Vorlesungsskript

Mathematik für Physiker I

Dr. Jörg Härterich

Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2007/08

Inhaltsverzeichnis

Viele Aussagen in der Physik lassen sich sehr gut in der Sprache der Mathematik beschreiben. Sie erlaubt eine präzise Beschreibung vieler Phänomene in abstrakter Form, vom Newtonschen Gravitationsgesetz über die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik bis hin zu aktuellen Entwicklungen in der String-Theorie.
Der Vorlesungszyklus *Mathematik für Physiker* soll Ihnen helfen,

- die notwendigen Begriffe zu entwickeln, um mathematische und physikalische Gesetzmäßigkeiten sorgfältig und verständlich aufzuschreiben, und die Voraussetzungen der entsprechenden Resultate klar anzugeben,

- sich das Handwerkszeug anzueignen, das insbesondere bei der quantitativen Beschreibung physikalischer Vorgänge auftritt (siehe auch Vorlesung *Mathematische Hilfsmittel der Physik*). Weiter soll sie Ihnen ermöglichen, Ihr Wissen je nach Bedarf später zu vertiefen, sei es, wenn Sie als theoretische/r PhysikerIn numerische Verfahren entwickeln oder im Grenzgebiet zwischen Mathematik und Physik arbeiten, sei es, wenn Sie als ExperimentalphysikerIn Messwerte in einen sinnvollen Zusammenhang bringen und quantitativ interpretieren möchten.

- Problemlösestrategien kennenlernen, denn im Unterschied zur Schule werden Ihnen an der Hochschule und später viele Probleme begegnen, für die schon der prinzipielle Lösungsweg zunächst nicht klar ist. Sie werden unterschiedliche Herangehensweisen erleben und selbst lernen, unter mehreren Möglichkeiten die erfolgversprechendste zu finden.

Das vorliegende Skript ist als *Begleitmaterial* zur Vorlesung zu verstehen, es ersetzt diese nicht und es schadet auch nicht, ab und zu in eines der vielen Bücher zum Thema zu schauen.

1 Mengen, Abbildungen und Zahlen

1.1 Mengen

Den grundlegenden Begriff einer Menge formal zu definieren, ist gar nicht so einfach, wie man vielleicht glaubt. Aus diesem Grund geben wir uns mit einer intuitiven Beschreibung zufrieden.

„Definition“ (Cantor, 1885): *„Eine **Menge** ist eine wohldefinierte Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.“*

Diese Objekte nennen wir **Elemente** der Menge. Cantors Forderung nach „verschiedenen“ Objekten bedeutet, dass keines der Elemente mehrfach in einer Menge vorkommt.

Beispiele:

1. Die Menge aller Studierenden in dieser Vorlesung
2. die Menge der Postleitzahlen im Stadtgebiet von Bochum
3. die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ der *natürlichen Zahlen*
4. die Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
5. die Menge $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ der Primzahlen, d.h. der Zahlen, die genau zwei Teiler besitzen.
6. die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, mit der wir uns später noch ausführlicher befassen werden.
7. Die Menge, die überhaupt kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird $\{\}$ oder $\emptyset$ geschrieben.

Ist ein Objekt a in einer Menge A enthalten, dann schreibt man $a \in A$, ansonsten $a \notin A$.

Theoretisch lassen sich auch Dinge, die nicht offensichtlich miteinander zu tun haben, zu einer Menge zusammenfassen. Ein Beispiel wäre die Menge, die aus der Farbe blau, dem Satz von Pythagoras und Harry Potter besteht...
Mit solchen Mengen lässt sich allerdings nicht viel anfangen, daher werden wir uns um sie auch nicht weiter kümmern.

Zur Schreibweise: Mengen schreibt man üblicherweise entweder wie oben als Auflistung in geschweiften (Mengen–)Klammern oder indem man die Elemente der Menge durch ihre Eigenschaften charakterisiert. Auf diese Weise lassen sich auch unendliche Mengen ohne „…“ darstellen. Wir schreiben beispielsweise

$$P = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Genau genommen meint man damit die Menge aller natürlichen Zahlen, für die die Aussage „n ist eine Primzahl“ wahr ist. Dabei ist eine **Aussage** ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist („tertium non datur“).

Definition:

(i) Seien A und B Mengen. Dann nennt man B eine **Teilmenge** von A und schreibt $B \subset A$, falls jedes Element von B auch in A enthalten ist.

(ii) Seien A und B Mengen. Der **Durchschnitt** $A \cap B$ besteht aus allen Elementen, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$A \cap B := \{x;\ x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Das hierbei verwendete Zeichen „:=“ bedeutet, dass der links stehende Ausdruck durch den Ausdruck auf der rechten Seite definiert wird.

(iii) Die **Vereinigung** $A \cup B$ besteht aus denjenigen Elementen, die in A oder in B enthalten sind:

$$A \cup B := \{x;\ x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

(iii) Die **Differenz** $A \setminus B$ besteht aus denjenigen Elementen, die in A, aber nicht in B enthalten sind:

$$A \setminus B := \{x;\ x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Achtung ! Mit *oder* ist hier (und überhaupt in der Mathematik) nicht das ausschließende *entweder…oder* gemeint. $A \cup B$ enthält auch diejenigen Elemente, die in A *und* in B liegen.

Definition: Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

Bemerkung:

(i) Offensichtlich gelten für Vereinigung und Durchschnitt das **Kommutativgesetz**

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

(ii) Auch kommt es bei mehrfachen Vereinigungen und Durchschnitten nicht darauf an, in welcher Reihenfolge man sie bildet. Es gilt das **Assoziativgesetz**

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\\(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\end{aligned}$$

Satz 1.1
*Seien A, B und C beliebige Mengen. Dann gelten die **Distributivgesetze***

$$\begin{aligned}A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\\A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

Beweis: Um die Gleichheit der Mengen zu beweisen, müssen wir zuerst die Inklusion

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

und anschließend die umgekehrte Inklusion zeigen. Wir starten also mit einem Element $x \in A \cup (B \cap C)$ der linken Menge. Dann ist $x \in A$ oder $x \in B \cap C$.
Im ersten Fall ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, also ist x auch im Durchschnitt $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ enthalten.
im zweiten Fall ist $x \in B$ und $x \in C$, also ebenfalls $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Daher liegt x auch in der rechten Menge und die Inklusion ist bewiesen.

Für die umgekehrte Richtung

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$$

starten wir mit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Falls $x \in A$ sind wir fertig, ansonsten muss x sowohl Element von B als auch von C sein und damit auch von $B \cap C$. Dann ist schließlich auch $x \in A \cup (B \cap C)$. □

Gelegentlich werden wir es mit Aussagen zu tun haben, die von Variablen abhängen.
Als Beispiel betrachten wir die Aussage $A(n)$ „Die Zahl n ist eine Quadratzahl“. Man kann nun (in Gedanken) alle natürlichen Zahlen für n einsetzen und erhält jeweils eine Aussage. Beispielsweise ist $A(1)$ die Aussage „Die Zahl 1 ist eine Quadratzahl“ eine wahre Aussage, während $A(2)$ „Die Zahl 2 ist eine Quadratzahl“ falsch ist.
Häufig stellt sich die Frage, ob eine Aussage $A(n)$ für *alle* n richtig, bzw. ob sie für alle n falsch ist. **Quantoren** dienen dazu, solche Aussagen zu formulieren.
Der **All-Quantor** $\forall$ drückt aus, dass eine Aussage für alle Elemente a der Menge A wahr ist. Die Schreibweise

$$\forall m \in M : A(m)$$

bedeutet, dass die Aussage $A(m)$ für alle $m \in M$ eine wahre Aussage ist.
Der **Existenz-Quantor** $\exists$ drückt aus, dass die Aussage zumindest für eine Variable wahr ist:

$$\exists m \in M : A(m)$$

bedeutet, dass (mindestens) ein Element m der Menge M existiert, für das die Aussage $A(m)$ wahr ist.

Beispiele:

1. Sie wissen vermutlich aus der Schule, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Wir werden das in Kürze auch beweisen. Die Tatsache, dass es so ist, können wir schon jetzt mit Quantoren so ausdrücken:
$$\forall q \in \mathbb{Q}: \; q^2 \neq 2.$$

2. Die Menge P der Primzahlen kann man charakterisieren als
$$P = \{p > 1; \; \forall m, n \in \mathbb{N} : m > 1 \text{ und } n > 1 \Rightarrow p \neq m \cdot n\}.$$
Sie besteht genau aus den Zahlen, für die die Aussage nach dem Semikolon wahr ist, die sich also nicht als Produkt von zwei Faktoren > 1 schreiben lassen.
Eine alternative Charakterisierung wäre
$$P = \{p > 1; \; \forall m, n \in \mathbb{N} : p = m \cdot n \Rightarrow (m = 1 \text{ oder } n = 1)\}.$$

3. Die Tatsache, dass es zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl gibt, die größer ist als n, lässt sich schreiben als
$$\forall n \in \mathbb{N}: \; \exists p \in P: \; p > n.$$
Man kann hier leicht sehen, dass verschiedene Quantoren *nicht* vertauscht werden dürfen, denn
$$\exists p \in P: \; \forall n \in \mathbb{N}: \; p > n.$$
würde ja bedeuten, dass es eine bestimmte Primzahl p gibt, die größer als jede natürliche Zahl ist. Das ist aber offensichtlich falsch.

4. Die Menge Q der Quadratzahlen ist
$$Q = \{q \in \mathbb{N}; \; \exists n \in \mathbb{N} : q = n^2\}.$$

Gelegentlich bildet man auch Vereinigungen und Durchschnitte von *unendlich* vielen Mengen.

Definition: Seien $M_1, M_2, \ldots$ Mengen. Dann ist
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n \quad := \quad \{x; \; \forall n \in \mathbb{N} : x \in M_n\}$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \quad := \quad \{x; \; \exists n \in \mathbb{N} : x \in M_n\}$$

Definition:
Seien A, B Mengen. Dann heißt die Menge der geordneten Paare (a, b)

$$A \times B := \{(a, b);\ a \in A, b \in B\}$$

kartesisches Produkt von A und B. Wir nennen a und b die erste bzw. zweite Komponente des Paars (a, b).

Achtung: Hier kommt es auf die Reihenfolge an! Während für Mengen immer $\{a, b\} = \{b, a\}$ gilt, ist für geordnete Paare im allgemeinen $(a, b) \neq (b, a)$, außer natürlich im Fall $a = b$.
Für zwei geordnete Paare gilt daher: $(a, b) = (\bar{a}, \bar{b})$ bedeutet, dass $a = \bar{a}$ und $b = \bar{b}$.
Das in der Physik wichtigste Beispiel für ein kartesisches Produkt ist wohl $A = B = \mathbb{R}$. Statt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schreibt man $\mathbb{R}^2$ und beschreibt damit beispielsweise die Menge der Punkt in der Ebene. Führt man ein kartesisches Koordinatensystem ein, so bestehen die Paare (a, b) gerade aus der x–Koordinate und der y–Koordinate eines Punktes.

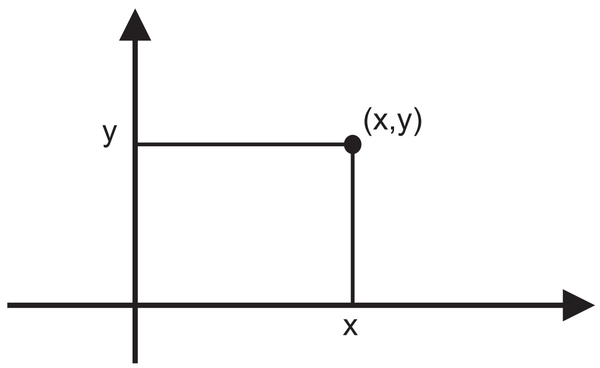


Abbildung 1.1: Geordnete Paare als Koordinaten eines Punktes in der Ebene

Analog zu Paaren lassen sich auch geordnete Tripel $(a, b, c) \in A \times B \times C$, geordnete Quadrupel $(a, b, c, d) \in A \times B \times C \times D$ und allgemein geordnete n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ definieren.

1.2 Abbildungen

Definition:
Seien A und B Mengen. Eine **Abbildung** (bzw. **Funktion**) f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet. Man nennt $f(a)$ das **Bild** von a unter f, bzw. den **Wert** von f bei a. Die Menge A heißt **Definitionsbereich** von f, die Menge B der **Wertebereich** von f.

Wir schreiben

$$f : A \to B$$

und wenn wir die Zuordnungsvorschrift für jedes a mit angeben wollen

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a), \end{aligned}$$

in Kurzschreibweise manchmal auch

$$A \ni a \mapsto f(a) \in B.$$

Beispiele:

1. Für $A = \{\text{Borussia}, \text{Vfl}, \text{Bayern}\}$ und $B = \{\text{Bochum}, \text{München}, \text{Dortmund}\}$ ist eine zumindest für Fussballfans sinnvolle Abbildung gegeben durch $f(\text{Borussia}) = \text{Dortmund}$, $f(\text{Vfl}) = \text{Bochum}$ und $f(\text{Bayern}) = \text{München}$.

2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$ bildet die natürlichen Zahlen auf die Menge aller Quadratzahlen ab. Nicht jede natürliche Zahl ist also im Bildbereich enthalten. Andererseits gibt es keine zwei Zahlen, die dasselbe Bild unter f haben.

3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ bildet die ganzen Zahlen ab auf die Quadratzahlen. Wegen $(-m)^2 = m^2$ haben die zwei Zahlen $+m$ und $-m$ den selben Funktionswert.

4. Die Addition natürlicher Zahlen kann man ebenfalls als Abbildung auffassen: Einem Paar (m, n) von natürlichen Zahlen wird dabei ihre Summe $m + n$ zugeordnet.

$$\begin{aligned} '+' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto m + n \end{aligned}$$

5. Ein **Polynom** P ist eine Abbildung der Form

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n$$

Man nennt die a_i die **Koeffizienten** des Polynoms. Falls $a_n \neq 0$, dann ist n der **Grad** des Polynoms. Man kann P als Abbildung $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in den reellen Zahlen auffassen. Falls alle Koeffizienten ganzzahlig sind, dann bildet P die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ wieder in die Menge $\mathbb{Z}$ ab. Genauso bildet eine Polynom mit rationalen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen wieder auf rationale Zahlen ab.

6. Die **identische Abbildung** $\mathrm{id} : A \to A$ bildet die Menge A auf die einfachst mögliche Art auf sich selbst ab: für jedes $a \in A$ ist $\mathrm{id}(a) = a$.

7. Für eine gegebene Abbildung $F : X \to Y$ und eine Teilmenge $\tilde{X} \subset X$ definiert man die **Einschränkung** $F|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to Y$ von F auf $\tilde{X}$ als $F|_{\tilde{X}}(x) = F(x)$ für alle $x \in \tilde{X}$.

8. Die Menge $A \times B$ besteht aus geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} P_A : A \times B &\to A \\ (a, b) &\mapsto a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_B : A \times B &\rightarrow B \\ (a,b) &\mapsto b \end{aligned}$$

beeichnet man als **kanonische Projektionen**. Mit ihrer Hilfe verschafft man sich einzelne Komponenten des Paares und „vergisst“ die übrigen.

Definition:
Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung und seien $U \subset A$, $V \subset B$ Teilmengen. Dann nennen wir

$$f(U) := \{f(a); a \in U\} \subset B$$

die **Bildmenge** von U. Umgekehrt heißt

$$f^{-1}(V) := \{a \in A; f(a) \in V\} \subset A$$

die **Urbildmenge**, bzw. das **Urbild** von V.

Das Urbild besteht also aus allen Elementen von A, deren Bild in der Menge V liegt.

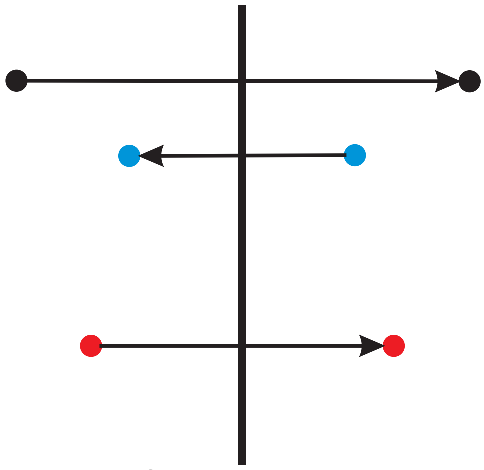
Definition:
Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann nennen wir f **surjektiv**, falls $f(A) = B$. Die Abbildung f heißt **injektiv**, falls jedes Element aus B höchstens ein Urbild hat. In diesem Fall folgt aus $f(a) = f(\tilde{a})$, dass $a = \tilde{a}$ sein muss.
Eine Abbildung, die surjektiv und injektiv ist, heißt **bijektiv**. Sie ordnet die Elemente von A auf eindeutige Weise den Elementen von B zu. Im englischen heißen bijektive Abbildungen daher auch *one-to-one*.

Beispiele:

1. Die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die durch $f(n) = 2n$ definiert wird, ist injektiv, aber nicht surjektiv, da nur die geraden Zahlen als Bilder vorkommen.

2. Die Abbildung, die $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Punkt (x, y) der Ebene seine x-Koordinate zuordnet ist surjektiv, aber nicht injektiv, da p_1 allen Punkte auf einer Geraden, die parallel zur y-Achse verläuft, denselben Wert zuordnet.

3. Die Abbildung, die jedem Punkt der Ebene sein Spiegelbild bezüglich der Spiegelung an einer Geraden zuordnet, ist bijektiv.



Man kann mehrere Abbildungen nacheinander ausführen, falls die jeweiligen Bild- und Definitionsbereiche das zulassen.

Definition:
Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann wird durch

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

eine neue Abbildung $g \circ f$ erklärt, die **Hintereinanderausführung** von g und f.

Achtung ! Gelegentlich verwirrt diese Schreibweise etwas, da wir von links nach rechts lesen, f aber zuerst angewendet wird. Es hilft ein wenig, wenn man sich für die Komposition von Abbildungen die Sprechweise *„g nach f“* angewöhnt.

Beispiel: Sind p und q Polynome, die wir beispielsweise als Abbildungen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen können, dann ist auch die Verkettung $q \circ p$ wieder ein Polynom, denn wenn wir

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n$$

in das Polynom $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots b_m x^m$ einsetzen, erhält man zunächst

$$q(p(x)) = b_0 + b_1(a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n) + b_2(a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n)^2 + \ldots b_m(a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n)^m$$

und nach dem Ausmultiplizieren wieder ein Polynom (vom Grad $m \cdot n$).

Jede bijektive Funktion besitzt eine **Umkehrabbildung**.

Satz 1.2
Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $g : B \to A$ mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{rcll} (g \circ f)(a) & = & a & \textit{für alle } \; a \in A \\ (f \circ g)(b) & = & b & \textit{für alle } \; b \in B. \end{array}$$

Beweis: Wir müssen zwei Dinge zeigen:
1. Es gibt überhaupt eine solche Abbildung g.
2. Es gibt genau eine solche Abbildung g.

zu 1. Da die Abbildung surjektiv ist, gibt es zu jedem $b_0 \in B$ ein Urbild $a_0 \in A$. Da f injektiv ist, gibt es auch wirklich genau ein Urbild. Wir setzen $g(b_0) = a_0$. Damit ist $f(g(b_0)) = f(a_0) = b_0$ und $g(f(a_0)) = g(b_0) = a_0$.

zu 2. Wir nehmen an, dass sowohl g als auch $\tilde{g}$ Umkehrabbildungen von f sind. Um zu zeigen, dass $g(b) = \tilde{g}(b)$ ist für jedes $b \in B$, nutzen wir die Surjektivität von f aus. Zu $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Dann ist aber

$$a = g(f(a)) = \tilde{g}(f(a)) \;\Rightarrow\; g(b) = \tilde{g}(b).$$

Da $b \in B$ beliebig war, sind wir fertig. $\square$

Definition:
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. dann nennt man die Menge

$$G := \{(a, b) \in A \times B;\; b = f(a)\}$$

den **Graph** von f.

1.3 Indirekter Beweis und Widerspruchsbeweis

Auch wenn wir in dieser Vorlesung nicht alle Aussagen streng mathematisch beweisen werden, ist es doch nützlich, einige der Werkzeuge kennenzulernen, die es erlauben, Aussagen streng logisch herzuleiten.
Die einfachste Methode ist der sogenannte *direkte Beweis*. Um zu zeigen, dass aus einer Aussage A eine andere Aussage B zwingend folgt (geschrieben $A \Rightarrow B$) startet man mit der Aussage A und ersetzt diese so lange durch äquivalente Aussagen, bis man die Aussage B erhält.

Beispiel: Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ergibt bei Division durch 8 den Rest 1,
denn: jede ungerade Zahl kann man in der Form $2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n darstellen.
Dann ist mit der aus der Schule bekannten binomischen Formel

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1.$$

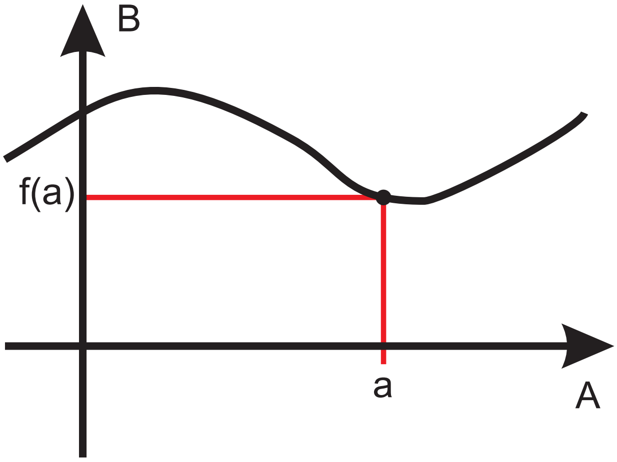


Abbildung 1.2: der Graph einer Abbildung

Da von den Zahlen n und $n + 1$ eine gerade ist, muss $4n(n + 1)$ durch 8 teilbar sein.

Eine andere Möglichkeit ist der *indirekte Beweis* und der *Widerspruchsbeweis*.
Anstelle der Aussage $A \Rightarrow B$ zeigt man beim indirekten Beweis die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$, wobei $\neg A$ die **Negation** der Aussage A ist, d.h. $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt. $\neg B \Rightarrow \neg A$ bedeutet also „Wenn B keine wahre Aussage ist, dann kann A auch nicht wahr sein."

Beispiele zur Negation:
Die Negation der Aussage „Spinat ist lecker und gesund" lautet „Spinat ist nicht lecker oder Spinat ist nicht gesund".
Die Negation der Aussage „Wenn es regnet, ist die Erde nass" ist „Es regnet und die Erde ist nicht nass". Beachten Sie, dass „Wenn es nicht regnet, ist die Erde nicht nass" eben nicht die logische Umkehrung der ersten Aussage ist, denn die Erde könnte ohne weiteres nass sein, auch wenn es nicht regnet.
Vom Standpunkt der Aussagenlogik ist die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr, wenn A und B beide wahr sind, aber auch dann, wenn A falsch ist. Dies ist die sogenannte *ex-falso-Regel*, nach der aus einer falschen Voraussetzung alles geschlossen werden kann.
Es gilt daher

$$A \Rightarrow B \text{ ist wahr, genau dann wenn } (\neg A \text{ oder } B) \text{ wahr ist.}$$

Die Negation von $A \Rightarrow B$ ist daher die Aussage „A und $\neg B$".
Vorsicht ist auch geboten bei den Quantoren. Die Negation der Aussage „Alle Menschen sind kleiner als 2,10 Meter" lautet natürlich nicht „Alle Menschen sind größer als 2,10 Meter", sondern „Es gibt einen Menschen, der größer als 2,10 Meter ist".
Den Umgang mit Negationen werden Sie in den Übungen noch üben.
Zurück zum indirekten Beweis. Man nimmt also zunächst an, dass die Aussage B (die man ja eigentlich beweisen möchte) falsch ist, und zeigt dann, dass unter dieser Annahme auch A falsch ist.
Ähnlich geht man beim Widerspruchsbeweis vor. Man nimmt die Negation der Aussage an, die man eigentlich beweisen möchte und folgert daraus eine Aussage, die dieser Annahme widerspricht. Daraus kann man dann umgekehrt schließen, dass die Annahme falsch gewesen sein

muss.

Beispiel: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Euklid hat ca. 300 v.Chr. einen indirekten Beweis für diese Aussage angegeben. Er nimmt dazu an, dass die Aussage falsch ist, es also nur endlich viele Primzahlen gibt. Diese listet er die Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ alle auf und bildet daraus die Zahl $M := p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \cdot p_n$. Diese Zahl ist natürlich durch alle Primzahlen teilbar. Andererseits ist $M + 1$ durch keine der Primzahlen teilbar, denn wenn $M+1$ durch irgendeine Primzahl p_i teilbar wäre, dann wäre auch die Differenz $M + 1 - M = 1$ durch p_i teilbar. Das ist aber offenbar falsch, also muss die Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt ebenfalls falsch sein.

Beispiel: Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$, für die $x^2 = 2$ ist.
Wir nehmen wieder an, dass $x = p/q$ die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt, wobei $p, q \in \mathbb{N}$ und der Bruch vollständig gekürzt sein soll. Dann gilt die Gleichung $p^2 = 2q^2$ und da die rechte Seite durch zwei teilbar ist, muss auch die linke Seite durch zwei teilbar sein. Dann ist aber p durch zwei teilbar und wir können $p = 2r$ schreiben. Eingesetzt erhalten wir dann $2r^2 = q^2$. Hier ist nun die linke Seite durch zwei teilbar, die rechte jedoch nicht, da der Bruch p/q vollständig gekürzt war. Das kann jedoch nicht sein, da unsere Voraussetzung ja gerade war, dass p/q bereits vollständig gekürzt is. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass die ursprüngliche Annahme falsch war, und es *kein* $x \in \mathbb{Q}$ geben kann mit $x^2 = 2$.
Weiter unten werden wir sehen, dass es eine reelle Zahl x gibt, die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt.

1.4 Natürliche Zahlen

Ganz sicher können Sie schon lange mit natürlichen Zahlen rechnen. Aber was sind die natürlichen Zahlen überhaupt ? Diese Frage hat Mathematiker immer wieder beschäftigt. Dieses Kapitel soll Ihnen einen kurzen Einblick geben, was Mengen, Abbildungen und Zahlen miteinander zu tun haben. Um 1880 hat Dedekind eine mengentheoretische Definition der natürlichen Zahlen vorgeschlagen, die schließlich 1889 von Peano in den folgenden fünf Axiomen für die Menge $\mathbb{N}$ formuliert wird:

1. Es gibt ein ausgezeichnetes („kleinstes“) Element 1 in $\mathbb{N}$.
2. Zu jeder Zahl n gibt es einen Nachfolger $\nu(n)$.
3. 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl
4. Falls $n_1 \neq n_2$, dann unterscheiden sich auch die Nachfolger: $\nu(n_1) \neq \nu(n_2)$
5. Enthält eine Menge M die Zahl 1 und gilt, dass mit n auch $\nu(n)$ in M enthalten ist, dann ist $M = \mathbb{N}$.

Axiome sind in der Mathematik die elementarsten Grundregeln, aus denen sich (im Prinzip) alle weiteren Aussagen durch logische Ableitung ergeben. Peano axiomatisiert also den Begriff des Zählens, auf dem unsere intuitive Vorstellung natürlicher Zahlen basiert.
Die durch Peanos Axiome konstruierte Menge $\{1, \nu(1), \nu(\nu(1)), \nu(\nu(\nu(1))), \ldots\}$ kennen wir allerdings üblicherweise in der Schreibweise $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

1.5 Vollständige Induktion

Als zweite wichtige Beweismethode behandeln wir die *Vollständige Induktion*. Dabei geht es darum zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl n abhängt, für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
Eine solche von n abhängige Aussage ist beispielsweise

$$\textit{Die Zahl } (2n+1)^2 - 1 \textit{ ist durch } 4 \textit{ teilbar}$$

oder

$$1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

oder

$$5^n < n^5.$$

Dabei sind die ersten beiden Aussagen tatsächlich für alle n richtig, während die dritte nur für $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ wahr ist. Nun kann man natürlich meist nicht für alle n einzeln ausprobieren, ob die Aussage $A(n)$ wahr ist. Eine Möglichkeit, die Aussage für alle n streng mathematisch zu beweisen, besteht darin, sich der Reihe nach von Zahl zu Zahl zu hangeln.

Satz 1.3 [Induktionsprinzip]
Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$. Falls gilt:

1. *$A(1)$ ist wahr (Induktionsanfang)*
2. *Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr (Induktionsschritt),*

dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis:
Sei F die Menge der $n \in \mathbb{N}$, für die $A(n)$ wahr ist. Nach dem letzten der Peanoschen Axiome ist $F = \mathbb{N}$, d.h. die Aussage ist wirklich für alle natürlichen Zahlen wahr. □

Beispiel: Für die Summe ungerader Zahlen gilt:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2. \qquad (*)$$

Hier sehen Sie gleich eine der am häufigsten vorkommenden mathematischen Abkürzungen, das Summenzeichen.
Beweis: Induktionsanfang (n=1): klar, da links und rechts jeweils nur eine Eins steht.

Induktionsschritt (n → n+1):
Wir müssen zeigen, dass die Aussage $A(n+1)$ wahr ist, dass also

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1)=(n+1)^2.$$

Dabei dürfen wir die Aussage $A(n)$ als wahr voraussetzen, d.h. die Gleichung $(*)$ benutzen. Damit erhalten wir aber sofort

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Nach Satz 1.3 gilt die Behauptung dann für alle natürlichen Zahlen n.

Beispiel: Geometrische Summenformel
Sei q eine reelle Zahl. Dann ist für $n=0,1,2,3,\ldots$

$$1+q+q^2+q^3+\ldots q^n=\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad (\diamond)$$

Beim Induktionsanfang $n=0$ ist wieder nichts zu zeigen.
Für den Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ nehmen wir an, dass die Summenformel $(\diamond)$ für eine Zahl n gelte und wir sie nun für die Zahl $n+1$ beweisen müssen. Dann ist aber

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+q+q^2+q^3+\ldots q^n}_{=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\text{ nach Voraussetzung}} \quad +q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}.
\end{aligned}$$

Also gilt $(\diamond)$ auch für die Zahl $n+1$. Nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion ist die Summenformel daher für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig.

Beispiel: Die Bernoullische Ungleichung
Behauptung: Für jede Zahl $h>-1$, $h \neq 0$ und jede natürliche Zahl n gilt die Ungleichung

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

Das beweisen wir nun mittels Vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang (n=1):
Für $n=1$ herrscht offenbar Gleichheit.

Induktionsschritt (n → n+1):
Sei die Ungleichung für ein n bereits bewiesen. Dies ist die **Induktionsvoraussetzung**, die wir benutzen wollen, um die Ungleichung auch für $n+1$ zu beweisen. Es ist

$$\begin{aligned}
(1+h)^{n+1} &= (1+h)\cdot(1+h)^n \\
&\geq (1+h)(1+nh) \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= 1+(n+1)h+nh^2 \\
&> 1+(n+1)h.
\end{aligned}$$

Mit Satz 1.3 folgt nun, dass die Bernoullische Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Wir werden sie später bei mehreren Gelegenheiten noch benutzen.
Es ist übrigens einfach zu zeigen, dass für $n \geq 2$ sogar „$>$“ statt „$\geq$“ gilt.

Als drittes Beispiel zur vollständigen Induktion zählen wir die Anzahl aller möglichen Teilmengen einer gegebenen endlichen Menge.

Definition:
Sei A eine Menge. Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A, d.h.

$$\mathcal{P}(A) := \{B;\ B \subset A\}.$$

Satz 1.4
Sei A eine endliche Menge mit n Elementen. Dann hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ genau 2^n Elemente, d.h. es gibt 2^n verschiedene Teilmengen von A (einschließlich A selbst und der leeren Menge).

Beweis: Mittels Vollständiger Induktion nach der Anzahl n der Elemente.

Induktionsanfang (n=1):
Besitzt A genau ein Element a, dann ist

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}\,.$$

Also hat $\mathcal{P}(A)$ genau 2^1 Elemente:

Induktionsschluss:
Sei die Aussage also für beliebige $(n-1)$-elementige Mengen schon bewiesen und besitze A genau n Elemente.
Wähle ein Element a aus A aus. Es gibt nun Teilmengen von A, die a enthalten und solche, die a nicht enthalten. Von beiden Sorten gibt es genau 2^{n-1}, da die Anzahl jeweils der Anzahl der Teilmengen von $A \setminus \{a\}$ entspricht. Insgesamt besitzt A also $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ Teilmengen. $\square$

Das Induktionsprinzip kann man auch umgekehrt nutzen, um einen Ausdruck $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen zu definieren. Bei einer solchen **rekursiven Definition** legt man zuerst $A(1)$ fest und gibt dann an, wie sich $A(n+1)$ aus dem schon vorher definierten Ausdruck $A(n)$ ergibt.
Auf diese Weise kann man beispielsweise Potenzen einer natürlichen Zahl a folgendermaßen definieren:
Man beginnt mit $a^0 := 1$ und setzt dann $a^{n+1} = a \cdot a^n$. So ergeben sich der Reihe nach alle Potenzen von a aus der Multiplikation mit a.

Man kann im Übrigen auch die Multiplikation natürlicher Zahlen durch eine rekursive Definition auf die Addition zurückführen. Dazu setzt man für ein festes $a \in \mathbb{N}$ zunächst $a \cdot 1 := a$ und dann rekursiv für $n \geq 1$ einfach $a \cdot (n+1) := a \cdot n + a$.
Etwas allgemeiner geht es auch: Anstatt alleine aus $A(n)$ kann man $A(n+1)$ manchmal auch mit Hilfe von $A(1), A(2), \ldots, A(n)$ definieren. Das ist im folgenden Beispiel der Fall.

Beispiele:

1. Fibonaccis Kaninchen
   In seinem Buch „Liber abbaci“hat Leonardo von Pisa um 1220 die Aufgabe behandelt, wie die Anzahl der Kaninchen wächst, wenn man folgende Regeln zugrundelegt:
   - Ein Kaninchenpaar wirft vom zweiten Monat an ein junges Paar und in jedem weiteren Monat ein weiteres Paar,
   - die Nachkommen verhalten sich ebenso und
   - Kaninchen sind unsterblich.

   Bezeichnet man mit F_n die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat, dann ist $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$, da das Kaninchenpaar im ersten Monat noch keine Jungen bekommt. Danach ist $F_3 = 2$ und $F_4 = 3$, weil das erste Paar jeweils ein Paar Junge bekommt. Im nächsten Monat bekommt auch das im dritten Monat geborene Paar Junge, also ist $F_5 = 5$, usw. Allgemein überlegt man sich, dass

   $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

   denn die Anzahl der Paare im Monat $n+1$ setzt sich zusammen aus den Paaren, die im Monat vorher bereits da waren und den neugeborenen Paaren. Es werden aber genau so viele Paare neu geboren wie Paare im Monat $n-1$ vorhanden waren. Mit dieses *Rekursionsformel* lässt sich nun F_n prinzipiell für alle n bestimmen.

   Die Zahlen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ heißen **Fibonacci–Zahlen** und besitzen viele interessante Eigenschaften, von denen wir in denen Übungen noch einige kennenlernen werden.

2. Das Summenzeichen müsste man streng mathematisch ebenfalls rekursiv definieren, und zwar durch

   $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{1} a_j &= a_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_j &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \right) + a_n. \end{aligned}$$

   Die Summation über n Terme führt man also zurück auf die Summation über $n-1$ Terme.

   Analog kann man übrigens auch Produkte mit mehreren Faktoren darstellen, indem man definiert:

   $$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{1} a_j &= a_1 \\ \prod_{j=1}^{n} a_j &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j \right) + a_n \end{aligned}$$

3. Eine Folge reeller Zahlen kann man rekursiv durch

$$x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

definieren. Auch wenn das Bildungsgesetz dieser Folge völlig klar und einfach ist, springen die Folgenglieder „chaotisch“im Intervall zwischen 0 und 1 hin und her.

4. **Binomialkoeffizienten**
Wir bezeichnen mit

$$\binom{n}{k}, \quad \text{gesprochen „}n\text{ über }k\text{“}$$

die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge $k, n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le n$. Dann gilt für alle erlaubten k, n

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (*)$$

denn: Es reicht natürlich, als n-elementige Menge die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ zu betrachten, da es nur auf die Anzahl von Elementen und nicht auf die Elemente selbst ankommt.
Sei $B \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ eine Menge mit genau k Elementen. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(i) $n + 1 \notin B$, das heißt $B \subset \{1, \ldots, n\}$.
Dafür gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

a) $n + 1 \in B$, d.h. $B \setminus \{n + 1\}$ enthält noch $k - 1$ Elemente.
Dann gibt es genau $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten, diese restlichen $k - 1$ Elemente von B aus der verbleibenden Menge $\{1, \ldots, n\}$ zu wählen.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, ergeben sich insgesamt $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten, B zu wählen. Nach Definition gibt es aber genau $\binom{n+1}{k}$ Möglichkeiten, eine k-elementige Teilmenge B aus der $(n+1)$-elementigen Menge $\{1\ldots, n+1\}$ auszuwählen.

Von Pascal stammt die folgende Darstellung, mit deren Hilfe man Binomialkoeffizienten rekursiv berechnen kann, wenn man zunächst nur die Werte $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ kennt. Man benutzt dabei das *Pascalsche Dreieck*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

Nach $(*)$ ist jeder Eintrag die Summe der links und rechts über ihm stehenden Binomialkoeffizienten. Man berechnet daher leicht

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & 1
\end{array}$$

Im Prinzip kann man auf diese Weise jeden Binomialkoeffizienten berechnen, es ist nur für große n recht aufwändig. In den Übungen werden Sie daher noch die Darstellung

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

herleiten.

Anwendung: In der Elementarteilchenphysik unterscheidet man Fermionen und Bosonen. Fermionen unterliegen dem Pauli-Prinzip, das besagt, das keine zwei Teilchen in allen Quantenzahlen übereinstimmen können. Wenn man sich die möglichen Zustände als Zellen vorstellt, dann führt das auf die Frage, wie man k nicht unterscheidbare Teilchen auf n Zellen so verteilt, dass in jeder Zelle höchstens ein Teilchen enthalten ist. Es gibt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene solche Verteilungen. Berücksichtigt man noch die Energie der Zustände so erhält man für große n die *Fermi-Dirac-Verteilung*.
Bosonen müssen das Pauli-Prinzip nicht erfüllen. Hier stellt sich die Frage, auf wie viele Arten k nicht unterscheidbare Teilchen auf n Zellen verteilt werden können, wobei jede Zelle beliebig viele Teilchen aufnehmen kann. Hierfür gibt es genau $\binom{n+k-1}{k}$ verschiedene Möglichkeiten. Dies führt für große n unter Berücksichtigung der Energie auf die *Bose-Einstein-Verteilung*.

Binomialkoeffizienten brauchen wir auch für die folgende Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten „binomischen Formel“:

Satz 1.5 [Binomischer Satz]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Durch Ausmultiplizieren veranschaulicht man sich dies erstmal:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n \text{ Klammern}}$$

zum Beispiel wie in der Schule

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \\
&= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.
\end{aligned}$$

Tatsächlich liefert das sture Ausmultiplizieren zu jeder k-elementigen Teilmenge B von $\{1, 2, \ldots, n\}$ genau einmal den Summanden $x^k y^{n-k}$. Wir nehmen nämlich aus der j-ten Klammer den Term x, falls $j \in B$. Wenn aber $j \notin B$, nehmen wir aus dieser Klammer y. Insgesamt taucht also der Term $x^k y^{n-k}$ dabei genau $\binom{n}{k}$ mal auf, weil es gerade so viele k-elementige Mengen $B \subset \{1 \ldots, n\}$ gibt. □

1.6 Reelle Zahlen

Wir werden in dieser Vorlesung die reellen Zahlen nicht konstruieren, der Weg über die ganzen und rationalen Zahlen würde zu viel Zeit benötigen. Stattdessen charakterisieren wir die reellen Zahlen durch ihre Eigenschaften, das sind einerseits die *Körper-Axiome*, die etwas über das Rechnen mit reellen Zahlen aussagen, sowie die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Lose ausgedrückt bedeuten die letzten beiden Dinge, dass wir uns die reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden vorstellen können, die keine „Löcher“ hat.
Wir beginnen mit den Körperaxiomen, die quasi die Rechenregeln für Addition und Multiplikation bereitstellen.

Definition:
Eine **Gruppe** besteht aus einer Menge G und einer Verknüpfung $*$

$$\begin{array}{rcl} * : \ G \times G & \to & G \\ (a, b) & \mapsto & a * b \end{array}$$

für die folgende Eigenschaften gelten:

1. Die Verknüpfung ist *assoziativ*, das heißt es gilt
$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{für alle } \ a, b, c \in G.$$
2. Es existiert ein *neutrales Element* e, das heißt ein $e \in G$ so dass
$$a * e = e * a = a \quad \text{für alle } \ a \in G.$$
3. Zu jedem Element $a \in G$ existiert ein *inverses Element* $a^{-1} \in G$, so dass
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad \text{für alle } \ a \in G.$$

Eigenschaft (i) besagt, dass es nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge wir die Verknüpfung anwenden. Allerdings dürfen wir die Reihenfolge der verknüpften Elemente nicht verändern.

Bemerkung: Es kann immer nur ein neutrales Element geben, denn wäre ($\rightsquigarrow$ indirekter Beweis) $\tilde{e}$ noch ein weiteres neutrales Element mit $\tilde{e} \neq e$, dann wäre

$$\tilde{e} = e * \tilde{e} = e$$

wobei wir beim ersten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass e neutrales Element ist und beim zweiten Gleichheitszeichen, dass $\tilde{e}$ ebenfalls ein neutrales Element ist.
Analog gibt es zu jedem Element $a \in G$ auch genau ein inverses Element, denn falls b und $\tilde{b}$ zwei inverse Elemente zu a sind, dann folgt wegen

$$a * b = b * a = a * \tilde{b} = \tilde{b} * a = e$$

direkt

$$\tilde{b} = \tilde{b} * (a * b) = (\tilde{b} * a) * b = b.$$

Die Gleichung $a * x = b$ besitzt daher für alle $a, b \in G$ genau eine Lösung $x = a^{-1}b$.

Definition:
Eine Gruppe G heißt **kommutativ** oder auch **abelsch**, falls zusätzlich das Kommutativgesetz

$$a * b = b * a \qquad \text{für alle} \ \ a, b \in G$$

erfüllt ist.

Beispiele:

1. Das bekannteste Beispiel einer kommutativen Gruppe ist vermutlich die Addition in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Das neutrale Element ist in diesem Fall die Zahl 0 und das inverse Element zu einer Zahl m ist die Zahl $-m$.

2. Beachten Sie, dass $\mathbb{N}_0$ mit der Addition *keine* Gruppe bildet, da zu einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ kein inverses Element in $\mathbb{N}$ existiert.

3. In der Physik spielen Symmetriegruppen eine wichtige Rolle. Dabei handelt es sich um eine Menge von Abbildungen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Beispielsweise bilden alle Kongruenz-Abbildungen der Ebene $\mathbb{R}^2$ in sich, die ein gleichseitiges Dreieck auf sich selbst abbilden, eine Gruppe. Diese Gruppe besteht aus sechs Elementen, da die Ecken des Dreiecks auf sechs verschiedene Arten aufeinander abgebildet werden können. Diese Gruppe ist übrigens nicht kommutativ, da die Hintereinanderausführung einer Spiegelung und einer Drehung von der Reihenfolge der Abbildungen abhängt.

Definition:
Ein **Körper** ist eine Menge K versehen mit zwei Verknüpfungen '+' („Addition ") und '·' („Multiplikation "), so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $(K, +)$ ist eine kommutative abelsche Gruppe mit neutralem Element 0,

2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative abelsche Gruppe mit neutralem Element $1 \neq 0$,

3. es gilt das *Distributivgesetz*
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Das letzte dieser drei *Körperaxiome* drückt aus, dass Addition und Multiplikation miteinander verträglich sind.
Das zu $a \in K$ inverse Element bezüglich der Addition bezeichnen wir mit $-a$. Für $a \neq 0$ existiert ein inverses Element bezüglich der Multiplikation, das wir mit a^{-1} bezeichnen. Es gilt also

$$\begin{array}{rcll}
(a+b)+c &=& a+(b+c) & \forall a,b,c \in K \\
a+0 &=& 0+a=a & \forall a \in K \\
a+(-a) &=& (-a)+a=0 & \forall a \in \\
a+b &=& b+a & \forall a,b \in K \\
\\
(a \cdot b) \cdot c &=& a \cdot (b \cdot c) & \forall a,b,c \in K \\
a \cdot 1 &=& 1 \cdot a = a & \forall a \in K \\
a \cdot a^{-1} &=& a^{-1} \cdot a = 1 & \forall a \in K \setminus \{0\} \\
a \cdot b &=& b \cdot a & \forall a,b \in K.
\end{array}$$

Subtraktion und Division werden dann definiert als

$$a-b := a+(-b), \qquad a/b := a \cdot (b^{-1}).$$

Alle weiteren Rechenregeln lassen sich aus diesen Grundregeln herleiten. Exemplarisch zeigen wir, warum $0 \cdot x = 0$ ergibt: Zunächst ist $0 \cdot x = (0+0) \cdot x$ wegen der Eigenschaft von 0 als neutralem Element der Addition. Mit Hilfe des Distributivgesetzes erhält man daraus

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

Die Gleichung

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + y$$

besitzt genau eine Lösung, nämlich $y = 0$, daher muss auch $0 \cdot x = 0$ sein.

Beispiele:

- Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bildet mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper.
- Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bildet mit Addition und Multiplikation ebenfalls einen Körper.
- Einen Körper $\mathbb{Z}_2$, der nur zwei Elemente 0 und 1 enthält, erhält man, indem man Addition und Multiplikation folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{rcl}
0+0 &=& 0 \\
0+1 &=& 1 \\
1+1 &=& 0 \\
0 \cdot 0 &=& 0 \\
0 \cdot 1 &=& 0 \\
1 \cdot 1 &=& 1
\end{array}$$

  Diese Regeln kann man sich leicht merken, wenn man statt 0 „gerade “und statt 1 „ungerade “einsetzt. Zu zeigen, dass auf diese Weise tatsächlich ein Körper definiert wird, überlasse ich Ihnen als Übung.

Neben den Rechenregeln besitzen die reellen Zahlen eine weitere Struktur, ihre **Anordnung**. Sie erlaubt uns, verschiedene reelle Zahlen bezüglich ihrer Grße zu vergleichen. Ausgangspunkt ist dabei die Null. Wir zeichnen innerhalb der reellen Zahlen die Teilmenge $\mathbb{R}_+$ der positiven Zahlen aus. Wir schreiben $x > 0$, falls $x \in \mathbb{R}_+$ und $x < 0$, falls $-x \in \mathbb{R}_+$. Es gelten dann die folgenden Regeln:

(O_1) jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ erfüllt genau eine der Bedingungen $a < 0$, $a = 0$ oder $a > 0$,

(O_2) Für beliebige positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_+$ ist $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

(O_3) Für eine beliebige reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es immer eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $n - a > 0$ ist (Archimedisches Axiom).

Auch hier kann man wieder alle bekannten Rechenregeln aus diesen drei Grundregeln herleiten. Dazu definiert man zunächst die folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned} a > b \quad &:\Leftrightarrow \quad a - b > 0 \\ a < b \quad &:\Leftrightarrow \quad b - a > 0 \\ a \geq b \quad &:\Leftrightarrow \quad a > b \text{ oder } a = b \\ a \leq b \quad &:\Leftrightarrow \quad a < b \text{ oder } a = b \end{aligned}$$

Satz 1.6
Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $a > b$ *und* $b > c \Rightarrow a > c$ *(Transitivität)*

(ii) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

(iii) $a > b$ *und* $c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Beweis:

(i) Aus $a - b > 0$ und $b - c > 0$ folgt nach (O_2)

$$(a - b) + (b - c) > 0 \;\Leftrightarrow\; a - c > 0 \;\Leftrightarrow\; a > c.$$

(ii) Nach Voraussetzung ist

$$a - b = a - b + 0 = a - b + (c - c) = a + c - b - c = (a + c) - (b + c) > 0.$$

Also ist $a + c > b + c$.

(iii) Es ist $a - b > 0$ also nach (O_2)

$$(a - b) \cdot c > 0 \;\Leftrightarrow\; a \cdot c - b \cdot c > 0 \;\Leftrightarrow\; a \cdot c > b \cdot c.$$

□

In den Übungen wird gezeigt, dass $x \cdot x \geq 0$ ist für jede reelle Zahl x. Daraus folgt sofort, dass $1 \cdot 1 = 1 \geq 0$ und da $1 \neq 0$ vorausgesetzt war, sogar $1 > 0$. Im nächsten Kapitel werden wir die folgende Variante des Archimedischen Axioms benötigen:

Lemma:
Zu jeder positiven, reellen Zahl $b > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

Beweis: Für eine beliebige positive reelle Zahl b ist auch $\frac{1}{b}$ positiv, da sonst $\frac{1}{b} \leq 0$ und wegen (O_2) dann $1 = b \cdot \frac{1}{b} \leq b \cdot 0 = 0$.
Wir wählen mit Hilfe von (O_3) eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n - \frac{1}{b} > 0$. Durch Multiplikation mit den positiven Zahlen b und $\frac{1}{n}$ folgt daraus die gewünschte Ungleichung $b - \frac{1}{n} > 0$. $\square$

Definition:
Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir verschiedene Arten von **Intervallen** wie folgt:

$$\begin{array}{rcll}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\} & \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} & \text{(offenes Intervall)} \\
[\,a,b) & := & \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} & \text{(halboffenes Intervall)} \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\} & \text{(halboffenes Intervall)} \\
(-\infty,b] & := & \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\} & \\
(-\infty,b) & := & \{x \in \mathbb{R};\ x < b\} & \\
[\,a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\} & \\
(a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R};\ x > a\} &
\end{array}$$

Auch durch die Anordnung unterscheidet sich $\mathbb{R}$ nicht von $\mathbb{Q}$. Daher führen wir noch eine letzte Eigenschaft der reellen Zahlen ein, die **Vollständigkeit**. Sie ist für die Analysis (und damit für den Rest dieser Vorlesung) von entscheidender Bedeutung, da sie bei der Grenzwertbildung laufend benutzt wird.

Definition:
Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen. Dann heißt $C \in \mathbb{R}$ **obere Schranke** für die Menge A, falls

$$a \leq C \qquad \forall a \in A.$$

Wenn eine solche obere Schranke existiert, nennt man die Menge A **von oben beschränkt**.

Falls es unter allen oberen Schranken für die Menge A eine kleinste obere Schranke C_0 gibt, dann nennt man diese das **Supremum** von A:

$$C_0 = \sup A.$$

Beispiel: Die Menge
$$A := \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\} = \left\{ \frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N} \right\}$$
ist von oben beschränkt, da für jedes Element a von A gilt: $a < 1$.
Die Zahl 1 ist sogar die kleinste obere Schranke. Wir verifizieren, dass eine Zahl $s < 1$ keine obere Schranke für A sein kann. Dann wäre nämlich $1 - s > 0$ und nach dem Archimedischen Prinzip können wir eine Zahl n finden mit $\frac{1}{n} < 1 - s$. Dann ist aber $s < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \in A$, d.h. s ist keine obere Schranke für A.

Ganz analog heißt eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ **von unten beschränkt**, falls es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$c \leq a \qquad \text{für alle } a \in A.$$
Wenn es eine größte untere Schranke c_0 für A gibt, so nennen wir diese das **Infimum** von A, geschrieben $c_0 = \inf A$.

Nun sind wir in der Lage, die letzte Eigenschaft anzugeben, die die reellen Zahlen auszeichnet, das

Vollständigkeitsaxiom
Jede von oben beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Beispiel: Existenz der Quadratwurzel
Um zu zeigen, dass es eine positive reelle Zahl w mit der Eigenschaft $w^2 = 2$ gibt, betrachten wir die Menge
$$W := \{x \in \mathbb{R};\ x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}.$$
Diese ist nichtleer, denn $1 \in W$. Die Menge W ist von oben beschränkt, denn für $x \in W$ gilt sicher $x < 2$. Ansonsten wäre nämlich als Konsequenz der Ordnungsaxiome
$$x \cdot x > 2 \cdot x > 2 \cdot 2 = 4.$$
Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert also $w := \sup W$.

Behauptung: $w^2 = 2$.
Den Beweis dieser Behauptung zerlegen wir in zwei Teile:

1. $w^2 \leq 2$
   denn: wäre $w^2 > 2$, also $w^2 - 2 > 0$, dann könnte man sogar die Zahl
   $$a = w - \frac{w^2 - 2}{2w} < w$$
   als obere Schranke für W benutzen, denn
   $$a^2 = w^2 - (w^2 - 2) + \frac{(w^2-2)^2}{4w^2} = 2 + \frac{(w^2-2)^2}{4w^2} > 2.$$
   Dann wäre aber w nicht die *kleinste* obere Schranke für $W \rightsquigarrow$ Widerspruch.

2. $w^2 \geq 2$
   denn: wäre $w^2 < 2$, dann könnte man eine positive Zahl ε finden, so dass sogar $2 - w^2 > \varepsilon^2 > 0$ wäre. Wir betrachten nun
   $$(w + \delta)^2 = w^2 + 2\delta w + \delta^2.$$
   Wenn wir $\delta > 0$ so klein wählen, dass
   $$\delta < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und } \delta < \frac{\varepsilon^2}{8w}$$
   dann ist
   $$\begin{aligned} (w+\delta)^2 &= w^2 + 2\delta w + \delta^2 \\ &< w^2 + 2w\frac{\varepsilon^2}{8w} + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \\ &< w^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} < w^2 + \varepsilon^2 < 2. \end{aligned}$$
   Also kann w keine obere Schranke für die Menge W sein $\leadsto$ Widerspruch.

Beide Ungleichungen zusammen zeigen, dass $w^2 = 2$. Wir schreiben wie aus der Schule gewohnt $w = \sqrt{2}$.

Bemerkung: Mit ähnlichen Argumenten kann man zeigen, dass zu jeder positiven reellen Zahl eine positive Quadratwurzel existiert. Auch die Existenz n-ter Wurzeln, also von Lösungen der Gleichung $x^n = a$ für $a > 0$ lässt sich auf diese Weise beweisen.

Es lässt sich beweisen, dass die reellen Zahlen durch die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom eindeutig bestimmt sind. Das bedeutet folgendes: Hätte man eine weitere Menge $\mathbb{S}$, die ebenfalls diese Axiome erfüllt, dann gäbe es eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}$ und dieser Menge $\mathbb{S}$, die mit den Verknüpfungen und der Anordnung verträglich wäre. Außer einer anderen Schreibweise wäre $\mathbb{S}$ also nichts anderes als die schon bekannten reellen Zahlen.

1.7 Betrag und Dreiecksungleichung

Definition: Der **Betrag** (oder Absolutbetrag) einer reellen Zahl ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Satz 1.7
Für beliebige reelle Zahlen x, y gilt:

(i) $|x| \geq 0$ *und* $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$,

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ***(Dreiecksungleichung)***,

(iv) $||x| - |y|| \leq |x + y|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung, Version 1)*

(v) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung, Version 2)*

Beweis:
(i) folgt direkt aus der Definition des Betrags, denn wenn $x < 0$ ist, dann ist $|x| = -x > 0$.
(ii) ergibt sich aus der Unterscheidung der vier möglichen Fälle.
(iii)und (iv): Übungsaufgabe
(v) Da

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

und

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

folgt

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Bemerkung: Die Dreiecksungleichung ist vermutlich das im weiteren Verlauf der Vorlesung am häufigsten gebrauchte Hilfsmittel.

1.8 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar, dessen Einträge aus $\mathbb{R}$ sind:

$$z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \qquad z = (x, y)$$

Um mit diesen Paaren von Zahlen rechnen zu können, definiert man:

1. Addition: $z + z' = (x + x', y + y')$, das heißt man addiert diese Zahlen wie Vektoren im $\mathbb{R}^2$.
2. Multiplikation: $z \cdot z' := (xx' - yy', xy' + x'y)$

Man kann nun nachprüfen, dass beide Verknüpfungen assoziativ sind (tun Sie das für die Multiplikation !) und dass $\mathbb{C}$ bezüglich der Addition eine Gruppe mit neutralem Element $(0, 0)$ bildet. Das inverse Element zu $z = (x, y)$ ist natürlich $-z := (-x, -y)$.

Zunächst sieht man, dass $(1,0)$ das neutrale Element der Multiplikation ist. Es gibt auch eine Division, zum Beispiel gilt für die Zahl

$$z' = \frac{1}{z} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

tatsächlich

$$z \cdot z' = z' \cdot z = (1,0).$$

Wir haben mit $\mathbb{C}$ die Ebene $\mathbb{R}^2$ zu einem kommutativen Körper gemacht, denn $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ sind abelsche Gruppen und es gilt das Distributivgesetz:

$$(z_1+z_2)z' = z_1z' + z_2z'.$$

Man kann also Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auf eine vernünftige Weise addieren und multiplizieren.
Mit obiger Definition kann man $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ auffassen, nämlich indem man $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ identifiziert. Dabei reduziert sich die Addition und die „seltsame“Multiplikation in $\mathbb{C}$ auf die ganz gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$, d.h. auf der x–Achse.

Die komplexe Zahl $i := (0,1)$ heißt **imaginäre Einheit**. Aus unseren Rechenregeln folgt

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1,$$

daher löst $z = \pm i$ die Gleichung $z^2 = -1$.
Wir können dank unserer Identifikation von $\mathbb{R}$ mit der x-Achse in $\mathbb{R}^2$ nun auch jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ eindeutig zerlegen in $z = (x,y) = x + iy$. Anders geschrieben heißt das für ein $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y).$$

Wir nennen $x = \operatorname{Re} z$ den **Realteil** von z und $y = \operatorname{Im} z$ den **Imaginärteil** von z.
Achtung ! Der Imaginärteil einer komplexen Zahl ist reell.
Zahlen mit Realteil 0 nennt man *rein imaginär*.

Definition: Für $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ nennen wir $\overline{z} = (x,-y) = x - iy$ **komplex konjugiert** zu $z = (x,y)$. Der **Betrag** von z ist

$$|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2},$$

also der (euklidische) Abstand von z zum Ursprung.

Bemerkung:

1. Die Konjugation einer komplexen Zahl entspricht einer Spiegelung an der x-Achse. Daher ist $\overline{\overline{z}} = z$

2. Die Konjugation lässt sich mit der Addition und der Multiplikation vertauschen:

$$\begin{aligned} \overline{z_1+z_2} &= \overline{z_1}+\overline{z_2} \\ \overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \end{aligned}$$

3. Auch für den komplexen Betrag gilt die Dreiecksungleichung: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ ($\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe!)

4. der Betrag verträgt sich mit der Multiplikation. Es gilt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, denn

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) \\ &= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Anders als $\mathbb{R}$ kann $\mathbb{C}$ nicht so angeordnet werden, dass die Ordnungsaxiome (O_1)–(O_3) gelten. Das kann man leicht sehen. Sowohl der Versuch $i \geq 0$ als auch $i \leq 0$ geht schief:

- Wäre $i \geq 0$, dann würde wegen (O_2) gelten:

$$-1 = i \cdot i \geq 0$$

- Wäre $i \leq 0$, dann eben

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \geq 0$$

Wir werden sehen, dass $\mathbb{C}$ ähnlich wie $\mathbb{R}$ keine „Löcher“besitzt. Um diese *Vollständigkeit* zu beweisen, führen wir im nächsten Kapitel Folgen ein.

1.9 Abzählbarkeit

Definition: Sei B eine Menge. Man nennt sie

1. **endlich**, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Bijektion $\{1, \ldots, n\} \to B$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $|B| = n$. (Wenn $B = \emptyset$, dann ist $|B| = 0$.)

2. **abzählbar**, wenn eine Bijektion $\mathbb{N} \to B$ existiert.

3. **überabzählbar**, wenn B weder endlich noch abzählbar ist.

Bemerkung:

1. Ist eine Menge A abzählbar, dann enthält sie unendlich viele Elemente, deshalb sagt man auch „abzählbar unendlich “.

2. Existiert eine Bijektion zwischen zwei Mengen A und B, dann nennt man A und B gleich **mächtig**.

Satz 1.8

(i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(p, q);\ p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$ *ist abzählbar.*

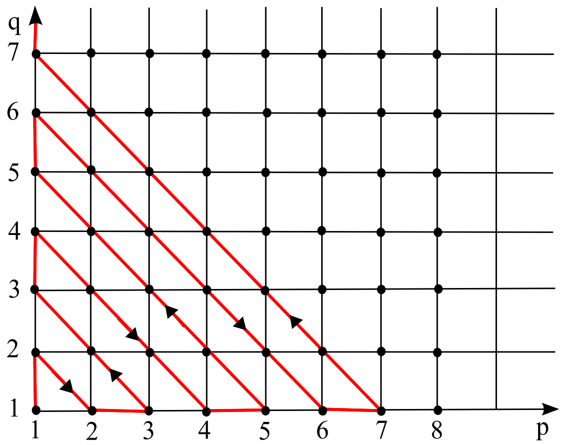
(ii) Die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen ist ebenfalls abzählbar.

(iii) Bilder abzählbarer Mengen sind höchstens abzählbar.

(iv) $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$ *sind abzählbar.*

Beweisskizze:

(i) Erstes Cantorsches Diagonalverfahren



Die Paare (p, q) können in der angegebenen Reihenfolge alle abgezählt werden.

(ii) Zähle die Elemente der beiden Mengen einfach abwechselnd ab.

(iii) Sei B das Bild einer abzählbaren Menge A unter einer Abbildung f. Man kann sich eine Abzählung von B verschaffen, indem man von einer Abzählung $a_1, a_2, a_3, \ldots$ der Menge A zu $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ übergeht. Dies ist im Allgemeinen keine (bijektive) Abzählung der Menge B, da eventuell noch Elemente mehrfach gezählt werden. Lässt man diese Mehrfachzählungen jedoch weg, kommt man zu einer echten Abzählung von B. Die Menge B ist daher höchstens abzählbar.

(iv) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar als Vereinigung $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N})$ von zwei abzählbaren Mengen, siehe (ii). $\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathbb{Z} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ & (p, q) & \mapsto & p/q \end{array}$$

also sind wir fertig wegen (i) und (iii).

$\square$

Satz 1.9 *Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis: Zweites Cantorsches Diagonalverfahren

Cantor hat sich einen indirekten Beweis erdacht, der zeigt, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar sein kann. Dazu nimmt er an, dass es doch eine solche Abzählung der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1)$ gibt. Jede dieser Zahlen soll dabei als Dezimalzahl $0.a_1a_2a_3\ldots$ mit $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ dargestellt sein.
Cantor schreibt diese Zahlen untereinander und möchte nun eine Zahl konstruieren, die in dieser Liste nicht vorkommt. Wie geht das ? Er wählt die erste Nachkommastelle so, dass sie verschieden ist von der ersten Nachkommastelle der ersten Zahl auf der Liste.
Die zweite Nachkommastelle wählt er so, dass sie anders als die zweite Nachkommastelle der zweiten Zahl auf der Liste ist.
Bei der dritten Nachkommastelle achtet er darauf, dass diese nicht mit der dritten Nachkommastelle der dritten Zahl auf der Liste übereinstimmt und so fort. Auf diese Weise konstruiert er eine reelle Zahl, die in der Liste nicht vorkommt.
Also war die Liste eben doch keine vollständige Abzählung *aller* reellen Zahlen zwischen 0 und 1.
Aus diesem Widerspruch zu unserer Anfangsannahme folgt, dass die Menge der reellen Zahlen in $[0, 1)$ und damit auch $\mathbb{R}$ selbst nicht abzählbar ist. $\square$

2 Folgen und Reihen

In diesem Kapitel legen wir endlich richtig mit der Analysis los.

Definition:
Sei X eine Menge. Unter einer **Folge** in X versteht man eine Abbildung

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\rightarrow X \\ n &\mapsto x_n \, , \end{aligned}$$

die jeder natürlichen Zahl n ein *Folgenglied* x_n zuordnet. Wir schreiben die Folge x entweder in der Form $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ oder kurz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir nennen n den **(Folgen-)Index** des Folgenglieds x_n.

Im folgenden betrachten wir fast immer reelle Folgen ($X = \mathbb{R}$) bzw. komplexe Folgen ($X = \mathbb{C}$).

2.1 Konvergenz

Auf dem Begriff der Konvergenz basieren viele weitere Eigenschaften von Folgen und Funktionen in der Analysis. Es geht darum zu beschreiben, wie sich Glieder einer Folge schließlich verhalten, wenn man n immer größer macht.

Definition: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller bzw. komplexer Zahlen und a eine reelle bzw. komplexe Zahl. Dann **konvergiert** die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, falls es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle}\, n > N.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{oder auch} \quad x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Die Zahl a nennt man den **Grenzwert** oder **Limes** der Folge.
Eine Folge, die nicht konvergiert, nennt man **divergent**.
Falls für jede (große) Zahl $C > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$x_n > C \quad \text{für alle}\, n > N$$

dann sagt man, die Folge **divergiert gegen** $+\infty$.

Häufig haben wir es mit Folgen zu tun, die gegen 0 konvergieren. Diese Folgen nennt man **Nullfolgen**.

Bemerkung:

1. Man beachte, dass die Zahl $N = N(\varepsilon)$ in Definition 2.1 natürlich vom gewählten ε abhängt. Wählt man ein kleineres ε, wird man in der Regel ein größeres N brauchen, um die Bedingung aus Definition 2.1 zu erfüllen.

2. In etwas missbräuchlicher Schreibweise bedeutet $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $+\infty$ divergiert.

3. Es kommt in der Definition von Konvergenz nur auf Folgenglieder x_n mit (hinreichend) großem n an. Es ändert daher am Konvergenzverhalten und gegebenenfalls am Grenzwert nichts, wenn man endlich viele der Folgenglieder abändert oder weglässt.

Man kann den Begriff Konvergenz auch recht anschaulich mit Hilfe sogenannter Umgebungen definieren.

Definition:
Sei x eine reelle Zahl. Wir nennen für $\varepsilon > 0$ die Menge

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}; |x - y| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

die ε–**Umgebung** von x.
Analog ist für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ die ε–Umgebung von z

$$B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C}; |z - w| < \varepsilon\}$$

eine Kreisscheibe mit Radius ε um den Punkt z in der komplexen Zahlenebene.

Die reelle oder komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen eine (reelle oder komplexe) Zahl a, falls es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ einen Index $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass ab diesem Folgenindex alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a liegen.

Beispiele:

1. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Um das zu beweisen, wählen wir uns eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$. Nach dem Lemma von Archimedes aus Kapitel 1 gibt es zu diesem ε eine natürliche Zahl N, so dass
$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$
Dann ist aber für alle $n \geq N$
$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$
Damit ist die Bedingung aus Definition 2.1 für $a = 0$ erfüllt.

2. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^{n-1}$ divergiert, denn 1 kann nicht Grenzwert der Folge sein, weil unendlich viele Folgenglieder -1 vorkommen. Eine andere Zahl kann auch nicht Grenzwert der Folge sein, da unendlich viele Folgenglieder $+1$ vorkommen.

3. Die komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = q^n$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen 0, denn: Weil $\frac{1}{|q|} > 1$ ist, gibt es ein $h > 0$ mit
$$\frac{1}{|q|} = 1 + h.$$
Wendet man nun die Bernoullische Ungleichung an, erhält man für $n \geq 1$ die Abschätzung
$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh.$$
Damit ist dann natürlich
$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{nh}.$$
Genau wie im ersten Beispiel zeigt man dann, dass die Folge gegen 0 konvergiert, denn für ein beliebiges vorgegebenes $\varepsilon > 0$ findet man nach Archimedes immer ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < h \cdot \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann natürlich
$$|q^n - 0| < \frac{1}{nh} < \varepsilon.$$

4. Sei $a > 1$. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \sqrt[n]{a}$ gegen 1. Dabei ist $\sqrt[n]{a}$ die in Kapitel 1 gefundene eindeutige positive Lösung der Gleichung $x^n = a$.
Wir setzen dazu $x_n := 1 + h_n$ und zeigen, dass die h_n eine Nullfolge bilden. Benutzt man wieder die Bernoullische Ungleichung, so erhält man die Abschätzung
$$a = x_n^n = (1+h_n)^n > 1 + nh_n \Rightarrow h_n < \frac{a-1}{n}$$
und man sieht wieder leicht ein, dass $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

Die Konvergenz einer komplexen Zahlenfolge lässt sich auf die Konvergenz der Folgen aus Real- und Imaginärteil zurückführen.

Satz 2.1
Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn die beiden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweis:
Wir nehmen zunächst an, dass die Folge (z_n) konvergent ist mit Grenzwert $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, dann finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$
Nun wenden wir die Dreiecksungleichung an und erhalten
$$|x_n + iy_n - x - iy| \leq |x_n - x| + |iy_n - iy| = |x_n - x| + |i| \cdot |y_n - y| = |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Insbesondere ist dann $|x_n - x| < \varepsilon$ und $|y_n - y| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da ε beliebig war, bedeutet das

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Seien nun umgekehrt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dann finden wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wieder ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ sogar

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und } |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist aber auch

$$|x_n + iy_n - x - iy| \leq |x_n - x| + |iy_n - iy| = |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich die Konvergenz der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x + iy$. □

Satz 2.2 *Eine konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.*

Beweis: Wir gehen indirekt vor, und nehmen an, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hätte zwei verschiedene Grenzwerte a und b. Daraus möchten wir einen Widerspruch konstruieren. Anschaulich ist das Vorgehen relativ klar: Wenn die Folge gegen a konvergiert, dann liegen alle Folgenglieder ab einem bestimmten Index sehr nahe bei a und entsprechend weit weg von b.
Diese Idee nun etwas formaler: Wir wählen $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2} > 0$. Da die Folge gegen a konvergiert, gibt es einen Index N_1, so dass

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } \; n \geq N_1.$$

Genauso gibt es wegen der Konvergenz gegen b einen Index N_2 mit

$$|x_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } \; n \geq N_2.$$

Für alle $n > \max(N_1, N_2)$ ist dann wegen der Dreicksungleichung

$$2\varepsilon = |b - a| = |b - a - x_n + x_n| \leq |b - x_n| + |a - x_n| < 2\varepsilon.$$

Dies ist offenbar ein Widerspruch, daher muss unsere ursprüngliche Annahme falsch gewesen sein, dass zwei verschiedene Grenzwerte existieren. □

Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller, bzw. komplexer Zahlen heißt **beschränkt**, falls es eine reelle Zahl $M > 0$ gibt, so dass alle Folgenglieder vom Betrag her kleiner als M sind:

$$|x_n| \leq \; M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **von oben beschränkt**, falls es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$x_n \leq \; C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und **von unten beschränkt**, falls es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$x_n \geq \; c \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Satz 2.3 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ eine natürliche Zahl N_0, so dass für alle $n \geq N_0$ die Ungleichung $|x_n - a| < 1$ gilt. Dann ergibt sich wieder mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq |a| + 1.$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt. □

Man beachte, dass unsere Argumentation gleichermaßen für reelle wie für komplexe Zahlenfolgen gilt.

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt natürlich nicht: Es gibt (viele) beschränkter Folgen, die nicht konvergent sind.

2.2 Monotone Folgen

Definition:
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Falls sogar $a_n < a_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann heißt die Folge **streng monoton wachsend**.
Analog heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ bzw. **streng monoton fallend**, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.4 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge, die von oben beschränkt ist. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis: Die Menge aller auftretenden Folgenglieder $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ist von oben beschränkt, also besitzt sie ein Supremum

$$x := \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir behaupten, dass diese Zahl der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, also: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Um das zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{N_0} \leq x$ und der Eigenschaft, dass $x_{N_0} > x - \varepsilon$. Sonst wäre nämlich $x - \varepsilon$ eine obere Schranke für die Menge aller Folgenglieder und x somit nicht die *kleinste* obere Schranke. Aus der Ungleichung

$$x - \varepsilon < x_{N_0} \leq x$$

folgern wir nun auf Grund der Monotonie von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass

$$x - \varepsilon < x_{N_0} \leq x_n \leq x \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

Insbesondere ist daher für $n \geq N_0$

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Nach Definition 2.1 konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also gegen x. $\square$

Wenn wir die monotone Konvergenz betonen wollen, sagen wir x_n „konvergiert von unten“ gegen x, kurz $x_n \nearrow x$.

Lemma:
Sei x_n nun eine monoton fallende reelle Folge. Wenn x_n zusätzlich von unten beschränkt ist, besitzt x_n einen Limes

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Beweis: Wir betrachten dazu einfach die Folge $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Menge $\{-x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ist von oben beschränkt, denn es gilt für beliebige Mengen $A \subset \mathbb{R}$ immer

$$\sup(-A) = -\inf(A) \qquad (\rightsquigarrow \text{ siehe Übungsaufgabe}).$$

Die Folge $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und damit nach Satz 2.4 konvergent. Wegen

$$x_n \searrow x \quad \Leftrightarrow \quad -x_n \nearrow -x$$

konvergiert auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Bemerkung:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$, falls eine der beiden Seiten existiert.
2. Man beachte, dass man mit Satz 2.4 die Konvergenz einer Folge zeigen kann, *ohne* den Grenzwert zu kennen.

Als Beispiel zeigen wir:

Satz 2.5 [Die Eulersche Zahl e]
Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Zahlen

$$e_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

wobei wieder $0! = 1$.
Dann existiert der Grenzwert

$$e := \lim_{n\to\infty} e_n.$$

Man nennt $e \approx 2,71828$ *die* Eulersche Zahl.

Beweis: Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, da $e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!}$, also bleibt nur zu zeigen, dass die Folge auch beschränkt ist. Dazu schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3 \end{aligned}$$

In dieser Abschätzung haben wir zunächst jede Zahl, die größer als 2 ist, durch eine 2 ersetzt. Dadurch werden die Brüche größer, da ihre Nenner kleiner werden. So erhalten wir eine Summe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

mit $q = \frac{1}{2}$, von der wir wissen, dass sie kleiner als $\frac{1}{1-q} = 2$ ist. Damit ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und der Grenzwert $e \leq 3$ existiert. □

2.3 Teilfolgen

Definition:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt **Teilfolge** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine streng monoton wachsende Folge von Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ gibt, so dass $y_k = x_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Man pickt sozusagen nur diejenigen Folgenglieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heraus, deren Indizes in der Folge $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ vorkommen.

Definition:
Sei (x_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Eine Zahl x heißt **Häufungspunkt** von (x_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder natürlichen Zahl $N \in \mathbb{N}$ immer ein Folgenglied x_n gibt mit $n \geq N$ und $|x_n - x| < \varepsilon$.

Beispiele:

1. $x_n = (-1)^n \in \mathbb{R}$ hat die Häufungspunkte 1 und -1, denn
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1 \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = -1.$$

2. $x_n = i^n + \frac{1}{2^n} \in \mathbb{C}$ hat die Häufungspunkte: $1, -1, i$ und $-i$.

Satz 2.6
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Dann gilt:
Die Zahl x ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert.

Beweis:

„⇒“ Sei x ein Häufungspunkt der Folge (x_n). Wir konstruieren sukzessive eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, indem wir die Definition eines Häufungspunktes nacheinander auf $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{3}, \ldots$ anwenden:

$$\begin{aligned}
\text{Wähle } n_1 \in \mathbb{N},\ \text{so dass } |x_{n_1} - x| &< 1 \\
\text{Wähle } n_2 \in \mathbb{N},\ \text{so dass } |x_{n_2} - x| &< \frac{1}{2} \text{ und } n_2 > n_1 \\
\text{Wähle } n_3 \in \mathbb{N}, \text{so dass } |x_{n_3} - x| &< \frac{1}{3} \text{ und } n_3 > n_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wähle also immer $n_k \in \mathbb{N}$, so dass $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$ und $n_k > n_{k-1}$. Das geht in jedem Schritt, weil x eben ein Häufungspunkt ist.

Die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da $n_{k+1} > n_k$. Da $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x.

„⇐“ : Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass x ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben.
Wegen der Konvergenz der Teilfolge gibt es einen Index $K_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $k \geq K_0$ gilt

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Wähle nun n_k so, dass $k \geq K_0$ und $n_k > N$. Dann erfüllt x_{n_k} die Bedingungen, die in der Definition eines Häufungspunktes gefordert wurden.

□

Bemerkung: Eine Zahl x ist also ein Häufungspunkt, wenn in jeder ε-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.

Satz 2.7 [Satz von Bolzano-Weierstraß]
Jede beschränkte Folge reeller oder komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Die divergente Folge $(+1, -1, +1, -1, \ldots)$ mit $x_n = (-1)^{n-1}$ besitzt unter anderem die konstanten (und daher konvergenten) Teilfolgen $(x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots)$ und $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$.

Beweis von Satz 2.7: Sei zunächst $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $M > 0$, so dass

$$|x_n| \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wir definieren

$$b_n := \sup\{x_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$$

als das Supremum der Folgenglieder ab x_n. Dann ist automatisch $b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da das Supremum über eine kleinere Menge gebildet wird. Außerdem erfüllt das Supremum als *kleinste* obere Schranke die Ungleichung $b_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.4 konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das heißt

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n \text{ existiert.}$$

Behauptung: b ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.
Dann gibt es einen Index $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_0$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $n_1 := \max\{N_0, N\}$. Wegen der Supremumseigenschaft von $b_{n_1} = \sup\{x_k;\ k \geq n_1\}$ existiert ein $k \geq n_1$, so dass

$$b_{n_1} - \frac{\varepsilon}{2} < x_k \leq b_{n_1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & |x_k - b_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow \quad & |x_k - b| \leq \underbrace{|x_k - b_{n_1}|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|b_{n_1} - b|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da wir dieses Argument mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und beliebigem $N \in \mathbb{N}$ durchführen können und immer ein passendes Folgenglied x_k finden, ist b ein Häufungspunkt der Folge. Also gibt es nach dem vorigen Satz auch eine Teilfolge, die gegen b konvergiert.
Für komplexwertige Folgen betrachtet man zunächst die (beschränkte) Folge der Realteile. Also existiert eine Teilfolge, so dass die Realteile gegen einen Grenzwert konvergieren. Bei dieser Teilfolge ist (wie schon bei der ursprünglichen Folge) auch die Folge der Imaginärteile beschränkt. Daher kann man ein zweites Mal eine Teilfolge auswählen und erreicht so, dass für diese „Teilfolge der Teilfolge“ auch die Imaginärteile konvergieren. Dann konvergiert aber die gesamte Folge in $\mathbb{C}$. $\square$

Bemerkung: Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist wieder eine Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms für $\mathbb{R}$.

Definition:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Die Zahl

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \ := \ \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k;\ k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

heißt **Limes superior** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Analog ist der **Limes inferior** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \ := \ \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k;\ k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Falls die Folge von oben beschränkt ist, dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ eine reelle Zahl. Für Folgen, die nicht von oben beschränkt sind, setzen wir $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := +\infty$.
Diese Konvention hilft uns später in 2.11, da auf diese Weise *jede* reelle Folge einen Limes superior besitzt.
Der nächste Satz zeigt, dass der Limes inferior bzw. der Limes superior der kleinste bzw. größte Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind.

Satz 2.8

i) Jeder weitere Häufungspunkt h von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq h \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \ \Rightarrow \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis:

i) Sei h ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen nur, dass h nicht größer als der Limes superior der Folge sein kann. Wähle dazu ε so klein, dass $h-\varepsilon > \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$.

ii) Sei $\varepsilon > 0$.
Wir wissen,dass es einen Index N_1 gibt, so dass für alle $n \geq N_1$ das Supremum

$$b_n = \sup\{x_k;\ k \geq n\}$$

in einer ε-Umgebung des Limes superior liegt. Daher ist $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ eine obere Schranke für alle x_n mit $n \geq N_1$.
Genauso gibt es einen Index $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_2$

$$x_n \geq \liminf_{n\to\infty} x_n - \varepsilon.$$

Insgesamt ist also für alle $n \geq \max(N_1, N_2)$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n - \varepsilon \leq x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon.$$

Wenn nun

$$a := \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

bedeutet das gerade

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \max(N_1, N_2).$$

Daher konvergiert die Folge gegen a.

□

Bemerkung: Der Limes superior einer von oben beschränkten reellen Folge ist also die größte reelle Zahl, für die jede ε-Umgebung unendlich viele Folgenglieder enthält.
Analog ist der Limes inferior einer von unten beschränkten reellen Folge die kleinste reelle Zahl mit der Eigenschaft, dass in jeder ε-Umgebung unendlich viele Folgenglieder liegen.

2.4 Das Cauchy-Kriterium

Wir lernen nun noch eine weitere Möglichkeit kennen, um zu zeigen, dass eine Folge konvergiert, für die man den Wert x des Grenzwertes $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nicht kennen muss.

Definition:
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_*(\varepsilon)$ existiert, so dass für beliebige $m, n \geq N_*(\varepsilon)$ gilt:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Statt des Abstandes von einem (unbekannten oder möglicherweise gar nicht vorhandenen) Grenzwert, verlangt man hier, dass Folgenglieder mit hohem Index beliebig kleinen Abstand voneinander haben. Wichtig ist dabei, dass es nicht um die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern geht, sondern um den Abstand zweier beliebiger Folgenglieder mit genügend hohem Index.
Mit ε-Umgebungen lassen sich Cauchy-Folgen so charakterisieren:
Eine Folge ist Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $m \geq N$ alle Folgenglieder x_n mit $n \geq N$ in der ε-Umgebung von x_m liegen.
Es gilt nun zunächst:

Lemma:
Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es nach Definition 2.1 zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt aber wegen der Dreiecksungleichung für alle $m, n \geq N(\varepsilon)$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Folge ist also eine Cauchy-Folge. □

Dass auch die Umkehrung gilt, dass also jede Cauchy-Folge konvergiert, beruht ganz wesentlich auf der Vollständigkeit der reellen bzw. komplexen Zahlen.

Satz 2.9 ***[Cauchy-Kriterium]***
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Cauchy-Folge. Dann konvergiert die Folge (x_n).

Beweis:

1. Schritt: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
Wähle einfach $\varepsilon = 1$ und das zugehörige $N_*(1)$ dazu. Dann folgt für festes $m \geq N_*(1)$ und alle $n \geq N_*(1)$ ganz ähnlich wie im vorigen Lemma

$$|x_n| = |x_n - x_m + x_m| \leq |x_n - x_m| + |x_m| \leq 1 + |x_m|.$$

Insgesamt ist dann für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{m-1}|, |x_m| + 1\}.$$

Somit ist die Folge x_n beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge, zum Beispiel

$$x_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} a = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

2. Schritt: Sogar die ganze Folge konvergiert gegen a, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Die Idee ist hier Folgende: Die konvergente Teilfolge sorgt dafür, dass immer wieder Folgenglieder sehr nahe an a herankommen. Die Cauchy-Eigenschaft der Folge benutzt man dann, um zu zeigen, dass auch die anderen Folgenglieder in der Nähe von a liegen müssen, wenn ihr Index groß genug ist.

Diese Idee werden wir nun formal umsetzen.

Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert einerseits ein $K_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K_0$ gilt

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Da die Folge eine Cauchy-Folge ist, gibt es zusätzlich ein $N_*(\varepsilon)$, so dass

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N_*(\varepsilon)$.

Insbesondere können wir als x_m ein Glied x_{n_κ} der Teilfolge wählen, so dass $\kappa \geq K_0$ und $n_\kappa \geq N_*(\varepsilon)$. Dann gilt für alle $n \geq N_*(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |x_n - x_{n_\kappa} + x_{n_\kappa} - a| \\ &\leq |x_n - x_{n_\kappa}| + |x_{n_\kappa} - a| \quad \text{(wegen der Dreiecksungleichung)} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

□

2.5 Grenzwerte und Anordnung

Eine wichtige Eigenschaft von Grenzwerten besteht darin, dass sie die Anordnung nicht ändern.

Satz 2.10
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, die die Ungleichung

$$x_n \leq y_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllen. Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweis: Übungsaufgabe (Führe die Annahme $\lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n$ zu einem Widerspruch.)

□

Achtung ! Es ist durchaus möglich, dass sogar $x_n < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und trotzdem $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Man kann diesen Satz benutzen, um die Konvergenz einer Folge zu beweisen, indem man sie zwischen zwei Folgen mit demselben Grenzwert „einzwängt“:

Satz 2.11 [„Sandwich-Kriterium“]
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen, die der Ungleichung

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

genügen. Falls die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

existieren, dann konvergiert auch die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

Beweis: Übungsaufgabe !

□

2.6 Beispiele

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ zeigt man mit Hilfe des Sandwich-Kriteriums, indem man die Folge $(n^{-2})_{n\in\mathbb{N}}$ einzwängt zwischen die konstante Nullfolge $(0,0,\ldots)$ und die Nullfolge $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$.
   Genauso zeigt man
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}$$
   für jedes feste $k\in\mathbb{N}$.

2. $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0.\end{aligned}$$
   Da $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0$ folgt die Konvergenz mit Hilfe des Sandwich-Kriteriums.

3. $\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1$.
   Setze $n^{1/n}=1+h_n$ mit $h>0$ für $n\geq 2$. Dann gilt nach dem Binomischen Satz 1.5
   $$\begin{aligned} n=(1+h_n)^n &\geq \binom{n}{2}h_n^2=\frac{n(n-1)}{2}h_n^2\\ n &\geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2\\ \frac{2}{n-1}\geq h_n^2 \end{aligned}$$
   Da $h_n>0$ folgt daraus
   $$0<h_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$$
   für $n\geq n_0(\varepsilon)$, also $\lim_{n\to\infty}h_n=0$. Folglich gilt
   $$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1+0=1.$$

Eine weitere Konsequenz des Sandwich-Kriteriums ist das folgende

Lemma:
Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Zahl a konvergiert, dann gilt auch
$$|a_n|\to|a|.$$

Denn: Wir schätzen $|a_n| - |a|$ mit Hilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung ab: Einerseits ist

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \quad \Rightarrow \quad |a_n| - |a| \leq |a_n - a|,$$

andererseits

$$|a| = |a - a_n + a_n| \leq |a_n - a| + |a_n| \quad \Rightarrow \quad |a| - |a_n| \leq |a_n - a|.$$

Insgesamt folgt also

$$0 \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Nach Voraussetzung konvergiert $a_n - a$ gegen 0. Man erhält daher die Konvergenz $|a_n| \to |a|$ durch Anwendung des Sandwich-Kriteriums. □

2.7 Rechenregeln für Grenzwerte

Viele Grenzwerte von Folgen kann man dadurch bestimmen, dass man sie auf einige „bekannte“ Grenzwerte zurückführt. Dazu dienen die nun folgenden Rechenregeln für Grenzwerte.

Satz 2.12
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen.
Falls die Grenzwerte $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ beide existieren, gilt:

$$\begin{array}{rll}
(i) & \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) & = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) + (\lim\limits_{n\to\infty} y_n) \\
(ii) & \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) & = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} y_n) \\
(iii) & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) & = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}, \quad \textit{falls} \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0.
\end{array}$$

Beweis: Betrachte nur reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, im Fall von komplexen Folgen genügt es dann, Real- und Imaginärteil getrennt zu betrachten.

(i) Zu einem festen ε finden wir zunächst $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x| \leq \varepsilon \;\text{ und }\; |y_n - y| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \; n \geq N_0(\varepsilon).$$

Beide Folgen sind außerdem beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|x_n| \leq C \text{ und } |y_n| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist aber

$$|x_n + y_n - x - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < 2\varepsilon \quad \text{(Dreiecksungleichung!)}$$

für $n \geq N_0(\varepsilon)$.

(ii)

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - x \cdot y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y| \quad \text{kleiner Trick...)} \\ &\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| \\ &= |x_n \cdot (y_n - y)| + |(x_n - x) \cdot y| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| \\ &\leq C \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot C \\ &= 2C\varepsilon\end{aligned}$$

wieder für $n \geq N_0(\varepsilon)$.

(iii) Wir wissen, dass

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$$

und aus (ii), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n}.$$

Also genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Da die Folge gegen eine Zahl $y \neq 0$ konvergiert, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_1$ die Folgenglieder vom Betrag größer als $c := |y|/2$ sind. Dann folgt aber

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} \leq \frac{1}{c^2} \cdot \varepsilon$$

für alle $n \geq \max(N_0(\varepsilon), N_1)$.

Beispiele:

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

Insbesondere existiert somit $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

2. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

3. Sei $a > 0$. Dann gilt (für die positive n-te Wurzel):

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,$$

denn: Den Fall $a > 1$ haben wir bereits bewiesen, $a = 1$ ist einfach, es bleibt noch der Fall $0 < a < 1$.
In diesem Fall ist aber $\frac{1}{a} > 1$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{a})^{1/n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{a})^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4. Approximation der Quadratwurzel einer positiven Zahl

   Sei $a > 0$ eine positive Zahl. Dann hat die Gleichung $x^2 = a$ genau eine positive Lösung, die wir mit $\sqrt{a}$ bezeichnen. Dass eine solche Zahl existiert, haben wir in Kapitel 1 schon gesehen, nun wollen wir sie (näherungsweise) berechnen.

   Sei dazu $b > 0$ eine positive reelle Zahl mit $b^2 > a$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$\begin{aligned} x_1 &:= b \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{aligned}$$

   rekursiv definierte Folge. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a},$$

   denn: Die Folgenglieder x_n sind alle positiv, da sie durch die Addition zweier positiver Zahlen entstehen. Weiter gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle n. Das zeigen wir mit Vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ist klar, da der Startwert b so gewählt sein soll, dass er größer als $\sqrt{a}$ ist. Für den Induktionsschritt setzen wir die Ungleichung $x_n^2 - a \geq 0$ voraus und berechnen dann

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) - a \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 = \frac{1}{\underbrace{4x_n^2}_{>0}}(\underbrace{x_n^2 - a}_{\geq 0})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

   die Folge der x_n ist also monoton fallend. Nach Lemma 2.4 besitzt sie also einen Grenzwert

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n.$$

   Mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte zeigt man nun

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1} - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ \Rightarrow x^2 &= a \\ \Rightarrow x &= \sqrt{a}, \end{aligned}$$

   die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefert also Näherungswerte für $\sqrt{a}$.

5. Intervallschachtelungen
   Eine **Intervallschachtelung** besteht aus einer Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, so dass
   - Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Intervalluntergrenzen monoton wachsend ist,
   - die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Intervallobergrenzen monoton fallend ist und
   - die Intervalllängen $b_n - a_n$ gegen 0 konvergieren.

   Dann wird durch die Intervallschachtelung eine einzige reelle Zahl x beschrieben:
   $$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$
   Die Anordnung der Folgen bedeutet
   $$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \underbrace{\ldots}_{\text{alle weiteren } a_j} \le \underbrace{\ldots}_{\text{alle weiteren } b_j} \le b_3 \le b_2 \le b_1.$$
   Nach Satz 2.4 existiert sowohl $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ als auch $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Wegen der Bedingung $b_n - a_n \to 0$ müssen die beiden Grenzwerte übereinstimmen.

Bemerkung: Für $\lim\limits_{n\to\infty} = \pm\infty$ gelten Einschränkungen der Rechenregeln: Beispielsweise wird keine Aussage getroffen über Grenzwerte der Form
$$\infty + (-\infty)\ ,\ \infty \cdot 0\ ,\ (-\infty)\cdot 0\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{-\infty}{\infty} \text{ oder } \frac{0}{0}.$$
Es gilt aber zum Beispiel
$$x + \infty = +\infty \text{ für } x \in \mathbb{R},$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \text{ und } (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
sowie
$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty \text{ und } (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$$
Für $x \neq 0$ und $\operatorname{sign}(x) := \frac{x}{|x|}$ ist
$$x \cdot (+\infty) = (\operatorname{sign}(x)) \cdot (+\infty).$$

Beispiel: Nochmal die Eulersche Zahl e
Wir haben die Eulersche Zahl e als Grenzwert der Folge
$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
definiert. Nun betrachten wir die Folge $(\tilde{e})_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$\tilde{e}_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$
die man sich für $n \to \infty$ als kontinuierliche Verzinsung vorstellen kann.

Satz 2.13 *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{e}_n = e.$$

Beweis:
1. Schritt: $\tilde{e} := \lim_{n\to\infty} \tilde{e}_n$ existiert.
Wegen des Binomischen Satzes 1.5 gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$, also gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< e_n \le e \le 3.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da in der vorletzten Zeile die Terme in den Klammern jeweils kleiner als 1 sind, und somit der ganze Ausdruck durch $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e_n$ abgeschätzt werden kann.

Außerdem ist $\tilde{e}_n$ monoton wachsend, da für $\tilde{e}_{n+1}$ die Klammerterme der vorletzten Zeile mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ alle größer sind als für $\tilde{e}_n$, denn die k Faktoren $((1-\frac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n}))$ werden alle größer. Darüber hinaus kommt noch der Term mit $k = n+1$ hinzu. Somit ist $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Zahl e von oben beschränkt und monoton wachsend, daher existiert der Grenzwert $\tilde{e} = \lim_{n\to\infty} \tilde{e}_n \le e$.

2. Schritt: Es ist $\tilde{e} = e$.
Nach dem Ergebnis des 1. Schritts müssen wir nur noch die Ungleichung $\tilde{e} \ge e$ zeigen.
Für $n \ge m$ ist

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_m &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \\
&\le \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&\le \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \;=\; \tilde{e}_n.
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ergibt sich wieder daraus, dass wir die einzelnen Faktoren größer gemacht haben. Betrachtet man nun in der Ungleichung

$$\tilde{e}_m \le \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le \tilde{e}_n$$

für festes $m \in \mathbb{N}$ den Grenzwert $n \to \infty$, so erhält man wegen Satz 2.10

$$\tilde{e}_m \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}}_{= e_m} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \leq \tilde{e}.$$

Lässt man nun noch $m \to \infty$ gehen, folgt:

$$\tilde{e} \leq e \leq \tilde{e} \quad \Rightarrow \quad e = \tilde{e}.$$

□

Bemerkung: Man könnte mit unseren Mitteln auch noch zeigen, dass e eine irrationale Zahl ist. Die Zahl e ist sogar *tranzendent*, d.h. sie lässt sich nicht als Lösung einer polynomialen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

Satz 2.14 *Es ist*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{C}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Abschätzung

$$\frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1}.$$

Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \quad &= \quad \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot n^{n-1}}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-1}} \\
&= \quad \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)} \\
&= \quad \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!}
\end{aligned}$$

Wir wissen vom Beweis des vorigen Satzes, dass $(1 + \frac{1}{k})^k = \tilde{e}_k \leq e$. Daher ist

$$\frac{n^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq \prod_{k=1}^{n-1} e = e^{n-1}.$$

Daraus folgt dann

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n^n \cdot e^{-(n-1)}} = \frac{|x|}{n} \cdot \left(\frac{|x|e}{n}\right)^{n-1} \to 0,$$

da $\frac{|x|}{n}$ gegen 0 geht für $n \to \infty$ und $(\frac{|x|e}{n})^{n-1}$ für große n kleiner als 1 ist. □

Bemerkung: Die verwendete Abschätzung $\frac{n^n}{n!}e^{-(n-1)} \leq 1$ kann man mit mehr Aufwand zur *Stirlingschen Formel*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{n!}e^{-n} = 1$$

verbessern.

2.8 Reihen

Definition: Unter einer **unendliche Reihe**, kurz **Reihe**,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ versteht man die Folge der **Partialsummen**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Die Zahlen a_k heißen **Glieder** der Reihe. Die Reihe heißt **konvergent**, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, also $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existiert. Wir schreiben dann auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s \neq \pm\infty.$$

Existiert kein solcher Limes, so heißt die Reihe divergent.
Die Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn sogar

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergent ist.

Man sollte eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ also in erster Linie als eine Abkürzung für die Folge ihrer Partialsummen betrachten.

Beispiele:

(a) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ist konvergent für alle $q \in \mathbb{R}$ oder $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$, denn

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q},$$

da ja $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ für $|q| < 1$.

Beispielsweise ist also

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-+\ldots &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

(b) Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

divergiert, denn

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}}=\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k} &= s_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^n+2^n} \\ &\geq s_{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}} \\ &= s_{2^n}+2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}} \\ &= s_{2^n}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit $s_1=s_{2^0}=1$ folgt also (streng genommen per Vollständiger Induktion)

$$s_{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}.$$

Die Reihe divergiert also gegen $+\infty$.

(c) Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit der wir die Eulersche Zahl e definiert haben, besteht gerade aus den Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e.$$

Bemerkung:

1. **Vorsicht:** Bei einer konvergenten Reihe dürfen beliebig Klammern hinzugefügt werden

$$a_1+a_2+a_3+\ldots=(a_1+\ldots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+\ldots$$

Es dürfen aber keine Klammern weggelassen werden: Es ist natürlich

$$0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

aber die Reihe

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$$

divergiert, da die Partialsummen zwischen 1 und 0 hin- und herspringen.

2. Wie bei Folgen ändert sich das *Konvergenzverhalten* einer Reihe nicht, wenn man endlich viele Glieder abändert oder weglässt. Allerdings verändert man dabei sehr wohl den *Wert* einer Reihe.

3. Aus den Rechenregeln für Folgen ergibt sich Reihen:
   Falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k =: a$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k =: b$ zwei konvergente Reihen und $c \in \mathbb{C}$ eine beliebige Zahl sind, dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = a + b \\ \sum_{k=0}^{\infty} c\, a_k &= c \sum_{k=0}^{\infty} a_k = c \cdot a \end{aligned}$$

2.9 Konvergenzkriterien

Einige Kriterien für die Konvergenz von Reihen erhalten wir, indem wir Konvergenzkriterien für Folgen direkt auf die Folge der Partialsummen anwenden.

Satz 2.15 [Cauchy-Kriterium für Reihen]
Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ist genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ *ein* $N_* = N_*(\varepsilon)$ *existiert mit*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

für alle $N_*(\varepsilon) \leq m \leq n$.

Beweis: Man wendet das Cauchy-Kriterium für Folgen auf die Partialsummen s_n der Reihe an:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| = |s_n - s_{m-1}| < \varepsilon$$

Der Satz folgt also unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummen-Folge s_n.

1. Folgerung: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, denn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt: Wählt man $N_*(\varepsilon)$ nach dem Cauchy-Kriterium, dann ist für alle $n > N_*(\varepsilon) + 1$

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Achtung ! Die Umkehrung ist falsch, was man beispielsweise an der harmonischen Reihe mit $a_k = \frac{1}{k}$ sehen kann.

2. Folgerung: Wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, dann konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, denn nach dem Cauchy-Kriterium gilt

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

für beliebige $m, n \geq N_*(\varepsilon)$. Wendet man auf den linken Term $(n-m)$-mal die Dreiecksungleichung an, ergibt sich

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium ist dann auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Satz 2.16 [Konvergenz positiver Reihen]
Seien alle $a_n \geq 0$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist, d.h. wenn es eine Zahl $C > 0$ gibt, so dass

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} a_n < C$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis: Die Folge der Partialsummen s_N ist eine monoton wachsende Folge. Also ist s_N konvergent, genau dann wenn s_N beschränkt ist (siehe Satz über monotone Konvergenz 2.4). □

Satz 2.17 [Majoranten-Kriterium]
Sei $\sum a_k$ eine beliebige Reihe mit $|a_k| \leq b_k$ für alle k und $\sum b_k \leq \infty$. Dann konvergiert $\sum a_k$ (sogar absolut) und $\sum b_k$ heißt Majorante zu $\sum a_k$.

Beweis: Man kann das Cauchy-Kriterium auf $\sum b_k$ anwenden. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine Zahl $N_* = N_*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für $N_*(\varepsilon) \leq m \leq n$ immer

$$\left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt
$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq |\sum_{k=m}^{n} b_k| < \varepsilon.$$
Also ist das Cauchy-Kriterium auch für $\sum |a_k|$ erfüllt, folglich ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent. $\square$

Bemerkung: Auch wenn $|a_k| \leq b_k$ nur für fast alle k gilt, reicht das schon aus. („fast alle“ heißt hier: für alle, bis auf endlich viele).

Satz 2.18 [Quotienten-Kriterium]
Die Reihe $\sum a_k$ ist absolut konvergent, falls
$$q := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1.$$

Beweis: Wähle ein $\tilde{q}$ mit $q < \tilde{q} < 1$. Da der Limes superior der größte Häufungspunkt einer Folge ist, können nur endlich viele Glieder der Folge $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ größer oder gleich $\tilde{q}$ sein. Sonst könnte man eine Teilfolge finden, die entweder nicht von oben beschränkt ist oder nach Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt besitzt, der größer oder gleich $\tilde{q}$ ist. Beide Möglichkeiten stehen im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $q < \tilde{q}$ der Limes superior der Folge ist.
Es existiert also ein Index N_0, so dass
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \tilde{q} \qquad \text{für alle } k \geq N_0.$$
Da aber
$$|a_{N_0}| \geq \frac{1}{\tilde{q}}|a_{N_0+1}| \geq \frac{1}{\tilde{q}^2}|a_{N_0+2}| \geq \ldots \geq \frac{1}{\tilde{q}^k}|a_{N_0+k}|$$
folgt daraus
$$|a_{N_0+k}| \leq |a_{N_0}| \cdot \tilde{q}^k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$
Folglich gilt für die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N_0-1} |a_k| + \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N_0-1} |a_k| + \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_{N_0}|\tilde{q}^{k-N_0}$$
Mit $\ell = N_0 + k$ gilt daher
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| &\leq \sum_{k=0}^{N_0-1} |a_k| + |a_{N_0}| \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{q}^\ell \\ &= \sum_{k=0}^{N_0-1} |a_k| + |a_{N_0}| \frac{1}{1-\tilde{q}} < \infty.\end{aligned}$$
Die Konvergenz dieser positiven Reihe folgt nun direkt aus Satz2.16. $\square$

Bemerkung: Wenn das Quotientenkriterium erfüllt ist, kann man also eine konvergente geometrische Reihe als Majorante verwenden für fast alle a_k (genauer: für alle a_k mit $k \geq N_0$).

Satz 2.19 [Minoranten-Kriterium]
Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine beliebige Reihe mit* $a_k \geq b_k \geq 0$ *für alle* k*, wobei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *eine divergente Reihe ist. Dann divergiert auch* $\sum a_k$*. Die Reihe* $\sum b_k$ *heißt Minorante zu* $\sum a_k$*.*

Beweis: Die Folge der Partialsummen von $\sum b_k$ wächst monoton über alle Grenzen. Zu jedem $C > 0$ gibt es eine Zahl $N = N(C) \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N(C)$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k > C.$$

Daraus folgt direkt, dass auch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k > C.$$

Also streben auch die Partialsummen von $\sum a_k$ gegen $+\infty$, die Reihe $\sum a_k$ ist daher divergent. □

Satz 2.20 [Wurzelkriterium]
Falls

$$q := \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} < 1,$$

dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*
Falls

$$q = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} > 1,$$

dann divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$*.*

Beweis: Wähle wie beim Quotientenkriterium $q < \tilde{q} < 1$. Dann gilt

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq \tilde{q} \quad \text{für fast alle } k$$

das heißt $|a_k| \leq \tilde{q}^k$ für $k \geq N_0$. Die (konvergente) geometrische Reihe $\sum \tilde{q}^k$ mit $\tilde{q} < 1$ ist also eine Majorante zu $\sum a_k$ für fast alle a_k. Da die endlich vielen Terme mit $k < N_0$ die Konvergenz der Reihe nicht beeinflussen, konvergiert $\sum a_k$ absolut. □

Bemerkung:

1. Das Wurzelkriterium ist etwas stärker als das Quotientenkriterium. Man kann zeigen, dass
$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} \le \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|,$$
das heißt, wenn das Quotientenkriterium erfüllt ist, dann ist auch das Wurzelkriterium erfüllt. Im Einzelfall kann es trotzdem einfacher sein, das Quotientenkriterium anzuwenden.

2. Für $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 1$ macht das Wurzelkriterium keine Aussage. Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ zeigen, dass in diesem Fall sowohl Konvergenz (für $s > 1$) als auch Divergenz (für $0 < s \le 1$) möglich ist.

3. Die Tatsache
$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$$
erlaubt keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum a_k$.

Definition:
Eine unendliche Reihe heißt **alternierend**, wenn ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, d.h. von der Form
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$$
mit positiven a_k.

Satz 2.21 [Leibniz-Kriterium]
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen, die monoton fallend gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die alternierende Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k.$$

Beweis: Wir betrachten die Partialsummen
$$s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k.$$
Die (Teil-)Folge der Partialsummen s_n mit ungeradem n ist monoton wachsend, da
$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\ge 0} \ge s_{2n-1}$$
Für die Partialsummen mit geradem Index gilt dagegen
$$s_{2n+2} = s_{2n} \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\le 0} \le s_{2n}.$$

Sie bilden also eine monoton fallende Folge. Außerdem ist $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}$. Schematisch kann man diese Ungleichungen so darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} s_0 & \geq & s_2 & \geq & s_4 & \geq & \dots & \geq & s_{2n} & \geq & \dots & \geq & \overline{s} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \\ s_1 & \leq & s_3 & \leq & s_5 & \leq & \dots & \leq & s_{2n+1} & \leq & \dots & \leq & \underline{s} \end{array}$$

Also fallen die s_{2n} und sind nach unten beschränkt durch s_1. Nach dem Satz 2.4 über monotone Konvergenz existiert der Limes $\overline{s}$.Die monoton wachsende Folge der s_{2n+1} ist nach oben beschränkt durch s_0. Folglich existiert der Limes $\underline{s}$. Wir wissen nun

$$\begin{array}{ccc} s_{2n} & \rightarrow & \overline{s} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} \\ s_{2n+1} & \rightarrow & \underline{s} \end{array}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\underline{s} = \overline{s}$:
Da $\overline{s} \leq s_{2n}$ und $-\underline{s} \leq -s_{2n+1}$, gilt

$$0 \leq \overline{s} - \underline{s} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1}.$$

Weil vorausgesetzt war, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge bilden, konvergiert der letzte Term für $n \to \infty$ gegen 0. Daraus folgt mit Hilfe des Sandwich-Kriteriums $\overline{s} = \underline{s}$. □

Bemerkung:

1. Es ist wichtig, dass die Folge der a_n *monoton* gegen 0 konvergiert. Aus $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ kann im allgemeinen nicht auf die Konvergenz der Reihe $\sum (-1)^n a_n$ geschlossen werden.
2. Das Leibniz-Kriterium ist in besonderer Weise für Reihen geeignet, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind. Bei solchen Reihen liefern nämlich weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium ein verwertbares Ergebnis.

Beispiele:

1. Mercator(1568)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (= \log 2)$$
Mercator verbrachte übrigens die meiste Zeit seines Lebens in Duisburg.
2. Madhava(1340-1425)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (= \frac{\pi}{4})$$

Bemerkung: Man darf Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, nicht umordnen. Auf diese Weise ändert man die „Balance“ zwischen den positiven und den negativen Termen und damit den Wert der Reihe. Beispielsweise ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + - \ldots = s$$

aber
$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+--\ldots=\frac{s}{2}.$$
Man kann diese Reihe sogar so umordnen, dass sie gegen $+\infty$ (oder gegen $-\infty$) divergiert. Bei absolut konvergenten Reihen darf man die Glieder umsortieren, ohne den Wert der Reihe zu ändern.

Satz 2.22 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver, reeller Zahlen, die monoton gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die „verdichtete“ Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konvergiert.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen beschränkt ist, da die Reihenglieder alle positiv sind (siehe Satz 2.16). Wählt man ℓ so, dass $2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}$, dann gilt

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{k=1}^{n} a_k &=& a_1+a_2+a_3 \;+\; a_4+a_5+a_6+a_7 \;+\; a_8+\ldots+a_{15} \;+\ldots+\; a_n\\
&\leq& a_1+(a_2+a_2) \;+\; (a_4+a_4+a_4+a_4) \;+\; (a_8+\ldots+a_8) \;+\ldots+\; a_{2^{\ell+1}-1}\\
&=& 2^0a_{2^0}+2^1a_{2^1} \;+\; 2^2a_{2^2} \;+\; 2^3a_{2^3} \;+\ldots+\; 2^\ell a_{2^\ell}\\
&=& \sum\limits_{k=0}^{\ell} 2^k\cdot a_{2^k}
\end{array}$$

Hierbei wurde nur verwendet, dass $a_n \geq a_{n-1}$ ist. Also folgt
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot a_{2^k}.$$

Somit sind die Partialsummen auf der linken Seite alle durch den Wert der rechten Reihe beschränkt. Wenn diese konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Andererseits ist

$$\begin{array}{rcl}
2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} a_k &=& 2\,(a_1 + a_2 + a_3+a_4 + a_5+a_6+a_7+a_8 +\ldots+ a_n)\\
&\geq& 2\,(a_1 + a_2 + a_3+a_4 + a_5+a_6+a_7+a_8 +\ldots+ a_{2^\ell})\\
&\geq& 2\,(a_1 + a_2 + (a_4+a_4) + (a_8+a_8+a_8+a_8) +\ldots+ a_{2^\ell})\\
&=& 2a_1 + 2a_2 + 2\cdot 2a_4 + 2\cdot 4a_8 +\ldots+ 2\cdot 2^{\ell-1}a_{2^\ell}\\
&=& a_1 + \sum\limits_{k=0}^{\ell-1} 2^k\cdot a_{2^k}
\end{array}$$

Es ist also für jedes $\ell\in\mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{\ell} 2^k\cdot a_{2^k} \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Wieder sind die Partialsummen auf der linken Seite durch das zweifache des Wertes der rechten Reihe beschränkt, falls dieser konvergent ist. Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. □

Beispiele:

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ (bis jetzt „nur“ mit Exponenten $\alpha \in \mathbb{Q}$).
   Beweis: Anwendung des Cauchyschen Verdichtungssatzes (Übungsaufgabe).

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert.
   Beweis: Die Behauptung kann auf verschiedene Arten bewiesen werden:
   (i) Eine Majorante zu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Diese Reihe konvergiert nach dem vorhergehenden Beispiel.
   (ii) durch Anwendung des Cauchyschen Verdichtungungssatzes
   (iii) Durch explizites Ausrechnen der Partialsummen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) & = & 1 & - & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & & & + & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} & & \\ & & & & & & & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} \\ & & & & & & & & & + & \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ & & & & & & & & & & + \ddots \end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

   Eine Reihe, die sich in einer solchen Form schreiben lässt, nennt man **Teleskopreihe**. □

2.10 Der Produktsatz für Reihen

Für endliche Summen $\sum_{j=1}^{m} a_j$ und $\sum_{k=1}^{n} b_k$ berechnet man bekannterweise das Produkt durch „Ausmultiplizieren“, d.h. alle Terme der Form $a_j b_k$ werden aufsummiert. Bei unendlichen Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ stellt sich die Frage, wie man die Summation durchführt, um alle Terme $a_j b_k$ systematisch zu erfassen.
Die folgende Definition basiert auf einer ähnlichen Idee wie das Cantorsche Diagonalverfahren zur Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dort wurden die Diagonalen im Gitter $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ benutzt, um sicher zu gehen, dass jedes Paar von natürlichen Zahlen erfasst wird.

Definition: Das **Cauchy-Produkt** von zwei Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Satz 2.23 *Seien* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *zwei absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert auch das Cauchy-Produkt* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut und es ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis: Wir betrachten in einem ersten Schritt die (Partial-)summen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} |a_j|\,|b_{k-j}|.$$

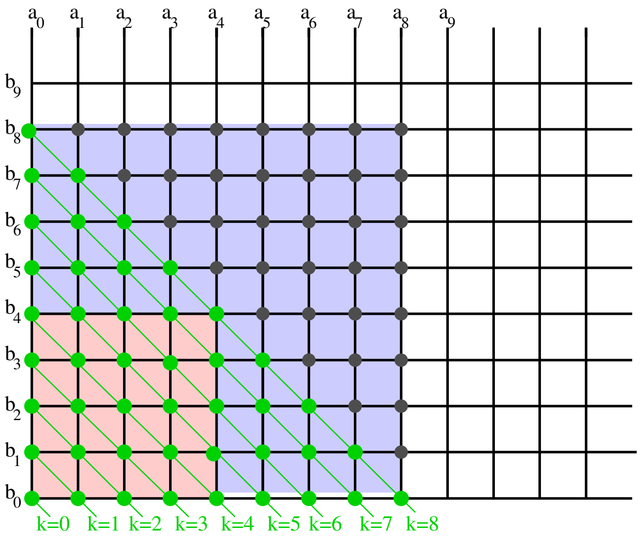
Für diese gilt:

$$\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |a_j|\right) \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |b_j|\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} |a_j|\,|b_{k-j}| \leq \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j|\right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right) \qquad (*)$$

Hierbei bezeichnet die *Gauß-Klammer* $\left[\frac{n}{2}\right]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$. Die Begründung für diese Ungleichung veranschaulicht man sich mit Hilfe einer Skizze. Jeder der Kreuzungspunkte des Gitters steht für einen Term der Form $a_j b_{k-j}$, wobei die Terme mit demselben k auf einer der grnen Diagonalen liegen. Die Punkte des rot schraffierten Quadrats entsprechen den Termen auf der linken Seite, die grnen Punkte entsprechen der mittleren Summe und die Punkte des blau schraffierten, großen Quadrats der rechten Summe.

Da für $n \to \infty$ die linke und die rechte Seite der Ungleichung $(*)$ beide gegen $\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_j|\right) \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} |b_j|\right)$ streben, muss auch S_n für $n \to \infty$ gegen diesen Wert konvergieren.
Damit ist der Satz bewiesen für Reihen $\sum a_j$ und $\sum b_j$, die nur positive Glieder besitzen.
Im allgemeineren Fall benötigt man noch einen Schritt mehr:

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{k} |a_j|\,|b_{k-j}| = S_{2n} - S_n. \end{aligned}$$



Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wird mal wieder (sehr oft) die Dreiecksungleichung angewandt.
Da die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, findet man zu jedem vorgegebenen ε ein $N_* = N_*(\varepsilon)$, so dass $S_{2n} - S_n < \varepsilon$ für alle $n \geq N_*$. Dann ist aber für alle $n \geq N_*$ auch

$$\left|\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right| < \varepsilon.$$

Da die beiden Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergent sind, findet man eine Zahl N_1, so dass für $n \geq N_1$ gilt

$$\left|\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) - \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)\right| < \varepsilon.$$

Insgesamt ist dann

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right| \\
\leq\ &\left|\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) - \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)\right| + \left|\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right| \\
<\ &\quad\varepsilon \quad + \quad \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann die Konvergenz des Cauchy-Produkts. □

2.11 Potenzreihen und elementare Funktionen

Definition: Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ oder $a_n \in \mathbb{C}$ heißen **Potenzreihen** in x mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{C}$. Der **Konvergenzradius** $\rho \in [0, \infty]$ ist definiert als

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, dann ist $\rho = \infty$ und die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 2.24
Eine Potenzreihe konvergiert absolut im Innern des Konvergenzkreises, d.h. die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *konvergiert für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x - x_0| < \rho$.

Bemerkung: In einigen Fällen konvergiert die Reihe auch auf dem Rand des Konvergenzkreises oder in einzelnen Punkten dieses Randes. Das muss aber in jedem Fall gesondert untersucht werden.

Beweis:
Nach dem Wurzelkriterium gilt für $|x - x_0| < \rho$

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} &< \limsup \sqrt[n]{|\rho^n a_n|} \\ &= \limsup \sqrt[n]{|a_n|}\rho \\ &= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Potenzreihe absolut. □

Bemerkung: Betrachtet man die geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

mit $q = -x^2$ als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0, dann wissen wir, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Man könnte sich nun fragen, warum die Reihe nur für $|x| < 1$ konvergiert, obwohl der Ausdruck auf der rechten Seite doch für alle $x \in \mathbb{R}$ unproblematisch aussieht. Das kann man mit Hilfe des Konvergenzkreises im Komplexen gut verstehen. Die beiden Nullstellen $x = \pm i$ des Nenners liegen auf dem Rand des Konvergenzkreises mit Radius

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Satz 2.25
Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$$

für ein $x = \xi \neq 0$, dann gilt $\rho \geq |\xi| > 0$. Insbesondere konvergiert die Potenzreihe (sogar absolut) für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq |\xi|$.

Beweis:
Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \xi^n$ konvergiert, gilt auf jeden Fall

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| \cdot |\xi^n| = 0.$$

Wähle nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert wegen der Eigenschaften des Limes superior eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $n_k \to \infty$ und

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{\rho} - \varepsilon.$$

Somit gilt auch

$$|a_{n_k}| > \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)^{n_k}.$$

Daraus folgt

$$|a_{n_k}| \cdot |\xi|^{n_k} > \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot |\xi|^{n_k}.$$

Also gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$0 = \lim_{k \to \infty} |a_{n_k}| \cdot |\xi|^{n_k} \geq \lim_{k \to \infty} ((\frac{1}{\rho} - \varepsilon) \cdot \xi|)^{n_k}.$$

Damit der Ausdruck auf der rechten Seite konvergiert, muss gelten

$$(\frac{1}{\rho} - \varepsilon) \cdot |\xi| \leq 1$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\rho} - \varepsilon \leq \frac{1}{|\xi|} \quad \Leftrightarrow \quad |\xi| \leq \frac{1}{\frac{1}{\rho} - \varepsilon}$$

Diese Ungleichung muss für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ gelten, daher ist

$$|\xi| \leq \frac{1}{\frac{1}{\rho}} = \rho.$$

□

Bemerkung: Das Cauchy-Produkt zweier Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ist nach Definition gerade

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Es werden also genau die Terme erfasst, die zur Potenz x^k gehören. Die Definition des Cauchy-Produkts ist also durch das Vorgehen bei der Multiplikation von zwei Potenzreihen motiviert.

Beispiel: Die Exponentialfunktion exp
Wir definieren

$$exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist $\rho = \infty$, weil

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} (\frac{1}{n!})^{1/n}.$$

Im Beweis zu Satz 2.14 haben wir die Abschätzung $n! \geq n^n \cdot e^{-(n-1)}$ gezeigt. Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^n \cdot e^{-(n-1)}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot e^{-\frac{n-1}{n}}} = 0.$$

Satz 2.26 *Die Exponentialfunktion genügt der Funktionalgleichung*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \tag{2.1}$$

Beweis: Man verwendet den Produktsatz 2.23 für Reihen. Es gilt

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right).$$

Da beide Terme absolut konvergieren gilt nach dem Produktsatz

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Binomischen Satz 1.5 gilt aber $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}=(x+y)^n$, also folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n=\exp(x+y).$$

□

Bemerkung: Es gilt für alle rationalen $x=p/q\in\mathbb{Q}$ die Identität $\exp(x)=e^x$. Mit e^x ist dabei die schon früher für rationale $x=p/q\in\mathbb{Q}$ definierte Potenz gemeint ist.

Beweis:

- Gilt für $x=1$, weil $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ nach Definition von e.

- Gilt für $x=p\in\mathbb{N}$, weil wegen (2.1) gilt

$$\begin{aligned}\exp(p) &= \exp(\underbrace{1+1+...+1}_{\text{p-mal}})\\ &= \underbrace{\exp(1)\cdot\exp(1)\cdot...\cdot\exp(1)}_{\text{p-mal}}\\ &= \underbrace{e\cdot e\cdot...\cdot e}_{\text{p-mal}}\\ &= e^p\end{aligned}$$

- Gilt für $x=p/q$ mit $p,q\in\mathbb{N}$, denn $\exp(p/q)=e^{p/q}$ genau dann wenn $(\exp(p/q))^q=e^p$ ist, was aber wegen (2.1)gilt:

$$(\exp(p/q))^q=\underbrace{\exp(p/q)\cdot\exp(p/q)\cdot...\cdot\exp(p/q)}_{q-mal}=\exp(\underbrace{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+...+\frac{p}{q}}_{q-mal})=\exp(p)=e^p.$$

- Somit gilt die Behauptung für $x\geq 0$ in $\mathbb{Q}$. Sei $x<0$, dann ist $-x>0$, also gilt wegen (2.1)

$$\exp(-x)\cdot\exp(x)=\exp(0)=1.$$

  Daraus folgt

$$\exp(x)=\frac{1}{\exp(-x)},$$

  also gilt die Behauptung für alle $x\in\mathbb{Q}$.

□

Die Exponentialfunktion exp ist also eine Erweiterung der bisher bekannten Potenzen von e auf beliebige komplexe Exponenten. Die Reihe ist auch geeignet, um Näherungswerte für e oder für e^x zu berechnen.

Bemerkung: Für $|x| \leq 1$ ist

$$\begin{aligned}\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) \leq \frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Wir können daher den Fehler abschätzen, wenn wir nur die ersten Terme der Reihe verwenden:

$$\left|e - 2 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}\right| < \frac{2}{7!} = \frac{1}{360 \cdot 7} < \frac{1}{2000}.$$

Beispiel: Die trigonometrischen Funktionen

Definition: Sei $x \in \mathbb{C}$. Dann ist sind **Cosinus** und **Sinus** von x definiert durch

$$\begin{aligned}\cos(x) &:= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin(x) &:= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt deswegen

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \mathrm{Re}(e^{ix}) \\ \sin(x) &= \mathrm{Im}(e^{ix})\end{aligned}$$

denn $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ und für $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\overline{(e^{ix})} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{(ix)^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{ix})^k}{k!} = e^{\overline{ix}} = e^{-i\,\overline{x}} = e^{-ix}$$

Daher gilt für alle $x \in \mathbb{C}$:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{2.2}$$

Satz 2.27 *Cosinus und Sinus haben die Potenzreihendarstellung*

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\end{aligned}$$

mit $x \in \mathbb{C}$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}i^k\cdot x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-i)^k\cdot x^k\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{(i^k+(-i)^k)}_{=a_k}x^k\right)\end{aligned}$$

Betrachte nun die Folge a_k. Für ungerade k ist $i^k+(-i)^k=0$, das heißt nur gerade k tragen etwas zur Summe bei. Man überprüft leicht, dass $i^k+(-i)^k=2$ für $k=0,4,8,12,\ldots$ und $i^k+(-i)^k=-2$ für $k=2,6,10,14,\ldots$. Damit ergibt sich

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Für $\sin(x)$ kann man ähnlich argumentieren, hier bleiben nur die Terme mit ungeradem k übrig.
□

Wegen $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ und $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$ mit $z\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\left|e^{ix}\right|^2=e^{ix}\cdot\overline{e^{ix}}=e^{ix}\cdot e^{\overline{ix}}=e^{ix}\cdot e^{-i\overline{x}}=e^{i(x-\overline{x})}=e^{2\cdot i\cdot i\frac{1}{2i}(x-\overline{x})}=e^{-2\cdot Im(x)}.$$

Insbesondere ist für reelle x dann $e^{-2\cdot\mathrm{Im}(x)}=1$, da $\mathrm{Im}(x)=0$. Weil für komplexe Zahlen $|z|^2=(\mathrm{Re}\,(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$, gilt daher für reelle x

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=|e^{ix}|^2=1,$$

eine Identität, die Ihnen sicher aus der Schule bekannt ist.

Satz 2.28 *(i) Cosinus und Sinus erfüllen die Additionstheoreme,*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \cos(x)\cdot\sin(y)+\sin(x)\cdot\cos(y)\end{aligned}$$

(ii) Für $n\in\mathbb{N}$ und $x\in\mathbb{C}$ ist

$$\cos(nx)=\sum_{\ell=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{\ell}\binom{n}{2\ell}\sin^{2\ell}(x)\cos^{n-2\ell}(x)$$

Hierbei bezeichnet wieder $[\frac{n}{2}]$ die Gauß-Klammer.

Beweis:
(i) Übungsaufgabe

(ii) Unter Verwendung von (2.1), (2.2) und des binomischen Satzes 1.5 gilt

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\
&= \frac{1}{2}\left((e^{ix})^n + (e^{-ix})^n \right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n + (\cos(x) - i\sin(x))^n \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) i^k \sin^k(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)(-i)^k \sin^k(x) \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(1 + (-1)^k\right) i^k}_{= 0 \text{ für ungerade } k} \binom{n}{k} \sin^k(x) \cos^{n-k}(x) \right)
\end{aligned}$$

Da nur die geraden k einen Beitrag leisten, kann man $k = 2\ell$ setzen und die Summe als Summe über ℓ schreiben:

$$\cos(nx) = \sum_{\ell=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} \sin^{2\ell}(x) \cos^{n-2\ell}(x).$$

□

Speziell für $n = 2, 3, 4$ erhält man beispielsweise die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\cos(3x) &= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x \\
\cos(4x) &= \cos^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1
\end{aligned}$$

3 Stetigkeit

Ausgehend von Grenzwerten für Zahlenfolgen kann man auch Grenzwerte reellwertiger bzw. komplexwertiger Funktionen betrachten.

Definition:
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sagen wir, dass der **Grenzwert**

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

existiert, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Bemerkung: Es ist hier nicht vorausgesetzt, dass a in D liegt. Wichtig ist nur, dass alle Folgenglieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D liegen. Dies wird bei der Differentiation in Kapitel 4 wichtig sein, wenn wir den Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ betrachten. Dieser Differenzenquotient ist nämlich für $h = 0$ nicht definiert.

Definition:
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f **stetig im Punkt** a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dies bedeutet, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Die Funktion f heißt **stetig auf** D oder einfach stetig, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs D stetig ist.

Beispiele:

1. Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl. Dann ist die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig in jedem Punkt a, denn:
   Für jede Folge (x_n), die gegen a konvergiert, ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge und konvergiert daher gegen $f(a) = c$.

2. Die *Heaviside-Funktion*
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist unstetig im Punkt $x_0 = 0$. Dazu genügt es, die Folge $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ zu betrachten, die gegen 0 konvergiert. Die Funktionswerte der Folgenglieder sind allesamt 0 und konvergieren daher nicht gegen $H(0) = 1$.
Die Heaviside-Funktion ist mit der Delta-„Funktion"verwandt, die in der Physik oft benutzt wird, die aber im mathematischen Sinne gar keine Funktion ist.

3. Die *Identität* $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $Id(x) = x$ ist stetig in jedem $a \in \mathbb{R}$, denn die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Id(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ stimmen überein. Wenn also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} Id(x_n) = a = Id(a)$.

4. Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $h(0) = 0$ ist unstetig in $a = 0$, da für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ auf jeden Fall $|h(x_n)|$ gegen unendlich strebt.

Bemerkung:

1. Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass die Funktion keine Sprünge macht und man ihren Graphen zeichnen kann, ohne abzusetzen.
   Achtung ! Wenn D beispielsweise kein Intervall ist, dann kann der Begriff der Stetigkeit diese Anschaulichkeit verlieren. Zum Beispiel ist jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ stetig, da für $n_0 \in \mathbb{N}$ jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, die gegen n_0 konvergiert irgendwann konstant wird, das heißt
   $$x_k \to n_0 \;\Rightarrow \exists K_0 : \; x_k = n_0 \;\text{ für alle } k \geq K_0.$$
   Dann ist natürlich auch $f(x_k) = f(n_0)$ für alle $k \geq K_0$ und daher $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(n_0)$.
   Stetigkeit kann auch verletzt sein, wenn eine Funktion in der Nähe eines Punktes zu stark oszilliert. Dann kann die Funktion ebenfalls unstetig sein, ohne dass ein „Sprung" zu erkennen ist.

2. Die Stetigkeit einer Funktion f im Punkt a kann man auch durch die Gleichung
   $$\lim_{x\to a} (f(x)) = f(\lim_{x\to a} x).$$
   ausdrücken. Stetigkeit erlaubt also die Grenzwertbildung mit der Anwendung der Funktion f zu vertauschen. Wir werden im Laufe des Semesters noch weitere ähnliche Situationen kennenlernen.

3. Man kann ganz genauso wie oben auch die Stetigkeit von Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}$ definieren. Eine Funktion ist also genau dann stetig im Punkt $a \in D$, wenn für jede Folge, die gegen a konvergiert, die Folge der Bildpunkte in $\mathbb{C}$ gegen $f(a)$ konvergiert. Insbesondere muss also sowohl die Folge der Realteile, als auch die der Imaginärteile konvergieren.

   Da die Stetigkeit reellwertiger Funktionen wichtigere Konsequenzen hat als die Stetigkeit komplexwertiger Funktionen, betrachten wir in diesem Kapitel meistens reelle Funktionen.

Eine alternative Charakterisierung der Stetigkeit benutzt die ε-Umgebungen von Punkten, die wir schon bei Folgen benutzt hatten.

Definition: [„ε–δ–**Definition**"]
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f **stetig im Punkt** a, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ gibt, so dass

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Die Funktion f heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

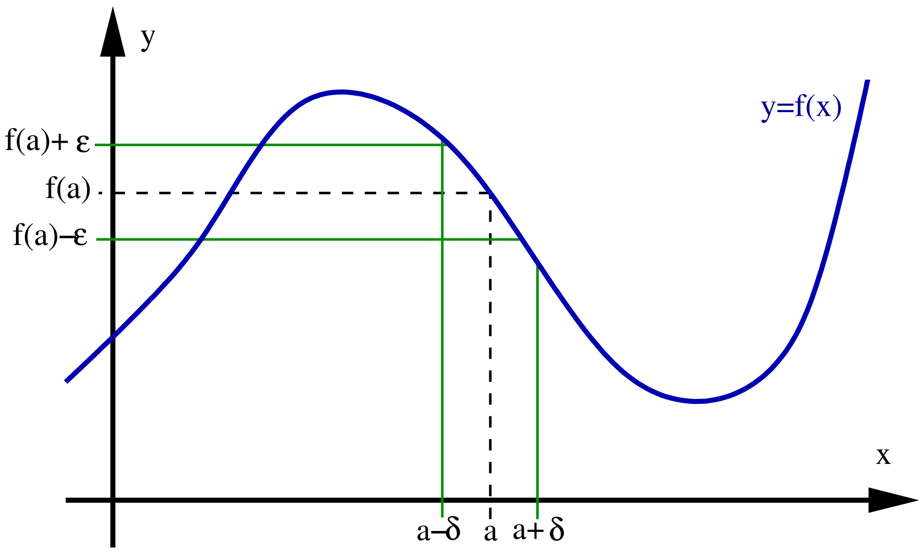


Abbildung 3.1: Zur ε-δ-Definition der Stetigkeit

Anschaulich bedeutet das, dass der Funktionswert $f(x)$ sehr nahe bei $f(x_0)$ liegt, wenn man nur x nahe genug bei x_0 wählt. Wie nahe genau, das hängt vom Abstand zwischen $f(x)$ und $f(x_0)$ ab. Dieser Zusammenhang wird durch ε und δ mathematisch präzise gemacht. Auch diese Definition kann man wieder „reell" oder „komplex" lesen.

Beispiele:

1. Die *Identität* $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $Id(x) = x$ ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$, denn wir können in der Definition der Stetigkeit einfach $\delta = \varepsilon$ wählen.
2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist stetig, denn auch hier kann man nachrechnen, dass die ε-δ-Definition mit $\delta = \varepsilon$ erfüllt ist.

Die Folgen-Definitionen der Stetigkeit und die ε-δ-Definition sind für reelle Funktionen äquivalent zueinander.

Satz 3.1
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig im Punkt $a \in D$ nach der ε–δ-Definition, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis:

„⇒" Wir nehmen an, dass f die ε-δ-Definition der Stetigkeit im Punkt a erfüllt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D ist, die gegen a konvergiert. Zu zeigen ist, dass dann $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert. Wir benutzen dabei die Definition der Konvergenz von Zahlenfolgen und zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0 gibt, so dass

$$|f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

Um das richtige N_0 zu finden, benötigen wir das δ aus der ε-δ-Definition. Für $|x - a| < \delta$ ist dann $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Da die Folge (x_n) gegen a konvergiert, gibt es ein N_0, so dass $|x_n - a| < \delta$ ist für alle $n \geq N_0$. Dies ist genau das gesuchte N_0, ab dem $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ ist.

„⇐" Wir dürfen annehmen, dass alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ erfüllen. Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, zu dem wir ein passendes δ finden möchten. Wir gehen dabei indirekt vor und nehmen zunächst an, dass es *kein* solches $\delta > 0$ gibt. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass es zu jedem noch so kleinen $\delta > 0$ einen Punkt x gibt mit $|x - a| < \delta$, aber $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Speziell mit $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ können wir uns daher eine Folge $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ von Zahlen verschaffen, für die gilt:

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{und } |f(x_n) - f(a)| > \varepsilon.$$

Da diese Folge offensichtlich gegen a konvergiert, $f(x_n)$ aber nicht gegen $f(a)$, erhalten wir einen Widerspruch. Unsere Annahme, dass kein passendes δ existiert war also falsch, und es muss zu dem vorgegebenen ε ein δ wie in Definition 3 geben.

□

Definition:
Sie $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

L heißt *Lipschitz-Konstante* der Abbildung.

Der Name ist gerechtfertigt, denn

Lemma:
Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig.

Beweis: Man verwendet die ε–δ–Definition mit $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Um zu zeigen, dass f im Punkt y stetig ist, verifiziert man, dass für alle x mit $|x - y| \leq \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Dasselbe Argument lässt sich für jedes $y \in D$ anwenden, die Funktion f ist also stetig auf ganz D. □

Definition:
Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, deren Definitionsbereich übereinstimmt, kann man auf ganz natürliche Art und Weise addieren und miteinander multiplizieren. Die **punktweise Addition, bzw. Multiplikation** ist definiert durch

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Satz 3.2
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sowie $g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gilt:

(i) Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind stetig. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch f/g stetig

(ii) die Hintereinanderausführung $g \circ f$ ist stetig (vorausgesetzt, dass $f(x)$ für alle x im Definitionsbereich von g liegt).

Beweis:
(i) Wir zeigen für ein beliebiges $a \in D$, dass $f + g$ stetig in a ist. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen ist dann

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= f(a) + g(a) = (f+g)(a). \end{aligned}$$

Ganz genauso zeigt man die Stetigkeit von $f \cdot g$.
(ii) Seien wieder $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in D$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von g im Punkt $y_0 := f(a)$ findet man ein δ_1, so dass $|g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon$, falls $|y - y_0| \leq \delta_1$. Nutzen wir jetzt die Stetigkeit von f im Punkt a aus (allerdings mit δ_1 anstelle von ε), so finden wir ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(x) - y_0| \leq \delta_1.$$

Daraus folgt dann aber sofort

$$|g(f(x)) - g(y_0)| = |g(f(x)) - g(f(a))| \leq \varepsilon.$$

Nach Definition 3 ist daher $g \circ f$ stetig in a. □

Lemma:
Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ein beliebiges Polynom. Es ist als Summe und Produkt von stetigen Funktionen nach dem vorigen Satz ebenfalls stetig auf ganz $\mathbb{R}$. □

Für komplexwertige Funktionen notieren wir nur:

Lemma:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bzw. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil beide stetige Funktionen sind, d.h.

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$$

ist genau dann stetig, wenn f_1 und f_2 stetig sind.

Beweis: Um die Stetigkeit in einem Punkt a zu beweisen, betrachtet man (reelle oder komplexe) Folgen, die gegen a konvergieren. Diese konvergieren nach Kapitel 2 genau dann, wenn die Folgen aus Real- und Imaginärteil beide konvergieren. Dies bedeutet aber genau, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil der Funktion stetig sind. □

Satz 3.3 *Die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(x)$ ist stetig.*

Beweis:
Wir hatten die Exponentialfunktion über die Reihendarstellung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

definiert.
Wir zeigen zunächst die Stetigkeit in $x = 0$ und werden später sehen, dass daraus die Stetigkeit in einem beliebigen anderen Punkt x_0 folgt.
Um zu zeigen, dass die Exponentialfunktion in 0 stetig ist, müssen wir beweisen, dass e^x für $x \to 0$ gegen $e^0 = 1$ konvergiert. Für $|x| < 1$ gilt immer

$$\begin{aligned} 0 \le |e^x - 1| &= \left| \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \right| \\ &\le |x| \cdot \left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \frac{|x|^3}{4!} + \ldots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \quad |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\right) \\ &\leq \quad |x| \cdot (e-1). \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert für $|x| \to 0$ gegen 0, also ist die Stetigkeit in $x = 0$ bewiesen.
Um die Stetigkeit in *irgendeinem* Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ nachzuweisen, benutzen wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die Stetigkeit in 0: Wegen

$$|e^{x_0} - e^x| = |e^{x_0}| \cdot \underbrace{\left|1 - e^{(x-x_0)}\right|}_{\to 0 \text{ für } x - x_0 \to 0}$$

konvergiert e^x gegen e^{x_0} für $x \to x_0$. □

Bemerkung: Wir haben nirgends benutzt, dass x eine reelle Zahl ist. Die Aussage ist also auch für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ richtig. Aus diesem Grund steht in der letzten Abschätzung des Beweises $|e^{x_0}|$ und nicht e^{x_0}, obwohl das für reelle x_0 genügt hätte....

Eine Konsequenz davon ist:

Satz 3.4 *Die Funktionen* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *und* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig.*

Beweis: Zunächst sind die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} z &\mapsto e^{iz} \quad \text{und} \\ z &\mapsto e^{-iz} \end{aligned}$$

als Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig. Damit sind dann auch

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

stetig. □

Wir werden später sehen, dass ganz allgemein Funktionen, die durch Potenzreihen dargestellt werden, im Innern ihres Konvergenzkreises immer stetig sind.

3.1 Ein paar topologische Grundbegriffe

Definition:
Eine Menge reeller Zahlen $A \subset \mathbb{R}$ heißt **offen**, falls es zu jedem $a \in A$ eine ε-Umgebung gibt, die in A enthalten ist, d.h.

$$\forall a \in A : \exists \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass kein Punkt von A ganz „am Rand“liegt, sondern immer noch Punkte aus A um sich herum hat. Dabei darf die Größe der Umgebung (das „ε“) vom Punkt a abhängen. Für Punkte, die „näher am Rand“sind, wird ε entsprechend kleiner sein.

Definition:
Ein Punkt $y \in \mathbb{R}$ heisst **Häufungspunkt** einer Menge $A \subset \mathbb{R}$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.
Eine Menge reeller Zahlen $A \subset \mathbb{R}$ heißt **abgeschlossen**, falls alle Häufungspunkte von A in A enthalten sind, d.h. wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder in A liegen, auch der Grenzwert in A liegt.

Beispiele:

1. Offene bzw. abgeschlossene Intervalle sind Beispiele für offene bzw. abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}$.
2. Die Menge $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ ist abgeschlossen.
3. Die Menge $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$ ist abgeschlossen.
4. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist weder offen noch abgeschlossen.

Satz 3.5

(i) Die Vereinigung (beliebig vieler) offener Mengen ist offen.

(ii) Der Durchschnitt (beliebig vieler) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis:

(i) Sei $O := \bigcup_{j\in J} O_j$ die Vereinigung von offenen Mengen. Jeder Punkt x aus O liegt in einem der O_j. Da diese Menge offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $U_\varepsilon(x)$ in O_j und damit auch in O enthalten ist.

(ii) Sei $A := \bigcap_{j\in J} A_j$ der Durchschnitt lauter abgeschlossener Mengen. Betrachte eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die in $\mathbb{R}$ konvergiert. Dann liegt diese Folge in allen Mengen A_j. Da die A_j abgeschlossen sind, liegt auch der Grenzwert in jedem der A_j, und damit auch in deren Durchschnitt A.

$\square$

Definition:
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}$ heißt **(folgen-)kompakt**, falls jede Folge in K eine (in K) konvergente Teilfolge besitzt, d.h der Grenzwert der Teilfolge liegt ebenfalls in K.

Eine nützliche, andere Charakterisierung der Kompaktheit benutzt Überdeckungen der Menge K.

Definition:
Eine offene Überdeckung der Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist eine Familie $(U_j)_{j \in J}$ offener Mengen, so dass

$$K \subset \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Dabei kann die Indexmenge J sogar überabzählbar sein. Die Vereinigung aller U_j besteht dann wie gewohnt aus denjenigen $z \in \mathbb{R}$, die in irgendeinem der U_j enthalten sind.

Satz 3.6 [ohne Beweis]
Die Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung von K bereits eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. wenn man aus jeder offenen Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ endlich viele Mengen $U_1, U_2, \ldots, U_N$ auswählen kann, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_k.$$

Den Beweis dieses Satzes finden Sie beispielsweise in den Büchern [Königsberger: Analysis 1, „Überdeckungssatz von Heine-Borel"] oder [Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2].

Satz 3.7 [Heine-Borel]
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei K kompakt. Wir müssen zeigen, dass K beschränkt und abgeschlossen ist. Das geht mal wieder indirekt. Wenn K nicht beschränkt wäre, könnten wir eine Folge (x_n) in K finden mit $|x_n| \geq n$ für alle n. Dann divergiert aber offensichtlich auch jede Teilfolge, im Widerspruch zur Kompaktheit von K.

Wäre K nicht abgeschlossen, dann gäbe es einen Häufungspunkt h von K, der nicht in K liegt. Wählt man eine Folge (y_n) in K, die gegen h konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge davon gegen h. Wegen $h \notin K$ besitzt die Folge (y_n) keine in K konvergente Teilfolge $\rightsquigarrow$ Widerspruch.

„$\Leftarrow$" Sei K beschränkt und abgeschlossen. Dann ist jede Folge in K eine beschränkte Folge und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Sei a der Grenzwert dieser Teilfolge. Da K abgeschlossen ist, liegt $a \in K$, also besitzt jede Folge eine in K konvergente Teilfolge. K ist daher kompakt.

$\square$

Bemerkung: Insbesondere sind also alle abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$.

3.2 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Die Stetigkeit einer auf einem abgeschlossenen Intervall definierten Funktion hat einige interessante Konsequenzen.

Definition:
Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ von einer Menge A in die reellen Zahlen heißt **von oben beschränkt**, falls es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) \leq C \quad \forall x \in A.$$

Ganz analog heißt f **nach unten beschränkt**, falls es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) \geq c \quad \forall x \in A.$$

Eine Funktion, die sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, heißt **beschränkt**. In diesem Fall gibt es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \leq C \quad \forall x \in A.$$

Satz 3.8
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkt.

Beweis:
Wieder indirekt. Wäre die Funktion nicht beschränkt, dann gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$. Da $[a, b]$ kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen eine Zahl $\xi \in [a, b]$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f sollte dann auch $f(x_{n_k})$ für $k \to \infty$ gegen $f(\xi)$ konvergieren. Da aber $|f(x_{n_k})| \geq n_k$, divergiert die Folge der Funktionswerte.
Aus diesem Widerspruch folgt, dass f auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkt sein muss. $\square$

Bemerkung: Diese Aussage gilt für offene Intervalle nicht. Beispielsweise ist die Funktion $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert wird auf ihrem Definitionsbereich stetig, aber nicht beschränkt.

Satz 3.9 [Satz vom Maximum (und Minimum)]
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt die Funktion f ihr Supremum und ihr Infimum auf dem Intervall $[a,b]$ an, d.h. es existiert ein $x_{max} \in [a,b]$ so dass

$$f(x_{max}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

und ein x_{min}, so dass

$$f(x_{min}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Beweis des Satzes vom Maximum: Nach dem vorigen Satz ist f von oben beschränkt, es existiert also

$$M := \sup_{x\in[a,b]} f(x) < \infty.$$

Da M die kleinste obere Schranke ist, kann man eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in [a,b]$ finden, für die gilt:

$$M - \frac{1}{n} \leq f(y_n) \leq M,$$

denn sonst gäbe es eine kleinere oberste Schranke. Die Folge $(f(y_n))$ konvergiert also nach dem Sandwich-Kriterium gegen M. Andererseits besitzt die beschränkte Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(y_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{\ell\to\infty} y_{n_\ell} = x_{max} \in [a,b]$. Dann ist aber wegen der Stetigkeit von f

$$f(x_{max}) = f(\lim_{\ell\to\infty} y_{n_\ell}) = \lim_{\ell\to\infty} f(y_{n_\ell}) = M,$$

das Supremum von f wird also im Punkt x_{max} angenommen.
Der Beweis für das Infimum ist völlig analog. □

Dass dies für unstetige Funktionen nicht selbstverständlich ist, zeigt das Beispiel der Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x - [x]$$

wobei wieder $[x]$ die Gauß-Klammer von x darstellt, also die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x. Hier ist das Supremum der Funktion 1, da $f(x) = x$ für alle x mit $0 \leq x < 1$. Dieses Supremum wird aber nicht angenommen, da $f(1) = f(2) = 0$ ist.

Dass die Abgeschlossenheit bzw. Kompaktheit des Intervalls benötigt wird, sieht man an der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit dem offenen Definitionsbereich $D = (1,\infty)$. Das Supremum dieser Funktion auf D ist 1, der Wert 1 wird aber in D nicht angenommen.

Satz 3.10 [Zwischenwertsatz]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf (a, b) jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $f(a) \leq y \leq f(b)$ und suchen ein x_0 mit der Eigenschaft $f(x_0) = y$. Falls $f(a) = y$ oder $f(b) = y$, dann sind wir schon fertig, indem wir $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ wählen, wir nehmen daher an, es sei $f(a) < y < f(b)$.
Betrachte die Menge

$$M := \{x \in [a, b];\ f(x) < y\}.$$

Diese Menge kann nicht leer sein, denn $a \in M$. Da M beschränkt ist, existiert die kleinste obere Schranke $\xi := \sup M$.
Behauptung: $f(\xi) = y$.
Da ξ die kleinste obere Schranke für M ist, gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus M, die gegen x_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f in ξ ist daher

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\leq y} \leq y.$$

Andererseits ist $\xi + \frac{1}{n} \notin M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da ja ξ eine obere Schranke für M ist. Die Folge $z_n = \xi + \frac{1}{n}$ konvergiert gegen ξ und $f(z_n) \geq y$ für alle n. Wiederum wegen der Stetigkeit von f in ξ konvergieren die $f(z_n)$ gegen $f(\xi)$. Es muss also auch $f(\xi) \geq y$ sein.
Insgesamt folgt also $f(\xi) = y$. □

Folgerungen aus dem Zwischenwertsatz

Lemma:
Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt (mindestens) eine reelle Nullstelle.

Beweis: Sei

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_{2n+1} \neq 0$ ein Polynom ungeraden Grades. Da wir durch a_{2n+1} teilen können, ohne die Nullstellen des Polynoms zu ändern, dürfen wir $a_{2n+1} = 1$ annehmen. Setze nun

$$A := |a_{2n}| + |a_{2n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$$

Für $x \neq 0$ kann man

$$p(x) = x^{2n+1}\left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right)$$

schreiben. Wählt man $x_+ = \max(2A, 1)$, dann ist

$$\frac{a_{2n}}{x_+} + \frac{a_{2n-1}}{x_+^2} + \ldots + \frac{a_1}{x_+^{2n}} + \frac{a_0}{x_+^{2n+1}} \leq \frac{a_{2n}}{x_+} + \frac{a_{2n-1}}{x_+} + \ldots + \frac{a_1}{x_+} + \frac{a_0}{x_+} \leq \frac{|a_{2n}|}{x_+} + \frac{|a_{2n-1}|}{x_+} + \ldots + \frac{|a_1|}{x_+} + \frac{|a_0|}{x_+} \leq \frac{1}{2}$$

Damit ist $p(x_+) \geq 2A(1 - \frac{1}{2}) = A$. Auf die gleiche Weise zeigt man, dass $p(x_-) \leq -A$ ist für $x_- = \min(-2A, -1)$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p dann eine Nullstelle zwischen x_- und x_+. □

3.3 Mehr zur Cosinus- und Sinusfunktion

Nachdem bisher die Reihendarstellung, die Additionstheoreme sowie die Stetigkeit das einzige waren, was wir über die trigonometrischen Funktionen wissen, wollen wir nun einige konkretere Eigenschaften herleiten, insbesondere über Nullstellen und Periodizität.
Dazu brauchen wir ein paar einfache Tatsachen, die sich aus der Potenzreihendarstellung und den Additionstheoremen ergeben.

Satz 3.11 *(i) Für $0 \leq x \leq 2$ ist $\sin x > 0$.*

(ii) Die Cosinusfunktion ist monoton fallend im Intervall $[0, 2]$, d.h.

$$0 \leq x < y \leq 2 \;\Rightarrow\; \cos x > \cos y.$$

(iii) Die Cosinusfunktion besitzt genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$.

Beweis:

(i) Sei $0 \leq x \leq 2$. Da die Potenzreihe der Sinusfunktion für diese Werte von x eine alternierende Reihe ist, deren Glieder monoton abnehmen, liegt der Grenzwert $\sin x$ immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe. Insbesondere ist

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > 0$$

solange $x < \sqrt{6}$.

(ii) Sei $0 \leq x < y \leq 2$. Setze

$$a := \frac{x+y}{2} \quad \text{und} \quad b := \frac{y-x}{2}.$$

Dann ist $x = b - a$ und $y = b + a$, also folgt aus den Additionstheoremen für die Cosinusfunktion

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos y &= \cos(b-a) \;-\; \cos(b+a) \\
&= \cos b \cos a + \sin b \sin a \;-\; \cos b \cos a + \sin b \sin a \\
&= 2 \sin a \sin b \\
&= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0
\end{aligned}$$

wegen (i).

(iii) Es ist

$$\begin{aligned}
\cos(2) &< 1 - \tfrac{4}{2} + \tfrac{16}{24} = 1 - 2 + \tfrac{2}{3} = -1 + \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3} &< 0 \\
\cos(0) &= 1 &> 0
\end{aligned}$$

Also existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $(0, 2)$.
Diese Nullstelle ist eindeutig, da die Cosinusfunktion streng monoton fallend ist.

□

Definition: Wir nennen die erste Nullstelle der Cosinusfunktion $\frac{\pi}{2}$.

Bemerkung: Dass die so definierte Zahl π tatsächlich auf die Formeln $2\pi r$ und πr^2 für Umfang und Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r führt, werden wir erst im weiteren Verlauf der Vorlesung sehen.

Satz 3.12 *(i)* $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(ii) Es ist $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ *und* $e^{2\pi i} = 1$.

(iii)

$$\begin{array}{rcrcrcr} \cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) & = & -\sin z & \qquad & \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos z \\ \cos\left(z+\pi\right) & = & -\cos z & & \sin\left(z+\pi\right) & = & -\sin z \\ \cos\left(z+2\pi\right) & = & \cos z & & \sin\left(z+2\pi\right) & = & \sin z \end{array}$$

(iv) $e^{z+2\pi i} = e^z$

Beweis:

(i) Die Additionstheoreme aus Satz 2.28 liefern uns

$$\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin^2\frac{\pi}{2} = 1.$$

Da $\sin x > 0$ für $x \in (0,2)$ ergibt sich daraus das Vorzeichen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

(ii)

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \\ e^{\pi i} &= \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1 \\ e^{2\pi i} &= \left(e^{\pi i}\right)^2 = (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

(iii) siehe Übungsaufgabe

$$\begin{aligned} \cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos z\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin z\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z \\ \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin z\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos z\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos z \\ \cos\left(z+\pi\right) &= \cos z\cos(\pi) - \sin z\sin(\pi) = -\cos z \\ \sin\left(z+\pi\right) &= \sin z\cos(\pi) + \cos z\sin(\pi) = -\sin z \\ \cos\left(z+2\pi\right) &= \cos z\cos(2\pi) - \sin z\sin(2\pi) = \cos z \\ \sin\left(z+2\pi\right) &= \sin z\cos(2\pi) + \cos z\sin(2\pi) = \sin z \end{aligned}$$

(iv) folgt direkt aus Teil (i)

□

3.4 Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Satz 3.13
Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich in der Form $z = \rho e^{i\varphi}$ darstellen mit $\rho = |z|$.

Beweisidee: Wir skizzieren hier nur kurz das Vorgehen, um zu einer gegebenen Zahl $z = x + iy$ das entsprechende ρ und φ zu finden.
Sei zuerst $|z| = 1$ und $x, y \geq 0$. Da $x^2 + y^2 = 1$, muss $0 \leq x \leq 1$ sein, nach dem Zwischenwertsatz existiert also wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ein $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, so dass $\cos\varphi = x$. Dann ist aber $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = y$ und damit $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$.
Für $|z| = 1$ und andere Vorzeichen von x und y muss der Winkel φ jeweils in einem anderen Intervall gesucht werden.
Falls $|z| \neq 1$, betrachtet man $w := \frac{z}{|z|}$. Dann ist $|w| = 1$, wir können also $w = e^{i\varphi}$ schreiben mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$. Setzt man nun $\rho = |z|$, dann erhält man daraus sofort $z = \rho e^{i\varphi}$. □

Bemerkung: Diese Darstellung komplexer Zahlen eignet sich besonders gut für die Multiplikation. Für $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ ist

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

das heißt, die Beträge werden miteinander multipliziert und die Winkel addiert. Auf diese Weise lassen sich auch hohe Potenzen komplexer Zahlen relativ leicht bestimmen, z.B. ist

$$(1+i)^{2007} = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2007} = \left(\sqrt{2}\right)^{2007} e^{2007\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} \cdot 2^{1003} \cdot e^{7\frac{\pi}{4}i}.$$

Das wäre mit dem Binomischen Satz 1.5 wohl nicht so einfach zu berechnen.

Satz 3.14 [Fundamentalsatz der Algebra]
Jedes Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grad n besitzt genau n komplexe Nullstellen, wenn man mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit zählt.

Diesen Satz werden wir voraussichtlich im kommenden Semester beweisen.

Satz 3.15 [Komplexe Einheitswurzeln]
Die Gleichung $z^n = 1$ besitzt n verschiedene komplexe Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ mit

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Diese Zahlen heißen n-te Einheitswurzeln.

Zum Beweis überprüft man, dass $z_k^n - 1 = e^{2k\pi i} - 1 = 0$. Da ein Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen besitzt, hat man somit alle Lösungen gefunden.

3.5 Umkehrfunktionen streng monotoner Funktionen

Satz 3.16 [Satz von der Umkehrfunktion]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig und ebenfalls streng monoton wachsend.
Analog ist die Umkehrfunktion einer stetigen, streng monoton fallenden Funktion ebenfalls stetig und streng monoton fallend.

Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem Zwischenwertsatz und findet sich in den meisten Lehrbüchern zur Analysis. Wir beschäftigen uns lieber mit den Konsequenzen dieses Satzes. Als erstes wenden wir ihn auf die Funktion $f : [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$ an. Diese ist als Polynom stetig und offenbar auch streng monoton. Nach dem Satz von der Umkehrfunktion gilt also:

Lemma:
Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.

Genauso zeigt man auch die Stetigkeit der Funktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ als Umkehrfunktion der Funktion $f : [0, \infty)$ mit $f(x) = x^n$.

3.6 Der natürliche Logarithmus

In den Übungen wurde gezeigt, dass die Exponentialfunktion auf der reellen Geraden eine streng monoton wachsende Funktion ist.
Damit ist die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ automatisch injektiv, denn $x \neq y$ bedeutet, dass entweder $x < y$ und damit auch $e^x < e^y$ oder $x > y$ und damit $e^x > e^y$.

Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist auch surjektiv. Um dies zu zeigen, benötigt man wieder den Zwischenwertsatz. Sei also ein $y > 0$ gegeben. Wir suchen $x \in \mathbb{R}$ so dass $\exp(x) = y$.

- 1. Fall: $y = 1 \Rightarrow x = 0$
- 2. Fall: $y > 1$

$$\begin{aligned} \exp(0) &= 1 \\ \exp(y) &= 1 + y + \frac{y^2}{2!} + ... > y \end{aligned}$$

  Es gilt also $\exp(0) < y < \exp(y)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann $x \in [0, y]$ mit $\exp(x) = y$.
- 3. Fall: $0 < y < 1$ Dann ist aber $\frac{1}{y} > 1$ und es gibt ein $z \in \mathbb{R}$ mit $\exp(z) = \frac{1}{y}$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} = y$.

Den **(natürlichen) Logarithmus** definieren wir als Umkehrfunktion der monotonen Exponentialfunktion.

$$\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$\log(y) = x \Leftrightarrow y = e^x \qquad y = e^{\log y} \qquad x = \log e^x.$$

Satz 3.17 [Eigenschaften der Logarithmusfunktion]

i) $0 < x < y \Rightarrow \log x < \log y$

ii) $\log$ *ist stetig*

iii) *Die Logarithmusfunktion genügt der Funktionalgleichung* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

iv) *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1.$$

Beweis:

i) Für $0 < x < y$ ist

$$\begin{aligned} x = e^{\log x} &< y = e^{\log y} \\ \Rightarrow \log x &< \log y \end{aligned}$$

ii) Sei $a < b$ und $[a, b]$ kompakt. Dann ist die Einschränkung

$$\exp|_{[a,b]} : [a, b] \to [e^a, e^b]$$

wegen der Monotonie der Exponentialfunktion bijektiv und stetig.

$$\Rightarrow \log = \exp^{-1}[e^a, e^b] \to \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \log|_{[e^a, e^b]}$ ist stetig für alle $a < b$
Für ein beliebiges $y > 0$ wähle $a < b$, so dass $e^a < y < e^b$
$\Rightarrow$ log ist stetig an der Stelle y. Da dieses Argument für jedes $y \in (0, \infty)$ gilt, ist die Logarithmusfunktion dort überall stetig.

iii) $\log(xy)$

$$\begin{aligned} e^{\log(xy)} &= xy = e^{\log x} e^{\log y} = e^{\log x + \log y} \\ \Rightarrow \log(xy) &= \log x + \log y \end{aligned}$$

iv) Betrachte eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x_n \to 0$.
Setze $y_n := \log(1 + x_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} y_n = \log 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{e^{y_n} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{e^{y_n} - 1}{y_n}\right)} \to 1$$

□

Genauso wie wir für die Exponentialfunktion e^z komplexe Exponenten zulassen konnten, können wir auch allgemeine Potenzfunktionen verallgemeinern.

Definition:
Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die allgemeine **Potenzfunktion** durch

$$a^z := e^{z \log a}.$$

Satz 3.18 [Eigenschaften der Potenzfunktion] *Es gilt:*

(i) $a^0 = 1,\ a^1 = a$

(ii) $a^{z+w} = a^z a^w$

(iii) $(a^z)^w = a^{zw}$ *für alle* $z \in \mathbb{R}$ *und* $w \in \mathbb{C}$

(iv) $(ab)^z = a^z\, b^z$

(v) $|a^z| = a^{\mathrm{Re} z}$

Beweis:

(i) und (ii) folgen direkt aus der Definition

(iii) $\log a^z = z \log a$

$$\Rightarrow (a^z)^w = e^{w \log a^z} = e^{(wz) \log a} = a^{wz}$$

(iv) $(ab)^z$

$$(ab)^z = e^{z \log(ab)} = e^{z \log a + z \log b} = e^{z \log a} e^{z \log b} = a^z b^z.$$

(v) $|a^z|$

$$|a^z|^2 = \overline{a^z} \cdot a^z = a^{\overline{z}} \cdot a^z \overset{\text{ii)}}{=} a^{\overline{z}+z} = a^{2\mathrm{Re} z} = (a^{\mathrm{Re} z})^2$$

□

Bemerkung: $n^s = e^{s \log n}$ ist damit wohldefiniert für jedes $s \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s \in \mathbb{C}$$

konvergiert absolut für $\mathrm{Re}\, s > 1$. Die so definierte *Riemannsche Zeta-Funktion* ist Gegenstand der wohl bekanntesten, unbewiesenen mathematischen Vermutung: Seit über 150 Jahren versucht man zu beweisen, dass alle komplexen Nullstellen der Zetafunktion auf der Geraden $\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}$ liegen.

3.7 Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Die bisher behandelten trigonometrischen Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ und $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ sind periodisch (siehe Übungsaufgabe) und daher zunächst nicht umkehrbar. Wenn man sie jedoch auf ein geeignetes kleines Intervall einschränkt, kann man doch eine Umkehrfunktion definieren. Man benutzt dazu jeweils das maximale Intervall, das den Punkt $x = 0$ enthält, und auf dem die Funktion noch streng monoton ist. Die Cosinusfunktion ist streng monoton auf $[0, \pi]$, die Umkehrfunktion nennen wir **Arcuscosinus**. Die Sinusfunktion ist streng monoton auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, die Umkehrfunktion nennen wir **Arcussinus**. Dann gilt

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0,\pi], \qquad \arccos(\cos x) = x \\ \arccos : [-1,1] &\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \qquad \arcsin(\sin x) = x \end{aligned}$$

Die **Tangensfunktion** ist definiert als

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

für alle $x \in \mathbb{C}$, für die $\cos x \neq 0$.
Wir betrachten die Tangensfunktion auf dem reellen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Behauptung: Die Tangensfunktion tan ist streng monoton wachsend auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, das heißt für $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$ ist $\tan x < \tan y$. Für $x \geq 0$ folgt dies aus den Ungleichungen

$$\cos x > \cos y \qquad \sin x < \sin y$$

denn dann ist

$$\frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y}$$

für $x \leq 0$ benutzt man die Symmetrie $\tan(-x) = -\tan x$, die aus den entsprechenden Relationen $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ folgt. Da $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, strebt $\tan x$ für $x \to \frac{\pi}{2}$ gegen $+\infty$ und entsprechend für $x \to -\frac{\pi}{2}$ gegen $-\infty$
Nach dem Zwischenwertsatz ist $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ daher surjektiv und wegen der strengen Monotonie insgesamt also bijektiv.

Definiere den **Arcustangens** als Umkehrfunktion der Tangensfunktion

$$\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

3.8 Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Um die Eigenschaften von Funktionen zu beschreiben, ist es nützlich, den Begriff des Grenzwerts zu erweitern und sogenannte **uneigentliche Grenzwerte** einzuführen, bei denen $f(x_n)$ betrachtet wird für Folgen mit $x_n \to \infty$.

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann heißt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

uneigentlicher Grenzwert von f bei $+\infty$, falls es für jede Zahl $\varepsilon > 0$ ein $x_0 = x_0(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$$

Alternativ konvergiert für jede Folge (x_n) mit $x_n \to +\infty$ für $n \to \infty$ die Folge $(f(x_n))$ gegen a. Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen bei $-\infty$ sind analog definiert.

Die Rechenregeln für Grenzwerte übertragen sich auch auf diesen Fall, d.h. falls beispielsweise $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$ beide existieren, dann ist auch $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = a+b$ und $\lim_{x\to\infty}(f \cdot g)(x) = ab$.

Beispiele:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

   denn: Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, so dass $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Jede Folge (x_n), die uneigentlich gegen ∞ konvergiert liegt aber ab einem Index N_0 jenseits von N, daher ist dann $0 < x_n < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Satz 3.19
Die Logarithmusfunktion strebt langsamer gegen $+\infty$ als jede Wurzelfunktion, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

Beweis:

$$\frac{e^y}{y^n} \xrightarrow{y\to\infty} \infty \quad \Rightarrow \frac{y^n}{e^y} = \frac{(\log x)^n}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \frac{\log x}{\sqrt[n]{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

□

Falls für $x \to +\infty$ auch $f(x) \to +\infty$ schreiben wir für den uneigentlichen Grenzwert wieder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

obwohl es sich streng genommen nicht um einen „Limes“ handelt.

4 Differenzierbarkeit

4.1 Differenzierbare Funktionen

Definition: Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in (a,b)$. Dann heißt die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ **differenzierbar im Punkt** x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Wir nennen diesen Grenzwert $f'(x_0)$ die **Ableitung** von f an der Stelle x_0.
Die Funktion f heißt **differenzierbar auf** (a,b), falls sie in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist.

Die Ableitung hat eine einfache geometrische Interpretation: Für kleines, aber endliches h gibt der **Differenzenquotient** $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ die Steigung der Sehne durch zwei Punkte auf dem Graphen von f an. Für $h \to 0$ geht die Sekante in die Tangente an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über. Die Ableitung im Punkt x_0 entspricht also gerade der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

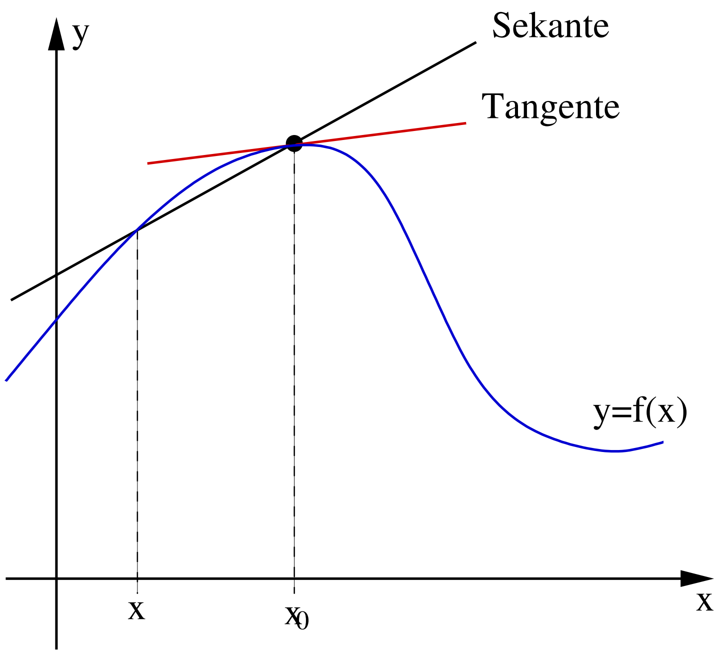


Abbildung 4.1: Zur Definition der Ableitung

Anders ausgedrückt liefert eine Gerade mit Steigung $f'(x_0)$ durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ die

bestmögliche *lineare Approximation* an die Funktion f in der Nähe des Punktes x_0.
Andere Schreibweisen für die Ableitung sind $\frac{d}{dx}f(x_0)$ oder $\dot{f}(x)$.

Beispiele:

1. Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^n$ ist differenzierbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, denn mit Hilfe des Binomischen Satzes 1.5 erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(nx_0^{n-1}+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h+\ldots\binom{n}{n}h^{n-1}\right) = nx_0^{n-1}.\end{aligned}$$

2. Die Betragsfunktion $b(x)=|x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0=0$, denn

$$\frac{|h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}+1 & \text{für } h>0\\ -1 & \text{für } h<0\end{cases}$$

Der Grenzwert für $h\to 0$ existiert daher nicht.

3. Die Exponentialfunktion ist differenzierbar in $x_0=0$, denn in den Übungen hatten wir schon den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-e^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

berechnet. In einem beliebigen $x_0\in\mathbb{R}$ ist die Ableitung dann

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}e^{x_0}\frac{e^h-1}{h}=e^{x_0}.$$

Eine alternative Charakterisierung der Differenzierbarkeit erhält man mit Hilfe der in der Physik häufig verwendeten Landauschen Ordnungssymbole.
Eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ist differenzierbar im Punkt $x_0\in(a,b)$, wenn es eine Zahl $\alpha\in\mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\alpha h+o(h).$$

Es ist dann $f'(x_0)=\alpha$. Das Landausche Symbol $o(h)$ („klein-O von h") bedeutet dabei, dass der Rest $r(h):=f(x_0+h)-f(x_0)-\alpha h$ selbst dann noch gegen 0 konvergiert, wenn man ihn durch h dividiert. Der Rest $r(h)$ konvergiert für $h\to 0$ also „schneller" gegen 0 als h.

Satz 4.1 [Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit]
Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0\in(a,b)$. Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis: Aus der Darstellung

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\alpha h+o(h).$$

folgt, dass $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$. Also ist f stetig in x_0. □

4.2 Differenzierbarkeitsregeln

Satz 4.2
Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbare Funktionen. Dann sind auch $f+g$ und $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 und es ist

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \qquad \textbf{\textit{(Produktregel)}} \end{aligned}$$

Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch f/g in x_0 differenzierbar und es gilt die ***Quotientenregel***

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis: Berechne einfach

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &\to f'(x_0) \ + \ g'(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} &= f(x_0+h)\,\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,g(x_0) \\ &\to f(x_0)g'(x_0) \ + \ f'(x_0)g(x_0) \end{aligned}$$

Zum Beweis der Quotientenregel sei $g(x_0) \neq 0$.
Da g stetig ist an der Stelle x_0 existiert ein $\delta > 0$ so dass $g(x) \neq 0$ für allle x mit $|x - x_0| < \delta$.
Daher ist f/g zumindest auf dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ definiert. Für $|h| < \delta$ ist dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\, \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\, \frac{g(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)}\, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

□

Satz 4.3 [Kettenregel]
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$ und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0) \in J$. Dann ist auch $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es ist

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis:
Man könnte zunächst versuchen, den Differenzenquotienten wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &\to g'(f(x_0)) \quad f'(x_0)\end{aligned}$$

Das ist aber leider nicht ganz sauber, denn es könnte $f(x_0+h)-f(x_0)=0$ sein. Dann wäre die Umformung gar nicht erlaubt.
Um die Idee zu retten, behilft man sich mit einem Kniff und definiert die Funktion $\tilde{g}$ durch

$$\tilde{g}(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{für } y\neq f(x_0)\\[2ex] g'(f(x_0)) & \text{für } y=f(x_0)\end{cases}$$

Da g im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar ist, ist die Funktion $\tilde{g}$ stetig und es gilt für alle y (auch für $y=f(x_0)$)

$$\tilde{g}(y)\,(y-f(x_0))=g(y)-g(f(x_0)).$$

Speziell für $y=f(x_0+h)$ lautet dieser Ausdruck dann

$$\tilde{g}(f(x_0+h))\,(f(x_0+h)-f(x_0))=g(f(x_0+h))-g(f(x_0)).$$

Nach Division durch h ergibt sich dann

$$\tilde{g}(f(x_0+h))\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}.$$

Für $h\to 0$ konvergieren alle drei Terme und wir erhalten

$$\tilde{g}(f(x_0))f'(x_0)=(g\circ f)'(x_0).$$

Da $\tilde{g}(f(x_0))=g'(f(x_0))$ folgt daraus dann die Behauptung. □

Beispiel: Die in der statistischen Physik bei der Maxwell-Boltzmann-Verteilung auftretende Funktion $f(x)=x^2e^{-x^2}$ lässt sich unter Anwendung der Produkt- und der Kettenregel differenzieren. Dazu schreiben wir $k(x)=e^{-x^2}$ als Verkettung $k=h\circ g$ mit $h(x)=e^x$ und $g(x)=-x^2$. Diese hat daher die Ableitung $k'(x)=-2xe^{-x^2}$. Insgesamt ergibt sich als Ableitung dann mit Hilfe der Produktregel $f'(x)=2x(1-x^2)e^{-x^2}$.

4.3 Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen

Satz 4.4
Sei $f:[a,b]\to[c,d]$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g=f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ die zugehörige Umkehrfunktion. Falls $f'(x_0)\neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0:=f(x_0)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(y_0)=g'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Bemerkung: Differenziert man beide Seiten der Gleichung $g(f(x)) = x$ mit Hilfe der Kettenregel erhält man $g'(f(x_0))f'(x_0) = 1$ und damit $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. So kann man oft die Ableitung der Umkehrfunktion bestimmen. Ein Beweis des Satzes ist dies allerdings noch nicht, denn wir haben hier schon vorausgesetzt, dass die Umkehrfunktion differenzierbar ist.

Beweis: Im vorigen Kapitel bzw. im Tutorium hatten wir gesehen, dass die Umkehrfunktion g an der Stelle y_0 zumindest stetig ist. Nun wollen wir zeigen, dass g sogar differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ ist, falls $f'(x_0) \neq 0$.
Wir bilden dazu den Differenzenquotienten

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

für $y \neq y_0 = f(x_0)$. Wir können diesen Ausdruck auch schreiben als

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wegen der Stetigkeit von f bedeutet $y \to y_0$, dass auch $x \to x_0$ konvergiert. Also ist

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

die gesuchte Ableitung von g in y_0. □

Beispiel: Wir betrachten die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Diese ist als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$ invertierbar mit der Logarithmusfunktion $g(y) = \log y$ als Ableitung. Die Ableitung der Logarithmusfunktion ist also

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f(g(y))} = \frac{1}{y}.$$

oder kurz $\frac{d}{dy} \log y = (\log)'(y) = \frac{1}{y}$.

Als Konsequenz zeigen wir noch

Satz 4.5
Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Beweis:
Die Ableitung der Logarithmusfunktion $\log x$ in $x_0 = 1$ ist 1. Nach der Definition der Ableitung bedeutet dies

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = 1$$

Insbesondere ergibt sich dieser Grenzwert, wenn wir h speziell die Folge $\frac{x}{1}, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \ldots$ durchlaufen lassen, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x} = 1.$$

Nach Multiplikation mit x ergibt sich daraus

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$$

Man erhält die Behauptung, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung die Exponentialfunktion anwendet. Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt für die linke Seite der Gleichung

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

□

Drei weitere Beispiele zur Differentiation.

Beispiele:

1. Potenzfunktionen $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) := x^a := e^{a\log x}$, $a \in \mathbb{R}$ lassen sich mit Hilfe der Kettenregel differenzieren, denn es ist $f := g \circ h \circ k$, wobei

   $$k(x) := \log x \qquad h(y) := ay \quad \text{und} \quad g(z) := e^z.$$

   Daher ist

   $$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h\circ k(x))h'(k(x))k'(x) = g(h\circ k(x))\frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} \\ \Rightarrow f'(x) &= ax^{a-1} \end{aligned}$$

2. Ableitung von Sinus und Cosinus
   Man kann die Definition der Differenzierbarkeit auch ausweiten auf komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen x. Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ ist dann (reell) differenzierbar im Punkt x_0, falls der Grenzwert

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

   existiert. Alle Rechenregeln für Ableitungen gelten auch in diesem Fall. Dann ist

   $$(\sin x)' = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)' = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

   und

   $$(\cos x)' = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)' = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin x.$$

3. Die Ableitung der Tangens- und Arcustangensfunktion
   - $\tan'(x)$ erhält man aus der Quotientenregel

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

   - Durch Differenzieren der Gleichung $\tan(\arctan y) = y$ mit der Kettenregel bestimmt man die Ableitung der Arcustangensfunktion:

$$\begin{aligned} \tan'(\arctan y) \arctan'(y) &= 1 \\ \big(1 + \tan^2(\arctan y)\big) \arctan' y &= 1 \\ (1 + y^2) \arctan' y &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$$

4.4 Extrema und Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Definition:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**) von f, wenn es eine Konstante $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x \in I \\ f(x) \le f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \ge f(x_0)) \end{cases}$$

Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt **lokales Extremum** von f, wenn x_0 entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.

Beispiel: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 - x^2$ ist $x_0 = 0$ ein lokales Maximum.

Satz 4.6
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ ein lokales Extremum. Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage für den Fall, dass x_0 ein lokales Minimum ist. Der Beweis für ein lokales Maximum ergibt sich dann aus der Tatsache, dass ein lokales Maximum von f ein lokales Minimum der Funktion $-f$ ist.
Es sei $\delta > 0$ so klein, dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle x im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Wenn wir n groß genug wählen, dann liegt $x_0 - \frac{1}{n}$ und $x_0 + \frac{1}{n}$ in diesem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nun berechnen wir die Ableitung der Funktion f in x_0 auf zwei Arten. Einerseits ist

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \geq 0,$$

da sowohl Zähler als auch Nenner nicht-negativ sind. Andererseits ist

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \leq 0,$$

da hier der Zähler nicht-negativ, der Nenner aber immer negativ ist. Beide Ungleichungen zusammen können nur erfüllt sein, wenn $f'(x_0) = 0$ ist. □

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
$x_0 \in I$ heißt **kritischer Punkt** von f, wenn $f'(x_0) = 0$.

Beispiele:

1. $f(x) = x^4 - x^2$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow 2x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. $f(x) = x^3$
   Hier ist $f'(0) = 0$, d.h. $x_0 = 0$ ist ein kritischer Punkt. Dort ist aber kein lokales Extremum, die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist nur *notwendig*, aber nicht *hinreichend*!

Satz 4.7 [Satz von Rolle]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b), stetig auf $[a, b]$ und sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Wir betrachten drei mögliche Fälle.

- Fall 1: f ist konstant auf dem Intervall $[a, b]$

$$\Rightarrow f'(\xi) = 0 \ \forall \xi \in (a, b)$$

- Fall 2: Es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a) = f(b)$ Nach Kapitel 3 nimmt die stetige Funktion f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Maximum an, es existiert also ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)\,\forall x \in [a, b]$. Da $\xi \in (a, b)$ und nicht am Rand des Intervalls $[a, b]$ liegt, ist ξ ein lokales Maximum. Nach Satz 4.6 ist dann $f'(\xi) = 0$.

- Fall 3: Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) < f(a) = f(b)$. Dann argumentiert man ähnlich wie im 2. Fall, denn die stetige Funktion f nimmt auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Minimum an in einem Punkt ξ. Dieser muss im offenen Intervall (a, b) liegen und ist daher ein lokales Minimum. Also ist dort $f'(\xi) = 0$.

$\square$

Daraus folgt direkt einer der wichtigsten Sätze der Analysis.

Satz 4.8 [Mittelwertsatz]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar an der Stelle $x \in (a, b)$.

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

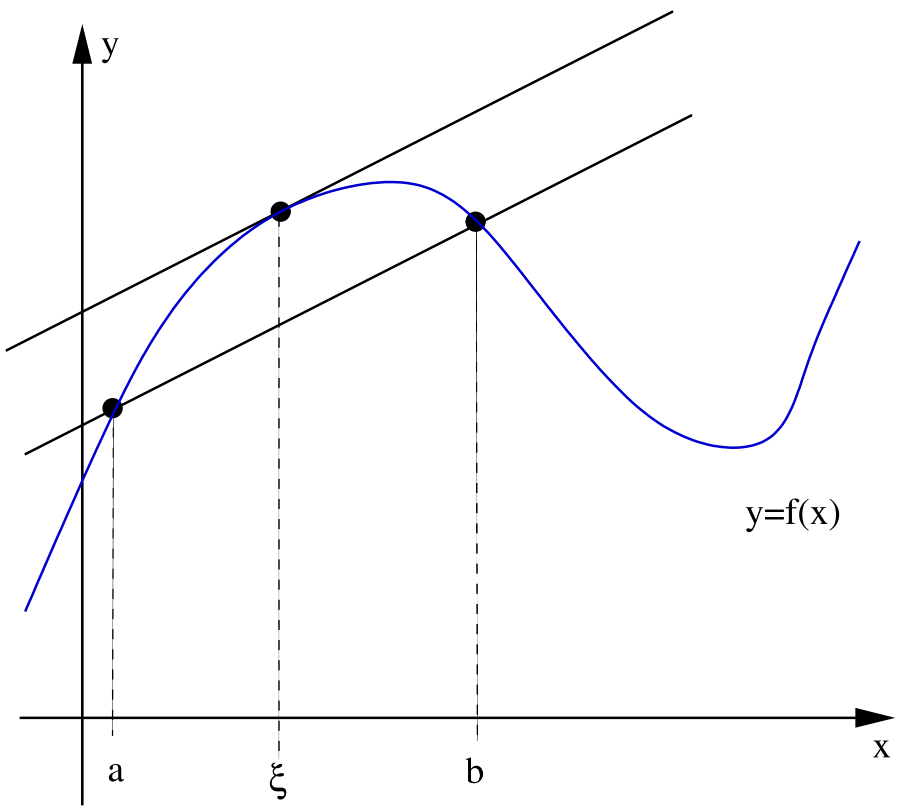


Abbildung 4.2: Zum Mittelwertsatz

Beweis:
Definiere eine Hilfsfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dann ist g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) mit

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a) \end{aligned}$$

Wir können also den Satz von Rolle anwenden. Daher existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. An dieser Stelle ξ ist dann $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

Lemma:

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann ist f konstant auf dem Intervall I.

Beweis: Übungsaufgabe

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' = f, f(0) = 1$. Dann ist $f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
denn: Setze $g(x) := f(x)e^{-x}$. Dann ist $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$. Also muss g konstant sein, d.h. $g(x) \equiv \text{const} = g(0) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt wiederum $f(x)e^{-x} = 1$ für alle x und daher $f(x) = e^x$.

Satz 4.9
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $|f'(x)| \leq L$ ist für eine Konstante $L > 0$ und alle $x \in I$, dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, das heißt für alle $x_0, x_1 \in I$ gilt die Abschätzung

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq L|x_1 - x_0|.$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $x_0 < x_1$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x_0, x_1)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Also ist

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| \leq L$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Konsequenz: Fehlerfortpflanzung
Misst man eine physikalische Größe und rechnet mit dem fehlerbehafteten Messwert x_m statt des exakten Wertes x_e weiter, dann kann der Fehler dabei höchstens um den Faktor L verstärkt werden, wenn die Abschätzung $|f'(x)| \leq L$ für alle x gilt, denn es ist der (absolute) Fehler

$$|f(x_m) - f(x_e)| \leq L \cdot |x_m - x_e|$$

wobei $|x_m - x_e|$ der ursprüngliche absolute Messfehler ist.

Beispiel:
Die Periode eines Fadenpendels der Länge ℓ ist für kleine Auslenkungen in sehr guter Näherung $T(\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Ein Messfehler bei der Fadenlänge wirkt sich wie folgt aus: Wird statt ℓ_{exakt} die Näherung ℓ_{mess} zur Berechnung der Periode verwendet, erhält man dort den Fehler

$$T(\ell_{exakt}) - T(\ell_{mess}) = 2\pi\frac{\sqrt{\ell_{exakt}} - \sqrt{\ell_{mess}}}{\sqrt{g}}.$$

Nach dem Mittelwertsatz ist dann

$$\frac{T(\ell_{exakt}) - T(\ell_{mess})}{\ell_{exakt} - \ell_{exakt}} = T'(\xi)$$

mit ξ zwischen ℓ_{exakt} und ℓ_{mess}. Damit ist

$$|T(\ell_{exakt}) - T(\ell_{mess})| = \pi\frac{1}{\sqrt{g\xi}} \cdot |\ell_{exakt} - \ell_{mess}|.$$

Der relative Messfehler

$$\frac{|\ell_{exakt} - \ell_{mess}|}{\ell_{exakt}}$$

führt auf einen relativen Fehler

$$\frac{|T(\ell_{exakt}) - T(\ell_{mess})|}{T(\ell_{exakt})} = \frac{\pi\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{g\ell_{exakt}\xi}} \cdot |\ell_{exakt} - \ell_{mess}| \approx \frac{|\ell_{exakt} - \ell_{mess}|}{2\ell_{exakt}}$$

bei der Periode, der nur noch halb so groß ist.

Satz 4.10
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt:

(i) $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in I \Leftrightarrow f$ *ist monoton wachsend, d.h.* $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

(ii) $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in I \Rightarrow f$ *ist streng monoton wachsend, d.h.* $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

(i) $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in I \Leftrightarrow f$ *ist monoton fallend, d.h.* $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

(ii) $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in I \Rightarrow f$ *ist streng monoton fallend, d.h.* $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Beweis:

(i) „⇒“: Seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz für ein $\xi \in (x, y)$

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Da $f'(\xi) \geq 0$ und $y - x > 0$, muss $f(y) - f(x) \geq 0$ sein.
„⇐“: Sei $x_0 \in I$ beliebig. Wähle eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Dann ist $f(x_0 + h_n) - f(x_0) \geq 0$. Da f in x_0 differenzierbar ist, existiert der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h}}_{\geq 0} \geq 0$$

falls x_0 nicht der rechte Randpunkt ist.

(ii), (iii) und (iv) zeigt man genauso.

□

Beispiele:

1. Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat die Ableitung $f'(x) = e^x > 0$ und ist daher streng monoton wachsend.

2. Die Logarithmusfunktion $\ell(x) = \log x$ hat auf $(0, \infty)$ die Ableitung $\ell'(x) = \frac{1}{x} > 0$ und ist dort streng monoton wachsend.

3. Die Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ hat die Ableitung $f'(x) = \cos x$, die auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ positiv ist und ist daher auf diesem Intervall streng monoton wachsend.

Definition: Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt **zweimal differenzierbar**, wenn f differenzierbar ist und die die Ableitung f' ebenfalls eine differenzierbare Funktion ist. Wir schreiben dann f'' für $(f')'$.

Satz 4.11 [Lokale Extrema]
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f'' eine stetige Funktion. Falls

$$f'(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x_0) < 0$$

für ein $x_0 \in (a, b)$, dann hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Analog hat f ein striktes lokales Minimum in x_0, falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall eines Maximums. Da $f''(x_0) < 0$ gibt es eine Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ in der f'' negativ ist (siehe Übungsaufgabe S33). Also ist f' in dieser Umgebung streng monoton fallend. Da $f'(x_0) = 0$ ist also $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Also ist f links von x_0 streng monoton wachsend und rechts von x_0 streng monoton fallend. $\square$

4.5 Die Regel von L'Hospital

Mit Hilfe der Differenzierbarkeit und des Mittelwertsatzes lassen sich auch Grenzwerte berechnen, die sonst schwierig oder gar nicht zugänglich sind. Dazu gehören insbesondere Grenzwerte der Typen „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“, „$0 \cdot \infty$“ und „1^0“. Sie lassen sich mit Hilfe der Regel von L'Hospital auf andere Grenzwerte zurückführen, die in vielen Fällen leichter zu berechnen sind (wenn man sich geschickt anstellt...). Die Regel von L'Hospital stammen interessanterweise nicht von jenem Marquis de L'Hospital (1661-1704), nach dem sie benannt sind, sondern von Johann Bernoulli. L'Hospital kaufte sie von Bernoulli und veröffentlichte sie dann unter seinem Namen.

Definition:
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall definiert. Dann existiert für f der **linksseitige Grenzwert** $c := \lim\limits_{x \to b-} f(x)$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \leq b$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Andere Schreibweisen für linksseitige Grenzwerte sind $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.
Analog existiert der rechtsseitige Grenzwert $\tilde{c} := \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \geq a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \tilde{c}$. Andere Schreibweisen für rechtsseitige Grenzwerte sind $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Satz 4.12 [Regel von l'Hospital]
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und

$$\lim_{x\to b} f(x) = 0 = \lim_{x\to b} g(x).$$

Falls $g'(x) \neq 0 \,\forall x \in (a, b)$ und der linksseitige Limes von $\frac{f'}{g'}$ für $x \to b$ existiert, dann konvergiert auch $\frac{f}{g}$ für $x \to b$ und es ist

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis:
Die Tatsache, dass $c := \lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$b - \delta < x < b \;\Rightarrow\; \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - c\right| < \varepsilon$$

Wir wollen zeigen, dass für dasselbe δ gilt:

$$b-\delta<x<b \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\varepsilon.$$

Wähle dazu $x\in\mathbb{R}$, so dass $b-\delta<x<b$.
Definiere eine Funktion $h:(x,b)\to\mathbb{R}$ durch

$$h(y):=f(x)g(y)-f(y)g(x)$$

Diese Funktion kann man stetig fortsetzen, indem man $h(b):=0$ setzt, da ja $\lim\limits_{y\to b-} f(y)=\lim\limits_{y\to b-} g(y)=0$. Also ist $h(x)=0=h(b)$. Da h auf dem Intervall (x,b) bezüglich y(!) differenzierbar ist, kann man den Satz von Rolle anwenden. Es existiert also ein $\xi\in(x,b)$ mit $h'(\xi)=0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad f(x)g'(\xi)=f'(\xi)g(x)\\ &\Rightarrow\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-c\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

da $|\xi-b|<\delta$. Da dieses Argument für beliebige $x\in(b-\delta,b)$ gilt, ist demnach

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\varepsilon$$

für alle $x\in(b-\delta,b)$. □

Bemerkung:
Es gibt einige weitere Varianten dieses Satzes, die man ganz analog beweisen kann. Er gilt auch für einen rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ oder falls $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=\lim\limits_{x\to b-} g(x)=\infty$ beide uneigentlich gegen $+\infty$ konvergieren.

Beispiele:

1. Verhalten der Sinusfunktion nahe 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

2. Gebrochen-rationale Funktionen

$$\lim_{x\to 1+}\frac{4x^2+5x-9}{3x^3-7x+4}=\lim_{x\to 1+}\frac{8x+5}{9x^2-7}=\frac{13}{2}$$

3. Die im Tutorium eingeführten Hyperbelfunktionen sind definiert als

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \text{und}\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Ma rechnet leicht nach, dass $(\sinh x)'=\cosh$ und $(\cosh x)'=\sinh x$. Daher ist

$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= \frac{(\sinh x)'\cosh x-\sinh x\,(\cosh x)'}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x\\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\cosh(\alpha x)}{\log\cosh(\beta x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\alpha\tanh(\alpha x)}{\beta\tanh(\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^2(1-\tanh^2(\alpha x))}{\beta^2(1-\tanh^2(\beta x))}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}\end{aligned}$$

4. Auch für Grenzwerte des Typs „$0 \cdot \infty$“ kann man die L'Hospitalsche Regel anwenden:

$$\lim_{x\to 0}(x \cdot \log x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

5. Für Grenzwerte des Typs 1^∞ kann es hilfreich sein, den Logarithmus des betrachteten Ausdrucks zu bilden. Um $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ zu berechnen, betrachtet man zunächst

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \log\left((\cos x)^{1/x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log(\cos x) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt daraus

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4.6 Höhere Ableitungen und Taylor-Polynome

Höhere Ableitungen lassen sich am einfachsten rekursiv definieren.

Definition:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.
$f : I \to \mathbb{R}$ heißt n-mal **differenzierbar**, wenn f $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist.
Eine Funktion f heißt **stetig differenzierbar** auf $[a, b]$, falls f' stetig auf $[a, b]$ ist und n-mal stetig differenzierbar, falls $f^{(n)}$ stetig auf $[a, b]$ ist.

Notation: $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ ist die n-te Ableitung von f. Manchmal schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.
Die Ableitungen f', f'', ..., $f^{(n-1)}$ einer n-mal differenzierbaren Funktion sind alle stetig, sonst könnte f gar nicht n-mal differenzierbar sein.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) f ist differenzierbar in $x = 0$ mit $f'(0) = 0$ denn

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \left|h \sin\frac{1}{h}\right| \leq |h| \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

b) Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$
$\Rightarrow f'$ ist unstetig an der Stelle $x_0 = 0$
$\Rightarrow f$ ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

Mit Hilfe der Ableitungen sind auch einige wichtige **Funktionenräume** definiert, die uns im Lauf der Vorlesung noch häufig begegnen werden. Sie enthalten jeweils Funktionen mit einer bestimmten „Glattheit".

$$\begin{aligned}
C^0([a,b]) &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ ist stetig}\} \\
C^n([a,b]) &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar}\} \\
C^\infty([a,b]) &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ ist beliebig oft stetig differenzierbar}\}
\end{aligned}$$

Zum Beispiel gehören alle Polynome, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen zu $C^\infty(\mathbb{R})$.
Die Frage, ob eine Funktion f in einem Punkt x_0 differenzierbar ist, hing damit zusammen, ob sie sich in einer Umgebung von x_0 gut durch eine lineare Funktion (nämlich durch $f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$) approximieren lässt. Genauso kann man sich fragen, wie man eine Funktion f in der Nähe eines Punktes durch eine quadratische oder kubische Funktion oder allgemein durch ein Polynom n-ten Grades möglichst gut approximiert. Wir beginnen zum Warmwerden mit Funktionen f, die bereits ein Polynom sind.

Satz 4.13
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom n-ten Grades und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Beweis: Wir können ein Polynom n-ten Grades immer in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

schreiben. Wertet man diese Funktion bei x_0 aus, erhält man $a_0 = f(x_0)$. Differenziert man die Gleichung ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k (x - x_0)^{k-1},$$

also $f'(x_0) = a_1$. Genauso erhält man für die m-te Ableitung die Darstellung

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k k(k-1)\dots(k-m+1)(x - x_0)^{k-m},$$

und wenn man $x = x_0$ einsetzt daraus

$$f^{(m)}(x_0) = a_m m!.$$

□

Satz 4.14 [Taylor-Formel]
Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei im Innern des Intervalls $[a,b]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und die ersten n Ableitungen seien stetig auf $[a,b]$. Dann gibt es eine Funktion $\xi \in (a,b))$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Definition:
Das Polynom

$$T_n(x; f, a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nennt man das n-te **Taylor-Polynom** von f zum Entwicklungspunkt a.
Den Term

$$R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\xi - a)^{n+1},$$

der den Unterschied zwischen $f(x)$ und $T_n(x; f, a)$ misst, also den Fehler der Approximation von f durch T_n, nennt man **Lagrange-Restglied**. Da ξ zwischen a und x liegt, gilt für das Restglied die Abschätzung

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \sup_{a<\xi<x} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \cdot |x-a|^{n+1}.$$

Wenn man die $(n+1)$-te Ableitung auf dem Intervall $[a, x]$ abschätzen kann, hat man also einen Anhaltspunkt dafür, wie genau f durch das n-te Taylor-Polynom approximiert wird.
Beweis des Satzes: Wir halten x fest und betrachten die Funktion

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{1}{2!}f''(t)(x-t)^2 - \ldots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n - \alpha\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

wobei α so gewählt ist, dass $g(a) = 0$ ist. Außerdem ist $g(x) = 0$, wie man schnell nachprüft. Die Funktion g ist differenzierbar im Intervall (a, x), da f als $(n+1)$-mal differenzierbar vorausgesetzt wurde und der letzte Term als Polynom beliebig oft differenzierbar ist.
Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + \frac{1}{2!}f''(t)(2(x-t)) - \frac{1}{2!}f'''(t)(x-t)^2 - \ldots \\ &\quad - \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(n(x-t)^{n-1}) - \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + \alpha\frac{(x-t)^n}{n!} \\ &= -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + \alpha\frac{(x-t)^n}{n!} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle existiert ein ξ zwischen a und x mit der Eigenschaft $g'(\xi) = 0$, also

$$\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^n = \alpha\frac{(x-c)^n}{n!}.$$

Löst man diese Gleichung nach α auf, erhält man $\alpha = f^{(n+1)}(c)$. Setzt man dies wiederum in die Definition von g ein und wertet g an der Stelle $t = a$ aus, ergibt sich die Gleichung

$$0 = g(a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 - \ldots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n - f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dies ist genau die gewünschte Darstellung. □

Beispiele:

1. Die Taylor-Polynome der Funktion $f(x) = e^x$ zum Entwicklungspunkt $a = 0$ erhält man, indem man die Ableitung der Exponentialfunktion in $a = 0$ berechnet. Da $(e^x)' = e^x$ sind auch alle höheren Ableitungen identisch und es ist $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^x(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Taylor-Polynom n-ter Ordnung ist also

   $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

   und stimmt mit den ersten $n + 1$ Gliedern der Potenzreihe von e^x überein. Um den maximalen Fehler für x aus einem Intervall $[0, M]$ abzuschätzen benutzen wir das Lagrange-Restglied. Es ist demnach

   $$|f(x) - T_n(x)| =\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0\leq c\leq M} e^c x^{n+1}$$

   Für $x \in [0, 1]$ ist der maximale Fehler also

   $$|f(x) - T_n(x)| =\leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

   Man kann die Exponentialfunktion auch um $a = 1$ (oder irgendeine andere Stelle) entwickeln, was dann auf

   $$T_n(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

   führt.

2. Wir wollen die Taylor-Polynome der durch $w(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ gegebenen Funktion $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$ berechnen. Dazu benötigen wir die Ableitungen von w. Zunächst ist

   $$w'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad w''(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}, \quad w'''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}.$$

   Es ist nun nicht mehr schwierig, zu erraten, wie es weitergeht:

   $$w^{(k+1)}(x) = \left(-\frac{2k-1}{2}\right)\frac{w^{(k)}(x)}{1+x}$$

   Damit erhält man als Taylor-Polynome zur Funktion w im Entwicklungspunkt $a = 0$:

   $$T_n(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}x^n$$

Man kann dies auch etwas kürzer darstellen, wenn man **verallgemeinerte Binomialkoeffizienten** benutzt, die durch

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

definiert sind. In diesem Fall ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k.$$

In der speziellen Relativitätstheorie tritt häufig der Term $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ auf. Das Taylor-Polynom der Funktion $W : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ mit $W(x) = \sqrt{1-x}$ lautet

$$T_n(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \ldots - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}x^n$$

Für $v \ll c$, d.h. $\frac{v}{c} \ll 1$ (nichtrelativistische Geschwindigkeiten) benutzt man als Näherung für $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ daher oft das erste Taylor-Polynom $T_1 = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$.
Für die Masse m eines bewegten Teilchens gilt nach der Speziellen Relativitätstheorie die Gleichung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

wobei m_0 die Ruhmasse des Teilchens ist. Für die Energie $e = mc^2$ erhält man dann über das Taylor-Polynom 2. Ordnung in x

$$E \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}.$$

Die ersten beiden Terme beschreiben dabei die Ruhenergie und die (klassische) kinetische Energie des Teilchens.

Bemerkung: Falls eine Funktion f beliebig oft differenzierbar ist, kann man statt der Taylor-Polynome die unendliche **Taylor-Reihe**

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

betrachten. Leider stellt diese Potenzreihe nicht immer die Funktion f dar. Einerseits kann der Konvergenzbereich der Reihe kleiner als der Definitionsbereich der Funktion f sein. Es kann aber auch vorkommen, dass die Reihe für manche (oder alle) x konvergiert, jedoch nicht gegen $f(x)$. Mit solchen Funktionenreihen befassen wir uns im nächsten Kapitel. Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind und sich durch ihre Taylor-Reihe darstellen lassen, nennt man **(reell) analytisch**.

4.7 Das Newton-Verfahren

Viele Gleichungen lassen sich nicht exakt lösen und man ist für praktische Zwecke darauf angewiesen, die Lösungen näherungsweise so genau und effektiv wie möglich zu bestimmen.
Wir werden im Verlauf der Vorlesung gelegentlich über solche Verfahren sprechen, zum Beispiel zur Lösung von Differentialgleichungen oder zur näherungsweisen Berechung von Integralen.
Das erste Näherungsverfahren, mit dem wir uns beschäftigen wollen, geht auf Isaac Newton zurück und dient der Bestimmung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion. In vielen Varianten spielt dieses Verfahren auch heute noch eine extrem wichtige Rolle in der Numerik.
Für reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich das Verfahren geometrisch sehr einleuchtend motivieren. Ausgehend von einem Startwert x_0 wird eine Folge von Näherungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ rekursiv konstruiert. Dabei erhält man x_{n+1} aus x_n, indem man die Funktion f durch ihre Tangente im Punkt $(x_n, f(x_n))$ ersetzt und die Nullstelle der Funktion

$$\tilde{f}(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n)$$

berechnet. Diese liefert dann den nächsten Näherungswert x_{n+1}. Es ist daher

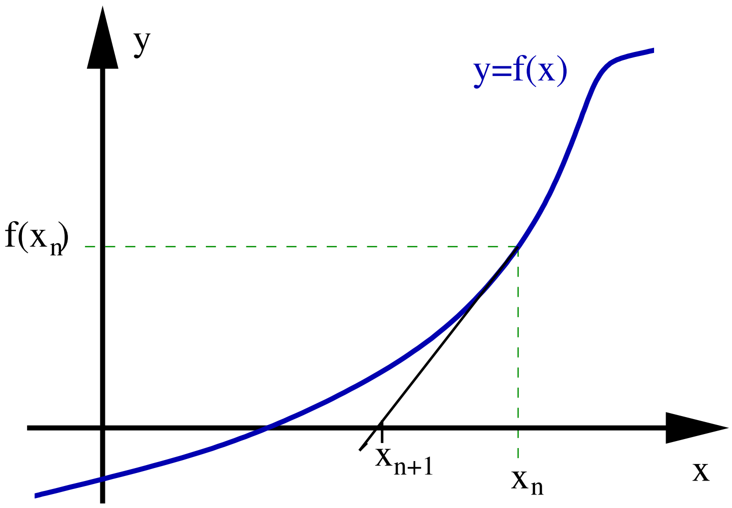


Abbildung 4.3: Die Geometrie des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Beispiel: Die Gleichung $\sin x = x - 1$ besitzt nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Lösung im Intervall $[0, \pi]$, denn betrachtet man die Funktion $f(x) := \sin x - x + 1$, so ist $f(0) = 1 > 0$ und $f(\pi) = 0 - \pi + 1 < 0$. Die Funktion f besitzt also eine Nullstelle zwischen 0 und π. Um diese näherungsweise zu berechnen kann man das Newton-Verfahren verwenden, beispielsweise mit Startwert $x_0 = 2$.
Die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n + 1}{\cos x_n - 1}$$

führt auf

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{\sin(1)}{\cos(1)-1} \approx 2,8304877 \\ x_2 &\approx 2,04955524 \\ x_3 &\approx 1,93865612 \\ x_4 &\approx 1,9345689621 \\ x_5 &\approx 1,934563210763 \end{aligned}$$

Die Folge scheint also zu konvergieren. Außerdem scheint der Grenzwert tatsächlich eine Nullstelle zu sein, denn

$$\sin(1,934563210763) - 1,934563210763 + 1 = -1,545 \cdot 10^{-11}.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Verfahren immer so gut funktioniert. Leider gibt es dazu eine positive und eine negative Antwort. Zunächst die negative: Man kann sich anhand der geometrischen Konstruktion Funktionen f und Startwerte x_0 überlegen, bei denen die Folge der Newton-Iterierten keinesfalls konvergiert.
Die gute Nachricht: Wenn man den Startwert bereits „gut genug“ gewählt hat, das heißt „nahe genug“ an der richtigen Lösung, dann kann dies nicht passieren. Mit Hilfe der Taylor-Polynome können wir diese Aussage präzise machen.

Satz 4.15 *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Sei weiter $f(a) \cdot f(b) < 0$, so dass f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle x_* im Intervall (a,b) besitzt.*
Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$ gegen x_* konvergiert.
Die Konvergenz ist quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für den (absoluten) Fehler die Ungleichung

$$|x_{n+1} - x_*| \le c|x_n - x_*|^2$$

gilt.

Beweis: Wegen der Stetigkeit von f' und da $f'(x_*) \neq 0$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass für $|x - x_*| < \delta$ gilt: $|f'(x)| > \varepsilon$. Unter Anwendung des Mittelwertsatzes ist

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_*| &= \left| x_n - x_* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \\ &= \left| x_n - x_* - \frac{f(x_n) - f(x_*)}{f'(x_n)} \right| \\ &= \left| x_n - x_* - (x_n - x_*)\frac{f'(\eta)}{f'(x_n)} \right| \\ &= |x_n - x_*| \cdot \left| 1 - \frac{f'(\eta)}{f'(x_n)} \right| \end{aligned}$$

für eine Zwischenstelle η zwischen x_n und x_*. Ebenfalls mit dem Mittelwertsatz erhält man die Gleichung

$$1 - \frac{f'(\eta)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n) - f'(\eta)}{f'(x_n)} = (x_n - \eta)\frac{f''(\tau)}{f'(x_n)}$$

mit einer weiteren Zwischenstelle τ zwischen η und x_*.
Insgesamt gilt also

$$|x_{n+1} - x_*| = |x_n - x_*| \cdot \left|1 - \frac{f'(\eta)}{f'(x_n)}\right| = |x_n - x_*| \cdot |x_n - \eta| \cdot \frac{|f''(\tau)|}{|f'(x_n)|} \leq |x_n - x_*|^2 \cdot \frac{|f''(\tau)|}{|f'(x_n)|}$$

Nach dem Satz vom Maximum nimmt die stetige Funktion $|f''|$ ihr Maximum auf dem Intervall $[a,b]$ an, es gibt also eine Zahl $M > 0$, so dass $|f''(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$.
Dann gilt also

$$|x_{n+1} - x_*| \leq |x_n - x_*|^2 \frac{M}{\varepsilon}.$$

Wir verkleinern (falls nötig) δ noch etwas, so dass $\delta\frac{M}{\varepsilon} < \frac{1}{2}$ ist. Dann ist

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \delta\frac{M}{\varepsilon}|x_n - x_*| < \frac{1}{2}|x_n - x_*|$$

und der Abstand der Iterierten zum Fixpunkt wird immer kleiner. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass das Newton-Verfahren auf jeden Fall gegen x_* konvergiert. □

5 Funktionenfolgen und -reihen

5.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Nach den Grenzwerten von Zahlenfolgen betrachten wir nun Folgen von Funktionen. Zuerst wird es natürlich wieder um Konvergenz gehen, d.h. ob eine “Grenzfunktion” existiert. Danach werden wir uns auch die Frage stellen, welche Eigenschaften einer Folge von Funktionen (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie,...) auf diese Grenzfunktion “vererbt” werden.

Beispiel: Wir betrachten das “Standardbeispiel”, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die definiert sind durch $f_n(x) = x^n$.
Für jedes feste $x \in [0,1]$ ist die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ einfach eine Folge reeller Zahlen, nämlich

$$x, x^2, x^3, x^4, \dots$$

die gegen einen Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert ist 0 für $0 \leq x < 1$ und 1 für $x = 1$.

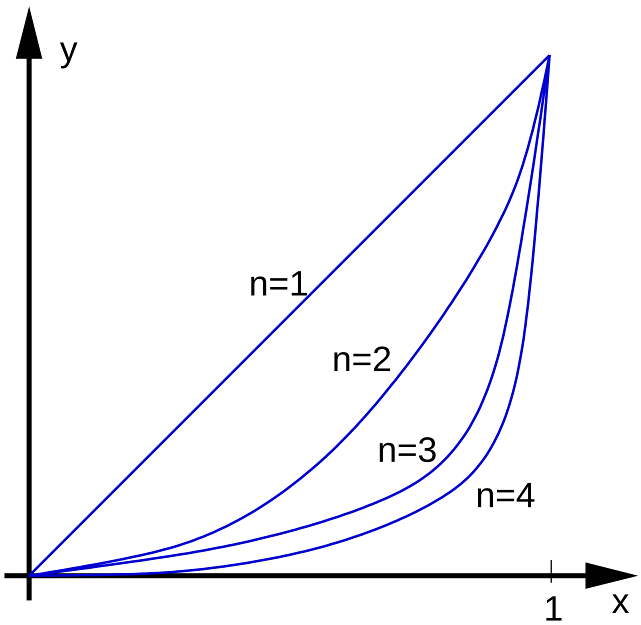


Abbildung 5.1: Die Funktionenfolge f_n

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Man sagt, die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise** gegen f, falls für jedes $x \in D$ gilt: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir nennen die Funktion f die **Grenzfunktion** der Funktionenfolge.

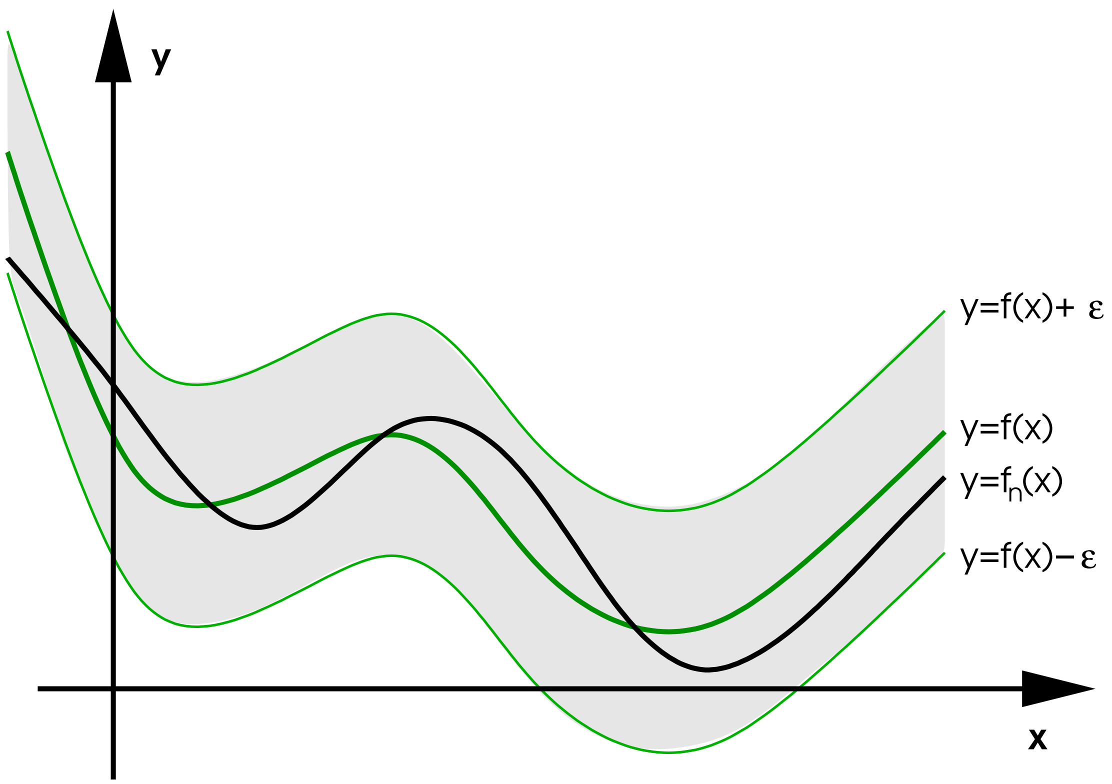
Leider ist das Konzept der punktweisen Konvergenz zu schwach, um Eigenschaften wie die Stetigkeit von den f_n auf die Grenzfunktion f zu übertragen. Wesentlich besser dafür geeignet ist folgende Art der Konvergenz.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Man sagt, die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen f, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textbf{für alle} \;\; x \in D.$$

Falls n also groß genug gewählt wird, ist also der Abstand von f_n zu f für alle x klein. In einem gewissen Sinne konvergiert $f_n(x)$ überall gleich schnell gegen $f(x)$.

Anschaulich bedeutet gleichmäßige Konvergenz: Für ein gewähltes $\varepsilon > 0$ liegen die Graphen der Funktionen f_n ab dem Index N in dem "Schlauch" zwischen $f(x) - \varepsilon$ und $f(x) + \varepsilon$.



Beispiel: Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2nx, & \text{für } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Dann konvergiert (f_n) punktweise gegen 0. Das ergibt sich für jedes (feste) $x_0 > 0$ daraus, dass $f_n(x_0) = 0$ ist, sobald $n > 1/x_0$ ist. Für $x_0 = 0$ ist aber ohnehin $f_n(0) = 0$ für alle n.
Die Konvergenz kann aber nicht gleichmäßig sein, denn für jedes n gibt es immer ein x_0, nämlich $x_0 = \frac{1}{2n}$ mit $|f_n(x_0) - f(x_0)| = 1$. Versucht man also, die Definition der gleichmäßigen Konvergenz beispielsweise mit $\varepsilon = 1/2$ (oder mit jedem anderen ε, das kleiner als 1 ist) nachzuprüfen, so wird man damit nicht erfolgreich sein.
Eine Funktionenfolge, die hingegen gleichmäßig konvergiert ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ \frac{2}{n} - 2x, & \text{für } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Dasselbe Argument wie oben zeigt, dass die Grenzfunktion $g(x) = 0$ sein muss. Im Unterschied zur Folge (f_n) ist aber hier $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n}$ für alle $x \in [0,1]$. Für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ kann man also $n > 1/\varepsilon$ so groß wählen, dass $|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ wird gleichzeitig für alle $x \in [0,1]$.

Bemerkung: Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion f, dann konvergiert sie auch punktweise gegen f.

Satz 5.1 [Rechenregeln für gleichmäßige Konvergenz]
Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und seien (f_n) und (g_n) auf D definierte Funktionenfolgen, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ bzw. $g : D \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann gilt:

(i) Die Funktionenfolge $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f + g$.

(ii) Falls f und g beschränkte Funktionen sind, dann konvergiert $f_n \cdot g_n$ gleichmäßig gegen $f \cdot g$.

(iii) Falls es eine Zahl $\alpha > 0$ gibt, so dass $|f_n(x)| \geq \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$, dann konvergiert $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

Beweis:

(i) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann finden wir ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \; n \geq N_1$$

und ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq N_2.$$

Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ ist also

$$\begin{aligned} |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| &= |f_n(x) - f(x) \ + \ g_n(x) - g(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. die Funktionenfolge $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f + g$.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und N_1, N_2 wie eben. Da die Funktionen f und g beschränkt sind, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass $|f(x)| \leq M - \varepsilon$ und $|g(x)| \leq M - \varepsilon$. Dann ist für $n \geq N_1$ auch

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon \leq M - \varepsilon + \varepsilon = M$$

und für $n \geq N_2$ entsprechend

$$|g_n(x)| \leq |g(x)| + \varepsilon \leq M - \varepsilon + \varepsilon = M.$$

Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ ist also

$$\begin{aligned} |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| &= |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x) + f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \\ &\leq |(f_n(x) - f(x)) \cdot g_n(x)| + |f(x) \cdot (g_n(x) - g(x))| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2} = M\varepsilon \end{aligned}$$

also konvergiert $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \cdot g$.

(iii) geht ähnlich wie (ii)...

□

Bemerkung:
Aussage (ii) wird im allgemeinen falsch, wenn f oder g unbeschränkt sind.
Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \\ g_n(x) &= x + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Man kann natürlich auch Reihen von Funktionen betrachten und ihre Konvergenz untersuchen.

Definition:
Die **Funktionenreihe** $\sum f_k(x)$ mit $f_k : D \to \mathbb{R}$ heißt punktweise konvergent gegen $F(x)$, wenn die Folge ihrer Partialsummen punktweise konvergiert, wenn also

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

für jedes $x \in D$.
Sie heißt gleichmäßig konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ gleichmäßig konvergiert, falls es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|S_n(x) - F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in D.$$

Wie schon bei Zahlenfolgen und -reihen gibt es auch hier ein Cauchy-Kriterium, mit dem man entscheiden kann, ob eine Funktionenfolge (bzw. -reihe) konvergiert, ohne dass man die Grenzfunktion kennen muss.

Satz 5.2 [Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz]

Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ bzw. $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für beliebige $m, n \geq N$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \textit{für alle} \;\; x \in D.$$

Analog konvergiert eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ von Funktionen $g_k : D \to \mathbb{R}$ genau dann gleichmäßig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für beliebige $N \leq m < n$ gilt:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)\right| \leq \varepsilon \quad \textit{für alle} \;\; x \in D.$$

Beweis:
Wir zeigen nur die Aussage über Funktionenfolgen, die Aussage über Funktionenreihen folgt daraus direkt, indem man die Folge der Partialsummen betrachtet.
„$\Rightarrow$“: Wenn die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, dann gibt es zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ immer ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \;\; x \in D.$$

Dann ist aber wegen der Dreiecksungleichung für beliebige $m, n \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und das Cauchy-Kriterium ist erfüllt.
„$\Leftarrow$“: Da für jedes *feste* $x_0 \in D$ das Cauchy-Kriterium für (reelle oder komplexe) Zahlenfolgen erfüllt ist, konvergiert die Folge $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ für festes x_0. Wir erhalten auf diese Weise die Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

zu zeigen ist noch, dass die Konvergenz gegen f tatsächlich gleichmäßig ist. Dazu geben wir ein $\varepsilon > 0$ vor und wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$m, n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \; x \in D.$$

Nun lassen wir $n \geq N$ fest und betrachten die Differenz $|f_n(x) - f(x)|$. Dann ist

$$|f - n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |f_m(x) - f(x)|$$

für jedes $m \geq N$. Wenn wir m groß genug wählen, wird auch $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ sein und wir erhalten die gewünschte Abschätzung

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f - n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \; x \in D.$$

□

Das vermutlich wichtigste Beispiel für Funktionenreihen sind Potenzreihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, die man als Grenzwert endlicher Summen $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ auffassen möchte.
Aus Kapitel 2, Satz 2.24 wissen wir bereits, dass eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises punktweise gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Außerhalb des Konvergenzkreises konvergiert sie nicht einmal punktweise, den Rand des Konvergenzkreises muss man getrennt untersuchen. Es gilt sogar:

Satz 5.3
Eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge ihres Konvergenzkreises.*

Beweis: Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe. Wir wählen $r < \rho$ und wollen zeigen, dass die Potenzreihe auf dem abgeschlossenen Kreis $\{z \in \mathbb{C};\; |z| \leq r\}$ gleichmäßig konvergiert. Dass sie überhaupt konvergiert wissen wir schon aus Satz 2.24, wo wir die punktweise Konvergenz untersucht haben. Die Grenzfunktion nennen wir $f(x)$. Ebenfalls aus Satz 2.24 wissen wir, dass

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}.$$

Für ein beliebig gewähltes $r_0 \in (r, \rho)$ ist $\frac{1}{r_0} > \frac{1}{\rho}$. Insbesondere kann man also ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r_0} \quad \text{für alle } \; n \geq N.$$

Für beliebige z mit $|z| \leq r$ und $n \geq N$ ist dann

$$|a_n z^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}|z|\right)^n \leq \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

Setzt man nun $q := \frac{r}{r_0} < 1$, so kann man für $n \geq N$ den Reihenrest wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k z^k| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} q^k = q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q} \end{aligned}$$

unabhängig von x. Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ kann man nun n so groß wählen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite kleiner als ε wird. Damit ist gezeigt, dass die Potenzreihe für $|z| \leq r$ gleichmäßig konvergiert. □

Bemerkung: Aus Satz 5.3 folgt nicht, dass die Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert. Man muss also wirklich einen kleinen Abstand zum Rand des Konvergenzkreises einhalten.

Satz 5.4 *Konvergiert eine Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen f und sind die $f_n : D \to \mathbb{R}$ alle stetig, dann ist auch f stetig.*

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Punkt $a \in D$ und zeigen, dass die Grenzfunktion f dort stetig ist. Wir benutzen dazu die ε-δ-Definition. Sei also ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es zu diesem ε ein N, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$. Da insbesondere die Funktion f_N stetig ist, gibt es zu ε ein $\delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung ergibt sich aus den beiden Ungleichungen nun für $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Eine direkte Konsequenz ist der folgende

Satz 5.5 *Potenzreihen sind auf jeder kompakten Teilmenge ihres Konvergenzkreises stetig.*

Bemerkung: Die Stetigkeit gilt auch noch bis zum Rand des Konvergenzbereichs, falls

- die Potenzreihe dort konvergiert und
- die Funktion, die durch die Potenzreihe dargestellt wird, stetig bis zum Rand fortgesetzt werden kann.

Dies ist die Aussage des *Abelschen Grenzwertsatzes*. Insbesondere rechtfertigt man so beispielsweise die Formel

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Bemerkung: Man kann die Aussage von Satz 5.4 auch wieder als eine Vertauschung von Grenzwerten auffassen: Für stetige Funktionen $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$ ist $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Da f ebenfalls stetig ist gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

5.2 Differentiation von Funktionenfolgen und Potenzreihen

Als Nächstes geht es um die Differenzierbarkeit von Funktionenfolgen. Auch hier stellt sich heraus, dass gleichmäßige Konvergenz dafür sorgt, dass sich die Differentiation gut mit dem Grenzübergang innerhalb der Funktionenfolge verträgt.

Satz 5.6 [Differentiation von Funktionenfolgen]
Seien $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen f_n' gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergieren. Falls die Folge $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ für einen einzigen Punkt $x_0 \in (a,b)$ konvergent ist, dann konvergiert f_n sogar gleichmäßig auf (a,b) gegen eine Funktion f und es ist $f' = g$.

Beweis: Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir benutzen das Cauchy-Kriterium sowohl für die Zahlenfolge $(f_n(x_0))$ als auch für die gleichmäßig konvergente Funktionenfolge (f_n'). Demnach gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$m, n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$m, n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } \ x \in (a,b).$$

Wir setzen $N := \max(N_1, N_2)$. Dann ist für $m, n \geq N$ und $x \in (a, b)$ beliebig

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_m(x_0) + f_m(x_0)| \\
&\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\overset{MWS}{=} \left|(f_n - f_m)'(\xi) \cdot (x - x_0)\right| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Die Folge (f_n) erfüllt also das Cauchy-Kriterium aus Satz 5.2 und ist daher gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion f.
Es bleibt zu zeigen, dass $f' = g$ ist. Sei dazu $x \in (a, b)$ ein beliebiger Punkt. Wir definieren eine neue Funktionenfolge auf $(a, b) \setminus \{x\}$ durch

$$\varphi_n(y) := \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}$$

Da die f_n differenzierbar vorausgesetzt sind, gilt $\lim\limits_{y \to x} \varphi_n(y) = f_n'(x)$.
Außerdem konvergiert (φ_n) punktweise, denn es ist

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Die Funktionenfolge (φ_n) konvergiert auf $(a, b) \setminus \{x\}$ sogar gleichmäßig nach dem Cauchy-Kriterium aus Satz 5.2, denn für ein $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(y) - \varphi_m(y)| &= \left|\frac{f_n(y) - f_n(x) - (f_m(y) - f_m(x))}{y - x}\right| \\
&= \left|\frac{(f_n - f_m)(y) - ((f_n - f_m)(x))}{y - x}\right| \\
&= \left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}
\end{aligned}$$

Nach der Bemerkung über die Vertauschbarkeit von Grenzwerten ist also

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{y \to x} \varphi_n(y)}_{= f_n'(x)} = \lim_{y \to x} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \varphi_n(y)}_{= \frac{f(y) - f(x)}{y - x}} = f'(x).$$

□

Satz 5.7 [Differenzierbarkeit von Potenzreihen]
Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < \rho \leq \infty$. Dann ist f stetig differenzierbar für $|x| < \rho$ und die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe, also

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Beweis: Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho$ punktweise. Dort stellt sie eine Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

dar. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

konvergiert gleichmäßig auf $[-r, r]$ für jedes $r < \rho$.
In Übungsaufgabe S46 wird gezeigt, dass die durch gliedweise Differentiation erzeugte Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

ebenfalls den Konvergenzradius ϱ besitzt. Also konvergiert die Folge (f'_n) mit

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

auf $[-r, r]$ gleichmäßig gegen eine Funktion g. Nach dem vorigen Satz 5.6 ist f dann auf $(-r, r)$ differenzierbar mit $f' = g$. □

Bemerkung: Auch hier handelt es sich wieder um eine Vertauschung von Grenzwerten: Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt nämlich

$$\lim_{n\to\infty} (f_n)' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'$$

5.3 Der Funktionenraum $B(D)$

An dieser Stelle soll noch eine andere Sichtweise auf die gleichmäßige Konvergenz vorgestellt werden, die uns später noch öfter begegnen wird und an die man sich frühzeitig gewöhnen sollte. Wir bezeichnen mit $B(D)$ den Raum aller beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$. Für zwei beschränkte Funktionen $f, g \in B(D)$ können wir einen Abstand $\|f - g\|$ definieren durch

$$\|f - g\| := \sup_{x\in D} |f(x) - g(x)|.$$

Es handelt sich hier tatsächlich um so etwas wie einen "Abstand", denn

- $\|f - g\|$ ist nie negativ, und wenn $\|f - g\| = 0$ ist, dann stimmen f und g überein
- $\|f - g\| = \|g - f\|$, d.h. der "Abstand" von f zu g ist gleich dem Abstand von g zu f und

- es gilt die Dreiecksungleichung $\|f-g\| \leq \|f-h\|+\|h-g\|$ für beliebige $f, g, h \in C^0([a,b])$.

Um die Dreiecksungleichung einzusehen, rechnet man am einfachsten wie folgt nach:

$$\begin{aligned}
\|f-g\| &= \sup_{x\in D} |f(x)-g(x)| \\
&= \sup_{x\in D} |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \\
&\leq \sup_{x\in D} (|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|) \\
&\leq \sup_{x\in D} |f(x)-h(x)| + \sup_{x\in D} |h(x)-g(x)| = \|f-h\|+\|h-g\|
\end{aligned}$$

Falls $D=[a,b]$ ein kompaktes Intervall ist, dann sind alle stetigen Funktionen auf D automatisch beschränkt nach Satz 3.8, es ist also

$$C^0([a,b]) \subset B([a,b]).$$

Falls $f, g \in C^0([a,b])$ stetig sind, dann ist auch $|f-g|$ eine stetige Funktion. Wegen des Satzes vom Maximum nimmt die Funktion $|f-g|$ ihr Maximum sogar an und das Supremum ist in diesem Fall ein Maximum.
Den Zusammenhang zwischen dem oben definierten Abstand zweier Funktionen und der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen stellt der folgende Satz her.

Satz 5.8
Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Beweis:
"$\Rightarrow$": Wir nehmen an, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung

$$\|f_n - f\| < \varepsilon$$

gilt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge gibt es zu dem gewählten ε ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ und alle $x \in [a,b]$ die Ungleichung $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ gilt. Für das Supremum von $|f_n - f|$ gilt daher auf jeden Fall $\sup_{a\leq x\leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ und damit $\|f_n - f\| < \varepsilon$. "$\Leftarrow$": Gelte nun umgekehrt $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Dann gibt es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ die Ungleichung $\|f_n - f\| < \varepsilon$ erfüllt ist. Da auf der linken Seite ein Supremum steht, ist also für jedes $x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Das ist aber gerade die Definition gleichmäßiger Konvergenz. $\square$

6 Integration

Die Integralrechnung ist historisch aus dem Bedürfnis heraus entstanden, den Flächeninhalt und das Volumen von krummlinig begrenzten Gebieten zu berechnen. Später kamen dann viele weitere Fragestellungen dazu, die sich mit ihrer Hilfe lösen lassen, aus der Physik beispielsweise die längs eines Weges verrichtete Arbeit, die Durchflussmenge einer Flüssigkeit durch einen Rohrquerschnitt,...
Schon in der Antike wurde der Flächeninhalt des Kreises durch Approximation mit regulären Vielecken sehr genau bestimmt. Den Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung erkannten allerdings erst Ende des 17. Jahrhundert Leibniz und Newton.
Es gibt einige verschiedene Integralbegriffe, die das Integral einer Funktion durch unterschiedliche Grenzübergänge einführen. Aus der Schule ist Ihnen vermutlich das Riemann-Integral bekannt, aber es gibt daneben beispielsweise noch das Regel- (oder Cauchy-)Integral und das Lebesgue-Integral. Sie unterscheiden sich in vielen Fällen nicht, jedoch ist die Menge der Funktionen, die man „integrieren" kann, je nach Integralbegriff größer oder kleiner. Die Menge der stetigen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall gehört aber in allen Fällen zu den „integrierbaren" Funktionen. Mathematisch hat das Lebesgue-Integral wohl die schönsten Eigenschaften und wird von den „Profis" daher bevorzugt. Da seine Definition etwas umständlich ist, werden wir es erst in Teil 3 der Vorlesung kennenlernen und führen hier zunächst das einfachere Regelintegral ein. Im Gegensatz zum Riemann-Integral, bei dem die zu integrierende Funktion „von oben" und „von unten" durch einfachere Funktionen approximiert wird, genügt hier *eine* Folge von approximierenden Funktionen. Dafür verlangt man, dass diese Folge *gleichmäßig* konvergiert.

6.1 Treppenfunktionen und Regelintegral

Definition: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es Zahlen $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ gibt, so dass φ auf jedem der Intervalle (x_{j-1}, x_j) mit $1 \leq j \leq n$ konstant ist. Die Zerlegung des Intervalls durch die **Stützstellen** x_j nennen wir eine **Zerlegung** des Intervalls.
Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}([a, b])$.

Bemerkung:

1. Wir kümmern uns der Einfachheit halber nicht um die Funktionswerte der Treppenfunktion φ an den Stützstellen. Sie spielen bei der Integration keine Rolle.

2. Zu einer Treppenfunktion φ gibt es viele verschiedene Zerlegungen. Beispielsweise kann man weitere Stützstellen hinzufügen, ohne die Funktion zu ändern.

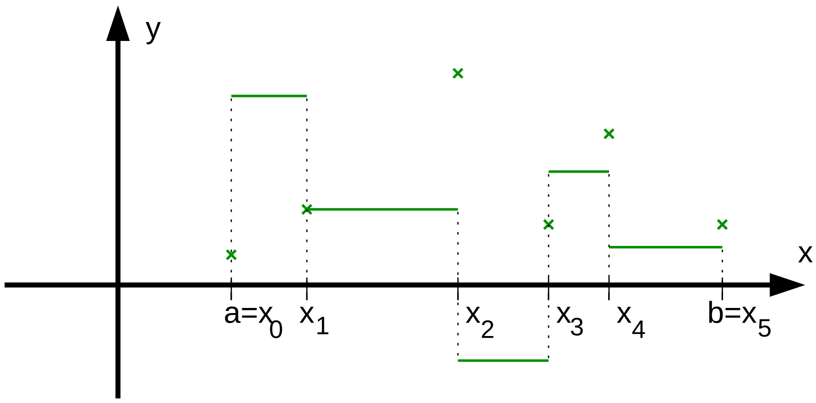


Abbildung 6.1: Eine Treppenfunktion

3. Wenn φ und ψ zwie Treppenfunktionen sind, dann sind auch $\varphi+\psi$ und $\varphi\cdot\psi$ Treppenfunktionen. Das sieht man am einfachsten ein, wenn man die *gemeinsame Verfeinerung* der Zerlegungen zu φ und ψ benutzt, die als Stützstellen sowohl die Stützstellen zur Funktion φ als auch die zur Funktion ψ enthält.

Definition: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$ eine Treppenfunktion mit zugehöriger Zerlegung $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, d.h. es gibt Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$, so dass

$$\varphi(x) = c_j \quad \text{für} \;\; x \in (x_{j-1}, x_j).$$

Dann ist das Integral über φ definiert als

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Diese Definition entspricht in etwa unserer Vorstellung von Flächeninhalt, denn zumindest für nicht-negative Treppenfunktionen φ ist $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ gerade der Flächeninhalt unter dem Graph der Treppenfunktion. Er setzt sich aus Rechtecken der Fläche $c_j \cdot (x_j - x_{j-1})$ zusammen.
Genau genommen muss man noch zeigen, dass das Integral nicht von der Wahl der Zerlegung abhängt. Wenn die Treppenfunktion φ sich also auch durch eine andere Zerlegung $a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m = b$ mit

$$\varphi(x) = d_j \quad \text{für} \;\; x \in (\xi_{j-1}, \xi_j)$$

darstellen lässt, dann ändert sich der Wert des Integrals nicht, wenn man ihn mit Hilfe der neuen Partition berechnet.
Um dies zu beweisen betrachtet man wieder die gemeinsame Verfeinerung der beiden Zerlegungen, die sowohl die x_j als auch die ξ_j als Stützstellen enthält und zeigt, dass das mit der gemeinsamen Verfeinerung berechnete Integral den selben Wert hat wie jedes der beiden anderen Integrale.

Satz 6.1 [Linearität des Integrals]
Seien $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen aus $\mathcal{T}([a,b])$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Dann sind auch $\varphi + \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ und $\lambda \cdot \varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_a^b \lambda\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Beweis: Sei $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ die Zerlegung zur Treppenfunktion φ und $a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m = b$ die Zerlegung zur Treppenfunktion ψ. □

Eine weitere Eigenschaft des Integrals ist die sogenannte *Beschränktheit*. Dazu müssen wir die „Größe" einer Funktion messen. Wir benutzen dazu ähnlich wie bei den reellen und komplexen Zahlen als Maß den Abstand zur Null(-funktion). Den Abstand messen wir genau so wie in Kapitel 5.

Definition:
Sei D eine Menge. Betrachte wieder den Raum $B(D)$ der beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\|f\| := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

die **Supremumsnorm** von f.

Satz 6.2 *Für beliebige $f, g \in B(D)$ gilt:*

(i) $\|f\| \geq 0$ *und* $\|f\| = 0$ *genau dann, wenn* $f(x) = 0$ *für alle* x *ist.*

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *(„Dreiecksungleichung")*

Beweis: Bis auf die Dreiecksgleichung ergibt sich alles direkt aus den Eigenschaften des (reellen) Betrags.
Der Beweis der Dreiecksungleichung wurde am Ende von Kapitel 5 schon gezeigt.

$$\|f + g\| = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x \in D} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

□

Das Integral über eine Treppenfunktion kann man nun mit Hilfe der Supremumsnorm abschätzen.

Satz 6.3 *Sei $\varphi \in T([a,b])$ eine Treppenfunktion. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| \le (b-a) \cdot \|\varphi\|.$$

Beweis: Sei $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ die Zerlegung zu φ und

$$\varphi(x) = c_j \quad \text{für} \;\; x \in (x_{j-1}, x_j).$$

Dann ist $\|\varphi\| \le \max_j |c_j|$. Für das Integral gilt dann

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}) \right| \le \sum_{j=1}^n |c_j| \cdot |x_j - x_{j-1}| \le (b-a) \cdot \max_j |c_j| \le (b-a) \cdot \|\varphi\|.$$

□

Definition:
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls es ein Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.
Die Menge aller Regelfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ bezeichnen wir mit $R([a,b])$.

Für Regelfunktionen lässt sich das Integral mit Hilfe eines Grenzübergangs definieren.

Definition:
Sei $f \in R([a,b])$ eine Regelfunktion und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann setzen wir

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass der Grenzwert auf der rechten Seite wirklich existiert und dass er nicht davon abhängt, mit *welcher* Folge von Treppenfunktionen man f approximiert.
Um zu zeigen, dass der Grenzwert existiert, hilft mal wieder das Cauchy-Kriterium: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge N$ gilt:

$$\|\varphi_n - f\| = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Dann ist für $n, m \geq N$

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \varphi_m(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))\,\mathrm{d}t \\ &\leq (b-a)\cdot\|\varphi_n - \varphi_m\| \\ &\leq (b-a)\cdot(\|\varphi_n - f\| + \|f - \varphi_m\|) < \varepsilon\end{aligned}$$

Die Folge der Integrale $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt daher tatsächlich einen Grenzwert.
Dass dieser Grenzwert nicht von der Folge von Treppenfunktionen abhängt, mit denen man f approximiert hat, kann man ähnlich zeigen.
Auch die Rechenregeln aus Satz 6.1 und Satz 6.3 bleiben erhalten und gelten für Regelfunktionen genauso wie sie für Treppenfunktionen gelten.

Beispiel: Wir wollen die Funktion $f(x) = e^x$ auf dem Intervall $[0, 1]$ „von Hand" integrieren. Dazu wählen wir für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ äquidistante Stützstellen $x_j = \frac{j}{n}$ mit $j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Die zugehörige Treppenfunktion φ_n habe die Werte

$$\varphi_n(x) = e^{x_j} = e^{j/n} \quad \text{für} \;\; x \in [x_{j-1}, x_j).$$

Als Integral ergibt sich dann

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{j/n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{1/n}\right)^j = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{1/n}\right)^n}{1-e^{1/n}} = (1-e)\underbrace{\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{1/n}}}_{\to -1} \to e-1 \;\; \text{für} \quad n \to \infty.$$

Welche Funktionen lassen sich denn nun integrieren ?
Natürlich sind alle Treppenfunktionen auch Regelfunktionen, aber die Menge der Regelfunktionen ist wesentlich größer. Insbesondere enthält sie alle stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Um das zeigen zu können, benötigen wir noch eine Eigenschaft stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen, die in Kapitel 3 nicht erwähnt wurde, da sie erst jetzt von Nutzen ist.

Definition: Sei D eine Menge. Dann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für $x, y \in D$ gilt:

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Bemerkung:

1. Gleichmäßig stetige Funktionen sind immer auch stetig: Um die Stetigkeit in einem Punkt x_0 nachzuprüfen lassen wir einfach $x = x_0$ fest und variieren nur y. Dann ergibt sich sofort

die ε-δ-Definition der Stetigkeit im Punkt x_0.

2. Ist eine Funktion gleichmäßig stetig, dann hängt das δ aus der ε-δ-Definition der Stetigkeit nicht mehr von dem Punkt x_0 ab, in dem wir die Stetigkeit untersuchen. Das ist hier mit dem Begriff „gleichmäßig" gemeint.

3. Für die gleichmäßige Stetigkeit gibt es keine alternative Definition über Folgen, hier muss man wirklich mit ε und δ arbeiten.

Satz 6.4 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis: Wir zeigen diese Aussage indirekt und nehmen daher an, dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, zu dem man *kein* passendes δ finden kann. Insbesondere funktioniert also die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ für *kein* $n \in \mathbb{N}$.
Das heißt aber, dass wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $x_n, y_n \in [a, b]$ finden können mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fassen wir als eine Folge von Zahlen im Intervall $[a, b]$ auf. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat diese Folge eine konvergente Teilfolge, die wir $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen wollen, und die gegen einen Grenzwert $\tilde{x} \in [a, b]$ konvergiert. Da f stetig ist, konvergiert auch die Folge der $(f(\tilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\tilde{x})$. Die Folge der zugehörigen y_n konvergiert ebenfalls gegen $\tilde{x}$, da ja

$$|\tilde{y}_n - \tilde{x}| = |\tilde{y}_n - \tilde{x}_n + \tilde{x}_n - \tilde{x}| \leq |\tilde{y}_n - \tilde{x}_n| + |\tilde{x}_n - \tilde{x}|$$

und beide Terme auf der rechten Seite gegen 0 konvergieren. Andererseits kann die Folge $(f(\tilde{y}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(\tilde{x})$ konvergieren, da ja

$$|f(\tilde{y}_n) - f(\tilde{x})| \geq \underbrace{|f(\tilde{y}_n) - f(\tilde{x}_n)}_{\geq\varepsilon} - \underbrace{f(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x})|}_{\to 0}.$$

Daraus ergibt sich ein Widerspruch zur Stetigkeit von f. Also kann unsere Annahme, dass f nicht gleichmäßig stetig ist, nicht richtig gewesen sein. $\square$

Damit ist es nun nicht mehr schwer, den folgenden Satz zu beweisen

Satz 6.5 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f eine Regelfunktion, d.h. es gibt eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass man zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ konstruieren kann mit der Eigenschaft, dass

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in [a, b] \qquad (*)$$

Dazu nutzen wir die gleichmäßige Stetigkeit von f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ aus und finden zunächst ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Jetzt wählen wir n so groß, dass $\frac{1}{n} < \delta$ wird. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in gleich große Teilintervalle $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ mit $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$ und definieren $\varphi(x) = f(x_{j-1})$ für $x \in [x_{j-1}, x_j)$. Außerdem setzen wir $\varphi(b) = f(b)$.
Behauptung: Diese Funktion φ erfüllt die Bedingung $(*)$.
denn: Betrachte ein beliebiges $x \in [a, b]$. Es gehört zu einem Intervall $[x_{j-1}, x_j)$ und erfüllt damit insbesondere $|x - x_{j-1}| \leq \frac{1}{n} < \delta$. Also ist $|f(x) - f(x_{j-1})| < \varepsilon$ und daher wegen der Definition von φ auch $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ □

Eine präzisere Beschreibung aller Regelfunktionen liefert der folgende Satz, dessen Beweis zwar nicht zu schwer, aber zu lang für diese Vorlesung ist.

Satz 6.6 [ohne Beweis]
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn an jeder Stelle $x \in [a, b]$ die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

existieren. (Am Rand natürlich nur $\lim_{x \to b-} f(x)$ und $\lim_{x \to a+} f(x)$.)

Daraus folgt unter anderem, dass Regelfunktionen höchstens abzählbar viele Sprungstellen besitzen können und dass beispielsweise die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } \ x = 0 \end{cases}$$

keine Regelfunktion ist, obwohl sie nur an einer einzigen Stelle $(x = 0)$ unstetig ist.

6.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jetzt haben wir zwar genau definiert, was wir unter dem Integral einer Funktion verstehen, zur konkreten Berechnung ist die Approximation durch Treppenfunktionen aber nur in Ausnahmefällen geeignet.
Viele Integrale lassen sich viel einfacher mit Hilfe eines Satzes berechnen, der aussagt, dass Differenzieren und Integrieren zwei zueinander inverse Operationen sind.
Ist eine Funktion $f \in R([a, b])$ und ist $c \in (a, b)$, dann können wir f auch über die kleineren Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ integrieren und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

Das ergibt sich direkt aus der Definition des Integrals, denn eine Folge von Treppenfunktionen (φ_n), die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert natürlich auch auf den Teilintervallen gleichmäßig gegen f.

Definiert man noch

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

so ist $(*)$ sogar für beliebige a, b, c gültig, falls alle vorkommenden Integrale existieren.

Satz 6.7 [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung]
Sei $f \in C^0([a, b])$ eine stetige Funktion. Definiere $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Dann ist F differenzierbar und für $c \in (a, b)$ ist $F'(c) = f(c)$.

Beweis: Da f im Punkt c stetig ist, gibt es zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ immer ein $\delta > 0$, so dass $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ ist für $|t - c| < \delta$. Betrachte den Differenzenquotienten und untersuche für kleine h

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{\int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t}{h} - f(c)\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(c)\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \underbrace{|(f(t) - f(c)|}_{<\varepsilon}\,\mathrm{d}t < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

□

Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nennen F eine **Stammfunktion** von f, falls F differenzierbar ist mit $F' = f$.

Bemerkung: Es gibt also auch (unstetige) Funktionen, deren Integral existiert, die aber keine (differenzierbare) Stammfunktion besitzen.

Satz 6.8 *(i) Seien F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $F_1(x) - F_2(x) = C$.*

(ii) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Beweis:

(i) Es ist
$$(F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$$
für alle $x \in [a,b]$. Eine Konsequenz des Mittelwertsatzes ist es, dass $F_1 - F_2$ dann konstant sein muss (siehe Übungsaufgabe S38).

(ii) nach Satz 6.7 ist außer F auch $\tilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f. Nach Teil (i) ist also
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$$
für eine Konstante C. Setzt man $x = a$ ein, ergibt sich
$$F(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + C = C$$
Indem man $x = b$ einsetzt, erhält man daraus dann wie gewünscht
$$F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + F(a).$$

□

Eine andere Schreibweise für die Stammfunktion F ist $\int f$ oder $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ohne Integrationsgrenzen. Man spricht dann auch vom *unbestimmten Integral* von f.

6.3 Integrationsregeln

Anders als bei der Differentiation gibt es kein Rezepte, mit denen man große Klassen von Funktionen einfach integrieren könnte. Stattdessen versucht man die Integration unbekannter Funktionen durch einige Rechenregeln auf die Berechnung schon bekannter Integrale zurückzuführen. Das funktioniert leider nicht immer: Es gibt einige recht „einfache" Funktionen, deren Stammfunktion nicht geschlossen darstellbar sind, die also nicht als Summe, Produkt oder Verkettung von elementaren Funktionen wie Polynomen, Exponetialfunktion oder trigonometrischen Funktionen geschrieben werden können. Dazu zählen $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ oder $h(x) = \frac{\log x}{x}$.

Partielle Integration

Satz 6.9 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F und sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Nach der Produktregel ist

$$(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g'$$

Durch Integration ergibt sich mit Hilfe des Hauptsatzes 6.7 daraus

$$[F(x) \cdot g(x)]_a^b = \int_a^b (F \cdot g)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(F'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

□

Beispiele:

1. Um $\int_a^b xe^x\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, setzen wir $f(x) = e^x$ und $g(x) = x$. Dann ist

   $$\int_a^b xe^x\,\mathrm{d}x = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = [xe^x - x]_a^b.$$

   Eine Stammfunktion zu xe^x ist also $F(x) = xe^x - x$.

   Auf analoge Weise kann man auch Stammfunktionen zu $x^m e^x$, zu $x^m \sin x$ oder $x^m \cos x$ finden.

2. Auch die Stammfunktionen zu $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ kann man mit partieller Integration bestimmen.

   $$\begin{aligned} \int_a^b \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_a^b \cos x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x &= [-\cos x \cdot \sin x]_a^b + \int_a^b \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos x \cdot \sin x]_a^b + \int_a^b 1 - \cos^2 x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Betrachtet man dies als Gleichung für das gesuchte Integral und löst diese Gleichung auf, erhält man

   $$\int_a^b \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,[-\cos x \cdot \sin x + x]_a^b.$$

Insbesondere ist

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[-\cos x \cdot \sin x + x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Satz 6.10 [Substitutionsregel]
Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Nach der Kettenregel ist dann

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi(t).$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes ergibt sich durch Integration dann

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t.$$

□

Beispiele:

1. Integrale der Form
$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, \mathrm{d}x$$
lassen sich durch die Substitution $v = \varphi(x)$ berechnen, denn dann ist (rein formal) $dv = \varphi'(x)dx$, also
$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{v} \, \mathrm{d}v = [\log v]_{v=\varphi(a)}^{\varphi(b)} = [\log \varphi(x)]_{x=a}^{b}$$
Speziell für $\varphi(x) = \cos x$ findet man so beispielsweise
$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\log(\cos x) + C.$$

2. Der Flächeninhalt des Kreises
Für $r > 0$ ist $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$ die Fläche eines Viertelkreises mit Radius r. Substituiert man

$x = r \sin t$ mit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ so erhält man wegen $dx = r \cos t \, dt$

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \, r \cos t \, \mathrm{d}t = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = r^2 \frac{\pi}{4}$$

nach dem Beispiel aus dem vorigen Abschnitt. Für die Fläche des gesamten Kreises erhalten wir also $A = \pi r^2$. Dabei ist π immer noch die Zahl, die wir ganz abstrakt mit Hilfe der ersten Nullstelle der Cosinusfunktion definiert hatten.

6.4 Partialbruchzerlegung

Es soll im folgenden an drei Beispielen gezeigt werden, wie man rationale Funktionen, d.h. Funktionen der Form $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ integriert, wobei P und Q Polynome sind. Das allgemeine Resultat wird dann am Ende ohne Beweis angegeben.

Beispiel 1: $\int \dfrac{x^3 + 2}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x$

Wenn der Grad des Nennerpolynoms kleiner ist als der Grad des Zählerpolynoms, dann kann man das Integral durch „Polynomdivision mit Rest“ zerlegen in ein Polynom und eine rationale Funktion, deren Zähler einen kleineren Grad hat als der Nenner. In unserem Beispiel ist

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + x + 2}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

Da sich der erste Term leicht integrieren lässt, müssen wir uns nur noch um den Bruch kümmern. Dazu macht man den Ansatz

$$\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x + 2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$

mit geeigneten Koeffizienten A und B. Bringt man die Summe auf der rechten Seite wieder auf den Hauptnenner, dann erhält man

$$\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x + 1)}{x^2 - 1} = \frac{(A + B)x - A + B}{x^2 - 1}.$$

Damit diese Identität für alle x richtig ist, müssen die Polynome im Zähler übereinstimmen. Durch Koeffizientenvergleich erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -A + B &= 2 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = -1/2$ und $B = 3/2$. Insgesamt erhalten wir so

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} \, \mathrm{d}x + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(x + 1) + \frac{3}{2} \log(x - 1).$$

Allgemein kann man bei einem Nennerpolynom $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, das vollständig in Linearfaktoren zerfällt, den Ansatz

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots \frac{A_n}{x - x_n}$$

verwenden, der mittels Koeffizientenvergleich auf ein *lineares Gleichungssystem* für die Unbekannten $A_1, A_2, \dots, A_n$ führt. Wie man solche linearen Gleichungssysteme systematisch löst, lernen wir im zweiten Semester.

Beispiel 2: $\int \frac{x+1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$

In diesem Fall hat der Nenner eine doppelte Nullstelle und wir müssen unseren Ansatz ein wenig modifizieren: Wir suchen A und B so, dass

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

für alle x erfüllt ist. Das führt auf das Gleichungssystem $A = 1$ und $-2A + B = 1$, also $B = 3$. Damit ist

$$\int \frac{x+1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

und diese beiden Integrale lassen sich leicht berechnen.

Beispiel 3: $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x$

Man kann hier leicht nachrechnen, dass der Nenner keine reellen Nullstellen besitzt, eine Zerlegung wie in Beispiel 1 also nicht funktioniert. Die komplexen Nullstellen für eine Zerlegung zu benutzen, hilft uns auch nicht weiter, da wir sonst möglicherweise Ausdrücke wie $\log(x+i)$ etc. als Stammfunktionen erhalten.

Wenn hier im Zähler gerade die Ableitung des Nenners stünde, dann könnten wir einfach den Nenner substituieren.

Dies motiviert aber die folgende Zerlegung:

$$\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x$$

Beide Integrale können wir nun durch Substitution lösen:

Mit $u = 4x^2 - 4x + 2$ also $\mathrm{d}u = (8x-4)\mathrm{d}x$ ist

$$\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \log u = \log(4x^2-4x+2).$$

Für das zweite Integral wählt man wegen $4x^2-4x+2 = (2x-1)^2+1$ die Substitution $v = 2x-1$ und erhält dann

$$\int \frac{1}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} = \arctan v = \arctan(2x-1).$$

Im allgemeinen kann man jedes Integral einer rationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung in einfachere Integrale zerlegen, die man dann geschlossen darstellen kann. Die einzige prinzipielle

Schwierigkeit besteht darin, den Nenner in Linearfaktoren und quadratische Terme ohne reelle Nullstellen zu zerlegen.
Zumindest theoretisch gilt jedoch:

Satz 6.11 [ohne Beweis]
Die Integration rationaler Funktionen kann durch Partialbruchzerlegung und geeignete Skalierung auf Integrale der Form

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x &= \log|x-a| \\
\int \frac{1}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-m}\frac{1}{(x-a)^{m-1}} \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \arctan x \\
\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \log(x^2+1) \\
\int \frac{2x}{(1+x^2)^m}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-m}\frac{1}{(x^2+1)^{m-1}} \quad \textit{und} \\
\int \frac{1}{(1+x^2)^m}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{m-1}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

zurückgeführt werden. Das letzte Integral lässt sich durch partielle Integration rekursiv bestimmen.

Bemerkung: Rationale Funktionen von $\sin x$ und $\cos x$ lassen sich mit Hilfe der Substitution $t := \tan(\frac{x}{2})$ auf rationale Funktionen in t zurückführen, denn es ist

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{1}{2}(1+t^2)dx = dt.$$

6.5 Taylorformel mit Restglied in Integralform

In Kapitel 4 hatten wir die Taylorformel zur Approximation einer Funktion f in der Nähe eines Punktes x_0 kennengelernt. Die Abweichung des n-ten Taylor-Polynoms von der Funktion f wurde damals durch das Lagrange-Restglied ausgedrückt, bei dem die $(n+1)$-te Ableitung an einer unbekannten Zwischenstelle ξ eingeht. Eine andere Version, dieses Restglied auszudrücken, kommt ohne diese Zwischenstelle aus:

Satz 6.12
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und seien $x, x_0 \in [a,b]$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x,x_0)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Statt der unbekannten Zwischenstelle ξ dient jetzt ein Integral dazu, den „Fehler“ anzugeben, den man macht, wenn man f durch sein Taylor-Polynom ersetzt.
Beweis des Satzes: mittels Induktion nach n.
Induktionsanfang ($n = 0$):

$$f(x) = f(x_0) + R_1 = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)\,\mathrm{d}s$$

Diese Gleichung ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung richtig.
Induktionsschritt ($n-1 \rightsquigarrow n$):
Durch partielle Integration des Restglieds R_n erhält man

$$\begin{aligned}
R_n(x,x_0) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{1}{n}(x-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\right]_{s=x_0}^{x} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{n}(x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x,x_0).
\end{aligned}$$

Dann ist aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x,x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x,x_0).$$

□

6.6 Monotonie und Mittelwertsatz der Integralrechnung

Eine Eigenschaft des Integrals haben wir bisher nicht benutzt: die Monotonie. Sind $f, g \in R([a,b])$ zwei Regelfunktionen, und gilt $f(x) \le g(x)$ für alle x, dann ist auch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

denn: Da $f - g$ eine Regelfunktion ist, die nur nicht-negative Werte annimmt, kann man sie auch gleichmäßig durch eine Folge von Treppenfunktionen (φ_n) approximieren, die alle ebenfalls nicht-negativ sind.

Damit ist auch $\int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ für alle n und im Limes $n \to \infty$

$$\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Wegen der Linearität des Integrals aus Satz 6.1 folgt daraus direkt

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Satz 6.13 [Mittelwertsatz der Integralrechnung]
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

Etwas allgemeiner gilt sogar folgende Aussage: Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R([a,b])$ eine Regelfunktion ist, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Da die erste Aussage nur ein Spezialfall der zweiten Aussage mit $g(x) \equiv 1$ ist, zeigen wir gleich die allgemeinere Aussage.
Nach Kapitel 3 ist die stetige Funktion f beschränkt, d.h. es gibt Zahlen m, M, so dass

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b]$$

also auch

$$m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\,g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b].$$

Wegen der Monotonie des Integrals ist dann

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

und damit

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt aber f jeden Wert zwischen m und M an, d.h. es gibt ein ξ mit der Eigenschaft

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

□

6.7 Trapezregel

Wenn man Integrale näherungsweise berechnen will, könnte man wie in der Konstruktion eine Approximation mit Treppenfunktionen durchführen.
In diesem Abschnitt soll kurz eine Methode vorgestellt werden, die genauso einfach zu verstehen ist, in einem gewissen Sinn aber bessere Ergebnisse liefert. Um die Fläche unter dem Graphen einer Funktion f zu berechnen, ersetzt man diese Fläche durch ein Trapez, bzw. durch mehrere Trapeze. Um zu sehen, wie gut die Trapezfläche $\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

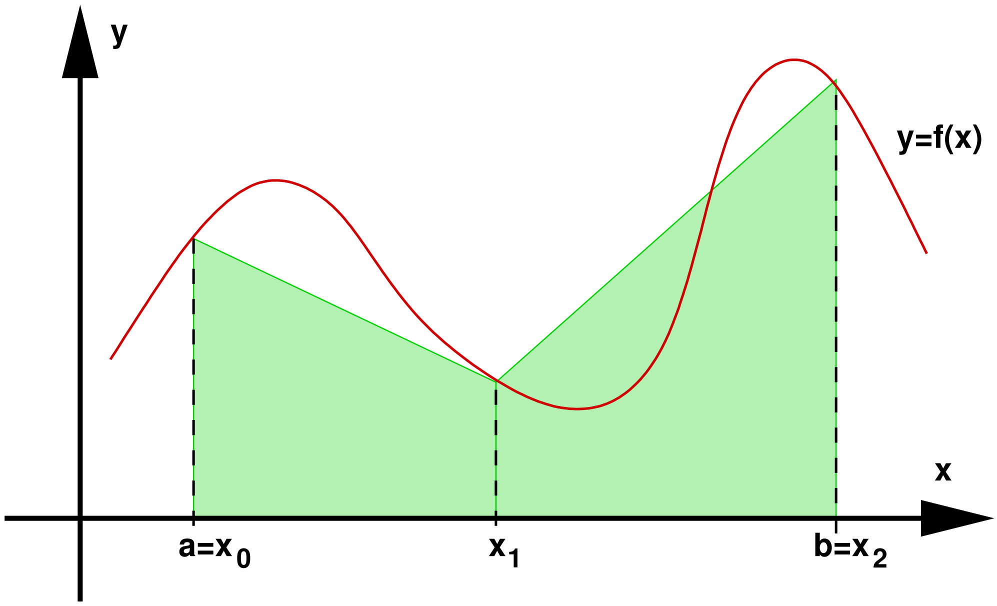


Abbildung 6.2: Warum die Trapezregel Trapezregel heißt

approximiert, berechnen wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^b f(x)(x-\frac{a+b}{2})'\,\mathrm{d}x \\
&= \left[f(x)\cdot(x-\frac{a+b}{2})\right]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)(x-\frac{a+b}{2})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b-a)(f(a)+f(b)}{2} - \underbrace{\left[f'(x)(x-a)(b-x)\right]_a^b}_{=0} + \int\limits_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(b-a)(f(a)+f(b)}{2} + f''(\xi)\int\limits_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(b-a)(f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3
\end{aligned}
$$

wobei beim Schritt von der vorletzten zur letzten Zeile der Mittelwertsatz der Integralrechnung verwendet wurde und ξ eine (unbekannte) Zwischenstelle zwischen a und b ist. Wenn man also eine obere Schranke C an die zweite Ableitung $|f''|$ kennt, dann kann man den Fehler durch $\frac{C}{6}(b-a)^3$ abschätzen. Um diesen Fehler möglichst klein zu machen, unterteilt man nun das Intervall $[a,b]$ in kleinere Teilintervalle der Länge $h := \frac{b-a}{n}$ und setzt $x_0 := a$, $x_1 := a+h$, $x_2 := a+2h, \ldots x_n = a+nh = b$. Approximiert man das Integral in jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ durch ein Trapez mit Flächeninhalt $\frac{f(x_{j-1}+f(x_j)}{2}h$, dann erhält man als Summe

$$
\begin{aligned}
T(h) &:= \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_{j-1}+f(x_j)}{2}h \\
&= \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right) h \\
&= \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{f(b)}{2}\right) h.
\end{aligned}
$$

Indem man die Abschätzung von weiter oben auf jedes Teilintervall anwendet, erhält man den folgenden Satz.

Satz 6.14
Sei $f \in C^2([a,b])$. Teilt man das Intervall $[a,b]$ in n gleich lange Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ und berechnet mit den Stützstellen $x_j = a + j \cdot h$ wobei $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ die Trapezsumme

$$T(h) = \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{f(b)}{2}\right) h$$

so gilt die Fehlerabschätzung

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T(h)\right| \le \frac{1}{6}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|h^2$$

Beweis:

Auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ der Länge h gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x &= h\frac{(f(x_{j-1})+f(x_j)}{2} + \frac{1}{6}f''(\xi)h^3 \\ \Rightarrow \quad \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x - h\frac{(f(x_{j-1})+f(x_j)}{2} \right| &\leq \frac{1}{6}\max|f''|h^3 \end{aligned}$$

Addiert man diese n Ungleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T(h) \right| &\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x - h\frac{(f(x_{j-1})+f(x_j)}{2} \right| \\ &\leq n\cdot\frac{1}{6}\max|f''|h^3 = \frac{b-a}{6}\max|f''|h^2 \end{aligned}$$

denn es ist ja $n \cdot h = b - a$. □

Bemerkung: Es gibt noch einige weitere numerische Integrationsverfahren, die auf ähnlichen Ideen beruhen. Bei der Keplerschen Fassregel beispielsweise wird die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ durch eine quadratische Parabel approximiert, die durch die drei Punkte $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ und $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ verläuft.
Man kann auch die Taylor-Formel verwenden, um f lokal durch ein Polynom anzunähern, das sich dann einfach integrieren lässt.

6.8 Integration von Potenzreihen

In Kapitel 5 haben wir schon gesehen, dass man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf und dass sich dadurch der Konvergenzradius nicht verändert. Dies hilft beim Rechnen mit Potenzreihen ungemein. Es ist daher auch nicht verwunderlich, dass man Potenzreihen ebenfalls gliedweise integrieren darf.

Satz 6.15
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty]$, die in ihrem Konvergenzkreis eine Funktion f darstellt, d.h. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = f(x)$ für $|x-x_0| < \rho$.
Dann hat die gliedweise integrierte Potenzreihe $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$ ebenfalls den Konvergenzradius ρ und für $|x-x_0| < \rho$ gilt $F' = f$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 5.7, wenn man diesen Satz über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen auf die gliedweise integrierte Reihe anwendet. Falls nämlich $\tilde{\rho}$ der Konvergenzradius der gliedweise integrierten Reihe ist, und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x-x_0)^{k+1}}{k+1} = F(x)$ für $|x - x_0| < \tilde{\rho}$, dann sagt Satz 5.7 gerade aus, dass $\tilde{\rho} = \rho$ und $F' = f$ ist. □

Beispiel: Wir betrachten die Potenzreihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

deren Konvergenzradius $\rho = 1$ ist. Die gliedweise integrierte Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

hat dann ebenfalls Konvergenzradius $\rho = 1$ und stellt eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{1+x}$ dar, also $F(x) = \log(1 + x) + C$. Um die richtige Integrationskonstante C zu bestimmen, setzen wir $x = 0$ ein und erhalten so die Gleichung $0 = \log(1 + 0) + C$, woraus $C = 0$ folgt. Daher gilt für $|x| < 1$ die Reihendarstellung des Logarithmus

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

Mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes kann man zeigen, dass diese Darstellung auch für $x = 1$ noch gültig ist. Daher ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots = \log 2.$$

Auf eine ganz ähnliche Weise kann man auch die Arcustangens-Reihe

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$$

herleiten.

6.9 Uneigentliche Integrale

Bisher hatten wir Integrale von Regelfunktionen nur auf kompakten, also insbesondere beschränkten Intervallen $[a, b]$ betrachtet. Versucht man Integrale über offene oder sogar unbeschränkte Intervalle mittels Approximation durch Treppenfunktionen zu erklären stößt man auf Schwierigkeiten, da sich nicht einmal stetige Funktionen auf nicht-kompakten Intervallen immer gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren lassen.
Aus diesem Grund beschreitet man einen anderen Weg.

Definition:
Sei $-\infty \leq a < b < \infty$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[\alpha, b] \subset (a, b]$ eine Regelfunktion ist.
Wir nennen

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\alpha \to a+} \int\limits_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

uneigentliches Integral, falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.
Genauso definiert man für eine Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$, deren Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[a, \beta] \subset [a, b)$ eine Regelfunktion ist,

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\beta \to b-} \int\limits_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls dieser Limes existiert.
Schließlich erklärt man für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ das uneigentliche Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sofern die uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite beide existieren. Der Wert des uneigentlichen Integrals hängt dabei nicht von der Wahl von $c \in (a, b)$ ab.

Bemerkung: Insbesondere darf der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\alpha_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nicht von der Wahl der Folge $\alpha_n \to a$ bzw. $\beta_n \to b$ abhängen.

Beispiele:

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ existiert für $\alpha > -1$.

   Dazu berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int\limits_c^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_c^1 = \dfrac{1 - c^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq -1 \\ [\log x]_c^1 = -\log c & \text{für } \alpha \neq -1 \end{cases}$$

   Da $\lim\limits_{c \to 0} -\log c = +\infty$ existiert das uneigentliche Integral für $\alpha = -1$ nicht.

Für $\alpha > -1$ ist $\lim\limits_{c \to 0} c^{\alpha+1} = 0$, während der Grenzwert für $\alpha < -1$ nicht existiert.

Das uneigentliche Integral existiert also genau dann, wenn $\alpha > -1$ ist und hat dann den Wert $\int\limits_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

2. Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ existiert für $\alpha < -1$.

   Wie eben berechnen wir explizit

$$\int\limits_1^c x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_1^c = \dfrac{c^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq -1 \\[2ex] [\log x]_1^c = \log c & \text{für } \alpha \neq -1 \end{cases}$$

   Diesmal existiert nur im Fall $\alpha < -1$ der Grenzwert für $c \to +\infty$. Das uneigentliche Integral ist dann $\int\limits_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\alpha+1}$.

3. Für $\alpha > 0$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x = \lim_{c \to \infty} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$

4. Ein anderes uneigentliches Integral, das sich explizit berechnen lässt ist $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Für $a < 0 < b$ ist

$$\int\limits_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\arctan a \quad \text{und} \quad \int\limits_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan b.$$

   Lässt man $a \to -\infty$ und $b \to +\infty$ streben, so ergibt sich direkt

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Nicht immer kann man entscheiden, ob ein uneigentliches Integral existiert, indem man eine explizite Stammfunktion benutzt.

Beispiel: Das Dirichlet-Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$

Für die Funktion $\frac{\sin t}{t}$ kann man keine Stammfunktion berechnen. Hier muss man sich anders behelfen. Betrachtet man das Schaubild der Funktion $\frac{\sin t}{t}$, dann erkennt man, dass sich das Integral aus unendlich vielen Abschnitten zusammensetzt.

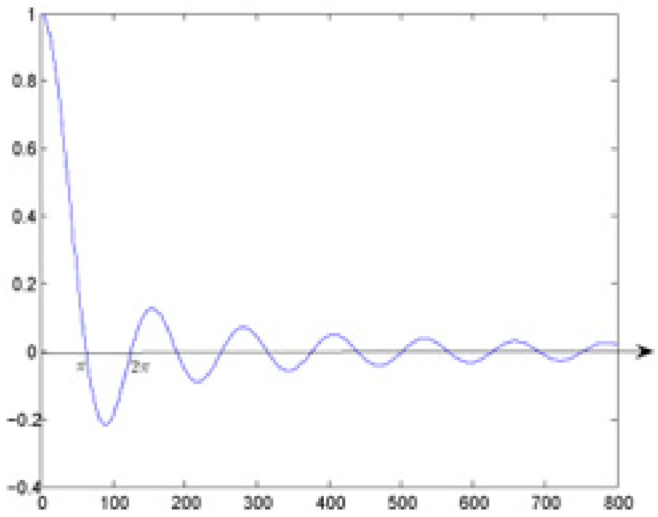


Abbildung 6.3: Zum Dirichlet-Integral

Da die Abschnitte abwechselnd einen positiven und einen negativen Beitrag zum Integral leisten, definieren wir

$$a_n := (-1)^n \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t > 0.$$

Es ist dann

$$S_n := \int\limits_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1}$$

Die Glieder der Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gerade die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Diese Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, wenn wir zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist. Um das einzusehen, nutzen wir die Identität $\sin(t+\pi) = -\sin t$ aus, denn dann ist

$$\left|\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}\right| < \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$$

und wenn man diese Ungleichung über das Intervall $[n\pi, (n+1)\pi]$ integriert, ergibt sich daraus $a_{n+1} < a_n$. Die Folge ist auch eine Nullfolge, denn

$$|a_n| \le \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \le \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\le 1/(n\pi)}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n}$$

Somit haben wir gezeigt, dass zumindest

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

existiert.
Da für $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ der Wert des Integrals $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ zwischen S_{n-1} und S_n liegt, existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

und damit das uneigentliche Integral.
Man kann den Wert des Integrals sogar explizit berechnen, nämlich

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

aber im Moment ist das für uns noch zu schwierig...

Eine andere Methode, um zu zeigen, dass ein uneigentliches Integral existiert, besteht darin, es nach oben durch ein anderes uneigentliches Integral abzuschätzen, dessen Existenz man schon kennt.

Satz 6.16 [Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale]
Sei $a < b \leq \infty$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Einschränkung auf jedes kompakte Intervall $[a,c] \subset [a,b)$ eine Regelfunktion in $R([a,c])$ ist. Sei weiter $\varphi : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion, für die das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ existiert. Außerdem gelte für alle $x \in [a,b)$ die Ungleichung $|f(x)| \leq \varphi(x)$.
Dann existiert auch das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ und es ist

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Wir möchten ein letztes Mal in diesem Semester das beliebte Cauchy-Kriterium anwenden, und zwar auf eine Folge von Integralen

$$I_n := \int\limits_a^{t_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

wobei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist, die gegen b konvergiert.
Bevor wir zeigen, dass $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, setzen wir jetzt noch

$$J_n := \int\limits_a^{t_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da das uneigentliche Integral $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, bilden die J_n eine Cauchy-Folge. Man findet also zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq N$ die Ungleichung $|J_n - J_m| < \varepsilon$ gilt.
Für $n, m \geq N$ gilt dann aber auch

$$\begin{aligned}
|I_n - I_m| = \left| \int_a^{t_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{t_m} f(x)\,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int_{t_m}^{t_n} f(x)\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_{t_m}^{t_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{t_m}^{t_n} \underbrace{\varphi(x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x \\
&= \left| \int_a^{t_n} \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_a^{t_m} \varphi(x)\mathrm{d}x \right| = |J_n - J_m| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist auch die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und ist daher konvergent.
Es kommt dabei auch nicht auf die Wahl der Folge (t_n) an, denn wenn man eine andere Folge (s_n) nimmt, für die ebenfalls $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ gilt, dann ist mit einer analogen Rechnung wie eben

$$\left| \int_a^{t_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{s_n} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_a^{t_n} \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_a^{s_n} \varphi(x)\mathrm{d}x \right|$$

und da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, ist auch die linke Seite eine Nullfolge. □

Beispiel: Die Gamma-Funktion Eine ganze Familie uneigentlicher Integrale muss man untersuchen, um die sogenannte Gammafunktion zu definieren, die gegeben ist durch

Definition:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Das Integral konvergiert für $x > 0$ nach dem Majorantenkriterium, denn

$$|t^{x-1}e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{x-1} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ C(x)e^{-t/2} & \text{für } 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \forall x > 0$$

denn durch partielle Integration folgt

$$\int_a^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

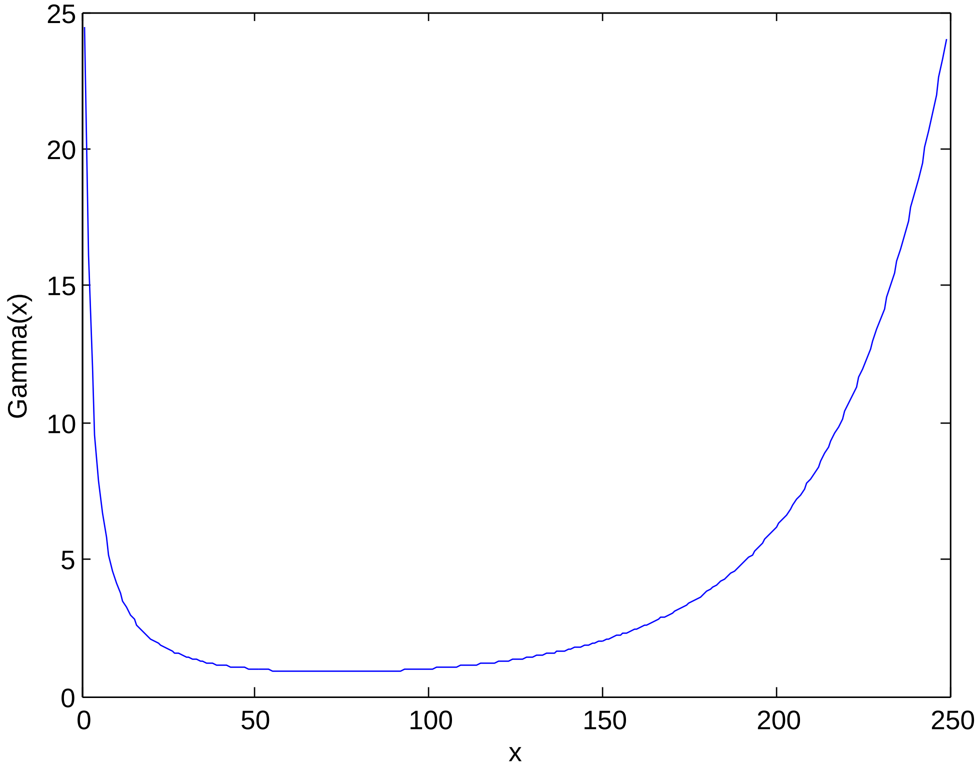
Für $x > 0$ ist
$$\lim_{a \to 0} -a^x e^{-a} = \lim_{b \to \infty} -b^x e^{-b} = 0.$$
Die rechte Seite der Gleichung konvergiert für $a \to 0$ und $b \to \infty$ also gegen $x\Gamma(x)$, während die linke gegen $\Gamma(x+1)$ konvergiert.
Außerdem ist die Gamma-Funktion eine Erweiterung der Fakultät, denn für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Um das zu sehen, benutzen wir noch ein letztes Mal in diesem Semester Vollständige Induktion:
Für $n = 1$ ist
$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 0!$$
Falls aber $\Gamma(n) = (n-1)!$ schon gezeigt ist, dann folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung sofort

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

Dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ und nicht $n!$ hat historische Gründe.
Zum Abschluss hier noch das Schaubild der Gammafunktion:


25
20
15
10
5
0
Gamma(x)
0
50
100
150
200
250
x

Stichwortverzeichnis