

Matrikelnummer:	1	0	8	0								
Name:												
Vorname:												

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Bonus	Gesamtpunktzahl

Klausur „Mathematik II für ET/IT und ITS“ im SS 2012

Hinweise:

- Schreiben Sie auf das Deckblatt der Klausur Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren vollständigen Namen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Es werden in jeder der 10 Aufgaben 10 Punkte, insgesamt 100 Punkte, vergeben. Die Verteilung der Punkte auf die Teilaufgaben steht hinter der Aufgabennummer.
- Lösen Sie die Aufgaben auf den Seiten mit der Aufgabenstellung (Vorder- und Rückseite). Sollte dieser Platz nicht ausreichen, so schreiben Sie auf den hinter Aufgabe 10 angehängten Ergänzungsseiten. Kennzeichnen Sie auf der Seite mit der Aufgabenstellung, dass die Lösung auf den Ergänzungsseiten fortgesetzt wird.
- Zu einer vollständigen Lösung gehört nicht nur das Ergebnis, sondern auch der Rechenweg.
- Schreiben Sie mit einem permanenten Stift und nicht mit Bleistift oder Tintenkiller.
- Als Hilfsmittel ist nur ein DIN A4 - Blatt mit eigenen Notizen erlaubt. Beachten Sie auch die Formelsammlung auf der folgenden Seite.
- Schreiben Sie in Ihrem eigenen Interesse leserlich. Die letzten beiden Seiten sind Schmierpapier und werden nicht bewertet.

- Fourierreihe: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ mit $L = 2\pi/\omega$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_c^{c+L} f(x) \cos(n\omega x) dx \text{ und } b_n = \frac{2}{L} \int_c^{c+L} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

- Fourierreihenansatz für spezielle Lösung der DGL $y'' + \omega_0^2 y = f(x)$

– Summanden ohne Resonanz

$$A_n = \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}, B_n = \frac{b_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}$$

– Summanden mit Resonanz

$$A_k = -\frac{b_k}{2\omega_0}, B_k = \frac{a_k}{2\omega_0}$$

- $\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi, \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0$

- f, f_x stetig

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b f_x(x, y) dy$$

- $D \subset \mathbb{R}^3, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^3, f : D \rightarrow \mathbb{R},$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} (v_3)_y - (v_2)_z \\ (v_1)_z - (v_3)_x \\ (v_2)_x - (v_1)_y \end{pmatrix}, \text{div } \vec{v} = (v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z,$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) \equiv \vec{0}, \text{div}(\text{rot } \vec{v}) \equiv 0$$

- Parametrisierung $S = \Phi(D), \Phi : (u, v) \mapsto \Phi(u, v),$

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_D \langle \vec{v}(\Phi(u, v)), \Phi_u \times \Phi_v \rangle d(u, v)$$

- $\int_G (\text{div } \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}, \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x}$

- Laplacetransformation: $L(e^{-\alpha t} f(t))(z) = L(f(t))(z + \alpha),$
 $L(f')(z) = zL(f) - f(0), (-1)^n L(t^n f(t))(z) = (L(f)(z))^{(n)}$

$$L(t^n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}, \quad L(\cos t)(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad L(\sin t)(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

$$L(f(\alpha t))(z) = \frac{1}{\alpha} L(f(t))(z/\alpha)$$

Aufgabe 1 (3+7 Punkte):

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 6π -periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{für } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{für } \pi < |x| \leq 3\pi \end{cases}.$$

- a) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f für $-6\pi \leq x \leq 6\pi$.
- b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion f .
Tipp: Sie brauchen den Term $\sin(n\pi/3)$ nicht weiter zu vereinfachen.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte):

Es seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit $g(x) = 4x$ für $x \in (-1, 1]$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2-periodische Funktion mit $f(x) = 2x^2$ für $x \in (-1, 1]$. Es gilt

$$g(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x).$$

- a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion f .
- b) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = g(x)$.

Aufgabe 3 (4+6 Punkte):

Es seien $\vec{x}_0 := (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 2x - 6y + 2x^2y.$$

- a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}_0$ ein kritischer (bzw. stationärer) Punkt der Funktion f ist.
- b) Entscheiden Sie, ob $\vec{x}_0$ eine lokale Extremstelle der Funktion f ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie auch die Art der Extremstelle (lokales Minimum/Maximum) an, falls $\vec{x}_0$ eine lokale Extremstelle ist.

Aufgabe 4 (5+3+2 Punkte):

Finden Sie die lineare Funktion $g(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, die die Funktion $\sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ am besten im quadratischen Mittel approximiert. Bestimmen Sie dazu das globale Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(a, b) = \int_0^1 (x^{1/2} - ax - b)^2 dx.$$

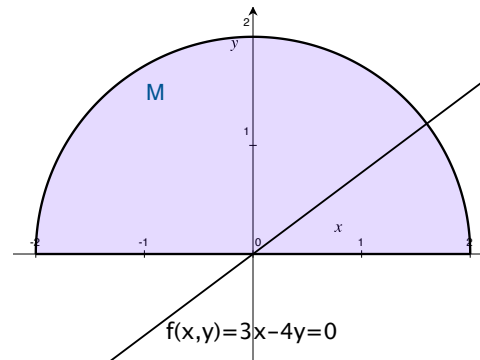
- Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f .
- Berechnen Sie die Hessematrix der Funktion f .
- Begründen Sie, warum f ein globales Minimum besitzt und geben Sie die optimale lineare Funktion an.

Aufgabe 5 (2+8 Punkte):

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x - 4y$ besitzt keine lokalen Extremstellen. Es sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Tipp: Der Rand der Menge M besteht aus der Strecke $\{(x, 0) : -2 \leq x \leq 2\}$ und dem Halbkreisbogen $\{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 - 4 = 0\}$.

- Begründen Sie kurz (zwei Schlagworte), warum f auf der Menge M ein globales Minimum und ein globales Maximum besitzt.
- Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der Funktion f auf der Menge M .

**Aufgabe 6 (3+7 Punkte):**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y - y^3 - 8$. Der Punkt $(x_0, y_0) := (0, -2)$ gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = 0$.

- Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Nähe des Punktes (x_0, y_0) lokal nach der Variablen y auflösbar ist.
- Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Auflösungsfunktion $y(x)$ aus Teilaufgabe 6a) um den Punkt x_0 vom Grad 2.

Aufgabe 7 (3+3+4 Punkte):

- a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte der Funktion

$$f(t) = e^{2t} \sin(3t).$$

- b) Wenden Sie die Laplacetransformation auf die folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen an:

$$y'' + 4y' + 3y = e^{2t} \sin(3t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Stellen Sie die erhaltene Gleichung nach der Laplacetransformierten $L(y(t))(z)$ der gesuchten Funktion $y(t)$ um.

- c) Finden Sie eine Funktion g mit

$$L(g)(z) = \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{z+1}{(z+1)^2+4}.$$

Aufgabe 8 (3+3+4 Punkte):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_D x \, d(x, y)$$

für

- a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}.$
b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3x\}.$
c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$

Aufgabe 9 (2+8 Punkte):

a) Vervollständigen Sie die folgenden Definitionen der Begriffe „Potentialfunktion“ und „Vektorpotential“.

- Eine Potentialfunktion f eines Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Ein Vektorpotential $\vec{w}$ eines Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist ein Vektorfeld $\vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$.

b) Entscheiden Sie, ob das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ x^2 + z^3 - y^2 \\ x + 3yz^2 \end{pmatrix},$$

eine Potentialfunktion oder ein Vektorpotential besitzt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 10 (8+2 Punkte):

Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Fläche $D = \{(x, 2, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 9\}$.

a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch die Fläche D mit Normalenvektor $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T$.

Tipp: D ist eine zur xz -Ebene parallele Kreisscheibe durch den Punkt $(0, 2, 0)$ auf der y -Achse.

b) Sei S eine beliebige glatte Fläche mit $\partial S = \partial D$, d.h. die Ränder der Flächen S und D sind gleich.

Was wissen Sie über den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch die Fläche S ?