Giochi e dilemmi

Parte II – Giochi ad informazione incompleta

Alberto Abbondandolo

Elena Visibelli   Pietro Battiston

Università di Pisa

Stage di orientamento in Matematica 2008

Esempi

- Quasi tutti i giochi di carte.

Esempi

- Quasi tutti i giochi di carte.
- Battaglia navale.

Esempi

- Quasi tutti i giochi di carte.
- Battaglia navale.
- Stratego.

Esempi

- Quasi tutti i giochi di carte.
- Battaglia navale.
- Stratego.
- Risiko.

Esempi

- Quasi tutti i giochi di carte.
- Battaglia navale.
- Stratego.
- Risiko.
- Monopoli.

Esempi

- Quasi tutti i giochi di carte.
- Battaglia navale.
- Stratego.
- Risiko.
- Monopoli.
- Modelli economici.

Esempi

- Quasi tutti i giochi di carte.
- Battaglia navale.
- Stratego.
- Risiko.
- Monopoli.
- Modelli economici.
- Strategia militare.

Un gioco semplice

- Alice grida “*2*” oppure “*3*” e contemporaneamente Bruno grida “*1*” oppure “*4*”.

Un gioco semplice

- Alice grida "*2*" oppure "*3*" e contemporaneamente Bruno grida "*1*" oppure "*4*".
- Alice vince se la somma dei due numeri è pari, Bruno vince se la somma dei due numeri è dispari.

Un gioco semplice

- Alice grida "*2*" oppure "*3*" e contemporaneamente Bruno grida "*1*" oppure "*4*".
- Alice vince se la somma dei due numeri è pari, Bruno vince se la somma dei due numeri è dispari.
- Il perdente paga all'altro tanti Euro quanta è la somma dei due numeri.

Un gioco semplice

- Alice grida "*2*" oppure "*3*" e contemporaneamente Bruno grida "*1*" oppure "*4*".
- Alice vince se la somma dei due numeri è pari, Bruno vince se la somma dei due numeri è dispari.
- Il perdente paga all'altro tanti Euro quanta è la somma dei due numeri.
- Chi è avvantaggiato? Come conviene giocare?

Tabella del gioco

- Segnamo sulle righe le scelte di Alice, sulle colonne le scelte di Bruno.
	1	*4*
2		
3		

Tabella del gioco

- Segnamo sulle righe le scelte di Alice, sulle colonne le scelte di Bruno.
- In ciascun incrocio segnamo il guadagno di Alice (se è Bruno a guadagnare segneremo un numero negativo).

	1	*4*
2		
3		

	1	*4*
2	*-3*	*6*
3	*4*	*-7*

Alice dice 2 quattro volte su sette

-

	1	*4*
2	*-3*	*6*
3	*4*	*-7*

Alice dice 2 quattro volte su sette

-

	1	4
2	-3	6
3	4	-7

- Se Bruno dice 1: Alice perde 3 i 4/7 delle volte e vince 4 i 3/7 delle volte.

Alice dice 2 quattro volte su sette

	1	*4*
2	*-3*	*6*
3	*4*	*-7*
- Se Bruno dice *1*: Alice perde *3* i *4/7* delle volte e vince *4* i *3/7* delle volte.
- In media il suo bilancio è:
  $-3\ (4/7) + 4\ (3/7) = 0$.

Alice dice 2 quattro volte su sette

	1	*4*
2	*-3*	*6*
3	*4*	*-7*
- Se Bruno dice *1*: Alice perde *3* i *4/7* delle volte e vince *4* i *3/7* delle volte.
- In media il suo bilancio è:
  $-3\ (4/7) + 4\ (3/7) = 0$.
- Se Bruno dice *4*: Alice vince *6* i *4/7* delle volte e perde *7* i *3/7* delle volte. Bilancio medio:
  $6\ (4/7) - 7\ (3/7) = 3/7$.

Alice può fare meglio?

- Supponiamo che Alice dica *2* con probabilità p.

Alice può fare meglio?

- Supponiamo che Alice dica *2* con probabilità p.
- Se Bruno dice 1, il bilancio di Alice è:
  $-3\,p + 4\,(1-p) = 4 - 7p$.

Alice può fare meglio?

- Supponiamo che Alice dica *2* con probabilità *p*.
- Se Bruno dice *1*, il bilancio di Alice è:
  $-3\,p + 4\,(1-p) = 4 - 7p$.
- Se Bruno dice *4*, il bilancio di Alice è:
  $6\,p - 7\,(1-p) = 13\,p - 7$.

Alice può fare meglio?

- Supponiamo che Alice dica *2* con probabilità p.
- Se Bruno dice *1*, il bilancio di Alice è:
  $-3\,p + 4\,(1-p) = 4 - 7p$.
- Se Bruno dice *4*, il bilancio di Alice è:
  $6\,p - 7\,(1-p) = 13\,p - 7$.
- Supponiamo che Alice scelga p in modo che i due bilanci si equivalgano: $4 - 7\,p = 13\,p - 7$,

Alice può fare meglio?

- Supponiamo che Alice dica *2* con probabilità p.
- Se Bruno dice *1*, il bilancio di Alice è:
  $-3\,p + 4\,(1-p) = 4 - 7p$.
- Se Bruno dice *4*, il bilancio di Alice è:
  $6\,p - 7\,(1-p) = 13\,p - 7$.
- Supponiamo che Alice scelga p in modo che i due bilanci si equivalgano: $4 - 7\,p = 13\,p - 7$,
- che risolta, produce $p = 11/20$. Con tale scelta il bilancio di Alice è: $4 - 7\,p = 13\,p - 7 = 3/20$!

Alice può fare ancora meglio?

Alice può fare ancora meglio?

- No ! Facendo conti simili ma dalla parte di Bruno troviamo che:

Alice può fare ancora meglio?

- No ! Facendo conti simili ma dalla parte di Bruno troviamo che:
- Se Bruno sceglie *1* con probabilità $q = 13/20$, qualunque cosa faccia Alice questa otterrà un guadagno medio di $3/20$.

Alice può fare ancora meglio?

- No ! Facendo conti simili ma dalla parte di Bruno troviamo che:
- Se Bruno sceglie *1* con probabilità $q = 13/20$, qualunque cosa faccia Alice questa otterrà un guadagno medio di *3/20*.
- La quantità *3/20* si dice valore del gioco.

Alice può fare ancora meglio?

- No ! Facendo conti simili ma dalla parte di Bruno troviamo che:
- Se Bruno sceglie *1* con probabilità $q = 13/20$, qualunque cosa faccia Alice questa otterrà un guadagno medio di *3/20*.
- La quantità *3/20* si dice valore del gioco.
- La strategia di Alice “dire *2* gli *11/20* delle volte” è ottimale per Alice.

Alice può fare ancora meglio?

- No ! Facendo conti simili ma dalla parte di Bruno troviamo che:
- Se Bruno sceglie *1* con probabilità $q = 13/20$, qualunque cosa faccia Alice questa otterrà un guadagno medio di *3/20*.
- La quantità *3/20* si dice valore del gioco.
- La strategia di Alice “dire *2* gli *11/20* delle volte” è ottimale per Alice.
- La strategia di Bruno “dire *1* i *13/20* delle volte” è ottimale per Bruno.

Il Teorema di Von Neumann

- Nel 1928 il matematico ungherese John Von Neumann ha dimostrato che questi fatti hanno validità del tutto generale.

Il Teorema di Von Neumann

- Nel 1928 il matematico ungherese John Von Neumann ha dimostrato che questi fatti hanno validità del tutto generale.
- Consideriamo un gioco in cui Alice ha a disposizione m scelte e Bruno ne ha n. Ad ogni coppia di scelte è associato un numero, che rappresenta il beneficio di Alice. Il beneficio di Bruno è lo stesso numero cambiato di segno.

Il Teorema di Von Neumann

- Negli anni trenta il matematico ungherese John Von Neumann ha dimostrato che questi fatti hanno validità del tutto generale.
- Consideriamo un gioco in cui Alice ha a disposizione m scelte e Bruno ne ha n. Ad ogni coppia di scelte è associato un numero, che rappresenta il beneficio di Alice. Il beneficio di Bruno è lo stesso numero cambiato di segno.
- Il teorema di Von Neumann asserisce che entrambi i giocatori hanno strategie probabilistiche ottimali.

Il dilemma del prigioniero

- Due rapinatori, Alice e Bruno, vengono catturati mentre scappano in direzione opposta e ad alta velocità dalla scena di una rapina.

Il dilemma del prigioniero

- Due rapinatori, Alice e Bruno, vengono catturati mentre scappano in direzione opposta e ad alta velocità dalla scena di una rapina.
- La refurtiva non viene recuperata e, non avendo prove per incriminarli, il commissario li separa e chiede ad entrambi di confessare ed accusare il complice, alle seguenti condizioni.

Il dilemma del prigioniero

- Se uno confessa e l'altro no, chi ha parlato sarà graziato, l'altro condannato a *10* anni di prigione.

Il dilemma del prigioniero

- Se uno confessa e l'altro no, chi ha parlato sarà graziato, l'altro condannato a *10* anni di prigione.
- Se entrambi confessano, saranno condannati a *5* anni di prigione.

Il dilemma del prigioniero

- Se uno confessa e l'altro no, chi ha parlato sarà graziato, l'altro condannato a *10* anni di prigione.
- Se entrambi confessano, saranno condannati a *5* anni di prigione.
- Se nessuno dei due confessa, verranno incriminati per l'alta velocità e condannati ad *1* anno.

Il dilemma del prigioniero

- Se uno confessa e l'altro no, chi ha parlato sarà graziato, l'altro condannato a *10* anni di prigione.
- Se entrambi confessano, saranno condannati a *5* anni di prigione.
- Se nessuno dei due confessa, verranno incriminati per l'alta velocità e condannati ad *1* anno.
-

	C	*N*
C	*-5,-5*	*0,-10*
N	*-10,0*	*-1,-1*

La battaglia dei sessi

- Alice e suo marito Bruno desiderano passare la serata assieme, ma sono usciti senza mettersi d'accordo su dove andare e non possono comunicare.

La battaglia dei sessi

- Alice e suo marito Bruno desiderano passare la serata assieme, ma sono usciti senza mettersi d'accordo su dove andare e non possono comunicare.
- Alice vorrebbe andare a teatro, Bruno alla partita di hockey. Per entrambi però la cosa più importante è passare la serata assieme.

La battaglia dei sessi

- Alice e suo marito Bruno desiderano passare la serata assieme, ma sono usciti senza mettersi d'accordo su dove andare e non possono comunicare.
- Alice vorrebbe andare a teatro, Bruno alla partita di hockey. Per entrambi però la cosa più importante è passare la serata assieme.
-

	T	H
T	4,3	2,2
H	1,1	3,4

La corsa del pollo

- Alice e Bruno si sfidano a guidare le loro due automobili verso un precipizio, saltando all'ultimo momento.

La corsa del pollo

- Alice e Bruno si sfidano a guidare le loro due automobili verso un precipizio, saltando all'ultimo momento.
- Chi salta per primo perde, chi salta per secondo vince. Se saltano entrambi la partita è patta, se non saltano muoiono. Saltare od aspettare?

La corsa del pollo

- Alice e Bruno si sfidano a guidare le loro due automobili verso un precipizio, saltando all'ultimo momento.
- Chi salta per primo perde, chi salta per secondo vince. Se saltano entrambi la partita è patta, se non saltano muoiono. Saltare od aspettare?
-

	S	*A*
S	*3,3*	*2,4*
A	*4,2*	*1,1*

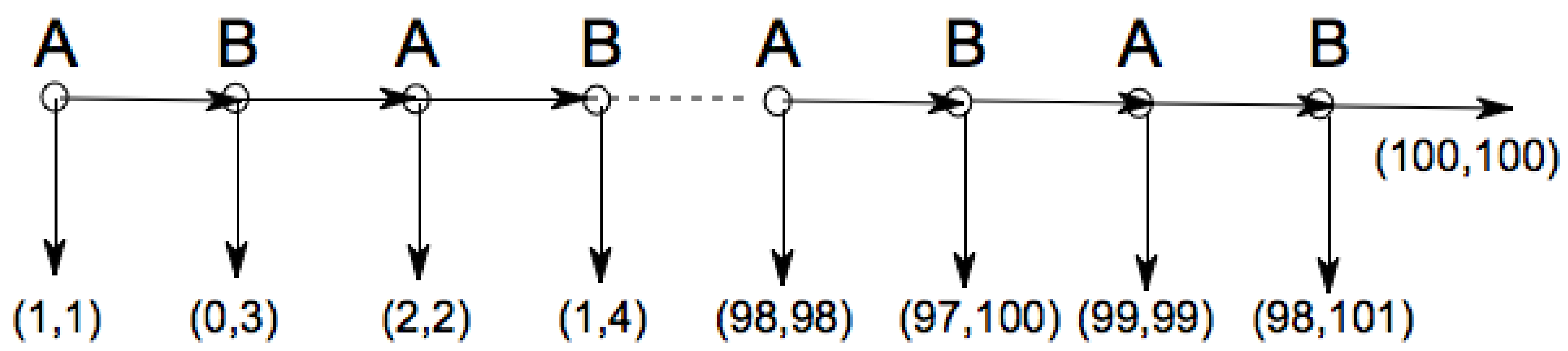
Il Teorema di Nash

- Negli anni cinquanta il matematico americano John Nash ha studiato questo tipo di problemi: i giochi non-cooperativi a somma non zero.

Il Teorema di Nash

- Negli anni cinquanta il matematico americano John Nash ha studiato questo tipo di problemi: i giochi non-cooperativi a somma non zero.
- Per i suoi risultati ha ricevuto il premio Nobel per l'Economia nel 1994, insieme agli economisti Harsány e Selten.

Il gioco del centopiedi



Per saperne di più

- John Nash, “Giochi non cooperativi”, Zanichelli 2004.
- László Mérő, “Calcoli morali”, Edizioni Dedalo 2000.
- Thomas S. Ferguson, “Game theory”, http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html