Il paradosso EPR e la disuguaglianza di Bell

Alberto Abbondandolo

Conosciamo tutti l'importanza della matematica nella fisica: le teorie fisiche vengono espresse da modelli matematici - per esempio equazioni differenziali - che possono essere analizzati mediante tecniche matematiche più o meno sofisticate, fornendo risultati qualitativi e quantitativi da confrontarsi con quanto emerge dagli esperimenti. Quindi per un fisico la matematica è soprattutto un linguaggio - per formulare le proprie teorie - ed uno strumento - per dedurne delle conseguenze - ma in generale non una fonte di ispirazione.

Vi è però almeno un caso in cui la matematica si è rivelata fondamentale per ideare un esperimento. Si trattava di dare una risposta ad una questione che vedeva contrapposte le idee di Albert Einstein e Max Born. Il problema per la verità sembrava di natura più metafisica che fisica, e come tale impossibile da dirimere sperimentalmente. Invece, una brillante idea puramente matematica di John Bell ha permesso di riportare la questione su un piano fisico ed ha tenuto impegnate diverse generazioni di fisici sperimentali. In questo articolo vogliamo esporre l'idea di Bell, che come vedremo richiede solamente concetti elementari di probabilità e trigonometria. Prima però dobbiamo spiegare quale fosse la materia del contendere.

La meccanica quantistica. La nostra storia ha inizio nel 1900. La fisica dell'Ottocento, che pure aveva avuto un enorme successo nello spiegare numerosissimi fenomeni, comincia a mostrare i suoi limiti. Proprio nel primo anno del nuovo secolo Max Planck formula l'ipotesi, da lui stesso definita "disperata", che la luce sia composta da particelle indivisibili, i *fotoni*. Cinque anni più tardi Albert Einstein usa l'ipotesi di Planck per spiegare l'effetto fotoelettrico. Si è ormai innescata una rivoluzione scientifica che nel giro di un ventennio porterà alla nascita della *meccanica quantistica*, un'opera corale che vede tra i suoi protagonisti i fisici Werner Heisenberg, Paul Dirac, Luis de Broglie, Erwin Schrödinger, Niels Bohr e Max Born.

Seguiamo ora il consiglio di Richard Feynman, secondo il quale niente spiega la meccanica quantistica meglio dell'*esperimento della doppia fenditura*. Si tratta di un esperimento realizzato per la prima volta nel 1909 da sir Geoffrey Ingram Taylor. Una sorgente luminosa a bassissima intensità emette un fotone alla volta. Di fronte alla sorgente c'è uno schermo con due piccole fenditure. Lo schermo blocca gran parte dei fotoni, ma le due

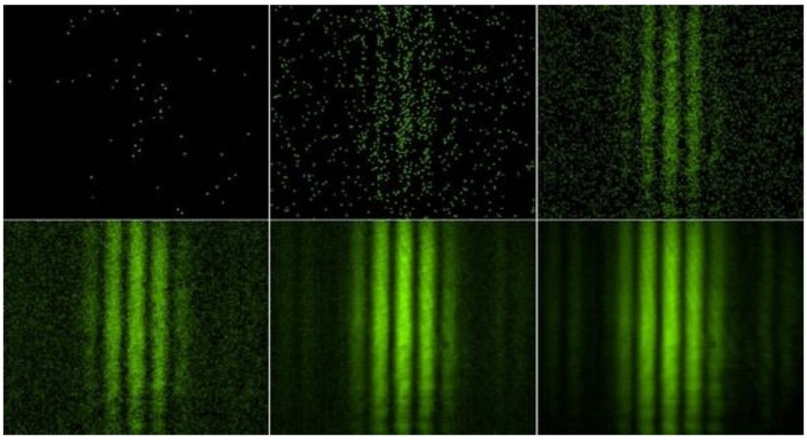

Figura 1: L'esperimento della doppia fenditura. La figura è ricavata dal sito web della Swiss Physical Society, vedi [7].

fenditure permettono ad alcuni di passare e di andare ad impressionare una lastra fotografica così sensibile da rivelare l'arrivo di un singolo fotone[1].

Teniamo lo sguardo fisso sulla lastra: uno alla volta, cominciano ad apparire dei puntini luminosi. Ci aspetteremmo di vedere i puntini formare due macchie più o meno estese in corrispondenza delle due fenditure. Invece, quello che vediamo formarsi sotto i nostri occhi è l'immagine raffigurata in Figura 1: si tratta di tipiche *frange di interferenza*[2].

Un'immagine di questo tipo sarebbe spiegabilissima se l'intensità della luce fosse maggiore. In questo caso, infatti, la luce si comporterebbe come un'onda e le frange sarebbero causate dall'interferenza fra le due onde create dalle due fenditure. Più precisamente, al passaggio dallo schermo l'onda luminosa viene in parte bloccata e passano solamente due onde concentrate in corrispondenza delle due fenditure. Queste due onde si propagano, formando un alternarsi di picchi e valli, ed interferiscono tra loro: dove si incontrano due picchi oppure due valli l'onda risultante è amplificata (interferenza costruttiva), dove si incontrano un picco ed una valle l'onda si cancella (interferenza distruttiva). Le bande luminose sulla lastra corrispondono alle zone di interferenza costruttiva, le bande scure all'interferenza distruttiva.

Ma nel nostro esperimento l'intensità della luce è talmente bassa che i fotoni arrivano uno alla volta, come testimoniano i puntini luminosi che appaiono via via sulla lastra. Le frange di interferenza si manifestano solamente come fatto statistico, dopo che sulla lastra sono arrivati un gran

[1]In realtà per rivelare l'arrivo di singoli fotoni sono necessarie apparecchiature più complicate di una semplice lastra fotografica. Qui però vogliamo evitare di addentrarci in questioni tecniche e ci permetteremo un certo grado di imprecisione nel descrivere gli esperimenti. Il lettore interessato a questi aspetti può consultare [2] e [7].

[2]Un video che mostra questo esperimento è disponibile sulla pagina web che riporta l'articolo [7], cliccando sulla figura a fine testo.

numero di fotoni. La meccanica classica non è in grado di spiegare questo esperimento. Se il singolo fotone è un onda, perchè sulla lastra compare un puntino alla volta? E se è una particella, che come tale può passare da una sola delle due fenditure, perchè vediamo frange di interferenza invece che due macchie in corrispondenza delle due fenditure? Al congresso di Solvay del 1926 viene ufficializzata la spiegazione della meccanica quantistica: *il fotone è contemporaneamente un'onda e una particella.* Prima di raggiungere la lastra fotografica è un'onda che passa da entrambe le fenditure, generando due onde che interferiscono tra loro, esattamente come abbiamo spiegato. Quando raggiunge la lastra l'onda *collassa*, ossia appare una particella in un punto a caso, ma con probabilità maggiore nelle zone in cui l'ampiezza dell'onda è grande, minore dove questa ampiezza è piccola. È questa proporzionalità tra l'ampiezza dell'onda e la probabilità di trovare la particella in una data posizione che spiega il formarsi delle frange di interferenza dopo che sono arrivati numerosi fotoni. In altre parole, dobbiamo pensare al fotone come ad una particella, poiché la lastra ce lo rivela come tale, ma dobbiamo ammettere che prima di impressionare la lastra questa particella non abbia una posizione determinata e passi da entrambe le fenditure. Naturalmente a questa spiegazione qualitativa si aggiungono precise equazioni matematiche, che chiariscono da un lato come si propaghi l'onda, dall'altro come avvenga il suo collasso. Il successo della nuova teoria è immediato e subito si riescono a spiegare, qualitativamente e quantitativamente, fenomeni di fronte ai quali la meccanica classica si era arresa.

Le obiezioni di Einstein. La neonata meccanica quantistica non piaceva ad Albert Einstein, che pure ne era stato un precursore con la sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico del 1905. Più precisamente, Einstein ne riconosceva i meriti e gli indubbi successi, ma non apprezzava né l'uso della probabilità in una teoria che voleva essere fondamentale né, soprattutto, l'esigenza, necessaria in meccanica quantistica, di dover dividere la realtà fisica in un mondo microscopico, a cui sono associate delle onde, ed un mondo macroscopico, che segue le leggi della meccanica classica e che interagendo con le onde del mondo microscopico ne provoca il collasso. Ecco cosa scriveva in una lettera del 1926 a Max Born, uno dei fondatori della meccanica quantistica ed interlocutore principale di Einstein per vari decenni:

"La meccanica quantistica è degna di ogni rispetto, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la soluzione giusta. È una teoria che ci dice molte cose, ma non ci fa penetrare più a fondo il segreto del gran Vecchio. In ogni caso, sono convinto che questi non gioca a dadi con il mondo."

Einstein pensava alla meccanica quantistica, come era stata formulata dai suoi colleghi, come ad una teoria corretta ma deducibile da qualcosa di più fondamentale, un po' come la termodinamica è deducibile, in linea di principio, dalla meccanica di un gran numero di particelle. Per il più grande scienziato del ventesimo secolo la meccanica quantistica è pertanto *incompleta*, nel senso che non fornisce una descrizione completa di uno stato fisico, un po' come la pressione, il volume e la temperatura non descrivono completamente un gas, una descrizione più accurata del quale richiederebbe la conoscenza di posizione e velocità di ciascuna delle sue molecole.

Nel 1935 Einstein scrive con i colleghi Boris Podolsky e Nathan Rosen un articolo nel quale i tre fisici sostengono di aver *dimostrato* che la meccanica quantistica è incompleta. Per seguire il loro argomento, che presentiamo in una versione leggermente modificata, abbiamo bisogno di ricordare alcuni fatti sulla polarizzazione della luce.

Un raggio luminoso può essere *polarizzato* in una qualsiasi direzione perpendicolare al suo cammino. Lo strumento che mette in evidenza questa proprietà della luce è il *polarizzatore*, ben noto a chi si occupa di fotografia. Si tratta di un dischetto colorato su cui è segnata una direzione. Se un raggio di luce polarizzato di un certo angolo θ incontra un polarizzatore la cui direzione coincide con θ, la luce passa[3]. Se il polarizzatore viene orientato perpendicolarmente a θ, la luce viene fermata. Se l'angolo è intermedio, passa soltanto una frazione della luce. A quel punto la luce passata è polarizzata lungo la direzione del polarizzatore, come si può verificare intercettando il raggio con un secondo polarizzatore.

Secondo la meccanica quantistica anche un singolo fotone possiede una polarizzazione. Questa può avere una direzione precisa oppure può essere indeterminata, esattamente come la posizione. Se il fotone è polarizzato, esso passa con certezza da un polarizzatore con la stessa orientazione, non passa da uno perpendicolare, passa con probabilità[4] $\cos^2\theta$ da un polarizzatore inclinato di un angolo θ rispetto alla propria polarizzazione. Se la polarizzazione del fotone è indeterminata, esso passa da un polarizzatore qualsiasi con probabilità 1/2. Se passa, assume la polarizzazione del polarizzatore.

Veniamo all'esperimento concettuale immaginato da Einstein, Podolsky e Rosen. Una delle conseguenze della meccanica quantistica è che possiamo produrre una sorgente che emette *coppie* di fotoni: i due fotoni di una stessa coppia - chiamiamoli A e B - hanno polarizzazione *indeterminata* ma *identica* e partono in due direzioni opposte. Possiamo verificare il fatto che la polarizzazione sia identica facendo passare i due fotoni per due polarizzatori orientati allo stesso modo e rivelando il loro eventuale passaggio con lastre fotografiche: vedremo un puntino su ciascuna lastra (con probabilità 1/2), oppure nessun puntino (ancora con probabilità 1/2), ma mai un puntino su una lastra e niente sull'altra. Supponiamo ora che i due polarizzatori

[3] Di un polarizzatore è rilevante la direzione, non il verso: gli angoli θ e $\theta+\pi$ individuano la stessa direzione. Gli angoli sono espressi in radianti.

[4] Esprimiamo le probabilità come numeri compresi tra 0 e 1: un certo evento ha probabilità p se su N tentativi avviene circa pN volte. Quindi probabilità 0 indica un evento impossibile, probabilità 1 un evento certo, probabilità 1/2 un evento che avviene nel 50% dei casi.

siano molto lontani tra loro e che il primo (quello che intercetta il fotone A) sia leggermente più vicino alla sorgente del secondo. Secondo la meccanica quantistica, dopo l'emissione i due fotoni hanno polarizzazione indeterminata. Il fotone A è il primo ad incontrare il polarizzatore: in quell'istante la sua indeterminazione collassa, il fotone A assume una polarizzazione ben definita, che coincide con quella del polarizzatore nel caso in cui A passi, con la polarizzazione perpendicolare altrimenti. Il fotone B incontrerà il suo polarizzatore solo un attimo dopo e si comporterà come il fotone A. Ne deduciamo che quando la polarizzazione di A assume un valore definito, il fotone B assume istantaneamente la stessa polarizzazione. Però uno dei postulati della teoria della relatività, elaborata dallo stesso Einstein, ci dice che nessun segnale può propagarsi con velocità maggiore della velocità della luce: se la distanza tra i due fotoni è molto grande, un segnale che parte da A non farà in tempo a raggiungere B prima che questi abbia incontrato il suo polarizzatore. La conclusione di Einstein, Podolsky e Rosen è che i fotoni devono possedere una loro polarizzazione già al momento dell'emissione ed il fatto che a questa la meccanica quantistica non dia alcun valore ne dimostra l'incompletezza.

La disuguaglianza di Bell. All'argomento di Einstein, Podolsky e Rosen, presto noto come "paradosso EPR" dalle iniziali dei suoi ideatori, i fondatori della meccanica quantistica risponderanno che la meccanica quantistica è completa, ma che il paradosso EPR mostra che il postulato della velocità massima dei segnali non ha validità generale. La discussione tra Einstein e Born andrà avanti per anni, senza che il primo riuscisse ad elaborare una teoria che "completasse" la meccanica quantistica, o che il secondo trovasse un argomento convincente per dimostrare che fosse necessario abbandonare il postulato della velocità massima dei segnali.

L'idea per dirimere la questione arrivò solo nel 1964, grazie al fisico irlandese John Bell, quando purtroppo Einstein era già morto da nove anni. L'argomento di Bell, di natura puramente matematica, è sorprendentemente semplice ed elegante e possiamo riassumerlo in queste pagine.

Bell parte dall'esperimento EPR, ma immagina che i due polarizzatori possano essere orientati con angoli diversi tra loro. Fissiamo una volta per tutte un riferimento cartesiano rispetto al quale riferire gli angoli che determinano la direzione dei polarizzatori. Se il primo polarizzatore ha direzione α e il secondo ha direzione β, possiamo determinare sperimentalmente la *correlazione* $\nu(\alpha, \beta)$: si fanno N esperimenti con i polarizzatori orientati come detto, dove N è un numero molto grande; tutte le volte che i fotoni hanno lo stesso comportamento (cioè passano entrambi o non passano entrambi) si somma $+1$; tutte le volte che i fotoni hanno comportamento diverso si somma -1; infine, si divide per N. Il numero ottenuto è $\nu(\alpha, \beta)$. Ad esempio, da quel che sappiamo sul comportamento dei fotoni polarizzati possiamo già prevedere che $\nu(\alpha, \alpha) = 1$ mentre $\nu(\alpha, \alpha + \pi/2) = -1$.

Vediamo quale valore assegni la meccanica quantistica alla correlazione $\nu(\alpha, \beta)$. I due fotoni hanno polarizzazione indeterminata, ma distribuita in modo equiprobabile in ogni direzione. Se supponiamo che il fotone A raggiunga il suo polarizzatore un istante prima di B, otteniamo che con probabilità 1/2 la sua polarizzazione assume la direzione di α ed A passa, mentre con uguale probabilità la sua polarizzazione assume direzione ortogonale ad α ed A non passa. Il fotone B assume istantaneamente la stessa polarizzazione di A. Nella prima metà dei casi assume quindi polarizzazione α e passa con probabilità $\cos^2(\beta - \alpha)$. Perciò delle circa $N/2$ emissioni il cui fotone A passa, circa $(N/2)\cos^2(\beta - \alpha)$ delle volte passa anche B e dobbiamo sommare 1, mentre nei rimanenti $(N/2)(1 - \cos^2(\beta - \alpha))$ casi B non passa e dobbiamo sottrarre 1. Il contributo a $\nu(\alpha, \beta)$ di queste $N/2$ emissioni è dunque:

$$(N/2)\cos^2(\beta - \alpha) - (N/2)\big(1 - \cos^2(\beta - \alpha)\big),$$

valore che, usando note formule di trigonometria, può essere riscritto come

$$(N/2)\cos 2(\beta - \alpha).$$

Un calcolo simile (o un argomento di simmetria), mostra che il contributo dell'altra metà delle emissioni (quelle in cui A non passa) è lo stesso, quindi il valore di $\nu(\alpha, \beta)$ previsto dalla meccanica quantistica si ottiene moltiplicando per due il valore sopra e dividendo poi per N, con risultato finale

$$\nu_{\mathrm{MQ}}(\alpha, \beta) = \cos 2(\beta - \alpha).$$

Veniamo all'esperimento immaginato da Bell. Fissiamo tre angoli, $\alpha = 0$, $\beta = \pi/6$, $\gamma = \pi/3$, e consideriamo tre esperimenti diversi, che chiamiamo (α, β), (β, γ), e (α, γ): il primo angolo determina l'orientazione del primo polarizzatore, quello che intercetta il fotone A, il secondo angolo l'orientazione del secondo polarizzatore, raggiunto dal fotone B. Effettuiamo $3N$ esperimenti, scelti a caso ed in modo equiprobabile tra i tre esperimenti (α, β), (β, γ), e (α, γ). Ci aspettiamo che ciascun tipo di esperimento venga eseguito circa N volte. Mettiamo assieme i risultati dei circa N esperimenti di tipo (α, β) ed usiamoli per calcolare la correlazione $\nu(\alpha, \beta)$. Considerando gli altri due sottoinsiemi di esperimenti, troviamo $\nu(\beta, \gamma)$ e $\nu(\alpha, \gamma)$. Riassumiamo i risultati ottenuti in un unica quantità B, definita sommando i primi due numeri e sottraendo il terzo, ossia

$$B = \nu(\alpha, \beta) + \nu(\beta, \gamma) - \nu(\alpha, \gamma).$$

Usando la formula per ν_{MQ} che abbiamo ricavato sopra, concludiamo che il valore che la meccanica quantistica attribuisce a questa quantità è

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{MQ}} &= \nu(0, \pi/6) + \nu(\pi/6, \pi/3) - \nu(0, \pi/3) \\ &= \cos \pi/3 + \cos \pi/3 - \cos 2\pi/3 = 3/2. \end{aligned}$$

Vogliamo confrontare questo valore con quello previsto da una qualunque *teoria locale*, ossia una ipotetica teoria come quella che Einstein cercava di elaborare, dove valga il postulato della velocità massima dei segnali. La parola "locale" si riferisce al fatto che quel che avviene in un punto P dell'universo non deve avere alcun effetto istantaneo in un altro punto Q, ma l'effetto su Q può avvenire solamente dopo un intervallo di tempo sufficiente alla luce per viaggiare da P a Q.

In una teoria locale ciascuna coppia di fotoni deve possedere istruzioni su come comportarsi di fronte ad un polarizzatore, comunque orientato. Infatti i due fotoni di una stessa coppia hanno lo stesso comportamento di fronte a due polarizzatori orientati dello stesso angolo, comunque lontani tra loro: non potendo conoscere l'orientazione dei polarizzatori al momento dell'emissione e non potendo comunicare tra loro abbastanza rapidamente quando li incontrano, i due fotoni sono costretti ad aver concordato fra loro il comportamento da tenere di fronte ad una qualunque orientazione del polarizzatore. Etichettiamo ciascuna coppia di fotoni a seconda di come si comporterà di fronte ai tre angoli α, β, γ: questa etichetta è una stringa di tre simboli, ciascuno dei quali è un $+$ oppure un $-$. Il primo simbolo indica il comportamento della coppia di fotoni di fronte ad un polarizzatore orientato di un angolo α: è un $+$ se la coppia passa, un $-$ se non passa. Il secondo simbolo descrive il comportamento di fronte ad un polarizzatore orientato di un angolo β, mentre il terzo riguarda l'angolo γ, con le stesse regole. Ad esempio, i due fotoni di una coppia di tipo $+-+$ passeranno da due polarizzatori orientati di un angolo α oppure γ, mentre non passeranno se l'angolo è β. Questa classificazione suddivide le coppie di fotoni in $2^3 = 8$ tipi.

Nel nostro esperimento avvengono $3N$ emissioni di coppie di fotoni. Indichiamo con N_{+++} il numero di quelle emissioni in cui viene prodotta una coppia di tipo $+++$, ed usiamo una notazione analoga per i numeri delle emissioni degli altri sette tipi di coppie. Otteniamo così otto numeri $N_{+++}, \ldots, N_{---}$, che hanno somma $3N$. Ovviamente, ignorando i dettagli della teoria locale che stiamo considerando, non sapiamo nient'altro di questi otto numeri, alcuni dei quali potrebbero anche essere zero, nel caso in cui la natura vieti l'emissione di coppie di determinati tipi.

Fissiamo l'attenzione sull'esperimento (α, β). Dato che questo esperimento viene compiuto una volta su tre in maniera casuale, è ragionevole aspettarsi che delle N_{+++} coppie di fotoni di tipo $+++$ circa $N_{+++}/3$ siano sottoposte a questo esperimento. Analogamente, circa$N_{++-}/3$ coppie di fotoni di tipo $++-$ si trovano di fronte all'esperimento (α, β) e così via per gli altri sei tipi di coppie. Di tutte le circa N volte in cui viene effettuato l'esperimento (α, β), otterremo un risultato concorde (entrambi i fotoni passano o entrambi non passano) circa

$$\frac{1}{3}(N_{+++} + N_{++-} + N_{--+} + N_{---})$$

volte, mentre otterremo un risultato discorde (un fotone passa, l'altro no) circa

$$\frac{1}{3}(N_{+-+} + N_{+--} + N_{-++} + N_{-+-})$$

volte. Ricordando come è stato definito $\nu(\alpha, \beta)$, troviamo

$$\begin{aligned}\nu(\alpha, \beta) = \frac{1}{3N}(&N_{+++} + N_{++-} + N_{--+} + N_{---} \\ &-N_{+-+} - N_{+--} - N_{-++} - N_{-+-}).\end{aligned}$$

Analogamente, il lettore verificherà facilmente che

$$\begin{aligned}\nu(\beta, \gamma) = \frac{1}{3N}(&N_{+++} + N_{-++} + N_{+--} + N_{---} \\ &-N_{++-} - N_{-+-} - N_{+-+} - N_{--+}),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nu(\alpha, \gamma) = \frac{1}{3N}(&N_{+++} + N_{+-+} + N_{-+-} + N_{---} \\ &-N_{++-} - N_{+--} - N_{-++} - N_{--+}).\end{aligned}$$

Sommando i primi due numeri e sottraendo il terzo, deduciamo che la nostra ipotetica teoria locale predice il seguente valore di B:

$$\begin{aligned}B_{\text{Loc}} = \frac{1}{3N}(&N_{+++} + N_{++-} + N_{--+} + N_{---} \\ &+N_{+--} + N_{-++} - 3N_{+-+} - 3N_{-+-}).\end{aligned}$$

Questa formula ci permette di limitare in qualche modo il valore di B_{Loc}? Sì: infatti, ricordando che gli otto numeri $N_{+++}, \ldots, N_{---}$ hanno somma $3N$, possiamo pensare a B_{Loc} come alla media aritmetica di $3N$ numeri, dei quali $N_{+-+} + N_{-+-}$ valgono -3 e gli altri valogono 1. Tale media non potrà quindi superare 1: vale cioè la *disuguaglianza di Bell*

$$B_{\text{Loc}} \leq 1.$$

Abbiamo quindi trovato una quantità che puó essere calcolata sperimentalmente, la quantità B, a cui una qualsiasi teoria locale attribuisce un valore non superiore ad 1, mentre la meccanica quantistica le attribuisce il valore $3/2$, che è maggiore di 1. La conclusione è che nell'esperimento immaginato da Bell la previsione della meccanica quantistica non può essere ottenuta da nessuna teoria locale.

Escogitato un modo di dirimere la situazione sul piano teorico, la parola passa ai fisici sperimentali. Tranne che in un caso, l'esperimento di Holt e Pipkin del 1974, tutti gli esperimenti, a partire da quello di Freedman e Clauser del 1972 fino agli esperimenti effettuati nel 2015 da tre gruppi indipendenti a Delft, Vienna e Boulder, evidenziano una violazione della disuguaglianza di Bell e sono in accordo con la meccanica quantistica. Nei primi esperimenti per la verità questo accordo è opinabile, data la scarsa affidabilità dei rivelatori, ma negli ultimi diventa più evidente. Nell'esperimento di Aspect, Dalibard e Roger del 1982, in particolare, l'orientazione dei polarizzatori viene scelta a caso da un computer dopo che la coppia di fotoni è stata emessa, in modo da escludere la possibilità che la posizione dei polarizzatori possa influenzare quale "tipo" di coppie venga emesso, possibilità che invaliderebbe l'argomento che ci ha portato alla disuguaglianza di Bell: non potremmo più dire che circa 1/3 degli N_{+++} fotoni di tipo $+++$ viene sottoposto all'esperimento (α, β).

La conclusione che dobbiamo trarre, almeno per il momento, è che su questo punto Einstein aveva torto: il mondo è in qualche misura non locale e vi sono segnali che si propagano istantaneamente.

Per saperne di più

[1] A. D. Aczel, *Entanglement*, Raffaello Cortina Editore 2004.

[2] T. L. Dimitrova e A. Weis, The waveparticle duality of light: a demonstration experiment, *Am. J. Phys.* 76 (2008), 137–142.

[3] J. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press 2004.

[4] G. C. Ghirardi, *Un'occhiata alle carte di Dio*, Il Saggiatore 1997.

[5] F. Selleri, *La fisica tra paradossi e realtà*, Progedit 2003.

[6] A. Zeilinger, *Il velo di Einstein*, Einaudi 2006.

[7] A. Weis e T. L. Dimitrova, Wave-particle duality of light for the classroom, *Swiss Physical Society*, disponibile online su `http://www.sps.ch/fr/articles/progresses/wave_particle_duality_of_light_for_the_classroom_13/`.