$

und deshalb können wir sagen, dass der Funktor $C_n(X \times Y)$ auf $Top \times Top$ frei ist mit einem Modell in der Menge \mathcal{M} bestehend nur aus dem einzigen Objekt

$$(\Delta_n, \Delta_n) \in Top \times Top,$$

und mit einer \mathcal{M} -Basis bestehend nur aus dem Paar

$$((\Delta_n, \Delta_n), d).$$

- c) Sei n eine natürliche Zahl, sei $\mathcal{K} := Top \times Top$, aber sei F jetzt der Funktor

$$F(X, Y) := (C_*(X) \otimes C_*(Y))_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p(X) \otimes C_q(Y),$$

der n -te homogene Anteil des Tensorprodukts der singulären Kettenkomplexe eines Paares von Räumen.

Weil die einzelnen Kettengruppen $C_p(X)$ und $C_q(Y)$ frei sind und von den singulären Simplexes der jeweils angegebenen Dimension als Basis erzeugt werden, sind nach Lemma 10.28 d) ihre Tensorprodukte frei und haben alle Tensorprodukte von zwei singulären Simplexes der entsprechenden Dimensionen als Basis. Diese Basen für die verschiedenen Paare (p, q) zusammengenommen bilden dann eine Basis der direkten Summe $F(X, Y)$, die somit auch frei ist.

Die soeben genannten Basiselemente haben die Gestalt $\sigma \otimes \tau$, wo σ ein beliebiger p -Simplex in X , also Top -Morphismus $\Delta_p \rightarrow X$ ist, wo τ ein beliebiger q -Simplex in Y , also Top -Morphismus $\Delta_q \rightarrow Y$ ist, und wo $p + q = n$.

Wieder erhält man $\sigma \in C_p(X)$ als $C_p(\sigma)(\text{id}_{\Delta_p})$ und $\tau \in C_q(Y)$ als $C_q(\tau)(\text{id}_{\Delta_q})$, und somit ist

$$\sigma \otimes \tau = (C_p(\sigma) \otimes C_q(\tau))(\text{id}_{\Delta_p} \otimes \text{id}_{\Delta_q}) = F(\sigma, \tau)(\text{id}_{\Delta_p} \otimes \text{id}_{\Delta_q}),$$

wo

$$\text{id}_{\Delta_p} \otimes \text{id}_{\Delta_q} \in C_p(\Delta_p) \otimes C_q(\Delta_q) \subseteq (C_*(\Delta_p) \otimes C_*(\Delta_q))_n = F(\Delta_p, \Delta_q)$$

und dort als „Standardkette“ fungiert.

Diesmal haben wir mehr als ein Modell. Nach der Beschreibung der Basen für die Gruppen $F(X, Y)$ ist F frei mit Modellen in

$$\mathcal{M} = \{ (\Delta_p, \Delta_q) \mid p + q = n \}$$

und sie hat die \mathcal{M} -Menge

$$\mathcal{B} = \{ ((\Delta_p, \Delta_q), \text{id}_{\Delta_p} \otimes \text{id}_{\Delta_q}) \mid p + q = n \}$$

als Basis.

- d) Beispiel c) können wir leicht verallgemeinern zum Tensorprodukt von mehr als zwei Kettenkomplexen. Für eine natürliche Zahl k definieren wir die Kategorie

$$Top^{(k)} := \underbrace{Top \times Top \times \cdots \times Top}_k$$

und nehmen diese jetzt als die Kategorie \mathcal{K} .

Wir wählen eine natürliche Zahl n und definieren F als den Funktor

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_k) &= (C_*(X_1) \otimes C_*(X_2) \otimes \dots \otimes C_*(X_k))_n \\ &= \bigoplus_{\substack{(p_1, \dots, p_k) \in \mathbf{N}^k \\ p_1 + \dots + p_k = n}} C_{p_1}(X_1) \otimes C_{p_2}(X_2) \otimes \dots \otimes C_{p_k}(X_k), \end{aligned}$$

der n -te homogene Anteil des Tensorprodukts der singulären Kettenkomplexe eines k -Tupels von Räumen.

Aus den gleichen Gründen wie in Beispiel c) ist $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ frei und wird erzeugt von allen Tensorprodukten von singulären Simplexes in den einzelnen Räumen X_i , deren Dimensionen sich zu n summieren.

Hieraus folgt wie in Teil c), dass eine Basis für F im Sinne von Definition 12.16 gegeben wird durch die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ ((\Delta_{p_1}, \dots, \Delta_{p_k}), \text{id}_{\Delta_{p_1}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{\Delta_{p_k}}) \mid p_1 + \dots + p_k = n \right\}$$

und F ist frei mit Modellen in

$$\mathcal{M} = \{ (\Delta_{p_1}, \dots, \Delta_{p_k}) \mid p_1 + \dots + p_k = n \}.$$

Der Begriff einer Kategorie \mathcal{K} mit Modellen \mathcal{M} und eines freien Funktors $\mathcal{K} \rightarrow \text{AbGp}$ mit Modellen in \mathcal{M} formalisiert also eine Struktur, die wir in der Vergangenheit immer wieder ausgenutzt haben, um Konstruktionen auf Kettenkomplexen zu erklären und natürliche Transformationen zwischen Kettenkomplexfunktoren zu definieren. Genau zu diesem Zweck, aber in einem allgemeinen Rahmen, wollen wir diese Struktur jetzt benutzen.

Lemma 12.18 *Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ eine Kategorie mit Modellen und seien F und G zwei kovariante Funktoren $\mathcal{K} \rightarrow \text{AbGp}$.*

Der Funktor F sei frei mit Modellen in \mathcal{M} und es sei \mathcal{B} eine \mathcal{M} -Basis für F . Für jedes Paar $(M, m) \in \mathcal{B}$ sei ein Element g_m^M der Gruppe $G(M)$ gegeben.

Dann gibt es genau eine natürliche Transformation $\varphi: F \rightarrow G$, so dass für jedes Paar $(M, m) \in \mathcal{B}$ gilt

$$\varphi(M)(m) = g_m^M. \quad (12.39)$$

Ferner, wenn H ein weiterer Funktor $\mathcal{K} \rightarrow \text{AbGp}$ ist und wenn natürliche Transformationen $\psi: F \rightarrow H$ und $\chi: G \rightarrow H$ gegeben sind, so dass

$$\chi(M)(g_m^M) = \psi(M)(m) \quad (12.40)$$

für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}$, dann ist

$$\psi = \chi \circ \varphi. \quad (12.41)$$

Beweis. Sei C ein beliebiges Objekt von \mathcal{K} . Die Gruppe $F(C)$ wird frei erzeugt von allen Elementen $F(\sigma)(m)$, wo m zu einem Paar $(M, m) \in \mathcal{B}$ gehört (und somit ein Element von $F(M)$ ist) und wo σ ein \mathcal{K} -Morphismus $M \rightarrow C$ ist.

Wir definieren $\varphi(C)$ als den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $F(C) \rightarrow G(C)$, dessen Verhalten auf den oben beschriebenen Basiselementen von $F(C)$ gegeben ist durch

$$\varphi(C)(F(\sigma)(m)) = G(\sigma)(g_m^M) \in G(C). \quad (12.42)$$

Wir müssen nachprüfen, dass die so definierte Familie von Gruppenhomomorphismen φ tatsächlich eine natürliche Transformation ist.

Dazu sei D ein weiteres Objekt von \mathcal{K} und sei $f: C \rightarrow D$ ein \mathcal{K} -Morphismus. Für jedes Basiselement $F(\sigma)(m)$ von $F(C)$ rechnen wir sofort nach, dass

$$\begin{aligned} (G(f) \circ \varphi(C))(F(\sigma)(m)) &= G(f)(\varphi(C)(F(\sigma)(m))) \\ &\stackrel{(12.42)}{=} G(f)(G(\sigma)(g_m^M)) \\ &= (G(f \circ \sigma))(g_m^M) \\ &\stackrel{(12.42)}{=} \varphi(D)(F(f \circ \sigma)(m)) \\ &= (\varphi(D) \circ F(f))(F(\sigma)(m)) \end{aligned}$$

Auf den Basiselementen der Gruppe $F(C)$ gilt also

$$G(f) \circ \varphi(C) = \varphi(D) \circ F(f)$$

und somit gilt diese Relation auf der ganzen Gruppe $F(C)$ und φ ist eine natürliche Transformation.

Jede natürliche Transformation $\tilde{\varphi}: F \rightarrow G$, die (12.39) erfüllt, muss auch (12.42) erfüllen und somit gleich φ sein, denn wegen der Natürlichkeit muss für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}$ und für jeden Morphismus $\sigma: M \rightarrow C$ gelten

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(C)(F(\sigma)(m)) &= (\tilde{\varphi}(C) \circ F(\sigma))(m) \\ &\stackrel{\text{nat.}}{=} (G(\sigma) \circ \tilde{\varphi}(M))(m) \\ &= G(\sigma)(\tilde{\varphi}(M)(m)) \\ &\stackrel{(12.39)}{=} G(\sigma)(g_m^M). \end{aligned}$$

Also gibt es eine *eindeutige* natürliche Transformation, die (12.39) für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}$ erfüllt.

Aus dieser Eindeutigkeit folgt auch (12.41), denn Einsetzen von (12.39) in (12.40) ergibt sofort, dass für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}$ gilt

$$\psi(M)(m) = \chi(M)(\varphi(M)(m)),$$

womit ψ und $\chi \circ \varphi$ die gleiche natürliche Transformation sein müssen. ■

Satz 12.19 (Satz über azyklische Modelle) Sei \mathcal{K} eine Kategorie und seien F und A kovariante Funktoren $\mathcal{K} \rightarrow KK$ mit

$$F_n = A_n = \{0\} \quad \text{für alle } n < 0.$$

(F_n und A_n sind der n -te homogene Anteil, also die n -te Kettengruppe der Kettenkomplexe F bzw. A .)

Für jedes $n \geq 0$ sei F_n frei mit Modellen in einer Teilmenge $\mathcal{M}_n \subseteq \text{Ob}(\mathcal{K})$, und für jedes $n > 0$ gelte

$$H_n(A(M)) = \{0\} \tag{12.43}$$

für jedes Objekt $M \in \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n+1}$.

a) Sei

$$\varphi_0: F_0 \rightarrow A_0$$

eine natürliche Transformation, so dass für jedes Objekt C von \mathcal{K} gilt

$$\varphi_0(C)(B_0(F(C))) \subseteq B_0(A(C)). \tag{12.44}$$

Dann gibt es eine natürliche Kettenabbildung

$$\varphi: F \rightarrow A,$$

die in Dimension 0 mit der vorgegebenen natürlichen Transformation φ_0 übereinstimmt.

Je zwei solche Erweiterungen von φ_0 zu einer natürlichen Kettenabbildung sind kettenhomotop vermöge einer natürlichen Kettenhomotopie

$$\Psi: F \rightarrow A$$

mit $\Psi_0 = 0$.

b) Sei

$$f: H_0 F \longrightarrow H_0 A$$

eine natürliche Transformation.

Dann gibt es eine natürliche Kettenabbildung

$$\varphi: F \longrightarrow A,$$

so dass

$$H_0(\varphi) = f,$$

und je zwei solche Kettenabbildungen sind natürlich kettenhomotop.

Beweis. Den (natürlichen) Randoperator von F werden wir mit ∂^F bezeichnen, und entsprechend mit ∂^A den Randoperator von A .

Um nicht in Notation zu ertrinken, schreiben wir bei der Anwendung natürlicher Transformationen in diesem Beweis die Namen der involvierten Objekte von \mathcal{K} nicht mit; in anderen Worten, wenn ν eine natürliche Transformation von F nach A ist, wenn X ein Objekt von \mathcal{K} ist, und wenn $x \in F(X)$, so schreiben wir für den Wert des Homomorphismus $\nu(X): F(X) \longrightarrow A(X)$ auf diesem Element einfach $\nu(x)$ und nicht die volle Notation $\nu(X)(x)$. Obwohl das theoretisch zu Zweideutigkeiten führen könnte (wenn die Objektzuordnung von F nicht injektiv ist), macht es in der Praxis keine Probleme, weil man immer versteht und ergänzen könnte, was wirklich gemeint ist.

Wir beginnen den Beweis mit Teil a) und beweisen als Erstes die Existenzbehauptung, in dem wir durch Induktion für jedes $n \in \mathbf{N}$ eine natürliche Transformation $\varphi_n: F_n \longrightarrow A_n$ konstruieren, so dass

$$\partial_n^A \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \partial_n^F. \quad (12.45)_n$$

Für negative n müssen wir natürlich $\varphi_n = \mathbf{0}$ setzen, da nach Voraussetzung die negativdimensionalen Kettengruppen alle $\{0\}$ sind.

Um die Induktion zu beginnen, nehmen wir für $n = 0$ das vorgegebene φ_0 , welches $(12.45)_0$ automatisch erfüllt, da für beide Kettenkomplexfunktor $\partial_0 = \mathbf{0}$ ist.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass $n \geq 0$ und dass für jedes $k \leq n$ eine natürliche Transformation $\varphi_k: F_k \longrightarrow A_k$ schon gegeben ist, so dass $(12.45)_p$ erfüllt ist für jedes $p \leq n$.

Wir wollen eine natürliche Transformation $\varphi_{n+1}: F_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$ definieren, die $(12.45)_{n+1}$ erfüllt.

F_{n+1} ist frei mit Modellen in \mathcal{M}_{n+1} , also sei \mathcal{B}_{n+1} eine \mathcal{M}_{n+1} -Basis für F_{n+1} . Für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}_{n+1}$ ist $m \in F_{n+1}(M)$ und $\partial_{n+1}^F m$ ist ein Rand und somit auch ein Zyklus in $F_n(M)$. Weil φ_n nach der Induktionsannahme

die Bedingung $(12.45)_n$ erfüllt, ist klar, dass auch $\varphi_n(\partial_{n+1}^F m) \in A_n(M)$ ein Zyklus ist.

Wenn $n > 0$, dann ist $H_n(A(M)) = \{0\}$ nach Voraussetzung (12.43) des Satzes (hier ist $M \in \mathcal{M}_{n+1}$), und der Zyklus $\varphi_n(\partial_{n+1}^F m)$ muss gleichzeitig ein Rand sein. Auch für $n = 0$ ist $\varphi_0(\partial_1^F m)$ ein Rand, in diesem Fall nach Voraussetzung (12.44). In allen Fällen kann man also ein Element $a_m \in A_{n+1}(M)$ wählen mit

$$\varphi_n(\partial_{n+1}^F m) = \partial_{n+1}^A(a_m). \quad (12.46)$$

Nach Lemma 12.18 gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Transformation $\varphi_{n+1}: F_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$, so dass

$$\varphi_{n+1}(m) = a_m \quad (12.47)$$

für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}_{n+1}$.

Ferner, die Randoperatoren der Kettenkomplexfunktor F und A sind natürliche Transformationen (gerade weil F und A kettenkomplexwertige Funktoren sind). Nach dem zweiten Teil von Lemma 12.18, mit ∂_{n+1}^A in der Rolle von χ und $\varphi_n \circ \partial_{n+1}^F$ in der Rolle von ψ , folgt mit Gleichung (12.41), dass

$$\varphi_n \circ \partial_{n+1}^F = \partial_{n+1}^A \circ \varphi_{n+1},$$

so dass $(12.45)_{n+1}$ wie gewünscht erfüllt ist.

Durch Induktion erhalten wir für alle $n \in \mathbf{Z}$ natürlichen Homomorphismen $\varphi_n: F_n \longrightarrow A_n$, die, weil sie die Gleichungen (12.45) erfüllen, sich zu einer natürlichen Kettenabbildung $\varphi: F \longrightarrow A$ zusammensetzen. Und nach Konstruktion erweitert φ wie verlangt den gegebenen natürlichen Homomorphismus $\varphi_0: F_0 \longrightarrow A_0$.

Nun sei $\psi: F \longrightarrow A$ eine zweite natürliche Kettenabbildung mit $\psi_0 = \varphi_0$. Wir müssen eine natürliche Kettenhomotopie Ψ zwischen φ und ψ konstruieren, mit $\Psi_0 = \mathbf{0}$.

Auch diese Konstruktion machen wir durch Induktion und nach genau dem gleichen Prinzip wie beim Beweis der Existenz von φ . Wir konstruieren für jedes $n \in \mathbf{Z}$ eine natürliche Transformation $\Psi_n: F_n \longrightarrow A_{n+1}$, so dass

$$\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1}^A \circ \Psi_n + \Psi_{n-1} \circ \partial_n^F. \quad (12.48)_n$$

Für negative n müssen wir natürlich $\Psi_n = \mathbf{0}$ setzen, da nach Voraussetzung die negativdimensionalen Kettengruppen alle $\{0\}$ sind.

Um die Induktion zu beginnen, nehmen wir für $n = 0$ auch wie gewünscht $\Psi_0 = 0$, welches $(12.48)_0$ automatisch erfüllt, da $\psi_0 = \varphi_0$ ist.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass $n > 0$ und dass für jedes $k < n$ eine natürliche Transformation $\Psi_k: F_k \longrightarrow A_{k+1}$ schon gegeben ist, so dass $(12.48)_p$ erfüllt ist für jedes $p < n$.

Wir wollen eine natürliche Transformation $\Psi_n: F_n \longrightarrow A_{n+1}$ definieren, die mit Ψ_{n-1} zusammen $(12.48)_n$ erfüllt.

F_n ist frei mit Modellen in \mathcal{M}_n . Sei \mathcal{B}_n eine \mathcal{M}_n -Basis für F_n . Für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}_n$ ist $m \in F_n(M)$. Wir betrachten dazu das Element

$$c_m := \psi_n(m) - \varphi_n(m) - \Psi_{n-1}(\partial_n^F m) \in A_n(M).$$

Dieses Element ist ein Zyklus in $A_n(M)$, denn aus $(12.48)_{n-1}$ und der Kettenabbildungseigenschaft für ψ und φ erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_n^A(c_m) &= \partial_n^A \psi_n(m) - \partial_n^A \varphi_n(m) - \partial_n^A \Psi_{n-1}(\partial_n^F m) \\ &= \psi_{n-1}(\partial_n^F m) - \varphi_{n-1}(\partial_n^F m) - \partial_n^A \Psi_{n-1}(\partial_n^F m) \\ &= \Psi_{n-2}(\partial_{n-1}^F \partial_n^F m) \quad (\text{wegen } (12.48)_{n-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da $M \in \mathcal{M}_n$, ist $H_n(A(M)) = \{0\}$ nach Voraussetzung (12.43) des Satzes, und der Zyklus c_m muss gleichzeitig ein Rand sein. Also kann man ein Element $b_m \in A_{n+1}(M)$ wählen mit

$$c_m := \psi_n(m) - \varphi_n(m) - \Psi_{n-1}(\partial_n^F m) = \partial_{n+1}^A(b_m). \quad (12.49)$$

Nach Lemma 12.18 gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Transformation $\Psi_n: F_n \longrightarrow A_{n+1}$, so dass

$$\Psi_n(m) = b_m \quad (12.50)$$

für jedes $(M, m) \in \mathcal{B}_n$.

Nach dem zweiten Teil von Lemma 12.18, mit ∂_{n+1}^A in der Rolle von χ und der natürlichen Transformation $\psi_n - \varphi_n - \Psi_{n-1} \circ \partial_n^F$ in der Rolle von ψ , folgt mit Gleichung (12.41), dass

$$\psi_n - \varphi_n - \Psi_{n-1} \circ \partial_n^F = \partial_{n+1}^A \circ \Psi_n,$$

und dies ist äquivalent zu $(12.48)_n$.

Durch Induktion erhalten wir für alle $n \in \mathbf{Z}$ natürlichen Homomorphismen $\Psi_n: F_n \longrightarrow A_{n+1}$, die, weil sie die Gleichungen (12.48) erfüllen, sich zu einer natürlichen Kettenhomotopie zwischen φ und ψ zusammensetzen. Und nach Konstruktion ist $\Psi_0 = \mathbf{0}$.

Damit haben wir Teil a) vollständig bewiesen.

Teil b) lässt sich leicht aus Teil a) schließen. Dazu ergänzen wir die Kettenkomplexfunktoren F und A in Dimension -1 durch eine weitere Kettengruppe $\tilde{F}_{-1} := H_0 F$ bzw. $\tilde{A}_{-1} := H_0 A$. Für die ursprünglichen Funktoren,

die in allen negativen Dimensionen $\{0\}$ waren, waren alle 0-Ketten Zyklen, und in den ergänzten Funktoren nehmen wir die Projektionen

$$\pi_F: F_0 = Z_0 F \longrightarrow H_0 F \quad \text{und} \quad \pi_A: A_0 = Z_0 A \longrightarrow H_0 A$$

als neue Randoperatoren in Dimension 0. Da diese Projektionen auf Rändern verschwinden, ist ihre Verknüpfung mit ∂_1 tatsächlich $\mathbf{0}$, wie es sich für einen Randoperator gehört.

Die ergänzten Kettenkomplexfunktoren nennen wir \tilde{F} und \tilde{A} ; sie unterscheiden sich von F und A nur durch die -1 -te Kettengruppe und den 0 -ten Randoperator.

Wir wenden Teil a) nun auf die wie in Definition 11.20 in der Graduierung um eine Stufe verschobenen Funktoren \tilde{F}_+ und \tilde{A}_+ , mit f in der Rolle von φ_0 .

Nach Teil a) ergänzt sich f zu einer natürlichen Kettenabbildung

$$\tilde{\varphi}_+: \tilde{F}_+ \longrightarrow \tilde{A}_+,$$

die wir in der ursprünglichen Graduierung als eine Kettenabbildung $\tilde{F} \longrightarrow \tilde{A}$ auffassen können und zu einer Kettenabbildung $\varphi: F \longrightarrow A$ einschränken können, wenn wir die -1 -te Kettengruppe wieder zu $\{0\}$ machen.

Weil das Quadrat

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}_0 = F_0 = Z_0 F & \xrightarrow{\pi_F} & H_0 F \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow f = \tilde{\varphi}_{-1} \\ \tilde{A}_0 = A_0 = Z_0 A & \xrightarrow{\pi_A} & H_0 A \end{array} \quad (12.51)$$

kommutiert, gilt wie gewünscht, dass $H_0(\varphi) = f$.

Ferner, jede natürliche Kettenabbildung $\psi: F \longrightarrow A$ mit $H_0(\psi) = f$ lässt sich durch f zu einem kommutativen Quadrat (12.51) (mit ψ anstelle von φ) ergänzen und durch diese Ergänzung und Verschiebung der Graduierung zu einer natürlichen Kettenabbildung

$$\tilde{\psi}_+: \tilde{F}_+ \longrightarrow \tilde{A}_+$$

machen mit

$$(\tilde{\psi}_+)_0 = f = (\tilde{\varphi}_+)_0.$$

Nach der zweiten Behauptung aus Teil a) sind $\tilde{\varphi}_+$ und $\tilde{\psi}_+$ kettenhomotop durch eine natürliche Kettenhomotopie $\tilde{\Psi}_+$ mit $(\tilde{\Psi}_+)_0 = \mathbf{0}$. Wegen dieser letzten Bedingung liefert $\tilde{\Psi}_+$ nach Rückverschiebung der Graduierung und

Entfernung der -1 -ten Kettengruppen immer noch eine (natürliche) Kettenhomotopie Ψ zwischen φ und ψ .

Damit ist Teil b) bewiesen. ■

Dieser Satz macht es uns jetzt sehr einfach, ein Kettenhomotopieinverses zur Alexander-Whitney Abbildung zu finden (aber hilft uns leider nicht, diese inverse Abbildung wirklich auszurechnen!).

Lemma und Definition 12.20 *Seien X und Y topologische Räume. Es gibt eine natürliche Kettenabbildung*

$$EZ: C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

mit der Eigenschaft, dass für jeden 0-Simplex (also Punkt) $x \in X$ und für jeden 0-Simplex $y \in Y$ gilt

$$EZ(x \otimes y) = (x, y) \in C_0(X \times Y). \quad (12.52)$$

Diese natürliche Transformation ist eindeutig bestimmt bis auf natürliche Kettenhomotopie.

*Die natürlichen Transformationen EZ werden **Eilenberg-Zilber Abbildungen** genannt.*

Die Eilenberg-Zilber Abbildungen sind natürliche Kettenhomotopieinverse zur Alexander-Whitney Abbildung

$$\eta: C_*(X \times Y) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

aus Definition 12.14.

Insbesondere sind die Alexander-Whitney Abbildung und die Eilenberg-Zilber Abbildungen natürliche Kettenhomotopieäquivalenzen.

Beweis. In Dimension 0 gilt offensichtlich

$$(C_*(X) \otimes C_*(Y))_0 = C_0(X) \otimes C_0(Y).$$

Da $C_0(X)$ die freie abelsche Gruppe ist, die von allen 0-Simplizes, also von allen Punkten von X erzeugt wird, und da $C_0(Y)$ die freie abelsche Gruppe ist, die von allen Punkten von Y erzeugt wird, wird $C_0(X) \otimes C_0(Y)$ frei erzeugt von allen Tensorprodukten $x \otimes y$ für $x \in X$ und $y \in Y$.

Es gibt also für jedes Paar (X, Y) von topologischen Räumen einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $EZ_0: C_0(X) \otimes C_0(Y) \longrightarrow C_0(X \times Y)$, der auf den Erzeugenden $x \otimes y$ die in (12.52) geforderten Werte annimmt.

Und es ist sehr einfach nachzuprüfen, dass diese Familie von Gruppenhomomorphismen eine natürliche Transformation zwischen dem auf $Top \times Top$ definierten Funktor $C_0(X) \otimes C_0(Y)$ und dem Funktor $C_0(X \times Y)$ bildet.

Denn ein Paar von stetigen Abbildungen (also ein $Top \times Top$ Morphismus) $(f, g): (X, Y) \longrightarrow (X', Y')$ induziert den Homomorphismus

$$f_{\#} \otimes g_{\#}: C_0(X) \otimes C_0(Y) \longrightarrow C_0(X') \otimes C_0(Y'),$$

der $x \otimes y$ nach $f(x) \otimes g(y)$ abbildet, und den Homomorphismus

$$(f \times g)_{\#}: C_0(X \times Y) \longrightarrow C_0(X' \times Y'),$$

der (x, y) nach $(f(x), g(y))$ abbildet.

EZ_0 kommutiert offensichtlich mit diesen Homomorphismen und ist somit eine natürliche Transformation.

Wir wollen nun EZ_0 (das (12.52) erfüllt) zu einer natürlichen Kettenabbildung

$$EZ: C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

erweitern, und das können wir mit dem Satz über azyklische Modelle machen.

Zunächst stellen wir fest, dass die allgemeinen Voraussetzungen für die Anwendung von Satz 12.19 erfüllt sind.

Beide Funktoren $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ und $C_*(X \times Y)$ haben triviale Kettengruppen in negativen Dimensionen.

Nach Beispiel 12.17 c) ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ der auf $Top \times Top$ definierte Funktor $(C_*(X) \otimes C_*(Y))_n$ frei mit Modellen in

$$\mathcal{M}_n = \{ (\Delta_p, \Delta_q) \mid p + q = n \},$$

und für diese Modelle gilt $H_k(\Delta_p \times \Delta_q) = \{0\}$ für jedes $k > 0$, weil $\Delta_p \times \Delta_q$ zusammenziehbar ist.

Auch die weiteren Voraussetzungen für die Anwendung von Teil a) von Satz 12.19 sind erfüllt.

Die eindimensionale Kettengruppe des Tensorproduktes

$$(C_*(X) \otimes C_*(Y))_1 = (C_1(X) \otimes C_0(Y)) \oplus (C_0(X) \otimes C_1(Y))$$

wird frei erzeugt von allen Tensorprodukten von 1-Simplizes in einem der beiden Räumen mit einem 0-Simplex in dem anderen Raum.

Wenn σ ein 1-Simplex in X ist und y ein 0-Simplex in Y , so erhalten wir einen 1-Simplex σ_y in $X \times Y$ durch die Abbildung $\sigma_y(t) := (\sigma(t), y)$ für alle $t \in \Delta_1$.

Es ist

$$\begin{aligned} (\partial_X \odot \partial_Y)(\sigma \otimes y) &= \partial_X \sigma \otimes y - \sigma \otimes \partial_Y y \\ &= \sigma(1) \otimes y - \sigma(0) \otimes y - \sigma \otimes 0 \\ &= \sigma(1) \otimes y - \sigma(0) \otimes y \end{aligned}$$

und EZ_0 bildet diese Kette ab in

$$(\sigma(1), y) - (\sigma(0), y) = \partial\sigma_y.$$

Wenn x ein 0-Simplex in X ist und τ ein 1-Simplex in Y , so erhalten wir einen 1-Simplex τ_x in $X \times Y$ durch die Abbildung $\tau_x(t) := (x, \tau(t))$ für alle $t \in \Delta_1$.

Es ist

$$\begin{aligned} (\partial_X \odot \partial_Y)(x \otimes \tau) &= \partial_X x \otimes \tau + x \otimes \partial_Y \tau \\ &= 0 \otimes \tau + x \otimes \tau(1) - x \otimes \tau(0) \\ &= x \otimes \tau(1) - x \otimes \tau(0) \end{aligned}$$

und EZ_0 bildet diese Kette ab in

$$(x, \tau(1)) - (x, \tau(0)) = \partial\tau_x.$$

D.h., der Rand jedes Erzeugende von $(C_*(X) \otimes C_*(Y))_1$ wird durch EZ_0 in einen Rand in $C_0(X \times Y)$ abgebildet. Die natürliche Transformation EZ_0 erfüllt also Bedingung (12.44) in den Voraussetzungen für Satz 12.19.

Es sind also alle Voraussetzungen für Satz 12.19, Teil a) erfüllt und nach diesem Satz erweitert sich EZ_0 zu einer natürlichen Kettenabbildung

$$EZ: C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y),$$

die eindeutig ist bis auf natürliche Kettenhomotopie.

Wir müssen noch zeigen, dass jede solche Kettenabbildung EZ eine Kettenhomotopieinverse zur Alexander-Whitney Abbildung η ist.

Aus Gleichung (12.37) in Bemerkung 12.15 und aus Gleichung (12.52) ist klar, dass η_0 und EZ_0 zueinander inverse natürliche Isomorphismen sind. Also sind $EZ \circ \eta$ und $\eta \circ EZ$ natürliche Kettenabbildungen, die in Dimension 0 die Identität der jeweiligen 0-ten Kettengruppe sind. Deshalb (aber auch schon weil sie Kettenabbildungen sind) bilden sie Ränder wieder in Ränder ab und erfüllen somit Bedingung (12.44) in den Voraussetzungen für Satz 12.19, Teil a).

Nach Beispiel 12.17 b) ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ der auf $Top \times Top$ definierte Funktor $C_n(X \times Y)$ frei mit genau einem Modell

$$(\Delta_n, \Delta_n),$$

und für dieses Modell ist $H_k(C_*(\Delta_n \times \Delta_n)) = H_k(\Delta_n \times \Delta_n) = \{0\}$ für jedes $k > 0$, weil $\Delta_n \times \Delta_n$ zusammenziehbar ist.

Dies besagt, dass die allgemeinen Voraussetzungen des Satzes über azyklische Modelle erfüllt sind wenn der Funktor $C_*(X \times Y)$ gleichzeitig die Rolle von F und von A übernimmt und wenn es darum geht, natürliche Transformationen von diesem Funktor in sich zu konstruieren. Jetzt folgt aus Satz 12.19, Teil a), dass $\text{id}_{C_0(X \times Y)}$ sich eindeutig (bis auf Kettenhomotopie) zu einer natürlichen Kettenabbildung

$$C_*(X \times Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

erweitert.

Aber $\text{EZ} \circ \eta$ ist eine solche Erweiterung und $\text{id}_{C_*(X \times Y)}$ ist auch eine. Also ist $\text{EZ} \circ \eta \simeq \text{id}_{C_*(X \times Y)}$, nach der Eindeutigkeitsaussage.

Nach Beispiel 12.17 c) ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ der auf $\text{Top} \times \text{Top}$ definierte Funktor $(C_*(X) \otimes C_*(Y))_n$ frei mit Modellen in

$$\mathcal{M}_n = \{ (\Delta_p, \Delta_q) \mid p + q = n \},$$

und für diese Modelle gilt $H_k(C_*(\Delta_p) \otimes C_*(\Delta_q)) = \{0\}$ für jedes $k > 0$ auf Grund von Korollar 12.8, denn Δ_p und Δ_q sind azyklisch.

Dies besagt, dass die allgemeinen Voraussetzungen des Satzes über azyklische Modelle erfüllt sind wenn der Funktor $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ gleichzeitig die Rolle von F und von A übernimmt und wenn es darum geht, natürliche Transformationen von diesem Funktor in sich zu konstruieren. Aus Satz 12.19, Teil a) folgt, dass $\text{id}_{(C_0(X \times Y))_0}$ sich zu einer natürlichen Kettenabbildung

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

erweitert und dass je zwei solche Erweiterungen natürlich kettenhomotop sind.

Aber $\eta \circ \text{EZ}$ und $\text{id}_{C_*(X) \otimes C_*(Y)}$ sind solche Erweiterungen, und sie sind deshalb natürlich kettenhomotop zueinander.

Damit ist der Nachweis erbracht, dass η und EZ natürliche Kettenhomotopieinverse voneinander sind und insbesondere natürliche Kettenhomotopieäquivalenzen sind. ■

Ein sofortiges nützliches Korollar von diesem Lemma ist, dass man die Homologie eines Produktraumes $X \times Y$ mit dem Tensorprodukt der singulären Kettenkomplex von X und von Y ausrechnen kann (sofern man in diesem Tensorprodukt zu rechnen weiß!). Eine noch schönere Konsequenz ist, dass man im Künnethsatz 12.7 die bisher nicht sehr bedeutungsvolle Homologie des Tensorproduktes $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ durch die doch etwas interessantere Homologie von $X \times Y$ ersetzen kann:

Satz 12.21 (Universeller Koeffizientensatz für Produkträume)

Seien X und Y topologische Räume. Dann gibt es eine natürliche kurze exakte Folge

$$\{0\} \rightarrow H_*(X) \otimes H_*(Y) \xrightarrow[\text{Grad } 0]{\kappa} H_*(X \times Y) \xrightarrow[-1]{\text{Grad}} \text{Tor}(H_*(X), H_*(Y)) \rightarrow \{0\}, \quad (12.53)$$

in der κ folgende Gestalt hat: ist $\gamma \in H_*(X)$ und $z \in Z_*(X)$ ein Zyklus mit $\gamma = [z]$, und ist $\omega \in H_*(Y)$ und $w \in Z_*(Y)$ ein Zyklus mit $\omega = [w]$, dann ist

$$\kappa(\gamma \otimes \omega) = EZ_*[z \otimes w], \quad (12.54)$$

wo EZ eine Eilenberg-Zilber Abbildung für das Paar (X, Y) ist.

Diese Folge spaltet, aber nicht natürlich.

Beweis. Die Eilenberg-Zilber Kettenabbildung

$$EZ: C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

ist eine Kettenhomotopieäquivalenz und induziert somit einen Isomorphismus in Homologie.

Die Aussage folgt jetzt sofort aus der Aussage von Satz 12.7 für die Kettenkomplexe $\mathcal{C} = C_*(X)$ und $\mathcal{D} = C_*(Y)$, wenn man vermöge des natürlichen Isomorphismus EZ_* die mittlere Gruppe $H(C_*(X) \otimes C_*(Y))$ durch die dazu isomorphe Gruppe $H_*(X \times Y)$ ersetzt.

Satz 12.7 ist anwendbar, weil $C_*(X)$ frei ist. Die Folge spaltet, weil auch $C_*(Y)$ frei ist. Die Beschreibung von κ folgt sofort aus Gleichung (12.8), die angibt, wie der Homomorphismus α in Formel (12.7) aussieht, denn nach Konstruktion ist $\kappa = EZ_* \circ \alpha$. ■

Beispiele 12.22 a) Seien $m \neq n$ positive natürliche Zahlen. Dann ist

$$H_k(S^m \times S^n) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0, m, n \text{ oder } m + n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.55)$$

b) Sei n eine positive natürliche Zahl. Dann ist

$$H_k(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = n; \\ \mathbf{Z}, & \text{wenn } k = 2n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.56)$$

- c) Sei n eine positive natürliche Zahl. Der n -**dimensionale Torus** T^n ist das Produkt

$$T^n = (S^1)^n$$

von n Kopien des Kreises S^1 . Es gilt

$$H_k(T^n) = \begin{cases} \mathbf{Z}^{\binom{n}{k}}, & \text{wenn } 1 \leq k \leq n; \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.57)$$

Beweis. Diese Berechnungen sind ganz einfach, wenn man die richtige Darstellung wählt. Die Homologie von S^n ist eine graduierte abelsche Gruppe mit zwei Summanden \mathbf{Z} , einem in Dimension 0 und einem in Dimension n . Weil diese Gruppe frei ist, verschwindet der Tor-Term in der universellen Koeffizientenfolge (12.53) für ein Produkt $X \times Y$, in dem ein Faktor eine Sphäre ist, und in diesem Fall ist $H_*(X \times Y) \cong H_*(X) \otimes H_*(Y)$.

Für ein kartesisches Produkt von Sphären ist die Homologie also ein Tensorprodukt von graduierten abelschen Gruppen, die nur Summanden \mathbf{Z} besitzen. Weil $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ ist ein solches Tensorprodukt auch eine direkte Summe von Summanden \mathbf{Z} , die entstehen als Tensorprodukte der Summanden \mathbf{Z} der einzelnen Sphären im kartesischen Produkt, und deren Grad oder Dimension die Summe der Grade der tensorierten Summanden \mathbf{Z} der einzelnen Faktoren ist.

Dies ist aber auch genau die Regel, die die Multiplikation von Polynomen beschreibt und die Exponenten von Produkten von Monomen. Wenn wir die Homologie von S^n durch das Polynom $1 + X^n$ beschreiben, so stellt jedes Monom einen Summanden \mathbf{Z} der Homologie dar und der Exponent gibt die Dimension dieses Summanden wieder.

Die Homologie eines Produktes von Sphären wird dann durch das Produkt der assoziierten Polynome beschrieben, wo der Exponent jedes Monoms die Dimension der zugehörigen Summanden \mathbf{Z} darstellt und der Koeffizient des Monoms die Anzahl der Summanden \mathbf{Z} von dieser Dimension angibt.

Die Angaben oben folgen nun sofort in Teil a) aus der Tatsache, dass

$$(1 + X^m)(1 + X^n) = 1 + X^m + X^n + X^{m+n},$$

in Teil b) aus der Tatsache, dass

$$(1 + X^n)^2 = 1 + 2X^n + X^{2n},$$

und in Teil c) aus der Tatsache, dass

$$(1 + X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$$

nach der binomischen Formel. ■

Die bisher eingesetzten Ideen, die natürlichen Kettenhomotopieäquivalenzen AW und EZ, und die universelle Koeffizientenfolge (12.53) für Produkte sind nicht nur nützlich zur Berechnung der Homologie von Produkträumen, sondern auch für einen ganz anderen, viel interessanteren Zweck. Mit ihrer Hilfe kann man nämlich auch Produkte von Homologieklassen oder von Kohomologieklassen bilden und insbesondere die graduierte Kohomologiegruppe eines topologischen Raumes X (mit Koeffizienten in einem Ring R) selber mit einer Ringstruktur versehen, die diese graduierte additive Gruppe zum **graduierten Kohomologiering** von X mit Koeffizienten in R verwandelt. Die Ringstruktur erfasst mitunter geometrische Eigenschaften des Raumes, die der additiven Struktur verborgen bleiben.

Der am einfachsten zu konstruierende von diesen Produkten (aber dafür der unpraktischste) ist ein Produkt von Homologieklassen, der allerdings nicht seinen Wert in der Homologie des gleichen Raumes nimmt, auf denen die Faktorklassen definiert sind, sondern in der Homologie des kartesischen Produktes dieser Räume:

Definition 12.23 Seien X und Y topologische Räume und seien $\alpha \in H_p(X)$ und $\beta \in H_q(Y)$.

Wir definieren das **Homologiekreuzprodukt** von α und β als die Klasse

$$\alpha \times \beta = \kappa(\alpha \otimes \beta) \in H_{p+q}(X \times Y), \quad (12.58)$$

wo $\kappa: H_*(X) \otimes H_*(Y) \longrightarrow H_*(X \times Y)$ die linke Abbildung in der universellen Koeffizientenfolge (12.53) des Produktes $X \times Y$ ist.

Nach der Beschreibung von κ in Satz 12.21 folgt, dass für Zyklen $z \in Z_p(X)$ und $w \in Z_q(Y)$ gilt

$$[z] \times [w] = \text{EZ}_*[z \otimes w] = [\text{EZ}(z \otimes w)]. \quad (12.59)$$

Lemma 12.24 Seien X, Y und Z topologische Räume. Seien α und α' aus $H_p(X)$, seien β und $\beta' \in H_q(Y)$ und sei $\gamma \in H_r(Z)$.

a) \times ist natürlich, d.h., sind X' und Y' weitere topologische Räume und sind $f: X \longrightarrow X'$ und $g: Y \longrightarrow Y'$ stetige Abbildungen, so ist

$$(f \times g)_*(\alpha \times \beta) = f_*(\alpha) \times g_*(\beta).$$

b) \times ist bilinear, d.h.

$$(\alpha + \alpha') \times \beta = \alpha \times \beta + \alpha' \times \beta \quad \text{und} \quad \alpha \times (\beta + \beta') = \alpha \times \beta + \alpha \times \beta'.$$

c) \times ist assoziativ, d.h.

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma) \in H_{p+q+r}(X \times Y \times Z).$$

d) Sei $\tau: X \times Y \longrightarrow Y \times X$ die Koordinatenvertauschung.

Dann ist

$$\beta \times \alpha = (-1)^{pq} \tau_*(\alpha \times \beta). \quad (12.60)$$

e) Seien $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Diese Punkte sind 0-Simplizes, also auch 0-Zyklen in den singulären Kettenkomplexen dieser Räume, und sie repräsentieren Homologieklassen

$$\zeta := [x_0] \in H_0(X) \quad \text{bzw.} \quad \nu := [y_0] \in H_0(Y).$$

Die Punkte x_0 bzw. y_0 bestimmen Inklusionen

$$\begin{array}{ccc} i_{x_0}: Y \longrightarrow X \times Y & & j_{y_0}: X \longrightarrow X \times Y \\ y \longmapsto (x_0, y) & \text{und} & x \longmapsto (x, y_0) \end{array}$$

der Räume X und Y in ihr kartesisches Produkt.

Es gilt

$$\zeta \times \beta = H_q(i_{x_0})(\beta) \quad \text{und} \quad \alpha \times \nu = H_p(j_{y_0})(\alpha). \quad (12.61)$$

Beweis. a) folgt unter Bezug auf Gleichung (12.58) sofort aus der Natürlichkeit des Tensorprodukts und der universellen Koeffizientenfolge, speziell der darin vorkommenden Abbildung κ .

b) ist klar aus Gleichung (12.58), denn κ ist ein Gruppenhomomorphismus und $\alpha \otimes \beta$ ist bilinear in α und β .

c): Im Beweis kommen Eilenberg-Zilber Abbildungen für verschiedene Paare von Räumen vor; zur Unterscheidung schreiben wir deshalb den Namen des Paares als Index an die Bezeichnung EZ.

Wir betrachten folgendes Diagramm von Kettenkomplexen und natürlichen Kettenabbildungen:

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) \otimes C_*(Y) \otimes C_*(Z) & \xrightarrow{\text{EZ}_{(X,Y)} \otimes (\text{id}_Z)_\#} & C_*(X \times Y) \otimes C_*(Z) \\ (\text{id}_X)_\# \otimes \text{EZ}_{(Y,Z)} \downarrow & & \text{EZ}_{(X \times Y, Z)} \downarrow \\ C_*(X) \otimes C_*(Y \times Z) & \xrightarrow{\text{EZ}_{(X, Y \times Z)}} & C_*(X \times Y \times Z) \end{array} \quad (12.62)$$

(wo wir stillschweigend die offensichtlichen Isomorphismen zwischen den verschiedenen Klammerungen der Dreifachprodukte einsetzen).

Seien $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$. Diese Punkte kann man auch als 0-Simplizes auffassen.

Für das typische Erzeugende $x \otimes y \otimes z$ der linken oberen Gruppe in (12.62) in Dimension 0 sieht das Diagramm wegen der Gestalt (12.52) der Eilenberg-Zilber Abbildungen in dieser Dimension so aus:

$$\begin{array}{ccc} x \otimes y \otimes z & \longmapsto & (x, y) \otimes z \\ \downarrow & & \downarrow \\ x \otimes (y, z) & \longmapsto & (x, y, z) \end{array}$$

Wie man sieht, liefern beide Möglichkeiten, Pfeile zu verknüpfen, für diese Erzeugenden das gleiche Ergebnis $x \otimes y \otimes z \mapsto (x, y, z)$.

Folglich kommutiert Diagramm (12.62) in Dimension 0. Die Pfeile in diesem Diagramm sind in allen Dimensionen natürliche Transformationen. Nach Beispiel 12.17 d) ist der Funktor $(C_*(X) \otimes C_*(Y) \otimes C_*(Z))_n$ frei mit Modellen in

$$\mathcal{M} = \{ (\Delta_p, \Delta_q, \Delta_r) \mid p + q + r = n \},$$

und die Räume $\Delta_p \times \Delta_q \times \Delta_r$ sind azyklisch, so dass die Funktoren links oben und rechts unten in Diagramm (12.62) die allgemeinen Voraussetzungen für Satz 12.19, den Satz über azyklische Modelle, erfüllen.

Da in Diagramm (12.62) beide Kettenabbildungen zwischen diesen Funktoren in Dimension 0 gleich sind und somit den gleichen Homomorphismus in der nulldimensionalen Homologie induzieren, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 12.19 b), dass das ganze Diagramm (12.62) bis auf Kettenhomotopie kommutiert.

Wenn wir darauf den Homologiefunktor anwenden, kommutiert das Diagramm also genau.

Seien $a \in Z_*(X)$, $b \in Z_*(Y)$ und $c \in Z_*(Z)$ Zyklen mit $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ und $\gamma = [c]$. Aus Gleichung (12.59) für das Kreuzprodukt ist sofort klar, dass im Homologiediagramm die Verknüpfung des oberen und des rechten Pfeils die Homologieklassse $[a \otimes b \otimes c]$ nach $(\alpha \times \beta) \times \gamma$ abbildet, während die Verknüpfung des linken und des unteren Pfeils diese Klasse auf $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ abbildet. Weil das Homologiediagramm kommutiert, liefern beide Verknüpfungen das gleiche Ergebnis, und dies beweist, dass \times assoziativ ist.

d): Sei ρ der in Lemma 10.28 a) angegebene natürliche Isomorphismus

$$\rho: C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(Y) \otimes C_*(X)$$

mit

$$\rho(a \otimes b) = b \otimes a$$

für jede Kette $a \in C_*(X)$ und jede Kette $b \in C_*(Y)$.

Leider ist ρ selber keine Kettenabbildung, weil es den einseitigen Vorzeichenwechsel in der Definition des Randoperators eines Tensorprodukts von Kettenkomplexen nicht treu überträgt. Aber durch eine geeignete Vorzeichenkorrektur der bigraduierten homogenen Anteile $\rho_{p,q} = \rho|_{(C_p(X) \otimes C_q(Y))}$ kann man dieses Problem neutralisieren; zu diesem Zweck ersetzen wir ρ durch

$$\tilde{\rho} := \sum_{p,q \in \mathbf{Z}} (-1)^{pq} \rho_{p,q}$$

(in anderen Worten, für jede Kette $a \in C_p(X)$ und jede Kette $b \in C_q(Y)$ ist $\tilde{\rho}(a \otimes b) = (-1)^{pq} b \otimes a$).

Der Vorzeichenwechsel ist ein natürlicher Grad-0 Homomorphismus und deshalb ist $\tilde{\rho}$ immer noch natürlich.

Für jede Kette $a \in C_p(X)$ und jede Kette $b \in C_q(Y)$ haben wir dann

$$\begin{aligned} (\tilde{\rho} \circ (\partial_X \odot \partial_Y))(a \otimes b) &= \left(\tilde{\rho} \circ (\partial_X \otimes \text{id} + (-1)^p \text{id} \otimes \partial_Y) \right)(a \otimes b) \\ &= \tilde{\rho}(\partial_X a \otimes b + (-1)^p a \otimes \partial_Y b) \\ &= (-1)^{(p-1)q} b \otimes \partial_X a + (-1)^{p+(q-1)} \partial_Y b \otimes a \\ &= (-1)^{pq} ((-1)^{-q} \text{id} \otimes \partial_X + \partial_Y \otimes \text{id})(b \otimes a) \\ &= ((-1)^{+q} \text{id} \otimes \partial_X + \partial_Y \otimes \text{id})((-1)^{pq} b \otimes a) \\ &= ((\partial_Y \odot \partial_X) \circ \tilde{\rho})(a \otimes b), \end{aligned}$$

und $\tilde{\rho}$ ist tatsächlich eine Kettenabbildung.

Für 0-Simplizes $x \in X$ und $y \in Y$ ist $\tilde{\rho}(x \otimes y) = (-1)^{0 \cdot 0} y \otimes x = y \otimes x$, und daraus folgt mit (12.52), dass

$$\text{EZ}(\tilde{\rho}(x \otimes y)) = \text{EZ}(y \otimes x) = (y, x) = \tau_{\sharp}(x, y) = \tau_{\sharp}(\text{EZ}(x \otimes y)),$$

d.h., die natürlichen Kettenabbildungen

$$\text{EZ} \circ \tilde{\rho}: C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

und

$$\tau_{\sharp} \circ \text{EZ}: C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$$

stimmen auf der 0-dimensionalen Kettengruppe überein, und sie induzieren deshalb auch den gleichen Homomorphismus der 0-ten Homologiegruppen.

Weil aber für jedes $n \in \mathbf{N}$ der Funktor $(C_*(X) \otimes C_*(Y))_n$ frei ist mit Modellen in

$$\mathcal{M} = \{ (\Delta_p, \Delta_q) \mid p + q = n \},$$

und die Räume $\Delta_p \times \Delta_q$ azyklisch sind, ist der Satz über azyklische Modelle auf die Funktoren $F = C_*(X) \otimes C_*(Y)$ und $A = C_*(X \times Y)$ anwendbar, und aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 12.19 b) können wir schließen, dass

$$\text{EZ} \circ \tilde{\rho} \simeq \tau_{\#} \circ \text{EZ}. \quad (12.63)$$

Daraus folgt, wenn wir Zyklen $a \in Z_p(X)$ und $b \in Z_q(Y)$ wählen mit $\alpha = [a]$ und $\beta = [b]$, dass

$$\begin{aligned} \beta \times \alpha &= [\text{EZ}(b \otimes a)] \\ &= [\text{EZ} \circ \rho(a \otimes b)] \\ &= (-1)^{pq} [\text{EZ} \circ \tilde{\rho}(a \otimes b)] \\ &= (-1)^{pq} [\tau_{\#} \circ \text{EZ}(a \otimes b)] \\ &= (-1)^{pq} \tau_* [\text{EZ}(a \otimes b)] \\ &= (-1)^{pq} \tau_*(\alpha \times \beta). \end{aligned}$$

Das beweist (12.60).

e): Wir beweisen zuerst die Behauptung $\zeta \times \beta = H_q(i_{x_0})(\beta)$.

Sei $b \in Z_q(Y)$ mit $\beta = [b]$.

Sei $P = \{x_0\} \subseteq X$. Wir beweisen die Aussage zunächst für den Spezialfall $X = P$.

Der Punkt $x_0 \in X$ bestimmt neben der Inklusion i_{x_0} auch einen in Y natürlichen Grad-0 Homomorphismus

$$\begin{aligned} I_{x_0}: C_*(Y) &\longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y) \\ c &\longmapsto x_0 \otimes c \end{aligned}$$

und dieser Homomorphismus ist eine Kettenabbildung, denn

$$\begin{aligned} (\partial_X \odot \partial_Y)(I_{x_0}(c)) &= (\partial_X \odot \partial_Y)(x_0 \otimes c) \\ &= \partial_X x_0 \otimes c + (-1)^0 x_0 \otimes \partial_Y c \\ &= 0 + x_0 \otimes \partial_Y c \\ &= I_{x_0}(\partial_Y c). \end{aligned}$$

Wir vergleichen jetzt die natürlichen Kettenabbildungen $\text{EZ} \circ I_{x_0}$ und $(i_{x_0})_{\#}: C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$. Wegen der Form (12.52) der Eilenberg-Zilber Abbildungen in Dimension 0 bilden beide Kettenabbildungen einen 0-Simplex

$y \in Y$ auf die Kette $(x_0, y) \in C_0(X \times Y)$ ab, und somit induzieren beide Kettenabbildungen den gleichen Homomorphismus der 0-ten Homologie.

Wenn $X = P$ nur aus einem Punkt besteht, ist der Satz über azyklische Modelle auf die Funktoren $F(Y) = C_*(Y)$ und $A(Y) = C_*(P \times Y)$ anwendbar, denn $C_n(Y)$ ist frei mit Modell Δ_n und $C_*(P \times \Delta_n)$ hat verschwindende Homologie in positiven Dimensionen, weil für den einpunktigen Raum P gilt, dass $P \times \Delta_n \cong \Delta_n$ zusammenziehbar ist.

Aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 12.19 b) folgt

$$\text{EZ} \circ I_{x_0} \simeq (i_{x_0})_{\#},$$

woraus sich ergibt, dass

$$\zeta \times \beta = [\text{EZ}(x_0 \otimes b)] = [\text{EZ}(I_{x_0}(b))] = [(i_{x_0})_{\#}(b)] = (i_{x_0})_*(\beta)$$

in dem genannten Spezialfall.

Den allgemeinen Fall erhalten wir nun mit Hilfe der Natürlichkeit des Kreuzprodukts.

Sei X beliebig und P der Einpunktraum $\{x_0\}$, und sei $i: P \rightarrow X$ die Inklusion. Sei i_{x_0} wie in der Aussage angegeben und sei \tilde{i}_{x_0} die gleiche Abbildung betrachtet als Abbildung $Y \rightarrow P \times Y$, so dass

$$i_{x_0} = (i \times \text{id}_Y) \circ \tilde{i}_{x_0}.$$

Sei $\tilde{\zeta}$ die Homologieklassse von x_0 in $H_0(P)$, so dass $\zeta = i_*(\tilde{\zeta})$.

Nach dem Spezialfall ist

$$\tilde{\zeta} \times \beta = (\tilde{i}_{x_0})_*(\beta).$$

Wegen der Natürlichkeit des Kreuzprodukts bezüglich der stetigen Abbildungen $i: P \rightarrow X$ und id_Y haben wir nun

$$\begin{aligned} \zeta \times \beta &= i_*(\tilde{\zeta}) \times \beta \\ &= (i \times \text{id}_Y)_*(\tilde{\zeta} \times \beta) \\ &= (i \times \text{id}_Y)_*((\tilde{i}_{x_0})_*(\beta)) \\ &= ((i \times \text{id}_Y) \circ \tilde{i}_{x_0})_*(\beta) \\ &= (i_{x_0})_*(\beta) \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Die zweite Aussage $\alpha \times \nu = H_p(j_{y_0})(\alpha)$ kann man analog beweisen (mit geringen Änderungen in den Details), aber der einfachste Beweis besteht

darin, unter Berufung auf Teil d) die Räume X und Y zu vertauschen und im Kreuzprodukt $\alpha \times \nu$ die Faktoren zu vertauschen und dann die schon bewiesene erste Aussage zu zitieren. Beim Faktorentausch entsteht kein Vorzeichenwechsel weil einer der Faktoren 0-dimensional ist (und deshalb hier $pq = 0$ ist).

Wenn wir das im Detail ausführen, haben wir

$$\alpha \times \nu = (-1)^0 \tau_*(\nu \times \alpha) = \tau_*((i_{y_0})_*(\alpha)) = (\tau \circ i_{y_0})_*(\alpha) = (j_{y_0})_*(\alpha).$$

■

Die in Lemma 12.24 aufgelisteten Eigenschaften des Homologiekreuzprodukts erinnern sehr stark an die Gruppenaxiome, aber leider liegt das Kreuzprodukt $\alpha \times \beta$ nicht in der Homologie des gleichen Raumes wie α oder β , sondern in der Homologie des kartesischen Produktes dieser Räume.

Das gilt auch wenn beide Klassen in der Homologie des gleichen Raumes X liegen, denn $\alpha \times \beta \in H_*(X \times X)$ und liegt nicht wieder in $H_*(X)$. Das Kreuzprodukt ist also keine Operation auf $H_*(X)$ und kann deshalb auch nicht eine Gruppenoperation sein, es sei denn, man verschiebt die Produktklasse irgendwie nach $H_*(X)$.

Für Homologieklassen gibt es keinen vernünftigen Weg eine solche Verschiebung durchzuführen. Die einzigen sich anbietenden natürlichen stetigen Abbildungen $X \times X \rightarrow X$ sind die Projektionen auf einen der beiden Faktoren, aber die Klasse $\alpha \times \beta$ hängt gleich stark von der Struktur von α wie von β ab, während die Projektion einen Faktor völlig zusammendrückt und die Information aus diesem Faktor zerstört. Die „gemischte“ Struktur von $\alpha \times \beta$ geht dabei verloren, so dass das Projizieren von Produktklassen in einen der Faktoren keine brauchbare Multiplikationsoperation liefert.

Anders sieht es aus in der Kohomologie, die ein kontravarianter Funktor ist. Um Kohomologieklassen von $X \times X$ nach X zu verschieben, reicht es wegen der Pfeilumkehrung eine geeignete Abbildung $X \rightarrow X \times X$ zu haben, und hier bietet sich die natürliche **Diagonalabbildung** d an, mit $d(x) = (x, x)$. Man sieht, dass die Diagonalabbildung beide Faktoren des kartesischen Produkts gleich behandelt, so dass der Kohomologiemorphismus $d^*: H^*(X \times X) \rightarrow H^*(X)$ Information aus beiden Faktoren in $H^*(X)$ tatsächlich vermischt und für die Konstruktion von binären Operationen die besten Voraussetzungen mitbringt.

Um aus dem Homologiekreuzprodukt eine entsprechende Operation in der Kohomologie zu gewinnen, verwenden wir die natürliche **Paarung** zwischen Koketten und Ketten und zwischen Kohomologieklassen und Homologieklassen, die wir jetzt definieren möchten.

Definition 12.25 Sei X ein topologischer Raum und sei p eine natürliche Zahl. Sei G eine additive abelsche Gruppe.

Weil $C^p(X; G) = \text{Hom}(C_p(X), G)$, gibt es eine kanonische bilineare Abbildung

$$\langle \ , \ \rangle: C^p(X; G) \times C_p(X) \longrightarrow G$$

mit

$$\langle \gamma, c \rangle = \gamma(c). \quad (12.64)$$

Diese Abbildung nennt sich die kanonische **Paarung** zwischen p -Koketten und p -Ketten auf X .

Weil der Korandoperator δ_p als $\text{Hom}(\partial_{p+1}, G)$ definiert ist, gilt für jede Kokette $\gamma \in C^p(X; G)$ und jede Kette $c \in C_{p+1}(X)$, dass

$$\langle \delta\gamma, c \rangle = \langle \gamma, \partial c \rangle. \quad (12.65)$$

Hieraus ist sofort klar, dass die Paarung eines Kozyklus mit einem Rand, oder eines Korandes mit einem Zyklus, immer 0 ergibt.

Insbesondere, wenn wir die Paarung auf $Z^p(X; G) \times Z_p(X)$ einschränken, dann wird sie 0, wann immer einer der Faktoren ein Korand bzw. ein Rand ist, und somit induziert die Paarung eine wohldefinierte gleich notierte bilineare Abbildung

$$\langle \ , \ \rangle: H^p(X; G) \times H_p(X) \longrightarrow G,$$

so dass für eine Kohomologieklass $\alpha \in H^p(X; G)$ und für eine Homologieklass $\theta \in H_p(X)$ gilt

$$\langle \alpha, \theta \rangle = \langle \zeta, z \rangle \quad (12.66)$$

für jeden Kozyklus $\zeta \in Z^p(X; G)$ mit $\alpha = [\zeta]$ und jeden Zyklus $z \in Z_p(X)$ mit $\theta = [z]$.

Diese bilineare Abbildung nennen wir die **Kohomologie-Homologie Paarung**.

Die hier präsentierte Definition ist nur anwendbar, wenn die gepaarten Koketten und Ketten oder Kohomologie- und Homologieklassen gleichdimensional sind. Wir erweitern die Paarung $\langle \ , \ \rangle$ zu ganz $C^*(X; G) \times C_*(X)$, bzw. zu ganz $H^*(X; G) \times H_*(X)$, in dem wir sie 0 setzen, wenn die gepaarten Objekte von verschiedener Dimension sind.

Lemma 12.26 a) Wenn die Koeffizientengruppe ein kommutativer Ring R mit 1 ist, dann ist die Paarung sogar R -linear in der ersten Variablen, d.h., für jeden Raum X , jede Kokette $\gamma \in C^p(X; R)$, jede Kette $c \in C_p(X)$ und jedes $r \in R$ ist

$$\langle r\gamma, c \rangle = r\langle \gamma, c \rangle \in R.$$

Entsprechendes gilt für die Paarung von Kohomologieklassen mit Homologieklassen.

- b) Die Paarung ist im folgenden Sinne natürlich. Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann gilt für jede Kokette $\gamma \in C^*(Y; G)$ und jede Kette $c \in C_*(X)$, dass

$$\langle f^\# \gamma, c \rangle = \langle \gamma, f_\# c \rangle$$

und entsprechend für jede Kohomologieklassse $\alpha \in H^*(Y; G)$ und jede Homologieklassse $\theta \in H_*(X)$, dass

$$\langle f^* \alpha, \theta \rangle = \langle \alpha, f_* \theta \rangle.$$

- c) Die Abbildung

$$H^*(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(X), G)$$

in der universellen Koeffizientenfolge für die Kohomologie von X mit Koeffizienten in G , genannt „ α “ in der Aussage von Satz 11.23, ist gegeben durch die Paarung: jede Kohomologieklassse $\beta \in H^*(X; G)$ wird auf den Homomorphismus

$$\theta \longmapsto \langle \beta, \theta \rangle$$

abgebildet.

Beweis. Die ersten beiden Teile folgen sofort aus der definierenden Formel (12.64) für die Paarung und für die erste Aussage in Teil b) aus der Tatsache, dass $f^\# = \text{Hom}(f_\#, G)$; die Aussage in Teil b) für Kohomologie- und Homologieklassen folgt sofort aus der entsprechenden Aussage für Koketten und Ketten.

In Teil c) sei $\xi \in Z^p(X; G)$ ein Kozyklus mit $\beta = [\xi]$. Nach der Beschreibung in Satz 11.23 induziert $\xi|_{Z_*(X)}$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\Xi: H_*(X) \longrightarrow G$ und dieser Homomorphismus ist das Bild von β unter „ α “.

Nach dieser Beschreibung ist

$$\Xi([z]) = \xi(z) = \langle \xi, z \rangle$$

für jeden Zyklus $z \in Z_*(X)$, und die rechte Seite ist nach (12.66) genau die Definition von $\langle \beta, [z] \rangle$. ■

Wir werden zunächst eine direkte Definition eines Produktes von Koketten geben. Einige Details dieser Definition werden mit folgender einfacher Bemerkung besser verständlich sein.

Lemma 12.27 Sei X ein topologischer Raum und sei $d: X \longrightarrow X \times X$ die Diagonalabbildung.

In Definition 12.13 wurde eine natürliche Kettenabbildung

$$\tilde{\eta}(X): C_*(X) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$$

definiert und daraus in Definition 12.14 die Alexander-Whitney Abbildung η hergeleitet.

Es gilt

$$\tilde{\eta}(X) = \eta(X, X) \circ d_{\sharp}. \quad (12.67)$$

Beweis. In Gleichung (12.36) wurde $\eta(X, X)$ definiert als

$$((\pi_1)_{\sharp} \otimes (\pi_2)_{\sharp}) \circ \tilde{\eta}(X \times X),$$

(wo π_i die Projektion in den i -ten Faktor des kartesischen Produkts ist) und wegen der Natürlichkeit von $\tilde{\eta}$ haben wir

$$\begin{aligned} \eta(X, X) \circ d_{\sharp} &= ((\pi_1)_{\sharp} \otimes (\pi_2)_{\sharp}) \circ \tilde{\eta}(X \times X) \circ d_{\sharp} \\ &= ((\pi_1)_{\sharp} \otimes (\pi_2)_{\sharp}) \circ (d_{\sharp} \otimes d_{\sharp}) \circ \tilde{\eta}(X) \\ &= ((\pi_1 d)_{\sharp} \otimes (\pi_2 d)_{\sharp}) \circ \tilde{\eta}(X) \\ &= \tilde{\eta}(X), \end{aligned}$$

weil $\pi_i \circ d = \text{id}_X$. ■

Definition 12.28 (Cup-Produkt) Sei X ein topologischer Raum und sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $\varphi \in C^p(X; R)$ und sei $\psi \in C^q(X; R)$. Wir definieren wie folgt zunächst eine Kokette $\varphi \cup \psi \in C^{p+q}(X; R)$.

Zunächst erweitern wir $\varphi \in \text{Hom}(C_p(X), R)$ zu einem auf ganz $C_*(X)$ definierten Homomorphismus, indem wir es auf den anderen Kettengruppen $= 0$ setzen. Entsprechend verfahren wir mit ψ .

Dann wird $\varphi \otimes \psi$ zu einem Gruppenhomomorphismus $C_*(X) \otimes C_*(X) \longrightarrow R \otimes R$.

Die Ringmultiplikation von R ist wegen des Distributivgesetzes eine \mathbf{Z} -bilineare Abbildung $R \times R \longrightarrow R$ und induziert somit einen Gruppenhomomorphismus $\mu: R \otimes R \longrightarrow R$ mit $\mu(r \otimes s) = rs$ für alle r und $s \in R$.

Wir haben die Alexander-Whitney Abbildung

$$\eta: C_*(X \times X) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$$

und wir haben die Diagonalabbildung $d: X \longrightarrow X \times X$, die einen Homomorphismus $d_{\sharp}: C_*(X) \longrightarrow C_*(X \times X)$ induziert.

Wir definieren $\varphi \cup \psi$ als die Verknüpfung

$$\varphi \cup \psi = \mu \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \eta \circ d_{\sharp} \quad (12.68)$$

all dieser Abbildungen. Weil $\varphi \otimes \psi$ nur auf $C_p(X) \otimes C_q(X)$ ungleich 0 ist und weil d_{\sharp} und η Grad-0 Abbildungen sind, ist $\varphi \cup \psi$ ein Homomorphismus $C_*(X) \longrightarrow R$, der nur auf $C_{p+q}(X)$ ungleich 0 ist. Also ist $\varphi \cup \psi$ tatsächlich eine $p+q$ -Kokette.

Diese Operation \cup nennt sich wegen der tassenähnlichen Form des Zeichens das **Cup-Produkt**.

Das Cup-Produkt können wir auch anders beschreiben. Der Homomorphismus

$$\varphi \cdot \psi := \mu \circ (\varphi \otimes \psi): C_*(X) \otimes C_*(X) \longrightarrow R \quad (12.69)$$

ist ein Element des Kokettenkomplexes $\text{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(X), R)$ und

$$\varphi \cup \psi = d^{\sharp} \eta^{\sharp}(\varphi \cdot \psi) = \tilde{\eta}^{\sharp}(\varphi \cdot \psi) \quad (12.70)$$

unter Einbeziehung von Lemma 12.27.

Die letzte Gleichung erlaubt uns, die Werte von $\varphi \cup \psi$ auf singulären $n := (p+q)$ -Simplizes σ direkt auszurechnen. Aus der Formel (12.34) für $\tilde{\eta}$ und der Definition von $\varphi \cdot \psi$ erhalten wir unmittelbar

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \sum_{p'+q'=n} \varphi_{(p'}(\sigma)) \psi(\sigma_{q'}) = \varphi_{(p)}(\sigma) \psi(\sigma_q), \quad (12.71)$$

wo das Produkt auf der rechten Seite im Ring R zu verstehen ist.

Bemerkung und Definition 12.29 Sei X ein topologischer Raum und sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $\varphi \in C^p(X; R)$ und sei $\psi \in C^q(X; R)$.

Wir wollen kurz untersuchen, wie $\varphi \cdot \psi$ in Definition 12.28 aussieht, wenn φ und ψ Kozyklen sind.

Zunächst bemerken wir, dass für beliebige Koketten φ und $\psi \in C^*(X; R)$ und für beliebige Ketten a und $b \in C_*(X)$ gilt, dass

$$\langle \varphi \cdot \psi, a \otimes b \rangle = \langle \varphi, a \rangle \langle \psi, b \rangle. \quad (12.72)$$

Hieraus lässt sich der Korand von $\varphi \cdot \psi$ in $\text{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(X), R)$ leicht

bestimmen, denn

$$\begin{aligned}
 \delta(\varphi \cdot \psi)(a \otimes b) &= (\varphi \cdot \psi)((\partial \odot \partial)(a \otimes b)) \\
 &= \langle \varphi \cdot \psi, \partial a \otimes b + \alpha_X a \otimes \partial b \rangle \\
 &= \langle \varphi \cdot \psi, \partial a \otimes b \rangle + \langle \varphi \cdot \psi, \alpha_X a \otimes \partial b \rangle \\
 &= \langle \varphi, \partial a \rangle \langle \psi, b \rangle + \langle \varphi, \alpha_X a \rangle \langle \psi, \partial b \rangle \\
 &= \langle \delta \varphi, a \rangle \langle \psi, b \rangle + \langle (-1)^p \varphi, a \rangle \langle \delta \psi, b \rangle \\
 &= \langle \delta \varphi \cdot \psi, a \otimes b \rangle + \langle (-1)^p \varphi \cdot \delta \psi, a \otimes b \rangle \\
 &= \langle \delta \varphi \cdot \psi + (-1)^p \varphi \cdot \delta \psi, a \otimes b \rangle
 \end{aligned}$$

(das Vorzeichen $(-1)^p$ kann passend zu φ gewählt werden, weil $\langle \varphi, \alpha_X a \rangle = 0$ wenn $\dim a \neq p$).

In anderen Worten,

$$\delta(\varphi \cdot \psi) = \delta \varphi \cdot \psi + (-1)^p \varphi \cdot \delta \psi. \quad (12.73)$$

Hieraus sieht man: wenn φ und ψ Kozyklen sind, dann ist $\varphi \cdot \psi$ auch ein Kozyklus von $\text{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(X), R)$.

Wenn φ ein Korand ist (und ψ ein Kozyklus), dann ist $\varphi \cdot \psi$ sogar ein Korand, denn es gibt eine Kokette ω mit $\varphi = \delta \omega$ und aus (12.73) rechnet man schnell nach, dass

$$\delta(\omega \cdot \psi) = \delta \omega \cdot \psi + (-1)^{p+1} \omega \cdot \delta \psi = \varphi \cdot \psi + 0 = \varphi \cdot \psi.$$

Entsprechend, wenn φ ein Kozyklus ist und wenn ψ ein Korand ist und $\psi = \delta \chi$, dann ist

$$\delta((-1)^p \varphi \cdot \chi) = (-1)^p \delta \varphi \cdot \chi + ((-1)^p)^2 \varphi \cdot \delta \chi = 0 + \varphi \cdot \psi = \varphi \cdot \psi.$$

und $\varphi \cdot \psi$ ist auch in diesem Fall ein Korand.

Wir können diese Erkenntnisse wie folgt zusammenfassen: wenn φ und ψ Kozyklen sind, dann ist $\varphi \cdot \psi$ auch ein Kozyklus, dessen Kohomologieklassse nur von den Kohomologieklassen von φ und ψ abhängt, weil eine Änderung von φ oder ψ um einen Korand das Produkt $\varphi \cdot \psi$ auch nur um einen Korand verändert.

Die in Definition 12.28 eingeführte Operation \cdot bestimmt also eine gleich notierte wohldefinierte bilineare Operation

$$\cdot : H^p(X) \times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(\text{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(X), R)),$$

so dass für Kohomologieklassen $\alpha \in H^p(X)$ und $\beta \in H^q(X)$ und für beliebige Kozyklen φ und $\psi \in C^*(X; R)$ mit $\alpha = [\varphi]$ und $\beta = [\psi]$ gilt

$$\alpha \cdot \beta = [\varphi \cdot \psi]. \quad (12.74)$$

Diese bilineare Abbildung liefert natürlich auch eine entsprechende eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q} \left(\text{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(X), R) \right)$$

Bemerkung 12.29 erlaubt uns, auch das Cup-Produkt für Kohomologieklassen zu definieren (und nicht nur für Koketten).

Definition 12.30 Sei X ein topologischer Raum und sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $\alpha \in H^p(X; R)$ und sei $\beta \in H^q(X; R)$.

Wir definieren das **Cup-Produkt** $\alpha \cup \beta \in H^{p+q}(X; R)$ dieser Kohomologieklassen durch

$$\alpha \cup \beta := d^* \eta^*(\alpha \cdot \beta) = \tilde{\eta}^*(\alpha \cdot \beta), \quad (12.75)$$

wo $d: X \longrightarrow X \times X$ die Diagonalabbildung ist, und wo $\tilde{\eta}$ die in Definition 12.13 eingeführte Abbildung ist, aus der wir die Alexander-Whitney Abbildung η gewonnen haben.

Weil \cdot bilinear ist, ist auch die Operation \cup eine bilineare binäre Operation auf der graduierten Kohomologieguppe $H^*(X; R)$.

Vergleicht man Gleichungen (12.75) und (12.70) für das Cup-Produkt von Kohomologieklassen oder von Koketten, so folgt sofort aus Bemerkung 12.29, aus (12.74) und aus der Tatsache, dass η und d_* Kettenabbildungen sind, dass wenn φ und ψ Kozyklen sind mit $\alpha = [\varphi]$ und $\beta = [\psi]$, dann ist $\varphi \cup \psi$ ein Kozyklus in $Z^{p+q}(X)$ und

$$\alpha \cup \beta = [\varphi \cup \psi]. \quad (12.76)$$

Die „Zwischenstufen“ der definierenden Gleichung (12.75) des Kohomologie Cup-Produkts spielen auch eine wichtige Rolle. Insbesondere definiert man das **Kohomologiekreuzprodukt** der Kohomologieklassen α und β als

$$\alpha \times \beta := \eta^*(\alpha \cdot \beta), \quad (12.77)$$

so dass wir das Cup-Produkt auch beschreiben können als

$$\alpha \cup \beta := d^*(\alpha \times \beta). \quad (12.78)$$

Lemma 12.31 Sei X ein topologischer Raum und sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $\alpha \in H^p(X; R)$ und sei $\beta \in H^q(X; R)$. Ferner sei $\theta \in H_p(X)$ und sei $\xi \in H_q(X)$. Dann ist

$$\langle \alpha \times \beta, \theta \times \xi \rangle = \langle \alpha, \theta \rangle \langle \beta, \xi \rangle. \quad (12.79)$$

Beweis. Wir nutzen aus, dass AW und EZ Kettenhomotopieinverse zueinander sind. Seien φ und ψ Kozyklen mit $\alpha = [\varphi]$ und $\beta = [\psi]$ und seien $z \in Z_p(X)$ und $w \in Z_q(X)$ Zyklen mit $\theta = [z]$ und $\xi = [w]$.

Nach Gleichung (12.59) für das Kreuzprodukt und nach Gleichung (12.74) für $\alpha \cdot \beta$ haben wir

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha \times \beta, \theta \times \xi \rangle &= \langle \text{AW}^*(\alpha \cdot \beta), \theta \times \xi \rangle \\
 &= \langle \text{AW}^*(\alpha \cdot \beta), [\text{EZ}_\#(z \otimes w)] \rangle \\
 &= \langle \text{EZ}^* \text{AW}^*(\alpha \cdot \beta), [z \otimes w] \rangle \\
 &= \langle \alpha \cdot \beta, [z \otimes w] \rangle \\
 &= \langle [\varphi \cdot \psi], [z \otimes w] \rangle \\
 &= \langle \varphi \cdot \psi, z \otimes w \rangle \\
 &= \langle \varphi, z \rangle \langle \psi, w \rangle \\
 &= \langle \alpha, \theta \rangle \langle \beta, \xi \rangle.
 \end{aligned}$$

■

Wir werden nun beweisen, dass das Cup-Produkt die Eigenschaften einer Ring-Multiplikation besitzt.

Satz 12.32 *Sei X ein topologischer Raum und sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $\alpha \in H^p(X; R)$, sei $\beta \in H^q(X; R)$ und sei $\gamma \in H^r(X; R)$.*

a) \cup ist natürlich, d.h., ist $f: Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist

$$f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta).$$

b) \cup ist assoziativ, d.h.

$$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma) \in H^{p+q+r}(X).$$

c) \cup ist antikommutativ, d.h.,

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha. \quad (12.80)$$

d) Sei $\zeta \in C^0(X; R)$ die Kokette

$$\zeta(x) = 1 \quad \text{für jeden 0-Simplex } x \in X.$$

Weil ζ auf $S_0(X)$ konstant ist und weil der Rand eines 1-Simplex eine Differenz von zwei Punkten ist, ist ζ offenbar ein Kozyklus (da es auf Rändern verschwindet).

Sei $\varepsilon = [\zeta] \in H^0(X; R)$. Dann ist ε ein Einselement für das Cup-Produkt, d.h.,

$$\alpha \cup \varepsilon = \alpha = \varepsilon \cup \alpha \quad (12.81)$$

für jedes $\alpha \in H^*(X; R)$.

Beweis. Wir wählen Kozyklen φ, ψ und ω mit $\alpha = [\varphi]$, $\beta = [\psi]$ und $\gamma = [\omega]$.

a): An Gleichung (12.71) sieht man, dass für jeden singulären Simplex $\sigma \in S_{p+q}(Y)$ gilt

$$\begin{aligned} f^\#(\varphi \cup \psi)(\sigma) &= (\varphi \cup \psi)(f_\# \sigma) \\ &= ({}_p(f_\# \sigma))\psi({}_q(f_\# \sigma)) \\ &= \varphi({}_p(f_\# \sigma))\psi({}_q(f_\# \sigma)) \\ &= f^\# \varphi({}_p \sigma) f^\# \psi({}_q \sigma) \\ &= (f^\# \varphi \cup f^\# \psi)(\sigma). \end{aligned}$$

Also ist $f^\#(\varphi \cup \psi) = f^\#(\varphi) \cup f^\#(\psi)$, woraus wegen (12.76) folgt

$$f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta).$$

b): Sei σ ein $(p+q+r)$ -dimensionaler Simplex auf X . Man prüft sofort nach, dass

$$({}_{p+q} \sigma)_q = {}_q(\sigma_{q+r})$$

(denn wenn σ der Standardsimplex $[e_0, e_1, \dots, e_{p+q+r}]$ ist, ergeben beide Seiten $[e_p, \dots, e_{p+q}]$, und für einen beliebigen Simplex σ erhält man die Gleichheit aus dem Ergebnis für den Standardsimplex durch Anwendung von $\sigma_\#$). Entsprechend sieht man, dass

$${}_p({}_{p+q} \sigma) = {}_p \sigma \quad \text{und} \quad (\sigma_{q+r})_r = \sigma_r.$$

Aus Gleichung (12.71) für das Cup-Produkt erhält man nun, dass für jeden Simplex $\sigma \in S_{p+q+r}(X)$ gilt

$$\begin{aligned} ((\varphi \cup \psi) \cup \omega)(\sigma) &= (\varphi \cup \psi)({}_{p+q} \sigma) \omega(\sigma_r) \\ &= \varphi({}_p({}_{p+q} \sigma)) \psi({}_q({}_{p+q} \sigma)) \omega(\sigma_r) \\ &= \varphi({}_p \sigma) \psi({}_q(\sigma_{q+r})) \omega((\sigma_{q+r})_r) \\ &= \varphi({}_p \sigma) (\psi \cup \omega)(\sigma_{q+r}) \\ &= (\varphi \cup (\psi \cup \omega))(\sigma) \end{aligned}$$

Die zweimalige Anwendung von (12.76) liefert dann

$$\begin{aligned}
 (\alpha \cup \beta) \cup \gamma &= [\varphi \cup \psi] \cup \gamma \\
 &= [(\varphi \cup \psi) \cup \omega] \\
 &= [\varphi \cup (\psi \cup \omega)] \\
 &= \alpha \cup [\psi \cup \omega] \\
 &= \alpha \cup (\beta \cup \gamma)
 \end{aligned}$$

c): Sei $\tilde{\rho}: C_*(X) \otimes C_*(X) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$ die im Beweis von Lemma 12.24 d) eingeführte Kettenabbildung, so dass für jede p -Kette a und jede q -Kette b gilt

$$\tilde{\rho}(a \otimes b) = (-1)^{pq} b \otimes a.$$

Das Vorzeichen sorgt dafür, dass $\tilde{\rho}$ tatsächlich eine Kettenabbildung ist.

Für die Kozyklen $\varphi \in Z^p(X; R)$ und $\psi \in Z^q(X; R)$ gilt offensichtlich, weil die Multiplikation in R kommutativ ist, dass

$$\tilde{\rho}^\#(\varphi \cdot \psi) = (\varphi \cdot \psi) \circ \tilde{\rho} = \mu \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \tilde{\rho} = (-1)^{pq} \mu \circ (\psi \otimes \varphi) = (-1)^{pq} (\psi \cdot \varphi).$$

Somit gilt auch für die Kohomologieklassen

$$\tilde{\rho}^*(\alpha \cdot \beta) = (-1)^{pq} (\beta \cdot \alpha).$$

Im Beweis von Lemma 12.24 d) Gleichung (12.63) wurde gezeigt, dass

$$EZ \circ \tilde{\rho} \simeq \tau_\# \circ EZ,$$

wo $\tau: X \times X \longrightarrow X \times X$ die Koordinatenvertauschung ist. Weil η ein Kettenhomotopieinverses zu EZ ist, folgt aus der Kohomologieversion dieser Gleichung, dass

$$\eta^* \tilde{\rho}^* = \eta^* \tilde{\rho}^* EZ^* \eta^* = \eta^* EZ^* \tau^* \eta^* = \tau^* \eta^*,$$

und daraus erhalten wir unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\tau \circ d = d$, das gewünschte Ergebnis

$$\begin{aligned}
 (-1)^{pq} (\beta \cup \alpha) &= (-1)^{pq} d^* \eta^* (\beta \cdot \alpha) = d^* \eta^* \tilde{\rho}^* (\alpha \cdot \beta) \\
 &= d^* \tau^* \eta^* (\alpha \cdot \beta) = d^* \eta^* (\alpha \cdot \beta) = \alpha \cup \beta.
 \end{aligned}$$

d): Der Kozyklus ζ nimmt auf allen 0-Simplizes den Wert 1 an, und dann ist schon in der Gleichung (12.71) klar, dass für jeden p -Kozyklus φ und jeden p -Simplex σ gilt

$$\begin{aligned}
 (\zeta \cup \alpha)(\sigma) &= \zeta(\sigma_0) \alpha(\sigma_p) = 1 \cdot \alpha(\sigma) = \alpha(\sigma) \\
 &= \alpha(\sigma) \cdot 1 = \alpha(\sigma_p) \zeta(\sigma_0) = (\alpha \cup \zeta)(\sigma).
 \end{aligned}$$

Aus (12.76) folgt dann die gewünschte Beziehung

$$\varepsilon \cup \alpha = \alpha = \alpha \cup \varepsilon.$$

■

Korollar und Definition 12.33 Sei X ein topologischer Raum und sei R ein kommutativer Ring mit 1. Das Cup-Produkt macht aus der graduierten Kohomologiegruppe $H^*(X; R)$ einen Ring mit Einselement, der zumindest bis auf Vorzeichen kommutativ ist.

Jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ induziert einen Ringhomomorphismus

$$f^*: H^*(Y) \longrightarrow H^*(X).$$

Somit ist die singuläre Kohomologie ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Top in die Kategorie der graduierten Ringe mit 1.

Leider haben wir nicht die Zeit, viele Beispiele von Kohomologierungen auszurechnen oder die schönen Anwendungen der Kohomologietheorie durcharbeiten. Zu den letzteren gehört auch der Satz von Borsuk-Ulam in höheren Dimensionen (für Dimension 2 haben wir ihn als Satz 5.11 kennengelernt), dessen Beweis aber von der nicht ganz einfachen Berechnung des Kohomologierings $\mathbf{H}^*(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}_2)$ abhängt und somit einige Zeit in Anspruch nehmen würde.

Auf ein wichtiges Beispiel sollten wir aber nicht verzichten, da es zeigt, dass die Kohomologieringstruktur tatsächlich einen Vorteil bringt und die Kohomologie leistungsfähiger macht, als wenn man nur die additive Gruppenstruktur betrachtet.

Beispiel 12.34 Seien m und n positive natürliche Zahlen.

Der Kohomologiering $H^*(S^m \times S^n)$ ist ein trunkierter Polynomring über \mathbf{Z} , erzeugt als Ring von zwei Erzeugenden $\bar{\alpha} \in H^m(S^m \times S^n)$ und $\bar{\beta} \in H^n(S^m \times S^n)$, so dass $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$ die additive Gruppe $H^{m+n}(S^m \times S^n)$ erzeugt und so dass $\bar{\alpha}^2 = \bar{\beta}^2 = 0$.

In anderen Worten,

$$H^*(S^m \times S^n) \cong \frac{\mathbf{Z}[X, Y]}{(X^2, Y^2)}.$$

Beweis. Weil $H_*(S^k)$ frei ist für jedes k , verschwindet der Tor Term in der universellen Koeffizientenfolge für die Homologie von $S^m \times S^n$, und die Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa: H_*(S^m) \otimes H_*(S^n) &\longrightarrow H_*(S^m \times S^n) \\ \theta \otimes \omega &\longmapsto \theta \times \omega \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Daraus haben wir schon in Beispiel 12.22 die Homologie von $S^m \times S^n$ berechnet und gesehen, dass sie frei ist.

Weil die Homologie der Sphären S^m und S^n und ihres kartesischen Produktes $S^m \times S^n$ frei ist, verschwindet der Ext Term in der universellen Koeffizientenfolge für ihre Kohomologie und für jedes dieser Räume M gilt

$$H^*(M) \cong \text{Hom}(H_*(M), \mathbf{Z}). \quad (12.82)$$

In Lemma 12.26 c) haben wir gesehen, dass dieser Isomorphismus durch die Paarung gegeben ist.

Wir wählen einen Punkt $x_0 \in S^m$ und einen Punkt $y_0 \in S^n$. Diese Punkte sind auch 0-Zyklen und ihre Homologieklassen

$$\zeta := [x_0] \in H_0(S^m) \quad \text{bzw.} \quad \nu := [y_0] \in H_0(S^n)$$

erzeugen die zu \mathbf{Z} isomorphe 0-te Homologiegruppe der jeweiligen Sphäre (man beachte, dass m und n als positiv vorausgesetzt wurden).

Zu diesen Punkten haben wir die in Lemma 12.24 e) definierten entsprechenden Inklusionen

$$\begin{array}{ccc} i_{x_0}: S^n \longrightarrow S^m \times S^n & \text{und} & j_{y_0}: S^m \longrightarrow S^m \times S^n \\ y \longmapsto (x_0, y) & & x \longmapsto (x, y_0) \end{array}$$

In Dimension 0 ist $H_0(S^m \times S^n) \cong \mathbf{Z}$, erzeugt von der Homologieklassse λ des Punktes (x_0, y_0) , und das Einselement

$$\varepsilon \in H^0(S^m \times S^n)$$

hat nach Satz 12.32 d) die Eigenschaft, dass $\langle \varepsilon, \lambda \rangle = 1$. Nach dem kanonischen Isomorphismus zwischen $\text{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ und \mathbf{Z} bedeutet das, dass ε dem Element $1 \in \mathbf{Z}$ entspricht und somit die additive Gruppe $H^0(S^m \times S^n)$ erzeugt.

Wir wählen ein Erzeugendes ξ von $H_m(S^m) \cong \mathbf{Z}$ und ein Erzeugendes χ von $H_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$. Weil κ ein Isomorphismus ist, erzeugt

$$\bar{\xi} := \xi \times \nu = (j_{y_0})_*(\xi)$$

die Homologiegruppe $H_m(S^m \times S^n)$ und

$$\bar{\chi} := \zeta \times \chi = (i_{x_0})_*(\chi)$$

erzeugt die Homologiegruppe $H_n(S^m \times S^n)$ (oder wenn $m = n$, dann erzeugen diese beiden Elemente die Gruppe $H_m(S^m \times S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$). Das Element $\xi \times \chi$ erzeugt $H_{m+n}(S^m \times S^n) \cong \mathbf{Z}$.

Sei $\alpha \in H^m(S^m) \cong \mathbf{Z}$ das Erzeugende, das dadurch charakterisiert ist, dass $\langle \alpha, \xi \rangle = 1$, und sei $\beta \in H^n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ das Erzeugende mit $\langle \beta, \chi \rangle = 1$. Seien π_1 und π_2 die Projektionen von $S^m \times S^n$ auf S^m bzw. auf S^n .

Wir haben

$$\langle \pi_1^* \alpha, \bar{\xi} \rangle = \langle \pi_1^* \alpha, (j_{y_0})_* \xi \rangle = \langle \alpha, (\pi_1)_* (j_{y_0})_* \xi \rangle = \langle \alpha, \xi \rangle = 1$$

da $\pi_1 \circ j_{y_0} = \text{id}_{S^m}$. Somit ist $\bar{\alpha} := \pi_1^* \alpha$ ein Erzeugendes von $H^m(S^m \times S^n)$, falls $m \neq n$. Entsprechend ist $\bar{\beta} := \pi_2^* \beta$ ein Erzeugendes von $H^n(S^m \times S^n)$ mit $\langle \bar{\beta}, \bar{\chi} \rangle = \langle \beta, \chi \rangle = 1$.

Wenn $m = n$, dann sind $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ freie Erzeugende von $H^m(S^m \times S^n) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. In diesem Fall ist auch

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{\chi} \rangle = \langle \pi_1^* \alpha, (i_{x_0})_* \chi \rangle = \langle \alpha, (\pi_1)_* (i_{x_0})_* \chi \rangle = 0,$$

da $\pi_1 \circ i_{x_0}$ konstant $\equiv x_0$ ist. Eine konstante Abbildung induziert in H_p für $p > 0$ immer den Nullhomomorphismus, weil sie durch einen Einpunktraum faktorisiert und Einpunkträume azyklisch sind.

Aus dem gleichen Grund ist $\langle \bar{\beta}, \bar{\xi} \rangle = 0$. Es sind also $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ tatsächlich eine „duale“ Basis von $H^m(S^m \times S^n) \cong \text{Hom}(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Seien $a \in Z_p(S^m)$ und $b \in Z_q(S^n)$ Zyklen mit $\xi = [a]$ und $\chi = [b]$. Seien $\varphi \in Z^p(S^m)$ und $\psi \in Z^q(S^n)$ Kozyklen mit $\alpha = [\varphi]$ und $\beta = [\psi]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \bar{\alpha} \cup \bar{\beta}, \xi \times \chi \rangle &= \langle \tilde{\eta}^*(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}), \text{EZ}_*[a \otimes b] \rangle \\ &= \langle \tilde{\eta}^*(\pi_1^* \alpha \cdot \pi_2^* \beta), \text{EZ}_*[a \otimes b] \rangle \\ &= \langle (\pi_1^* \alpha \cdot \pi_2^* \beta), \tilde{\eta}_* \text{EZ}_*[a \otimes b] \rangle \\ &= \langle (\pi_1^\# \varphi \cdot \pi_2^\# \psi), \tilde{\eta} \text{EZ}(a \otimes b) \rangle \\ &= (\mu \circ (\pi_1^\# \varphi \otimes \pi_2^\# \psi))((\tilde{\eta} \circ \text{EZ})(a \otimes b)) \\ &= (\mu \circ (\varphi \otimes \psi)) \left(\left(((\pi_1)_\# \otimes (\pi_2)_\#) \circ \tilde{\eta} \circ \text{EZ} \right) (a \otimes b) \right) \\ &= \mu \left((\varphi \otimes \psi) ((\eta \circ \text{EZ})(a \otimes b)) \right) \\ &= \mu((\varphi \otimes \psi)(a \otimes b)) \quad (\text{Begründung folgt}) \\ &= \varphi(a) \psi(b) = \langle \alpha, \xi \rangle \langle \beta, \chi \rangle = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Die Vereinfachung in der vorletzten Zeile ist erlaubt, weil $a \otimes b$ ein Zyklus ist und weil

$$\eta \circ \text{EZ} \simeq \text{id}_{C_*(S^m) \otimes C_*(S^n)}.$$

Deshalb ist $[(\eta \circ \text{EZ})(a \otimes b)] = [a \otimes b]$ und $(\eta \circ \text{EZ})(a \otimes b) - (a \otimes b)$ ist ein Rand, auf dem das Tensorprodukt von Kozyklen $\varphi \otimes \psi$ verschwindet. Also

ist tatsächlich

$$(\varphi \otimes \psi)((\eta \circ \text{EZ})(a \otimes b)) = (\varphi \otimes \psi)(a \otimes b).$$

Weil $\langle \bar{\alpha} \cup \bar{\beta}, \xi \times \chi \rangle = 1$, ist $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$ wie behauptet ein Erzeugendes von $H^{m+n}(S^m \times S^n) \cong \text{Hom}(H_{m+n}(S^m \times S^n), \mathbf{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\bar{\alpha}^2 = \bar{\beta}^2 = 0$. Das liegt daran, dass $\bar{\alpha} = \pi_1^* \alpha$ und somit $\bar{\alpha}^2 = \pi_1^* \alpha^2 = \pi_1^*(0) = 0$, denn $\alpha^2 \in H^{2m}(S^m) = \{0\}$. Aus einem ähnlichen Grund ist $\bar{\beta}^2 = 0$. ■

Beispiel 12.35 Seien m und n positive natürliche Zahlen und sei

$$X = S^m \vee S^n \vee S^{m+n}.$$

Die graduierte abelsche Gruppe $H^*(X)$ hat einen Summanden \mathbf{Z} in jeder der Dimensionen $0, m, n$ und $m+n$ (oder wenn $m = n$, zwei Summanden \mathbf{Z} in der gemeinsamen Dimension $m = n$), so dass diese Gruppe als additive abelsche Gruppe isomorph ist zur Kohomologiegruppe von $S^m \times S^n$.

Aber wenn α ein Erzeugendes von $H^m(X)$ ist und β ein Erzeugendes von $H^n(X)$ ist, dann ist $\alpha \cup \beta = 0$, so dass der Kohomologiering von X nicht isomorph ist zum Kohomologiering von $S^m \times S^n$.

Beweis. X ist ein CW-Komplex mit einer 0-Zelle e_0 , einer m -Zelle, einer n -Zelle und einer $(m+n)$ -Zelle, und ist eine Vereinigung von drei Sphären $S_1 := S^m$, $S_2 := S^n$ und $S_3 := S^{m+n}$, von denen jede ein CW-Unterraum von X ist, der aus der 0-Zelle und einer der höherdimensionalen Zellen e_k besteht (als Zelle von S_k bezeichnen wir sie mit \tilde{e}_k).

Für jedes k haben wir eine Inklusion

$$i_k: S_k \longrightarrow X,$$

die natürlich zellulär ist.

Wenn φ_k die charakteristische Abbildung der Zelle \tilde{e}_k in S_k ist, dann ist $i_k \circ \varphi_k$ offensichtlich eine charakteristische Abbildung für e_k in X , und aus der Beschreibung der zellulären Kettengruppen in Lemma 9.32 d) ist klar, dass $W_*(i_k)$ den zu \tilde{e}_k gehörenden Summanden \mathbf{Z} in $W_*(S_k)$ isomorph auf den zu e_k gehörenden Summanden \mathbf{Z} in $W_*(X)$ abbildet. Weil der zelluläre Randoperator in $W_*(S_k)$ Null ist und weil $W_*(i_k)$ eine Kettenabbildung ist, ist auch der zelluläre Randoperator in $W_*(X)$ auf jeder Zelle 0 und somit insgesamt $\mathbf{0}$.

Daraus folgt, dass $H_*(X) \cong W_*(X) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, mit einem Summanden \mathbf{Z} für jede der vier Zellen und mit der Dimension dieser Zelle. Weil diese Homologie frei ist, folgt aus dem universellen Koeffizientensatz, dass

$$H^*(X) \cong \text{Hom}(H_*(X), \mathbf{Z}) \cong H_*(X).$$

Für jedes k sei $\tilde{\psi}_k$ die Homologieklassse des zellulären Zyklus \tilde{e}_k in $W_*(S_k)$ und sei $\psi_k = (i_k)_*(\tilde{\psi}_k)$. Dies ist die Homologieklassse des zellulären Zyklus e_k und erzeugt den zugehörigen Summanden \mathbf{Z} von $H_*(X)$.

Sei α_k das Erzeugende des entsprechenden Summanden von $H^*(X)$ mit $\langle \alpha_k, \psi_k \rangle = 1$, und sei $\tilde{\alpha}_k = i_k^* \alpha_k$. Wir haben dann

$$\langle \tilde{\alpha}_k, \tilde{\psi}_k \rangle = \langle i_k^* \alpha_k, \tilde{\psi}_k \rangle = \langle \alpha_k, (i_k)_* \tilde{\psi}_k \rangle = \langle \alpha_k, \psi_k \rangle = 1,$$

und $\tilde{\alpha}_k$ erzeugt die höchste Kohomologiegruppe von S_k . Die in der Aussage erwähnten Klassen α und β sind hier α_1 und α_2 .

In $H^*(S_3) = H^*(S^{m+n})$ ist außer 0 kein \mathbf{Z} -Vielfaches von $\tilde{\alpha}_3$ ein Cup-Produkt von Kohomologieklassen positiver Dimension, weil $H^{m+n}(S^{m+n})$ die einzige nichtverschwindende positivdimensionale Kohomologiegruppe von S^{m+n} ist. Weil i_3^* ein Ringhomomorphismus ist, kann auch in $H^*(X)$ kein Vielfaches von α_3 außer 0 ein Cup-Produkt von Kohomologieklassen positiver Dimension sein.

Aus Dimensionsgründen muss aber $\alpha \cup \beta$ ein Vielfaches von α_3 sein. Also ist $\alpha \cup \beta = 0$. ■

Diese Beispiele haben gezeigt, dass die Kohomologieringstruktur tatsächlich eine wesentliche neue Invariante ist, die geometrische Merkmale erfasst, die die additive Struktur nicht bemerkt.

