Irreversibilmente?

Alberto Abbondandolo

Università di Pisa

Rovereto, 7 settembre 2009

Un cavaliere al galoppo

Una strana mistura

Avanti tutta

Zoom sul cavaliere

Da un romanzo di Amis

Da un romanzo di Amis

Eating is unattractive too. [...] You select a soiled dish, collect some scraps from the garbage, and settle down for a short wait. Various items get gulped up into my mouth, and after a skilful massage with tongue and teeth I transfer them to the plate for additional sculpture with knife and fork and spoon. That bit's quite therapeutic at least, unless you're having soup or something, which can be a real sentence. Next you face the laborious business of cooling, of reassembly, of storage, before the return of these foodstuffs to the Superette, where, admittedly, I am promptly and generously reimbursed for my pains. Then you tool down the aisles with trolley or basket, returning each can or packet to its rightful place.

[Martin Amis, Time's arrow, 1991]

Le equazioni fondamentali della fisica sono reversibili

Le equazioni fondamentali della fisica sono reversibili

L'accelerazione è proporzionale alla forza:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}. \tag{1}$$

Le equazioni fondamentali della fisica sono reversibili

L'accelerazione è proporzionale alla forza:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}. \tag{1}$$

L'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ all'istante t misura quanto rapidamente stia variando la velocità $\mathbf{v}(t)$, la quale a sua volta misura quanto rapidamente stia varianto la posizione $\mathbf{q}(t)$.

Le equazioni fondamentali della fisica sono reversibili

L'accelerazione è proporzionale alla forza:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}. \tag{1}$$

L'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ all'istante t misura quanto rapidamente stia variando la velocità $\mathbf{v}(t)$, la quale a sua volta misura quanto rapidamente stia varianto la posizione $\mathbf{q}(t)$.
La forza $\mathbf{F}$ che agisce sul corpo dipende in generale dalla sua posizione $\mathbf{q}$.

Le equazioni fondamentali della fisica sono reversibili

L'accelerazione è proporzionale alla forza:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}. \tag{1}$$

L'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ all'istante t misura quanto rapidamente stia variando la velocità $\mathbf{v}(t)$, la quale a sua volta misura quanto rapidamente stia varianto la posizione $\mathbf{q}(t)$.
La forza $\mathbf{F}$ che agisce sul corpo dipende in generale dalla sua posizione $\mathbf{q}$.
Teorema di Picard-Lindelöf o Cauchy-Lipschitz: fissate arbitrariamente posizione e velocità iniziali $\mathbf{q}(0)$ e $\mathbf{v}(0)$, esiste ed è unica la traiettoria $\mathbf{q}(t)$ che risolve l'equazione differenziale (1) per tutti i tempi - passati e futuri - e rispetta le condizioni iniziali.

Molti gradi di libertà

Molti gradi di libertà

Se i corpi sono N, abbiamo bisogno di $n = 3N$ numeri, che indichiamo con $q_1, \ldots, q_n$, per determinare le posizioni, e di altrettanti numeri, indicati con $v_1, \ldots, v_n$, per determinare le velocità. Il numero n si dice numero dei gradi di libertà del sistema.

Molti gradi di libertà

Se i corpi sono N, abbiamo bisogno di $n = 3N$ numeri, che indichiamo con $q_1, \ldots, q_n$, per determinare le posizioni, e di altrettanti numeri, indicati con $v_1, \ldots, v_n$, per determinare le velocità. Il numero n si dice numero dei gradi di libertà del sistema.

L'evoluzione del sistema è determinata univocamente da un sistema di n equazioni differenziali e da n posizioni e n velocità iniziali.

Molti gradi di libertà

Se i corpi sono N, abbiamo bisogno di $n = 3N$ numeri, che indichiamo con $q_1, \ldots, q_n$, per determinare le posizioni, e di altrettanti numeri, indicati con $v_1, \ldots, v_n$, per determinare le velocità. Il numero n si dice numero dei gradi di libertà del sistema.

L'evoluzione del sistema è determinata univocamente da un sistema di n equazioni differenziali e da n posizioni e n velocità iniziali.

Queste equazioni sono reversibili: se ad un dato istante potessimo invertire le velocità di tutte le particelle, il sistema ripercorrerebbe a ritroso la sua evoluzione passata.

Determinismo

Un intelletto che ad un dato istante conoscesse tutte le forze che animano la Natura e la situazione di ogni singolo essere che questa comprende, se questo stesso intelletto fosse sufficientemente vasto per sottoporre ad analisi questi dati, potrebbe abbracciare in un'unica formula tanto il moto dei più corpi dell'universo, quanto quello dell'atomo più leggero: per tale intelletto nulla sarebbe incerto, e il futuro, così come il passato, sarebbero presenti davanti ai suoi occhi. [Pierre Simon de Laplace, 1825]

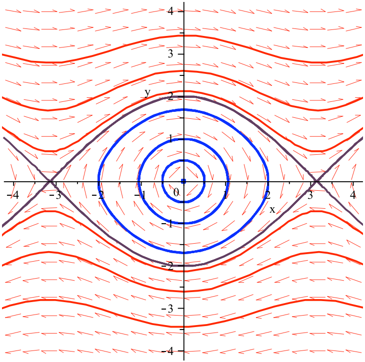
La formulazione geometrica

La formulazione geometrica

È utile pensare all'evoluzione di un sistema fisico come al moto di un punto di coordinate $(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n)$ in uno spazio con $2n$ dimensioni, lo spazio delle fasi.

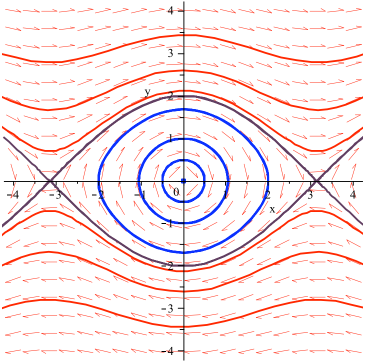
La formulazione geometrica

È utile pensare all'evoluzione di un sistema fisico come al moto di un punto di coordinate $(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n)$ in uno spazio con $2n$ dimensioni, lo spazio delle fasi.



La formulazione geometrica

È utile pensare all'evoluzione di un sistema fisico come al moto di un punto di coordinate $(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n)$ in uno spazio con $2n$ dimensioni, lo spazio delle fasi.



L'evoluzione temporale conserva il volume nello spazio delle fasi (teorema di Liouville).

Risolvere le equazioni di Newton

Risolvere le equazioni di Newton

Nell'Ottocento, risolvere le equazioni della dinamica significava determinare analiticamente n integrali primi del moto, ossia n funzioni delle variabili q_j e v_j che restano costanti nell'evoluzione temporale.

Risolvere le equazioni di Newton

Nell'Ottocento, risolvere le equazioni della dinamica significava determinare analiticamente n integrali primi del moto, ossia n funzioni delle variabili q_j e v_j che restano costanti nell'evoluzione temporale.
Un integrale primo è l'energia totale, che permette di confinare il moto su uno spazio a $2n - 1$ dimensioni. Ciascun integrale primo successivo confina il moto a spazi di dimensione sempre minore. Se si trovano n integrali primi, il moto è confinato a spazi di dimensione n.

Risolvere le equazioni di Newton

Nell'Ottocento, risolvere le equazioni della dinamica significava determinare analiticamente n integrali primi del moto, ossia n funzioni delle variabili q_j e v_j che restano costanti nell'evoluzione temporale.

Un integrale primo è l'energia totale, che permette di confinare il moto su uno spazio a $2n-1$ dimensioni. Ciascun integrale primo successivo confina il moto a spazi di dimensione sempre minore. Se si trovano n integrali primi, il moto è confinato a spazi di dimensione n.

Su questi spazi si possono trovare coordinate rispetto alle quali la dinamica è molto semplice: si tratta di coordinate angolari $0 \leq \varphi_j \leq 2\pi$ che evolvono secondo le equazioni

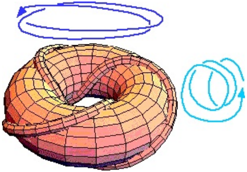
$$\varphi_j(t) = \varphi_j(0) + \omega_j t,$$

dove le n frequenze ω_j sono costanti su ciascuno spazio n-dimensionale.

I tori invarianti

I tori invarianti

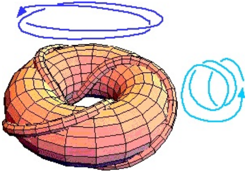
Quindi il moto è confinato a tori di dimensione n:



$$\omega_1 = 2$$
$$\omega_2 = 3$$

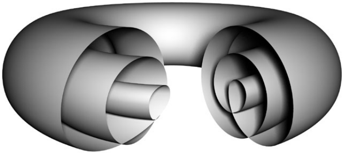
I tori invarianti

Quindi il moto è confinato a tori di dimensione n:



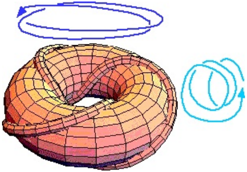
$$\omega_1 = 2$$
$$\omega_2 = 3$$

Su tori diversi le frequenze caratteristiche sono diverse:



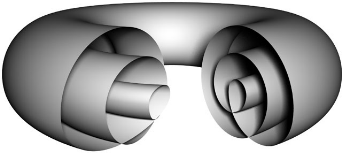
I tori invarianti

Quindi il moto è confinato a tori di dimensione n:



$$\omega_1 = 2$$
$$\omega_2 = 3$$

Su tori diversi le frequenze caratteristiche sono diverse:



È di questo tipo il sistema composto da 2 corpi che si attraggono con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Il premio di Re Oscar II

Il premio di Re Oscar II

Nel 1886 Re Oscar II di Svezia bandisce un concorso internazionale di matematica. Il primo problema proposto da Weierstrass è il seguente:

Il premio di Re Oscar II

Nel 1886 Re Oscar II di Svezia bandisce un concorso internazionale di matematica. Il primo problema proposto da Weierstrass è il seguente:

Dato un sistema composto da un numero qualsiasi di punti materiali che si attirano mutuamente secondo la legge di Newton, si propone, nell'ipotesi che fra due punti non si verifichino mai urti, di rappresentare le coordinate di ciascun punto sotto forma di serie di potenze di funzioni continue nel tempo che siano uniformemente convergenti per tutti i valori reali della variabile.

Il premio di Re Oscar II

Nel 1886 Re Oscar II di Svezia bandisce un concorso internazionale di matematica. Il primo problema proposto da Weierstrass è il seguente:

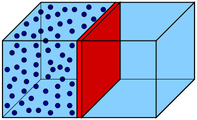
Dato un sistema composto da un numero qualsiasi di punti materiali che si attirano mutuamente secondo la legge di Newton, si propone, nell'ipotesi che fra due punti non si verifichino mai urti, di rappresentare le coordinate di ciascun punto sotto forma di serie di potenze di funzioni continue nel tempo che siano uniformemente convergenti per tutti i valori reali della variabile.

Henri Poincaré vincerà il premio con una memoria in cui dimostra, tra le altre cose, che se i corpi sono più di 2, non esistono altri integrali primi del moto oltre a quelli già conosciuti. Più tardi dimostrerà che genericamente un sistema meccanico non ha integrali primi diversi dall'energia.

Un esempio

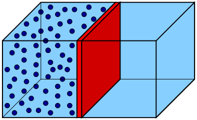
Un esempio

Consideriamo un gas composto da N atomi dentro ad un contenitore diviso in due parti uguali da una parete mobile. All'inizio la parete è chiusa ed il gas occupa solamente la metà sinistra del contenitore.

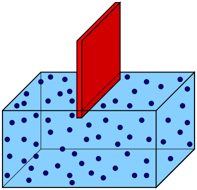


Un esempio

Consideriamo un gas composto da N atomi dentro ad un contenitore diviso in due parti uguali da una parete mobile. All'inizio la parete è chiusa ed il gas occupa solamente la metà sinistra del contenitore.



Ad un certo istante la parete viene rimossa.



Il ragionamento di Boltzmann

Il ragionamento di Boltzmann

Se non ci sono integrali primi diversi dall'energia, in linea di principio l'orbita di un punto potrebbe visitare tutto lo spazio di dimensione $6N - 1$ corrispondente ad un dato livello energetico. Questa è la celebre ipotesi ergodica di Ludwig Boltzman.

Il ragionamento di Boltzmann

Se non ci sono integrali primi diversi dall'energia, in linea di principio l'orbita di un punto potrebbe visitare tutto lo spazio di dimensione $6N - 1$ corrispondente ad un dato livello energetico. Questa è la celebre ipotesi ergodica di Ludwig Boltzman.

Più precisamente, un sistema è ergodico se l'evoluzione di un generico stato trascorre pari frazioni di tempo in regioni di pari volume.

Il ragionamento di Boltzmann

Se non ci sono integrali primi diversi dall'energia, in linea di principio l'orbita di un punto potrebbe visitare tutto lo spazio di dimensione $6N - 1$ corrispondente ad un dato livello energetico. Questa è la celebre ipotesi ergodica di Ludwig Boltzman.

Più precisamente, un sistema è ergodico se l'evoluzione di un generico stato trascorre pari frazioni di tempo in regioni di pari volume.

L'ipotesi ergodica è ragionevole. È possibile dimostrarla rigorosamente per sistemi semplici, come il moto di una particella su una superficie di curvatura negativa (Jacques Hadamard, 1898; Emil Artin, 1924; Eberhard Hopf, 1939) e il gas di Lorentz (Yakov Sinai, 1963).

Calcoliamo

Calcoliamo

Sia X la regione dello spazio delle fasi corrispondente ad un dato valore dell'energia. Sia A la sottoregione di tutti quegli stati corrispondenti alla situazione in cui il gas è contenuto nella metà di sinistra.

Calcoliamo

Sia X la regione dello spazio delle fasi corrispondente ad un dato valore dell'energia. Sia A la sottoregione di tutti quegli stati corrispondenti alla situazione in cui il gas è contenuto nella metà di sinistra.

Semplifichiamo: supponiamo che la conservazione dell'energia totale abbia il solo effetto di costringere ciascuna particella ad avere una velocità non superiore ad una certa velocità massima, che indichiamo con M.

Calcoliamo

Sia X la regione dello spazio delle fasi corrispondente ad un dato valore dell'energia. Sia A la sottoregione di tutti quegli stati corrispondenti alla situazione in cui il gas è contenuto nella metà di sinistra.

Semplifichiamo: supponiamo che la conservazione dell'energia totale abbia il solo effetto di costringere ciascuna particella ad avere una velocità non superiore ad una certa velocità massima, che indichiamo con M.

Lo spazio X ha ancora dimensione $6N$ ed è costituito da quegli stati $(\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_N}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_N})$ dove i vettori posizione $\mathbf{q_j}$ variano in tutto il contenitore, mentre i vettori velocità $\mathbf{v_j}$ hanno lunghezza al più M e direzione qualsiasi.

Calcoliamo

Il contributo al volume di X di ciascun $\mathbf{q}_j$ à pari al volume del recipiente, che indichiamo con V, mentre quello di ciascun $\mathbf{v_j}$ è pari al volume della sfera di raggio M, ossia $4/3\pi M^3$.

Calcoliamo

Il contributo al volume di X di ciascun $\mathbf{q}_j$ à pari al volume del recipiente, che indichiamo con V, mentre quello di ciascun $\mathbf{v_j}$ è pari al volume della sfera di raggio M, ossia $4/3\pi M^3$. Moltiplicando tra loro tutti questi contributi, troviamo:

$$\mathrm{Vol}(X) = V^N \cdot (4/3\pi M^3)^N.$$

Calcoliamo

Il contributo al volume di X di ciascun $\mathbf{q}_j$ à pari al volume del recipiente, che indichiamo con V, mentre quello di ciascun $\mathbf{v_j}$ è pari al volume della sfera di raggio M, ossia $4/3\pi M^3$. Moltiplicando tra loro tutti questi contributi, troviamo:

$$\mathrm{Vol}(X) = V^N \cdot (4/3\pi M^3)^N.$$

Per il calcolo del volume di A, l'unica differenza è che il contributo di di ciascun $\mathbf{q}_j$ à pari a $V/2$:

$$\mathrm{Vol}(A) = (V/2)^N \cdot (4/3\pi M^3)^N.$$

Calcoliamo

Il contributo al volume di X di ciascun $\mathbf{q}_j$ à pari al volume del recipiente, che indichiamo con V, mentre quello di ciascun $\mathbf{v_j}$ è pari al volume della sfera di raggio M, ossia $4/3\pi M^3$. Moltiplicando tra loro tutti questi contributi, troviamo:

$$\mathrm{Vol}(X) = V^N \cdot (4/3\pi M^3)^N.$$

Per il calcolo del volume di A, l'unica differenza è che il contributo di di ciascun $\mathbf{q}_j$ à pari a $V/2$:

$$\mathrm{Vol}(A) = (V/2)^N \cdot (4/3\pi M^3)^N.$$

Il rapporto tra i due volumi è:

$$\frac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Vol}(X)} = \frac{1}{2^N}.$$

Dato che N è dell'ordine di 10^{21}, 2^N è un numero spaventosamente grande: qualcosa come un 1 seguito da $3 \cdot 10^{20}$ zeri. Se vale l'ipotesi ergodica, la frazione di tempo che lo stato del sistema trascorre dentro A è $1/2^N$, un numero incredibilmente piccolo.

Come nasce la freccia del tempo?

Come nasce la freccia del tempo?

I meccanismi che permettono ad un sistema reversibile di sviluppare un comportamento irreversibile sono quindi:

Come nasce la freccia del tempo?

I meccanismi che permettono ad un sistema reversibile di sviluppare un comportamento irreversibile sono quindi:

- Condizioni iniziali particolarissime.

Come nasce la freccia del tempo?

I meccanismi che permettono ad un sistema reversibile di sviluppare un comportamento irreversibile sono quindi:

- Condizioni iniziali particolarissime.
- Un gran numero di gradi di libertà (ossia una grande differenza tra la scala microscopica e quella macroscopica).

Come nasce la freccia del tempo?

I meccanismi che permettono ad un sistema reversibile di sviluppare un comportamento irreversibile sono quindi:

- Condizioni iniziali particolarissime.
- Un gran numero di gradi di libertà (ossia una grande differenza tra la scala microscopica e quella macroscopica).
- Un pizzico di ergodicità.

Come nasce la freccia del tempo?

I meccanismi che permettono ad un sistema reversibile di sviluppare un comportamento irreversibile sono quindi:

- Condizioni iniziali particolarissime.
- Un gran numero di gradi di libertà (ossia una grande differenza tra la scala microscopica e quella macroscopica).
- Un pizzico di ergodicità.

La conseguenza di queste proprietà è che la reversibilità temporale diventa molto improbabile.

La probabilità in modelli deterministici

La probabilità in modelli deterministici

Una causa minima, che ci sfugge, determina un effetto considerevole, del quale non possiamo non accorgerci: diciamo allora che questo effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo con esattezza le leggi della natura e lo stato dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere quale sarà lo stato di questo stesso universo ad un istante successivo.

La probabilità in modelli deterministici

Una causa minima, che ci sfugge, determina un effetto considerevole, del quale non possiamo non accorgerci: diciamo allora che questo effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo con esattezza le leggi della natura e lo stato dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere quale sarà lo stato di questo stesso universo ad un istante successivo.

Ma quand'anche le leggi naturali non avessero per noi più segreti, potremo conoscere lo stato iniziale soltanto approssimativamente. Se ciò ci permette di conoscere lo stato successivo con la stessa approssimazione, non abbiamo bisogno d'altro, e diremo che il fenomeno è stato previsto [...]. Ma non sempre è così: può succedere che piccole differenze nelle condizioni iniziali generino differenze grandissime nei fenomeni finali; un piccolo errore a proposito delle prime genererebbe allora un errore enorme a proposito di questi ultimi. La previsione diventa impossibile: siamo di fronte al fenomeno fortuito.

La probabilità in modelli deterministici

Mi chiedete di prevedere i fenomeni che stanno per verificarsi. Se per disgrazia conoscessi le leggi di questi fenomeni, non sarei in grado di farlo se non a prezzo di calcoli inestricabili e dovrei rinunciare a rispondervi; ma siccome ho la fortuna di ignorarle, vi risponderò immediatamente. E quel che vi è di più straordinario in tutto ciò è che la mia risposta sarà corretta. [Henri Poincaré, 1907]

I sistemi privi di integrali primi sono ergodici?

I sistemi privi di integrali primi sono ergodici?

Nell'estate del 1953 Fermi, Pasta ed Ulam simulano sul MANIAC, uno dei primi computer, il comportamento di un gran numero di pendoli accoppiati tramite deboli forze non lineari. Con loro grande sorpresa l'energia fornita al sistema non tende ad equidistribuirsi.

I sistemi privi di integrali primi sono ergodici?

Nell'estate del 1953 Fermi, Pasta ed Ulam simulano sul MANIAC, uno dei primi computer, il comportamento di un gran numero di pendoli accoppiati tramite deboli forze non lineari. Con loro grande sorpresa l'energia fornita al sistema non tende ad equidistribuirsi.

Tra il 1954 e la fine degli anni sessanta Kolmogorov, Arnold e Moser studiano perturbazioni di sistemi con n integrali primi.

I sistemi privi di integrali primi sono ergodici?

Nell'estate del 1953 Fermi, Pasta ed Ulam simulano sul MANIAC, uno dei primi computer, il comportamento di un gran numero di pendoli accoppiati tramite deboli forze non lineari. Con loro grande sorpresa l'energia fornita al sistema non tende ad equidistribuirsi.

Tra il 1954 e la fine degli anni sessanta Kolmogorov, Arnold e Moser studiano perturbazioni di sistemi con n integrali primi.

Dimostrano che se la perturbazione è sufficientemente piccola, i tori con frequenze in rapporto molto irrazionale sopravvivono.

Cosa vuol dire “molto irrazionale”?

Cosa vuol dire "molto irrazionale"?

Consideriamo un sistema con 2 gradi di libertà e 2 integrali primi del moto. Su ciascun toro il moto è determinato da due frequenze ω_1 e ω_2. Sia α il loro rapporto: $\alpha = \omega_1/\omega_2$.

Cosa vuol dire "molto irrazionale"?

Consideriamo un sistema con 2 gradi di libertà e 2 integrali primi del moto. Su ciascun toro il moto è determinato da due frequenze ω_1 e ω_2. Sia α il loro rapporto: $\alpha = \omega_1/\omega_2$.

Ciascun numero reale α è approssimabile con numeri razionali della forma p/q con un errore che non supera $1/q$.

Cosa vuol dire "molto irrazionale"?

Consideriamo un sistema con 2 gradi di libertà e 2 integrali primi del moto. Su ciascun toro il moto è determinato da due frequenze ω_1 e ω_2. Sia α il loro rapporto: $\alpha = \omega_1/\omega_2$.

Ciascun numero reale α è approssimabile con numeri razionali della forma p/q con un errore che non supera $1/q$.

Si può fare di meglio: esistono infiniti numeri razionali p/q tali che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Cosa vuol dire “molto irrazionale”?

Consideriamo un sistema con 2 gradi di libertà e 2 integrali primi del moto. Su ciascun toro il moto è determinato da due frequenze ω_1 e ω_2. Sia α il loro rapporto: $\alpha = \omega_1/\omega_2$.

Ciascun numero reale α è approssimabile con numeri razionali della forma p/q con un errore che non supera $1/q$.

Si può fare di meglio: esistono infiniti numeri razionali p/q tali che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

I numeri Diofantei sono quei numeri reali α per cui non si può fare meglio: α è Diofanteo se esistono numeri $\beta > 2$ e $\gamma > 0$ tali che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\gamma}{q^\beta},$$

per ogni numero razionale p/q.

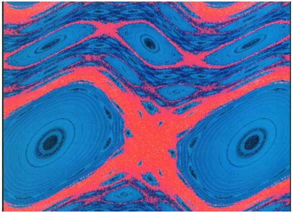
Il Teorema KAM

Il Teorema KAM

Il teorema KAM afferma che i tori invarianti corrispondenti a frequenze di rapporto Diofanteo sopravvivono a piccole perturbazioni del sistema. Gli altri potrebbero scomparire ed essere sostituiti da una dinamica caotica.

Il Teorema KAM

Il teorema KAM afferma che i tori invarianti corrispondenti a frequenze di rapporto Diofanteo sopravvivono a piccole perturbazioni del sistema. Gli altri potrebbero scomparire ed essere sostituiti da una dinamica caotica.



Per saperne di più

Per saperne di più

- D. Ruelle, "Caso e caos", Bollati Boringhieri 1992.
- J. Bricmont, *Science in chaos or chaos in science?*, in "The flight from science and reason", *Ann. N.Y. Acaemy of Science* **79** (1996), pag. 131. Reperibile all'indirizzo web `http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9603009`.
- G. Gallavotti, *Meccanica statistica*, voce per la *Enciclopedia delle scienze fisiche*, edita dalla Enciclopedia Italiana, vol. III, pag. 723-740, 1993.
- J. Lebowitz, *Boltzmann entropy and time's arrow*, Physics Today (1993), pag. 32-38. Reperibile all'indirizzo web `http://www.math.rutgers.edu/lebowitz∼/`.
- A. Abbondandolo, *La freccia del tempo*, XlaTangente 11 (2008), pag. 17-21. Versione estesa reperibile all'indirizzo web `http://www.xlatangente.it`.