Am Ende des Regenbogens

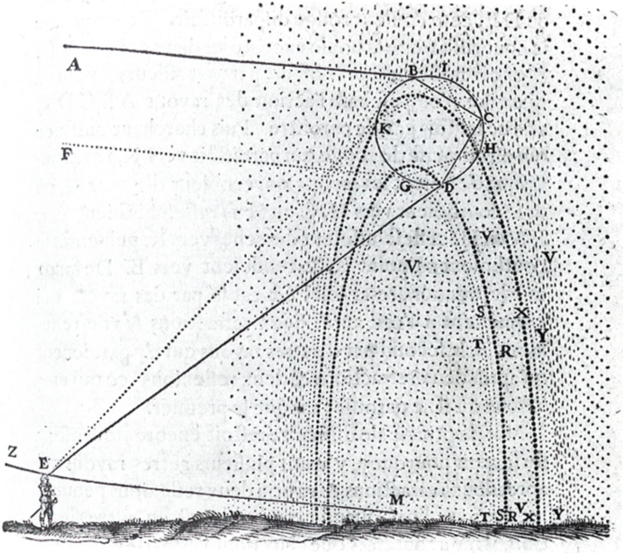
Alberto Abbondandolo

Ruhr-Universität Bochum

Tag der offenen Tür 2014

Ein Regenbogen

Die Erklärung von Descartes (1596-1650)



Das Modell von Descartes

Das Modell von Descartes

- Die Regentropfen sind kugelförmig (nicht unbedingt mit demselben Radius).

Das Modell von Descartes

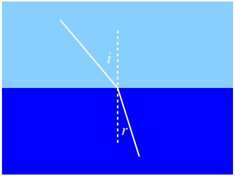
- Die Regentropfen sind kugelförmig (nicht unbedingt mit demselben Radius).
- Das Licht wird gebrochen, wenn es in einen Regentropfen eintritt oder aus einem Regentropfen austritt. Die Brechung des Lichts folgt dem Brechungsgesetz.

Das Modell von Descartes

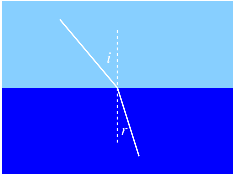
- Die Regentropfen sind kugelförmig (nicht unbedingt mit demselben Radius).
- Das Licht wird gebrochen, wenn es in einen Regentropfen eintritt oder aus einem Regentropfen austritt. Die Brechung des Lichts folgt dem Brechungsgesetz.
- Das Licht wird an der Rückwand des Regentropfen reflektiert. Die Reflexion folgt dem Reflexionsgesetz.

Das Brechungsgesetz

Das Brechungsgesetz



Das Brechungsgesetz

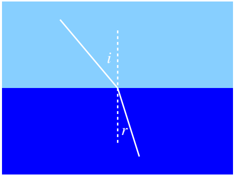


Der Einfallswinkel i und der Winkel r des gebrochenen Strahl sind durch die folgende Gleichung verbunden:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Lichts in den zwei Medien sind.

Das Brechungsgesetz



Der Einfallswinkel i und der Winkel r des gebrochenen Strahl sind durch die folgende Gleichung verbunden:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

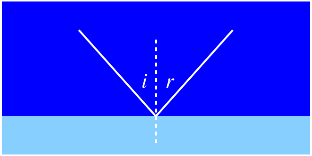
wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Lichts in den zwei Medien sind.
Das Quotient $n = v_1/v_2$ wird Brechungsindex genannt. Im Fall Luft-Wasser hat n den Näherungswert $n = 1,33$.

Das Reflexionsgesetz

Das Reflexionsgesetz

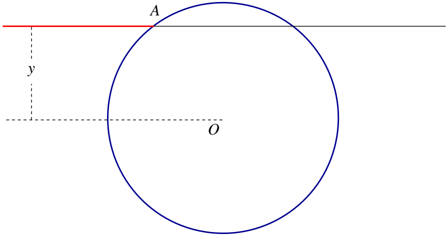
Das Reflexionsgesetz ist einfach

$$i = r.$$

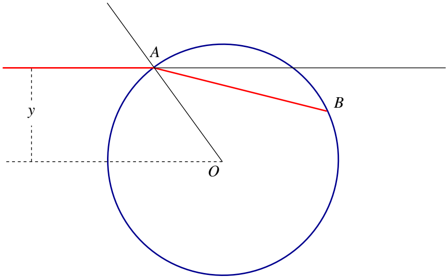


Berechnung der totalen Reflexion

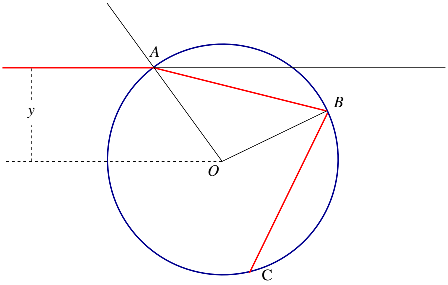
Berechnung der totalen Reflexion



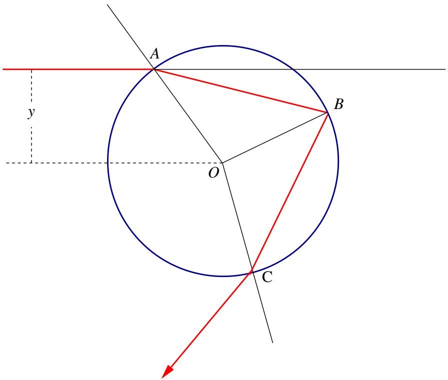
Berechnung der totalen Reflexion



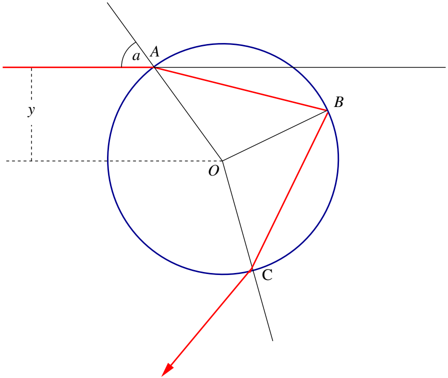
Berechnung der totalen Reflexion



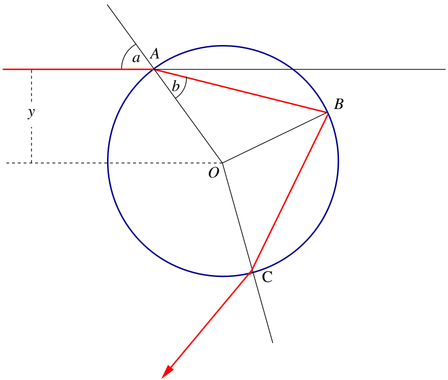
Berechnung der totalen Reflexion



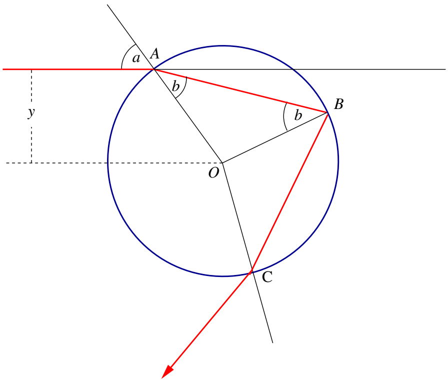
Berechnung der totalen Reflexion



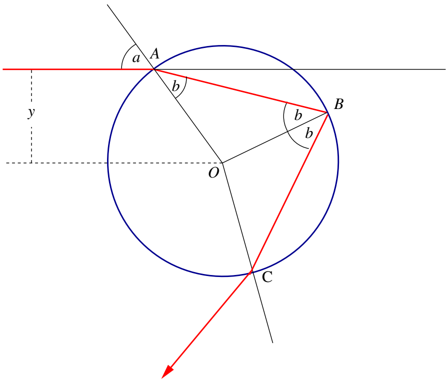
Berechnung der totalen Reflexion



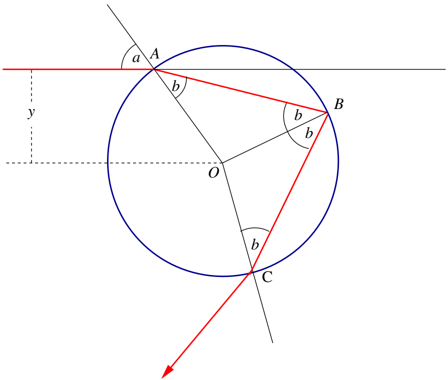
Berechnung der totalen Reflexion



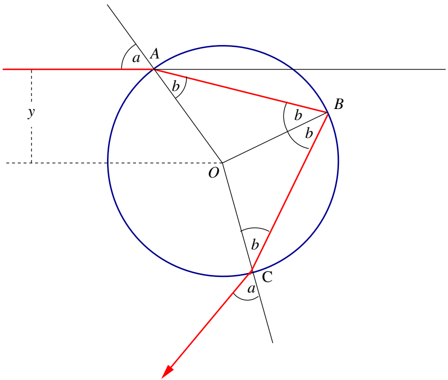
Berechnung der totalen Reflexion



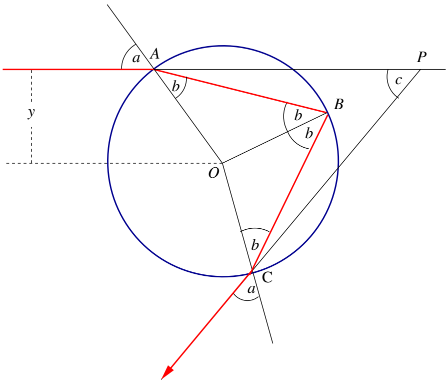
Berechnung der totalen Reflexion



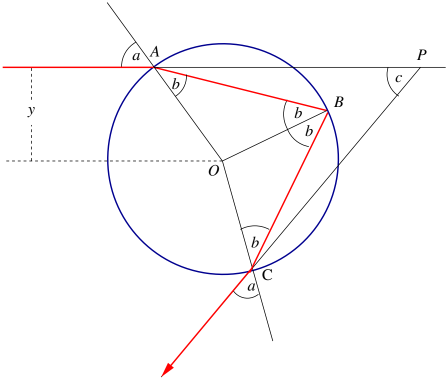
Berechnung der totalen Reflexion



Berechnung der totalen Reflexion

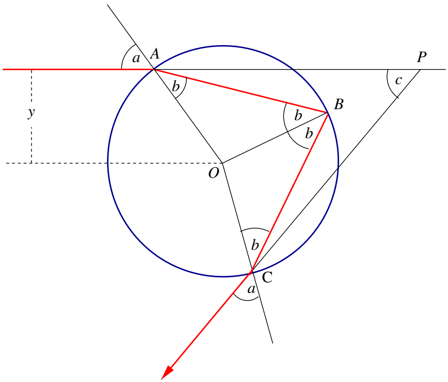


Berechnung der totalen Reflexion



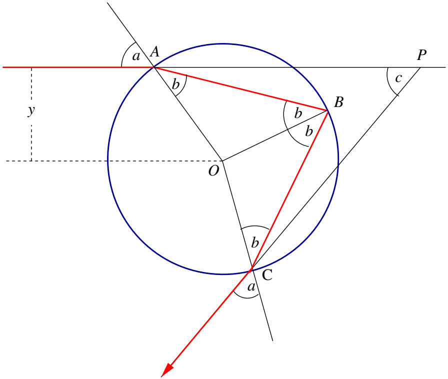
Die Summe der Winkel eines Viereckes ist 360^0.

Berechnung der totalen Reflexion



Die Summe der Winkel eines Viereckes ist 360^0.
Viereck $AOCB$: $\widehat{AOC} = 360^0 - 4b.$

Berechnung der totalen Reflexion

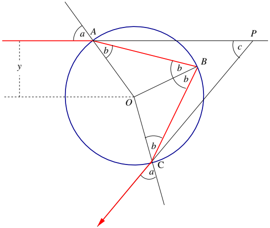


Die Summe der Winkel eines Viereckes ist 360^0.
Viereck $AOCB$: $\widehat{AOC} = 360^0 - 4b$.
Viereck $AOCP$: $a + a + (360^0 - 4b) + c = 360^0$ und damit

$$c = 4b - 2a.$$

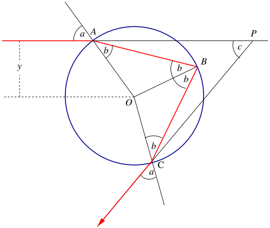
c als Funktion der Variablen y

$$c = 4b - 2a.$$



c als Funktion der Variablen y

$$c = 4b - 2a.$$

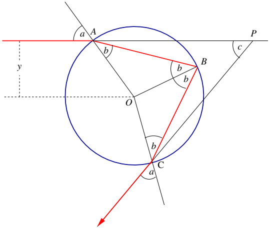


Wenn R das Radius des Regentropfen ist, gilt

$$\sin a = \frac{y}{R}.$$

c als Funktion der Variablen y

$$c = 4b - 2a.$$



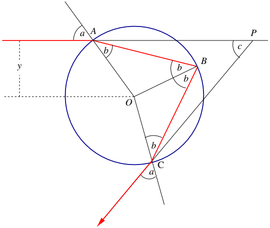
Wenn R das Radius des Regentropfen ist, gilt

$$\sin a = \frac{y}{R}.$$

Aus dem Brechungsgesetz folgern wir

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} = \frac{y}{nR}.$$

c als Funktion der Variablen y



Wenn R das Radius des Regentropfen ist, gilt

$$\sin a = \frac{y}{R}.$$

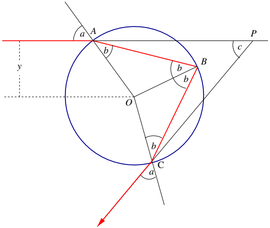
Aus dem Brechungsgesetz folgern wir

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} = \frac{y}{nR}.$$

Also gilt:

$$c(y) = 4b - 2a$$

c als Funktion der Variablen y



Wenn R das Radius des Regentropfen ist, gilt

$$\sin a = \frac{y}{R}.$$

Aus dem Brechungsgesetz folgern wir

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} = \frac{y}{nR}.$$

Also gilt:

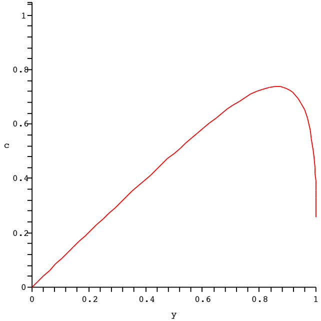
$$c(y) = 4b - 2a = 4 \arcsin \frac{y}{nR} - 2 \arcsin \frac{y}{R}.$$

Verhältnis der Funktion $c(y)$

$$c(y) = 4 \arcsin \frac{y}{nR} - 2 \arcsin \frac{y}{R}, \qquad 0 \leq y \leq R.$$

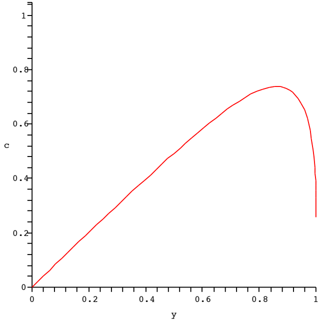
Verhältnis der Funktion $c(y)$

$$c(y) = 4\arcsin\frac{y}{nR} - 2\arcsin\frac{y}{R}, \qquad 0 \le y \le R.$$



Verhältnis der Funktion $c(y)$

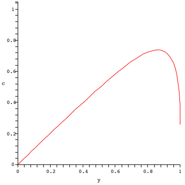
$$c(y) = 4\arcsin\frac{y}{nR} - 2\arcsin\frac{y}{R}, \qquad 0 \le y \le R.$$



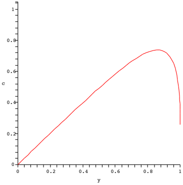
Das Maximum von $c(y)$ hat den Wert

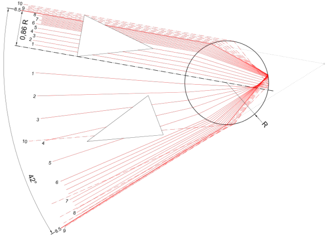
$$\overline{c} = 4\arcsin\frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Eine erste Folgerung

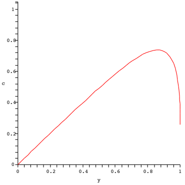


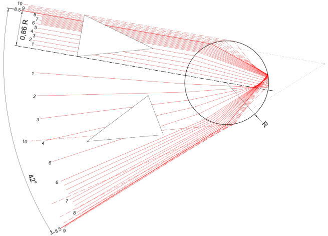
Eine erste Folgerung





Eine erste Folgerung



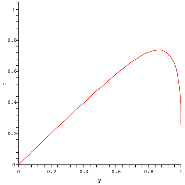


Das reflektierte Licht kommt nur aus dem bodennahen Teil des Himmels.

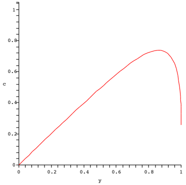
Helldunkel

Wo erscheint der Regenbogen?

Wo erscheint der Regenbogen?



Wo erscheint der Regenbogen?

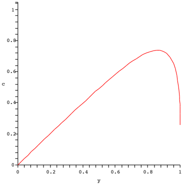


Auf dem Winkel

$$\overline{c} = 4 \arcsin \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

werden viele Lichtstrahlen konzentriert.

Wo erscheint der Regenbogen?



Auf dem Winkel

$$\overline{c} = 4 \arcsin \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

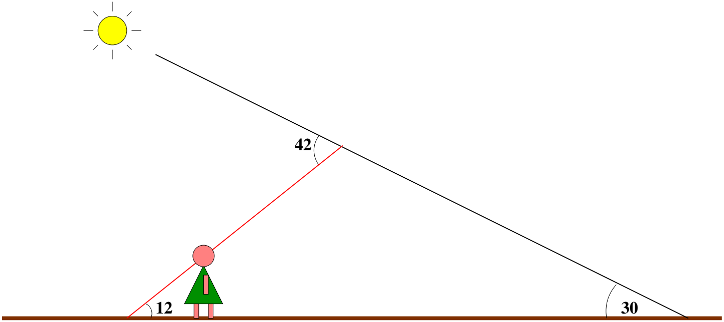
werden viele Lichtstrahlen konzentriert.
Mit $n = 1,33$ finden wir $\overline{c} = 42^0$.

Wo erscheint der Regenbogen?

Auf dem Winkel

$$\overline{c} = 4 \arcsin \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

werden viele Lichtstrahlen konzentriert.
Mit $n = 1,33$ finden wir $\overline{c} = 42^0$.



Und die Farben?

Und die Farben?

Wir verfeinern das Modell von Descartes:

Und die Farben?

Wir verfeinern das Modell von Descartes:

- Das Sonnenlicht besteht aus der Superposition aller Farben.

Und die Farben?

Wir verfeinern das Modell von Descartes:

- Das Sonnenlicht besteht aus der Superposition aller Farben.
- Das Brechungsindex n hängt von der Farbe ab:

1.34451	
1.34235	
1.34055	
1.33903	
1.34235	
1.33659	
1.3356	
1.33472	
1.33393	
1.33322	
1.33257	
1.33197	
1.33141	

Die Farben

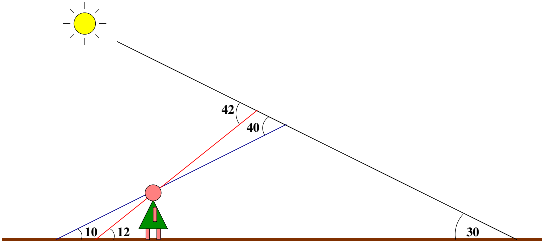
Mit dem Wert $n = 1,33141$ des Brechungsindex des roten Lichts finden wir $\overline{c} = 42,31^0$.

Die Farben

Mit dem Wert $n = 1,33141$ des Brechungsindex des roten Lichts finden wir $\overline{c} = 42,31^0$.
Mit dem Wert $n = 1,34451$ des Brechungsindex des violetten Lichts finden wir $\overline{c} = 40,43^0$.

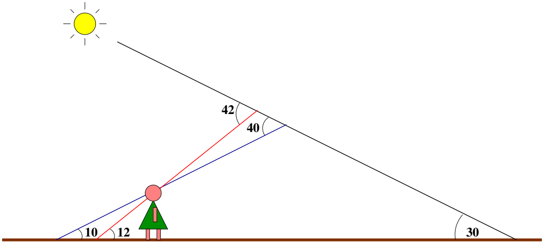
Die Farben

Mit dem Wert $n = 1,33141$ des Brechungsindex des roten Lichts finden wir $\overline{c} = 42,31^0$.
Mit dem Wert $n = 1,34451$ des Brechungsindex des violetten Lichts finden wir $\overline{c} = 40,43^0$.



Die Farben

Mit dem Wert $n = 1,33141$ des Brechungsindex des roten Lichts finden wir $\overline{c} = 42,31^0$.
Mit dem Wert $n = 1,34451$ des Brechungsindex des violetten Lichts finden wir $\overline{c} = 40,43^0$.



Also ist das rote Band am äußeren Rand des Regenbogen und das violette Band am inneren.

Der vorherige Regenbogen

Ein zweiter Regenbogen

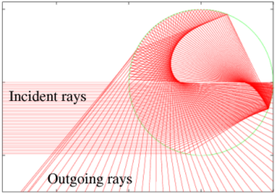
Erklärung

Erklärung

Der zweite Regenbogen wird durch die Strahlen gebildet, die eine doppele Reflexion in den Regentropfen durchlaufen.

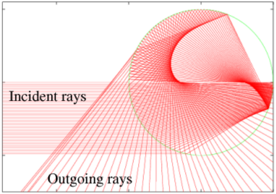
Erklärung

Der zweite Regenbogen wird durch die Strahlen gebildet, die eine doppele Reflexion in den Regentropfen durchlaufen.



Erklärung

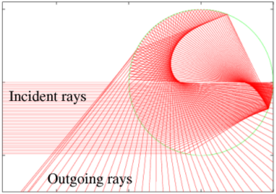
Der zweite Regenbogen wird durch die Strahlen gebildet, die eine doppele Reflexion in den Regentropfen durchlaufen.



Mit ähnlichen Rechnungen findet man, dass das Licht des zweiten Regenbogens Winkel zwischen 50^0 und 53^0 mit der Richtung des Sonnenlichts bildet.

Erklärung

Der zweite Regenbogen wird durch die Strahlen gebildet, die eine doppele Reflexion in den Regentropfen durchlaufen.



Mit ähnlichen Rechnungen findet man, dass das Licht des zweiten Regenbogens Winkel zwischen 50^0 und 53^0 mit der Richtung des Sonnenlichts bildet.
Wegen der zweiten Reflexion kommen die Farben in der umgekehrten Ordnung.

Was gibt es am Ende des Regenbogens?

Es gibt stets neue Fragen

Wie verdeutlicht man die überzähligen Bogen?

Literatur

Literatur

- H. Nussenzveig, *The theory of the rainbow*, Scientific American, April 1977.

Literatur

- H. Nussenzveig, *The theory of the rainbow*, Scientific American, April 1977.
- J. Walker, *Mysteries of rainbows, notably their rare supernumerary arcs*, Amateur Scientist column for Scientific American, June, 1980.

Literatur

- H. Nussenzveig, *The theory of the rainbow*, Scientific American, April 1977.
- J. Walker, *Mysteries of rainbows, notably their rare supernumerary arcs*, Amateur Scientist column for Scientific American, June, 1980.
- B. Casselman, *The mathematics of rainbows*, Feature Column dell'American Mathematical Society.

  http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows

Literatur

- H. Nussenzveig, *The theory of the rainbow*, Scientific American, April 1977.
- J. Walker, *Mysteries of rainbows, notably their rare supernumerary arcs*, Amateur Scientist column for Scientific American, June, 1980.
- B. Casselman, *The mathematics of rainbows*, Feature Column dell'American Mathematical Society.

  http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows
- R. A. R. Tricker, *Introduction to meteorological optics*, American Elsevier, 1970.

Literatur

- H. Nussenzveig, *The theory of the rainbow*, Scientific American, April 1977.
- J. Walker, *Mysteries of rainbows, notably their rare supernumerary arcs*, Amateur Scientist column for Scientific American, June, 1980.
- B. Casselman, *The mathematics of rainbows*, Feature Column dell'American Mathematical Society.

  http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows
- R. A. R. Tricker, *Introduction to meteorological optics*, American Elsevier, 1970.
- Wikipedia-Seite http://www.de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen. Viele Bilder dieser Präsentation kommen aus dieser Webseite.


LIFE